5 Расположение кривой на плоскости и в пространстве

Тема 17 Строение поверхности вблизи данной точки

Выше было показано, что каждой точке поверхности соответствует индикатриса Дюпена, то есть кривая второго порядка. В связи с этим точки поверхности распределяются на три класса и называются эллиптическими, гиперболическими и параболическими в зависимости от того, к какому из трёх типов принадлежит индикатриса Дюпена в этой точке. Чтобы определить, к какому классу принадлежит данная точка поверхности, надо составить выражение $\sigma = LN - M^2$, которое называется дискриминантом. Если $\sigma > 0$, то точка эллиптическая; если $\sigma > 0$, то точка гиперболическая; если $\sigma = 0$, то точка параболическая;

Так как $K = \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} = \dfrac{\sigma}{EG - F^2}$, $EG - F^2 > 0$, то точка будет эллиптическая, гиперболическая, параболическая, если полная или гауссова кривизна положительна, отрицательна или равна нулю соответственно. Если $L = M = N = 0$, то в этом случае все нормальные сечения имеют кривизну, равную нулю, и понятие индикатрисы здесь теряет смысл. Такие точки называются точками уплощения. Таким образом, точка параболическая, если $\sigma = 0$, но точка не является точкой уплощения.

Если индикатриса Дюпена принадлежит к эллиптическому типу, то в нормальной системе координат её уравнение имеет вид: $k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1$, $\sigma = k_1 k_2 > 0$. Итак, радиусы главных кривизн имеют одинаковые знаки. Выберем направление нормального вектора так, чтобы $k_1 > 0$, $k_2 > 0$. Формула Эйлера запишется в виде: $k_n = k_1 \cos^2\varphi + k_2 \sin^2\varphi$. Эта формула показывает, что в рассматриваемой точке нормальные кривизны всех направлений положительны, то есть все нормальные сечения вогнуты. Итак, вогнутость всех нормальных сечений, проходящих через эллиптическую точку поверхности, направлена в одну сторону. Значит, все точки поверхности, достаточно близкие к эллиптической точке, расположены по одну сторону от касательной плоскости в этой точке.

Обратно, если все точки поверхности, достаточно близкие к данной, лежат по одну сторону от касательной плоскости, а кривизна нормального сечения, в том числе и сечения главных направлений, имеют кривизну одного знака, то есть $\sigma = k_1$, $k_2 > 0$, то данная точка в этом случае эллиптическая. При надлежащем выборе ориентации все сечения в эллиптической точке вогнуты. Поэтому в правой части уравнения индикатрисы мы берём $+1$ и уравнение имеет вид: $\dfrac{x^2}{R_1} + \dfrac{y^2}{R_2} = 1$, где R_1 и R_2 – положительные числа. Итак, в эллиптической точке индикатриса является действительным эллипсом.

Определение. Если в некоторой точке поверхности индикатриса имеет форму окружности, то эта точка называется омбилической.

Это возможно при $k_1 = k_2$. Тогда $k_n = k_1(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = k_1 \Rightarrow$ все нормальные кривизны равны между собой. В общей системе координат омбилическая точка характеризуется равенствами: $\begin{cases} L = \lambda E \\ M = \lambda F \\ N = \lambda G \end{cases}$, так как только при этом условии нормальная кривизна не будет зависеть от направления (любая точка сферической поверхности).

Если точка гиперболическая, то в нормальной системе координат дискриминант её индикатрисы Дюпена $\sigma = k_1 k_2 < 0$, то есть главные нормальные кривизны имеют разные знаки. Выберем направление нормального вектора так, чтобы $R_1 = \rho_1 > 0$ и $R_2 = -\rho_2 < 0$. Формула Эйлера $\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2}$, где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$. Нормальная кривизна в этом случае может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Выясним, когда это возможно: $\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2} > 0$, $tg^2\varphi < \frac{\rho_1}{\rho_2}$, $|tg\varphi| < +\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$. Если $\frac{1}{R_n} = \frac{\cos^2\varphi}{\rho_1} - \frac{\sin^2\varphi}{\rho_2} < 0$, то $|tg\varphi| > +\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$. Проведём в касательной плоскости через точку прикосновения две прямые с угловыми коэффициентами $k_1 = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$, $k_2 = -\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$. Эти прямые совпадают с асимптотами индикатрисы Дюпена (рис. 36).

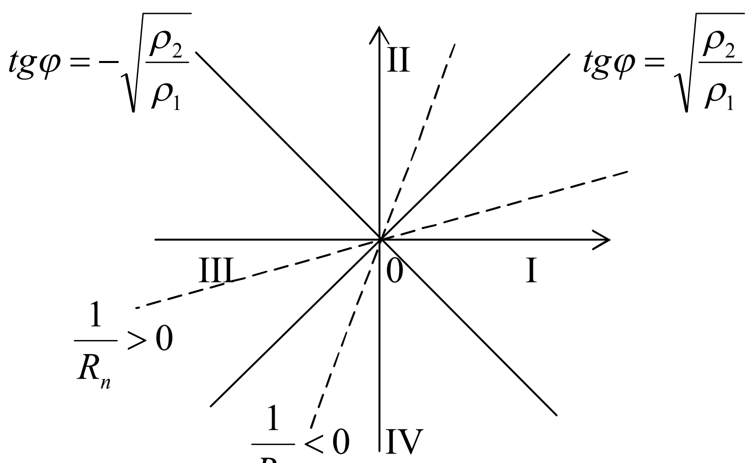


Рисунок 36

Направление прямой, проходящей через точку 0, из I → III будет соответствовать положительным, а из II → IV – отрицательным значениям нормальной кривизны. Таким образом, все нормальные сечения, проведённые по направлениям прямых, заключённых внутри вертикальных углов I и III, будут вогнуты, а II, IV – выпуклы. Таким образом, обходя по поверхности точку 0 по достаточно замкнутому контуру, мы два раза переходим из его верхней части пространства в его нижнюю часть и два раза совершаем обратный переход, если считать при этом, что пространство разделено на эти части касательной плоскостью в данной точке. Учитывая распределение выпуклых и вогнутых нормальных сечений, можно сказать, что вблизи гиперболической точки поверхности имеет седлообразное строение (рис. 37).

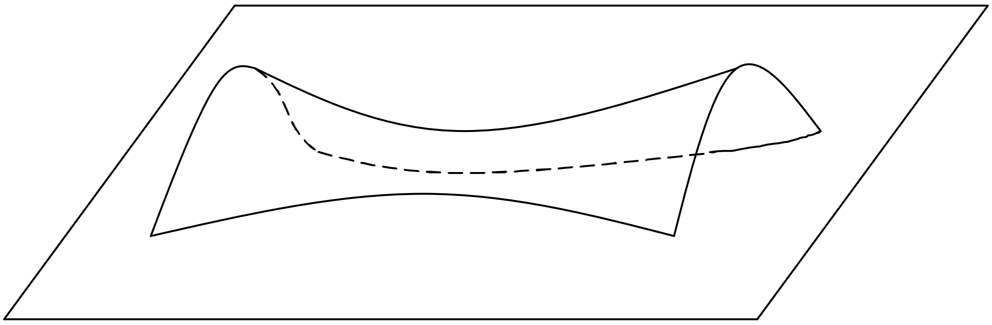


Рисунок 37

Переходя к рассмотрению вида индикатрисы Дюпена в гиперболической точке, обратим внимание на то, что для направления с положительной нормальной кривизной её уравнение имеет вид: $\frac{x^2}{\rho_1}-\frac{y^2}{\rho_2}=1$, а для сечений с отрицательной нормальной кривизной $-\frac{x^2}{\rho_1}-\frac{y^2}{\rho_2}=-1$. Таким образом, индикатриса в гиперболической точке имеет вид двух сопряжённых гипербол, то есть таких гипербол, которые имеют общие асимптоты, причём действительная ось одной совпадает с мнимой осью другой и наоборот.

Для параболической точки $\sigma = LN - M^2 = 0$, $K = k_1k_2 = 0$.

Пусть $k_2 = 0$. Выберем направление нормального вектора поверхности так, чтобы $R_1 = \rho_1 > 0$. В таком случае уравнение индикатрисы в нормальной системе координат принимает вид: $\frac{x^2}{\rho_1}=1$, а формула Эйлера имеет вид: $\frac{1}{R_n}=\frac{\cos^2\varphi}{\rho_1}$. Нормальная кривизна обращается в нуль, когда $\varphi=\frac{\pi}{2}$ и отлична от нуля во всяком другом направлении.

Уравнение $\frac{x^2}{\rho_1} = 1$ показывает, что индикатриса распадается на пару параллельных прямых: $x = \sqrt{\rho_1}$, $x = -\sqrt{\rho_1}$. Радиус-вектор любой точки этих прямых имеет конечное значение. Прямая, которая совпадает с осью OY, параллельна обеим прямым, поэтому соответствующая её направлению нормальная кривизна равна нулю. Направление оси OY является одновременно и главным и асимптотическим направлением индикатрисы. Чтобы выяснить строение поверхности вблизи параболической точки заметим, что все нормальные сечения можно считать вогнутыми, за исключением сечения, касающегося асимптотического направления индикатрисы. Кривизна этого последнего в рассматриваемой точке равна нулю, так что она является точкой спрямления. В простейшем случае это будет точка перегиба, и тогда поверхность вблизи данной точки имеет полуседлообразное строение (рис. 38).

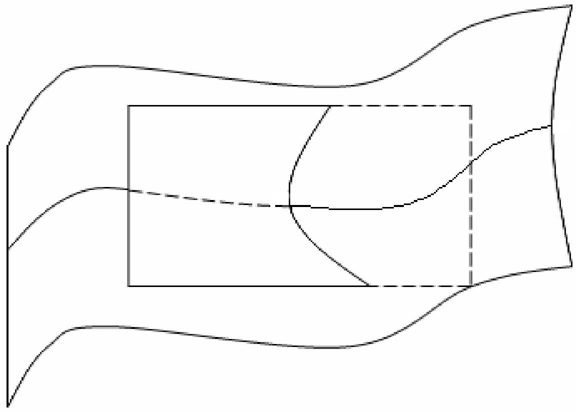


Рисунок 38

Однако и точка спрямления может быть точкой выпуклости или вогнутости. В этих случаях поверхность может иметь различное и достаточно сложное строение.

Тема 18 Взаимное расположение кривой и плоскости

Пусть задана кривая $\vec{r} = \vec{r}(s)$ и плоскость, которая имеет с этой кривой общую точку M_0 с радиус-вектором $\vec{r_0} = \vec{r}(s_0)$.

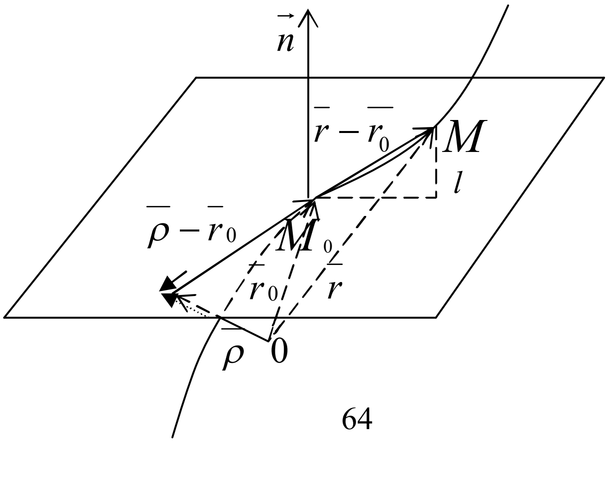


Рисунок 39

Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор нормали плоскости, тогда $\vec{n}\left(\vec{\rho}-\vec{r}_0\right)=0$ и, следовательно, $l=\vec{n}\left(\vec{\rho}-\vec{r}_0\right)$ есть расстояние от произвольной точки *M* кривой до плоскости, причём $l>0$, если точка расположена по ту сторону плоскости, куда направлен вектор $\vec{n}$, и $l<0$, если он направлен по другую сторону плоскости (рис. 39).

Пусть функция $\vec{r}=\vec{r}(t)$ дифференцируема *n* раз на отрезке $[t,t+h]$. Тогда

$$x(t+h)=x+x'h+\frac{1}{2!}x''h^2+...+\frac{1}{n!}x^{(n)}(t_1)h^n;;$$

$$y(t+h)=y+y'h+\frac{1}{2!}y''h^2+...+\frac{1}{n!}y^{(n)}(t_2)h^n;$$

$$z(t+h)=z+z'h+\frac{1}{2!}z''h^2+...+\frac{1}{n!}z^{(n)}(t_3)h^n,$$

где $t_i\in[t,t+h]\,t_i\in[t,t+h],\ i=1,2,3$.

Умножим левые и правые части на $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ соответственно и сложим:

$$\vec{r}(t+h)=\vec{r}(t)+\vec{r}'(t)h+\frac{1}{2!}\vec{r}''(t)h^2+...+\frac{1}{(n-1)!}\vec{r}^{(n-1)}(t)h^{n-1}+\vec{R}_n,$$

где $\overrightarrow{R_n}=\frac{1}{n!}\left(\vec{i}x^{(n)}(t_1)+\vec{j}y^{(n)}(t_2)+\vec{k}z^{(n)}(t_3)\right)h^n$.

Ясно, что $\lim\limits_{t\to t_0}\left(\vec{i}x^{(n)}(t_1)+\vec{j}y^{(n)}(t_2)+\vec{k}z^{(n)}(t_3)\right)=\overrightarrow{r^{(n)}}(t)$.

Итак, $\overrightarrow{R_n}=\left(\frac{\overrightarrow{r^{(n)}}(t)}{n!}+\vec{\alpha}\right)h^n$, где $\vec{\alpha}\to 0$, когда промежуток тоже стремится к нулю. Это <u>формула Тейлора для вектор-функций</u>.

Оценим расстояние l. Разложим функцию $l=f(s)$ в ряд Тейлора. Предположим для простоты, что точка M_0 совпадает с началом отсчета дуг, и $s_0=0$.

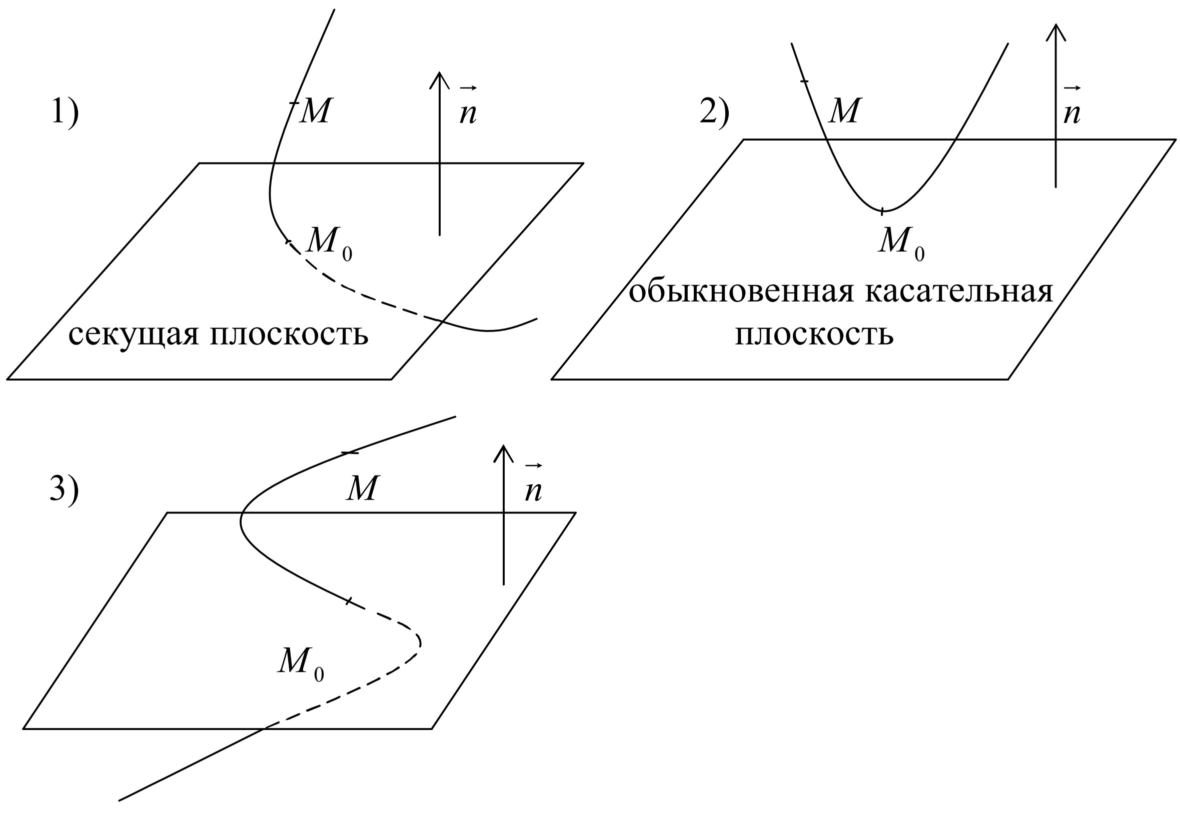
$l=\left(\vec{n}\vec{r}_0'\right)s+\frac{1}{2}\left(\vec{n}\vec{r}_0''\right)s^2+\frac{1}{6}\left(\vec{n}\vec{r}_0'''\right)s^3+As^4$. Здесь $\vec{r}'=\vec{\tau}$, $\vec{r}''=k\vec{\nu}$,

$\vec{r}'''=k'\vec{\nu}+k\left(-k\vec{\tau}+æ\vec{\beta}\right)=-k^2\vec{\tau}+k'\vec{\nu}+kæ\vec{\beta}$. Итак,

$l=\left(\vec{n}\vec{\tau}\right)s+\frac{k}{2}\left(\vec{n}\vec{\nu}\right)s^2+\frac{1}{6}\vec{n}\left(-k^2\vec{\tau}+k'\vec{\nu}+kæ\vec{\beta}\right)s^3+As^4$. Будем называть плоскость секущей, если она не касается кривой. Для неё $\vec{n}\vec{\tau}\neq 0$. Следовательно, расстояние от точки M кривой до плоскости, секущей кривую в точке M_0, будет бесконечно малым того же порядка, что и длина M_0M. Для касательной плоскости $\vec{n}\vec{\tau}=0$. И тогда $l=\frac{k}{2}\left(\vec{n}\vec{\nu}\right)S^2+\beta S^3$. Касательную плоскость будем называть обыкновенной, если она не совпадает с соприкасающейся плоскостью. Для такой плоскости $\vec{n}\vec{\nu} \neq 0$ и, исключая из рассматриваемой точки спрямления $(k = 0)$, приходим к выводу: расстояние от точки M кривой до обыкновенной касательной плоскости будет бесконечно малым второго порядка по отношению к длине дуги M_0M, отсчитанной от точки прикосновения M_0. Для соприкасающейся плоскости $\vec{n}\vec{\tau} = \vec{n}\vec{\nu} = 0$, $\vec{n} = \vec{\beta}$. Таким образом, получаем: $l = \frac{kæ}{6}S^3 + AS^4$.

Исключая точки спрямления $(k = 0)$ и точки уплощения $(æ = 0)$, имеем расстояние от точки кривой M до соприкасающейся плоскости будет бесконечно малым третьего порядка по отношению к длине дуги M_0M, отсчитанной от точки прикосновения M_0.

Это позволяет охарактеризовать взаимное расположение кривой и плоскости. При достаточно малом s знак l совпадает со знаком первого отличного от нуля члена разложения l. Поэтому при переходе S через нуль знак l меняется, если это разложение начинается с члена нечётной степени, и не меняется, если эта степень чётная. Изменение знака s обозначает, что точка M, двигаясь по кривой, переходит с одной точки стороны точки M_0 на ее другую сторону. Если при этом знак l изменяется, то это значит, что точка M переходит с одной стороны плоскости по её другую сторону. Если же знак l не меняется, то точка M возвращается на ту же сторону от плоскости, с которой она подошла к точке M_0. Итак, может быть три случая, если применить эти рассуждения к разложениям, относящимся к секущей, касательной и соприкасающейся плоскостям (рис. 40).



соприкасающаяся плоскость

Рисунок 40

Используем формулу Тейлора, чтобы получить разложение координат точки кривой относительно прямоугольных осей, совпадающих с осями сопровождающего трёхгранника. Пусть OX – касательная, OY – главная нормаль, OZ – бинормаль. Тогда x, y, z по величине и по знаку совпадут с расстояниями точки от нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскости соответственно. Подставляем вместо $\vec{n}$ векторы этих плоскостей $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ в выражение для l. Тогда имеем:

$$x = s + \ldots; \quad y = \frac{k}{2}s^2 + \ldots; \quad z = \frac{kæ}{6}s^3 + \ldots \qquad (*)$$

Рассмотрим проекцию кривой на соприкасающуюся плоскость, чтобы представить зависимость формы кривой от величины кривизны k. Для этого воспользуемся первыми членами разложений (*). Они определяют знаки координат x и y вблизи начала координат, то есть при достаточно малых значениях s. Итак, кривая $x = s$, $y = \frac{1}{2}kS^2$ будет достаточно точно повторять форму проекций данной кривой вблизи начала координат. Исключая s, получаем уравнение параболы $y = \frac{1}{2}kx^2$. Так как k определена как положительная величина, то ветви параболы отходят от оси OX в ту сторону, в которую указывает вектор главной нормали. А так как координаты точки кривой имеют вблизи данной точки те же знаки, что и знаки координат точек параболы, то вблизи данной точки кривая расположена по ту сторону от спрямляющей плоскости этой точки, в которую направлен вектор главной нормали $\vec{\nu}$: вектор $\vec{\nu}$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой.

Рассмотрим теперь проекцию кривой на спрямляющуюся плоскость. Ограничимся рассмотрением главных членов разложения (*), предполагая, что в рассматриваемой точке кручение не равно нулю. Имеем кривую $x = s$, $z = \frac{1}{6}kæS^3$, которая выражает приближенно рассматриваемую проекцию. Исключая s, получаем: $z = \frac{1}{6}kæx^3$. Это кубическая парабола, касающаяся оси OX в начале координат и имеющая там точку перегиба. Расположение этой кривой зависит от знака при x^3. Рассмотрим случаи (k всегда больше 0) (рис. 41):

æ > 0 æ < 0

Рисунок 41

Координата *z* возрастает в первом случае и убывает во втором случае по мере возрастания *x*. Зная, что знаки координат определяются вблизи данной точки знаками первых членов разложения, можно сделать следующий вывод:

1) вблизи данной точки кривая расположена по разные стороны от соприкасающейся плоскости;

2) если точка движется по кривой в направлении возрастания дуг и проходит через данную точку, то она переходит на ту сторону соприкасающейся плоскости, куда направлен вектор бинормали, если æ > 0; если æ < 0, то точка переходит на противоположную сторону соприкасающейся плоскости;

3) кривая тем быстрее отходит от соприкасающейся плоскости, чем больше величина $|æ|$.

Всё сказанное выше позволяет судить о расположении кривой вблизи данной точки по отношению к сопровождающему трёхграннику этой точки. Будем считать, что ось OZ направлена снизу вверх. Имеем восемь октантов:

	x		*y*		*z*
1	+		+		+
2	–		+		+
3	–		–		+
4	+		–		+
5	+		+		–
6	–		+		–
7	–		–		–
8	+		–		–

Рассмотрим разложение координат точки кривой $k \neq 0$, $æ \neq 0$. OX, OY, OZ – совпадают с осями касательной, главной нормалью и бинормалью в данной точке соответственно. Итак, $x = s + \ldots$, $y = \frac{1}{2}kS^2 + \ldots$, $z = \frac{1}{6}kæ\,s^3 + \ldots$.

Первые члены этих разложений определяют знаки координат вблизи данной точки. Если точка движется по кривой в направлении возрастания дуг, то при переходе через начало координат параметр S меняет знак с отрицательных значений на положительные. Рассмотрим случаи:

æ > 0   æ < 0

s x y z   *s x y z*

$- \; - \; + \; -$ $\qquad\qquad$ $- \; - \; + \; +$

$+ \; + \; + \; +$ $\qquad\qquad$ $+ \; + \; + \; -$

Итак, мы видим, что если æ > 0, то кривая переходит из шестого октанта в первый. Если же æ < 0, то кривая переходит из второго октанта в пятый. Зная, что кривая в начале координат касается OX, можно изобразить следующее, наблюдая из первого октанта (рис. 42):

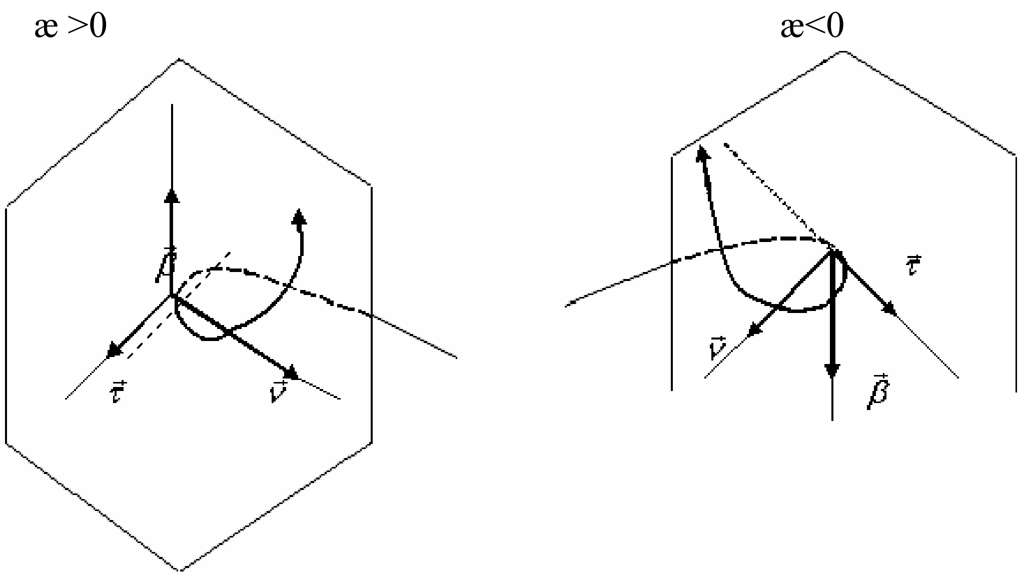


Рисунок 42

Тема 19 Огибающая семейства плоских кривых

Уравнение F(x, y, a) = 0, левая часть которого есть непрерывная и дифференцируемая функция трёх переменных, выражает плоскую кривую, при каждом фиксированном a. Придавая a различные числовые значения, можно получить бесконечное множество кривых. Совокупность всех таких кривых образует семейство кривых, зависящих от параметра a.

Очень часто семейство кривых допускает существование кривой, которая в каждой своей точке касается некоторой кривой семейства. Эту линию будем называть огибающей данного семейства. Точка прикосновения огибающей к кривой семейства называется характеристической точкой кривой семейства. Так как точка огибающей принадлежит некоторой кривой семейства, а эта кривая определяется значениями параметра a, то уравнения $x = x(a)$, $y = y(a)$ можно считать параметрическими уравнениями огибающей. А так как всякая точка огибающей принадлежит одной из кривых семейства, то справедливо равенство: $F(x(a), y(a),a) = 0$.

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{dx}{da}+\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{da}+\dfrac{\partial F}{\partial a}=0$.

Пусть теперь уравнение кривой семейства имеет вид: $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Тогда условием прикосновения кривой и огибающей будет пропорциональность координат касательных векторов в точке прикосновения.

$$\frac{dx}{da} = \lambda \frac{dx}{dt};\ \frac{dy}{da} = \lambda \frac{dy}{dt}. \text{ Далее } \lambda \underbrace{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} \right)}_{0} + \frac{\partial F}{\partial a} = 0.$$

Но координаты вектора касательной кривой семейства должны удовлетворять для всякой её точки условию $\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 0$. Следовательно, координаты характеристической точки удовлетворяют равенству $\frac{\partial F}{\partial a} = 0$.

Итак, координаты точек огибающей будем искать, решая систему:

$$\begin{cases} F(x, y, a) = 0 \\ \dfrac{\partial F(x, y, a)}{\partial a} = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

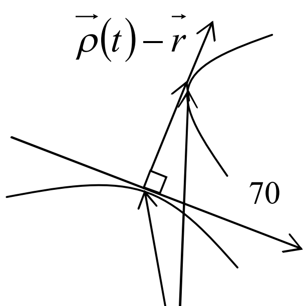
Решив эти уравнения, мы определим x и y в функции параметра a и найдём кривую, которая называется <u>дискриминантной кривой</u> данного семейства. Огибающая, если она существует, должна входить в состав дискриминантной кривой. При каких условиях решение системы (1) $x = x(a)$, $y = y(a)$ будет огибающей?

Имеем: $$\begin{cases} F(x(a), y(a), a) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{dx}{da} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{da} = 0 \end{cases}. \tag{2}$$

Система (2) говорит о том, что условием прикосновения дискриминантной кривой и кривых семейства является то, что частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ не равны нулю. В противном случае последнее равенство может выполняться для касательного вектора $\left(\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da} \right)$ дискриминантной кривой, если он и не совпадает по направлению с касательным вектором кривой семейства. Таким образом, ветвь дискриминантной кривой может и не являться огибающей, если в её точках $F_x = F_y = 0$, то есть если эти точки являются особыми точками кривых семейства. Итак, дискриминантная кривая семейства, определяемая системой (2) является огибающей, если она не состоит из особых точек кривых семейства.

<u>Определение.</u> <u>Эволютой</u> плоской кривой называется огибающая её нормалей.

Пусть $r = r(t)$. Тогда имеем (рис. 43):



$\vec{\rho}(t)$

$\vec{r}\,'$

$\vec{r}$

0

Рисунок 43

Из рисунка 43 видно следующее:

$$\vec{r}\,'(t)\left(\vec{\rho}(t)-\vec{r}(t)\right)=0 \qquad (3)$$

это уравнение при изменении параметра t определяет семейство нормалей плоской кривой. Дифференцируем уравнение (4):

$$\vec{r}\,''(t)\left(\vec{\rho}(t)-\vec{r}(t)\right)-\left(\vec{r}\,'(t)\right)^2=0. \qquad (4)$$

Решая совместно (3) и (4) мы найдём радиус-вектор эволюты. Пусть $\vec{r}(t)=(x,y)$, $r'(t)=(x',y')$, $\vec{\rho}(t)=(\varepsilon,\eta)$.

И кривая лежит в плоскости ОХУ. Имеем:

$$\begin{cases} x'(\varepsilon-x)+y'(\eta-y)=0 \\ x''(\varepsilon-x)+y''(\eta-y)=x'^2+y'^2 \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, получим, что

$$\varepsilon=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''},\quad \eta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}.$$

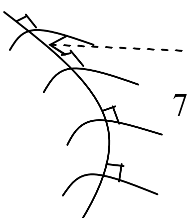
Если же кривая $\vec{r}$ задана с помощью натурального параметра, то есть $\vec{r}=\vec{r}(s)=\vec{r}(\ell)$, $s=\ell$ – натуральный параметр, то (3) и (4) имеют следующий вид:

$\vec{r}\,'(\vec{\rho}-\vec{r})=0$ и $\vec{r}\,''(\vec{\rho}-\vec{r})=1$, но $\vec{\tau}=\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''=k\vec{\nu}\Rightarrow\vec{\tau}(\vec{\rho}-\vec{r})=0, \kappa\vec{\nu}(\vec{\rho}-\vec{r})=1$.

Так как векторы $\vec{\rho}-\vec{r}$, $\vec{\tau},\vec{\nu}$ лежат в одной плоскости, причём $\vec{\rho}-\vec{r}\perp\vec{\tau}$, то $\vec{\rho}-\vec{r}\parallel\vec{\nu}$, то есть $\vec{\rho}-\vec{r}=\lambda\vec{\nu}$. Тогда $k\vec{\nu}\lambda\vec{\nu}=1$, $k\lambda=1, \lambda=\frac{1}{k}=R$.

Таким образом, радиус-вектор точки эволюты плоской кривой $\vec{\rho}$ выражается через радиус-вектор $\vec{r}$ точки данной кривой, вектор её главной нормали $\vec{\nu}$ и радиус её кривизны R так: $\vec{\rho}=\vec{r}+R\vec{\nu}$. Отсюда, расстояние между соответствующими точками эволюты и данной плоской кривой равно радиусу кривизны этой кривой.

<u>Определение.</u> <u>Ортогональной траекторией</u> однопараметрического семейства линий называется кривая, которая пересекает под прямым углом все линии этого семейства (рис. 44).



ортогональная траектория

Рисунок 44

<u>Определение.</u> Ортогональная траектория касательных данной кривой называется <u>эвольвентой</u> этой кривой.

Пусть $\vec{r} = \vec{r}(s)$, где s – натуральный параметр, тогда уравнение эвольвенты $\vec{\rho} = \vec{r} + \lambda\vec{\tau}$ (рис. 45).

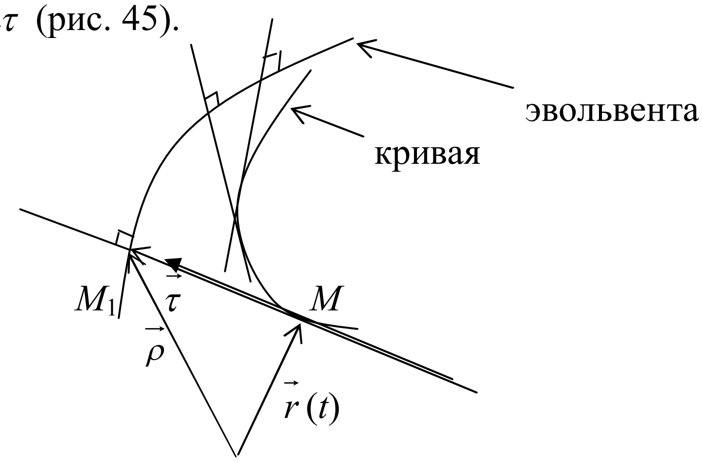


Рисунок 45

Здесь λ расстояние между точкой кривой и соответствующей точкой её эвольвенты. Чтобы найти эвольвенту, найдём зависимость λ от натурального параметра s. Рассмотрим s, как параметр на эвольвенте (а для неё он не будет натуральным), найдём её касательный вектор:

$$\frac{d\vec{\rho}}{dS} = \vec{\tau} + \frac{d\lambda}{dS}\vec{\tau} + \lambda\vec{\tau}'.$$

Так как эвольвента пересекает касательную данной кривой под прямым углом, то $\frac{d\vec{\rho}}{dS}\vec{r}' = \left(\vec{\tau} + \frac{d\lambda}{dS}\vec{\tau} + \lambda\vec{\tau}'\right)\vec{\tau} = 0, \vec{\tau} \perp \vec{\tau}' \Rightarrow \left(1 + \frac{d\lambda}{dS}\right) = 0,\ \lambda = s_0 - s$.

Имеем, что $\vec{\rho} = \vec{r} + (s_0 - s)\vec{\tau}$. Итак, всякая кривая имеет бесчисленное множество эвольвент.

Рассмотрим две из них: $\lambda_1 = s_1 - s$, $\lambda_2 = s_2 - s$. Расстояние между их соответствующими точками $M_1M_2 = \lambda_2 - \lambda_1 = s_2 - s_1$. Таким образом, расстояние между соответственными точками двух эвольвент данной кривой постоянно. Заметим, что если кривая Γ_1 есть эволюта кривой Γ, то Γ есть эвольвента кривой Γ_1.