6 Понятие тензора

Тема 20 Тензоры первого и второго ранга

Многие величины задаются в виде числовых функций от точки в пространстве. В трёхмерном пространстве для полной характеризации точки необходимо знать значение не менее трёх числовых функций, именуемых координатами точки (x^1, x^2, x^3). Каждая из этих координат есть функция точки, а совокупность (x^1, x^2, x^3) полностью определяет эту точку. Тем не менее, понятие числовой функции точки или совокупности таких функций недостаточно для изучения многих задач. Многие геометрические и физические величины могут быть описаны в виде набора числовых функций после того, как в пространстве уже задан какой-то набор координат (x^1, x^2, x^3). Числовая запись этих величин может измениться, если мы зададим другие координаты, например (z^1, z^2, z^3), где $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$, $i = 1, 2, 3$.

Рассмотрим вектор скорости при движении вдоль некоторой кривой $z^j = z^j(t)$, $j = 1, 2, 3$; $x^i = x^i(t) = x^i\left(z^1(t), z^2(t), z^3(t)\right)$. В координатах (z) компоненты вектора скорости будут $\left(\eta^1, \eta^2, \eta^3\right) = \left(\frac{dz^1}{dt}, \frac{dz^2}{dt}, \frac{dz^3}{dt}\right)_{t=t_0}$. В координатах (x) этот же вектор имеет другие координаты $\left(\xi^1, \xi^2, \xi^3\right) = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right)_{t=t_0}$, где

$$\begin{array}{l}
\dfrac{dx^1}{dt} = \dfrac{\partial x^1}{\partial z^1}\dfrac{dz^1}{dt} + \dfrac{\partial x^1}{\partial z^2}\dfrac{dz^2}{dt} + \dfrac{\partial x^1}{\partial z^3}\dfrac{dz^3}{dt} \\
\dfrac{dx^2}{dt} = \dfrac{\partial x^2}{\partial z^1}\dfrac{dz^1}{dt} + \dfrac{\partial x^2}{\partial z^2}\dfrac{dz^2}{dt} + \dfrac{\partial x^2}{\partial z^3}\dfrac{dz^3}{dt} \;\Rightarrow\; \dfrac{dx^i}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\dfrac{dz^j}{dt};\ i = 1, 2, 3 \\
\dfrac{dx^3}{dt} = \dfrac{\partial x^3}{\partial z^1}\dfrac{dz^1}{dt} + \dfrac{\partial x^3}{\partial z^2}\dfrac{dz^2}{dt} + \dfrac{\partial x^3}{\partial z^3}\dfrac{dz^3}{dt}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\xi^1 = \dfrac{\partial x^1}{\partial z^1}\eta^1 + \dfrac{\partial x^1}{\partial z^2}\eta^2 + \dfrac{\partial x^1}{\partial z^3}\eta^3 \\
\xi^2 = \dfrac{\partial x^2}{\partial z^1}\eta^1 + \dfrac{\partial x^2}{\partial z^2}\eta^2 + \dfrac{\partial x^2}{\partial z^3}\eta^3 \;\Rightarrow\; \xi^i = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\eta^j;\ i = 1, 2, 3,\ x^i = x^i(z). \\
\xi^3 = \dfrac{\partial x^3}{\partial z^1}\eta^1 + \dfrac{\partial x^3}{\partial z^2}\eta^2 + \dfrac{\partial x^3}{\partial z^3}\eta^3
\end{array}$$

Тензоры – это важнейший класс из величин, числовая запись которых меняется при изменении координат. Вектор – простейший пример тензора. Скалярная величина – тривиальный пример тензора, так как его числовая запись при изменении координат не изменяется.

Рассмотрим другие примеры тензоров.

1 Градиент числовой функции.

Если задана числовая функция $f\left(x^1, x^2, x^3\right)$, то $grad\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) = \xi_1, \xi_2, \xi_3$. Как выглядит градиент этой функции в координатах (z^1, z^2, z^3), где каждая $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$; i = 1, 2, 3?

Итак, $grad\, f\ x^1(z),\ x^2(z), x^3(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z^1}, \frac{\partial f}{\partial z^2}, \frac{\partial f}{\partial z^3}\right) = \eta_1, \eta_2, \eta_3$, где

$$\frac{\partial f}{\partial z^1} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial z^1} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial z^1} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial z^1}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z^2} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial z^2} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial z^2} \quad \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z^i} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^i},\ i = 1, 2, 3.$$
$$\frac{\partial f}{\partial z^3} = \frac{\partial f}{\partial x^1}\frac{\partial x^1}{\partial z^3} + \frac{\partial f}{\partial x^2}\frac{\partial x^2}{\partial z^3} + \frac{\partial f}{\partial x^3}\frac{\partial x^3}{\partial z^3}$$

Таким образом, $\eta_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\xi_j = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\xi_j,\ i = 1, 2, 3$. Итак, градиент функции, как видим, иначе преобразуется при заменах координат, чем вектор скорости.

Сравним формулы преобразования числовой записи для вектора скорости кривой и градиента функции:

$\xi^i = \eta^j \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$ – вектор скорости (1)

$\eta_i = \xi_j \frac{\partial x^j}{\partial z^i}$ – градиент (2)

Пусть матрица $A = \left(a^i_j\right)$, $a^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial z^j}$, $A^T = \left(b^j_k\right)$, где $b^j_k = a^k_j$, $(z) \to (x)$, $\xi = A\eta$ (1'), а вектор $\eta = A^T\xi$ (2'). Если матрица A^T имеет обратную матрицу, то из (2') имеем $\left(A^T\right)^{-1}\eta = \xi$ (2"). Итак, получим, что $\xi\left(A^T\right)^{-1}\eta\left(\xi_i = \eta_j\frac{\partial z^j}{\partial x^i}\right)$. В каком случае законы преобразования (1) и (2) при переходе $(x) \to (z)$ совпадут? Из (1') и (2') $\Rightarrow$ $(x) \to (z)$, $\xi = A\eta$ (вектор скорости), $\xi = \left(A^T\right)^{-1}\eta$ (градиент функции). Следовательно, для совпадения нужно иметь $A = \left(A^T\right)^{-1}$, $AA^T = E$. Такие матрицы A, для которых $A^T = A^{-1}$, называются ортогональными. Итак, градиент функции иначе преобразуется при заменах координат, чем вектор скорости. Это другой вид тензора, который называют ковектором в отличие от вектора скорости.

2 Риманова метрика.

Метрические понятия (длины и углы) задаются с помощью набора функций $(g_{ij}(x))$, если заданы координаты (x^1, x^2, x^3). Для длины кривой имеем $l=\int_a^b \sqrt{g_{ij}(x(t))(x^i)'(x^j)'}dt$, где $x'=\dfrac{dx}{dt}$ и квадратичная форма $\Sigma\, g_{ij}\xi^i\xi^j$ положительна определена. Это квадратичная форма, определённая на векторах типа векторов скорости в каждой данной точке $(x) = (x^1, x^2, x^3)$ и зависящая от точки. Наборы (g_{ij}) назывались римановой метрикой. При заменах координат $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$, $i=1,2,3$, $l=\int_a^b \sqrt{g_{ij}(z(t))(z^i)'(z^j)'}dt$, где $x^i(t)=x^i\left(z^1(t), z^2(t), z^3(t)\right)$, причём $g'_{ij}(z)=g_{kl}(x(z))\dfrac{\partial x^k}{\partial z^i}\dfrac{\partial x^l}{\partial z^j}$. Таким образом, это ещё один тип тензора.

Риманова метрика (g_{ij}) в данных координатах x^1, x^2, x^3 была нужна для того, чтобы определить понятие длины вектора в данной точке (x): если вектор $\xi=\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right)$ в точке (x^1, x^2, x^3), то $|\xi|^2=g_{ij}(x)\xi^i\xi^j$.

Определим инвариантное понятие квадрата длины ковектора, который преобразуется по закону $\eta_i=\xi_j\dfrac{\partial x^j}{\partial z^i}$. Для этого введём компоненты $\left(g^{ij}(x)\right)$, положив при этом, что $|\xi|^2=g^{ij}(x)\xi_i\xi_j$ в заданной точке (x), $\xi=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$, $\eta=(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)$. При замене координат $x^i=x^i(z)$, $i=1,2,3$ получим закон преобразования $\eta_i=\xi_j\dfrac{\partial x^j}{\partial z^i}$ и $g^{ij}(z)=g^{kl}\dfrac{\partial z^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial z^j}{\partial x^l}$. В этом случае длина не будет зависеть от выбора системы координат $|\eta|^2=|\xi|^2='g^{ij}\eta_i\eta_j=g^{ij}\xi_i\xi_j$, где $\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ – запись ковектора в координатах x^1, x^2, x^3 в точке (x), $\eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$ – запись того же ковектора в той же точке, но в координатах (z^1, z^2, z^3). Закон преобразования $'g^{ij}(z)=g^{kl}\dfrac{\partial z^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial z^j}{\partial x^l}$ дает ещё один тип тензора второго ранга.

3 Линейные операторы на векторах.

Пусть в каждой точке пространства с координатами (x^1, x^2, x^3) задана матрица $A=\left(a^i_j(x)\right)$, которая определяет линейное преобразование векторов в каждой точке $x = (x^1, x^2, x^3)$. Это линейное преобразование имеет вид: $\eta = A\xi$, где $\eta^i=a^i_j(x)\xi^j$; $\xi=\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right)$ – вектор в точке x. Эта же самая матрица определяет линейное преобразование ковекторов по формуле $\eta = A\xi$, где $\eta_j=a^i_j(x)\xi_i$. При замене координат $x^i = x^i(z^1, z^2, z^3)$ из формул $\xi^i=\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}\eta^j$, $\eta^i=a^i_j(x)\xi^j$ можно получить, что элементы матрицы A преобразуются по закону $A \sim {}'A$; ${}'A = \left({}'a_j^i\right)$: ${}'a_j^i = \dfrac{\partial z^i}{\partial x^k} a_l^k \dfrac{\partial x^l}{\partial z^j}$, где $x^i = x^i(z)$, $z^j = z^j(x)$, $z^i(x(z)) = z^i$. При этом $\dfrac{\partial z^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial z^j} = \delta_j^i = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Подведём итоги.

1) Скалярная величина – тензор нулевого ранга. Он не преобразуется при замене координат.

2) Вектор (типа скорости) $\xi = \left(\xi^i\right)_x \to {}'\xi = \left({}'\xi^j\right)_z$; ${}'\xi^j = \xi^i \dfrac{\partial z^j}{\partial x^i}$.

3) Ковектор (типа градиента функции) $\xi = \left(\xi_i\right)_x \to {}'\xi = \left({}'\xi_i\right)_z$; ${}'\xi_j = \xi_i \dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}$.

2) и 3) – есть тензоры первого ранга.

4) Скалярное произведение векторов

$\left(g_{ij}\right) \to \left({}'g_{ij}\right)$: ${}'g_{ij} = g_{kl}\dfrac{\partial x^k}{\partial z^i}\dfrac{\partial x^l}{\partial z^j}$, $(x) \to (z)$.

5) Скалярное произведение ковекторов

$\left(g^{ij}\right) \to \left({}'g^{ij}\right)$: ${}'g^{ij} = g^{kl}\dfrac{\partial z^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial z^j}{\partial x^l}$.

6) Линейные операторы на векторах (ковекторах)

$A = \left(a_j^i\right) = \to {}'A = {}'a_j^i$: ${}'a_j^i = g_l^k \dfrac{\partial x^l}{\partial z^j}\dfrac{\partial z^i}{\partial x^k}$; $x^i = x^i\left(z^1, z^2, z^3\right)$, $z^i = z^i\left(x^1, x^2, x^3\right)$,

$z^i\left(x^1(z), x^2(z), x^3(z)\right) = z^i$; $\dfrac{\partial z^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial x^k}{\partial z^j} = a_j^i$.

Примеры 4), 5) ,6) – есть тензоры второго ранга.

Тема 21 Общее определение тензора

<u>Определение.</u> <u>Тензором (тензорным полем) типа</u> (p, q) ранга $p+q$ называется объект, который задаётся набором чисел $\mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ в произвольной системе координат (x^1, …, x^n), числовая запись которого зависит от системы координат по следующему закону: если $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$, $z^j = z^j(x^1, \ldots, x^n)$, $z(x(z)) = z$, то имеет место следующая формула:

$$\mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = \sum_{(k),(l)} {}'\mathrm{T}^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{k_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{k_p}} \frac{\partial z^{l_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{l_q}}{\partial x^{j_q}}, \qquad (1)$$

где ${}'\grave{O}^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_q}$ – числовая запись тензора в координатах (z), а $\mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ – числовая запись тензора в координатах (x). Индексы $i_1, \ldots, i_p$, $j_1, \ldots, j_q$, $k_1, \ldots, k_p$, $l_1, \ldots, l_q$ меняются от 1 до n.

Таким образом, вектор скорости – это тензор типа (1, 0), ковектор – это тензор типа (0, 1), квадратичная форма на векторах – это тензор типа (0, 2), а квадратичная форма на ковекторах – это тензор типа (2, 0); линейный оператор на векторах и ковекторах – это тензор типа (1, 1).

Теорема. Компоненты ${}'\mathrm{T}^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_q}$ можно выразить через компоненты $\mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ по следующей формуле:

$$ {}'\mathrm{T}^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_n} = \sum_{(i),(j)} \mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{l_q}}. $$

◀Доказательство:

Известно, что $\sum_j \frac{\partial x^i}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial x^k} = \delta^i_k$ и $\sum_j \frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^q} = \delta^k_q$, так как преобразования $x = x(z)$ и $z = z(x)$ обратны друг к другу. Рассмотрим (1) как линейное уравнение с правыми частями $\mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ и неизвестными ${}'\mathrm{T}^{k_1 k_2 \cdots k_p}_{l_1 l_2 \cdots l_q}$. Решая это уравнение, получаем:

$$ \sum_{i,j} T^i_j \frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{\ell_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{\ell_q}} = \sum_{i,j} \Big(\sum_{r,s} {}'T^r_S \frac{\partial x^{i_1}}{\partial z^{r_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial z^{r_p}} \frac{\partial z^{S_1}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial z^{S_q}}{\partial x^{j_q}} \Big). $$

$$ \Big(\frac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{\ell_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{\ell_q}} \Big) = \sum_{i,j,r,s} {}'T^r_S \frac{\partial x^i}{\partial z^r} \frac{\partial z^S}{\partial x^j} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial z^\ell} = \sum_{r,s} {}'T^r_S \delta^s_\ell \delta^k_r \equiv $$

$$ \equiv {}'T^k_\ell, \; i = (i_1, \ldots, i_p), \; j = (j_1, \ldots, j_q), \; \ell = (\ell_1, \ldots, \ell_q), \; S = (S_1, \ldots, S_q), $$

$$ k = (k_1, \ldots, k_p), \; r = (r_1, \ldots, r_p). \quad ▶ $$

В любой точке пространства тензоры образуют линейное пространство: если $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \right)$ и $S = \left(S^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \right)$ – тензоры типа (p, q), то их линейная комбинация $\alpha \mathrm{T} + \beta S = u = \left(\alpha\, \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} + \beta\, S^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q} \right)$ тоже есть тензор типа (p, q) в этой же самой точке. Отметим, что тензор есть объект, прикреплённый к точке, и не существует правила сложения тензоров, прикреплённых к разным точкам.

Если базисные координатные векторы в n-мерном пространстве с системой координат $x^1, \ldots, x^n$ обозначить через $e_1, e_2, \ldots, e_n$ – базисные векторы, а базисные ковекторы обозначить через $e^1, e^2, \ldots, e^n$, то любой тензор можно записать в следующем виде:
вектор $\xi = \sum_i \xi^i e_i$, ковектор $\xi = \sum_j \xi_j e^j$, квадратичная форма для векторов

$(g)=\sum_{i,j} g_{ij} e_i e_j$, квадратичная форма для ковекторов $(g)=\sum_{i,j} g^{ij} e^i e^j$, линейный оператор $A=\sum_{i,j} a^i_j e^j e_i$.

Любой тензор $\mathrm{T}=\left(\mathrm{T}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}\right)$ можно записать в виде:

$$\mathrm{T}=\sum_{(i),(j)} \mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p} e^{j_1} e^{j_2} \ldots e^{j_q} .$$

Порядок индексов в этой записи существенный. Итак, базис в линейном пространстве тензоров типа (p,q) в данной точке этого пространства (x) имеет вид

$e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_p} e^{j_1} e^{j_2} \ldots e^{j_q}$, где $i, j=1,2,\ldots,n$. Базис состоит из $p+q$ элементов.

Пример 1. Тензор напряжения.

Сила давления в каждой точке $x=\left(x^1, x^2, x^3\right)$, действующая на малую площадку площади ΔS , ортогональную единичному вектору *n*, находится по формуле $P(n)\Delta S$, где P – линейный опрератор $\left(P^i_j\right)=P$. Тензор P^i_j – называется тензором напряжения. Пусть $n=\sum_{i=1}^{3} n^j e_j$. Тогда $P(n)=\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} n^j P^i_j\right) e_i$.

Пример 2. Тензор деформации.

Если сплошная среда в координатах $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ подвергалась смещению $x^i \to x^i+u^i$, то будем говорить, что среда подвергалась деформации. Первоначальное расстояние между близкими точками среды – $(\Delta\ell)^2=\sum_{i=1}^{3}(\Delta x^i)^2=\sum_{i=1}^{3}\left(x^i-{}'x^i\right)^2$. Найдём расстояние между этими точками после деформации:

$$(\Delta\overline{\ell})^2=\sum_{i=1}^{3}\left(\left(x^i+u^i(x)\right)-\left({}'x^i+u^i({}'x)\right)\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}(x^i+u^i(x))^2-2(x^i+u^i(x))\left({}'x^i+u^i\left({}'x\right)\right)+\left({}'x^i+u^i\left({}'x\right)\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{3}((x^i)^2+2x^i u^i(x)+(u^i(x))^2-2x^i({}'x^i)-2u^i(x)u^i({}'x)-2x^i u^i({}'x)-2({}'x^i)u^i(x)+({}'x^i)^2)+$$

$$+2\left({}'x^i\right)u^i\left({}'x\right)+\left(u^i\left({}'x\right)\right)^2\Big)=\sum_{i=1}^{3}((x^i-{}'x^i)^2+2u^i(x)(x^i-{}'x^i)+(u^i(x)-u^i({}'x))^2-$$

$$-2u^i({}'x)(x^i-{}'x^i))=\sum_{i=1}^{3}((x^i-{}'x^i)^2+\left(u^i(x)-u^i\left({}'x\right)\right)^2+2\left(x^i-{}'x^i\right)\left(u^i(x)-u^i\left({}'x\right)\right))=$$

$$=(\Delta\ell)^2+2\sum_{i=1}^{3}\Delta x^i\Delta u^i+\sum_{i=1}^{3}(\Delta u^i)^2, \quad \text{где} \quad \Delta u^i=u^i(x)-u^i\left({}'x\right)\approx\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u^i}{\partial x^j}\Delta x^j .$$

При $\Delta x^i \to 0$ $(d\vec{\ell})^2 = (d\ell)^2 + 2\sum_{i,j} dx^i dx^j \dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} + \sum_{k,\ell} \dfrac{\partial u^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial u^j}{\partial x^\ell} dx^k dx^\ell$. А так как $\sum_{i,j} \dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} dx^i dx^j = \sum_{i,j} \dfrac{\partial u^j}{\partial x^i} dx^i dx^j$, то $\sum_{i,j}\left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial u^j}{\partial x^i}\right) dx^i dx^j = 2\sum_{i,j} dx^i dx^j \dfrac{\partial u^i}{\partial x^j}$.

<u>Определение.</u> Разность $\left(d\bar{\ell}\right)^2 - \left(d\ell\right)^2 = \sum_{i,j} \eta_{ij} dx^i dx^j + \sum_{k,\ell} \dfrac{\partial u^i}{\partial x^k}\dfrac{\partial u^j}{\partial x^\ell} dx^k dx^\ell$ называется <u>тензором деформации</u> среды, где $\eta_{ij} = \dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial u^j}{\partial x^\ell}$. Если u^i – малые смещения, то получаем тензор малой деформации $\left(\eta_{i,j}\right) = \left(\dfrac{\partial u^i}{\partial x^j} + \dfrac{\partial u^j}{\partial x^i}\right)$.

Пусть в системе координат (x) задан тензор $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}\right)$ типа (p,q). И пусть задана другая система координат $(x') = \left(x^{1'}, x^{2'}, ..., x^{n'}\right)$, где $\left(x^{i'}\right) = x^{i'}(x)$. Компоненты этого тензора в новой системе координат будут $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}^{i_1' i_2' \cdots i_p'}_{j_1' j_2' \cdots j_q'}\right)$. Закон преобразования компонент тензора будет:

$$\mathrm{T}^{i_1' i_2' \cdots i_p'}_{j_1' j_2' \cdots j_q'} = \sum_{(i),(j)} \mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \frac{\partial x^{i_1'}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_p'}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j_1'}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j_q'}} \quad \text{или}$$

$$\mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = \sum_{(i),(j)} \mathrm{T}^{i_1' i_2' \cdots i_p'}_{j_1' j_2' \cdots j_q'} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \cdots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{j_q}}.$$

1) Перестановка индексов.

Компоненты тензора, например T_{ik}, можно рассматривать как элементы матрицы $\begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{13} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{23} \\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33} \end{bmatrix}$. Если в тензоре T_{ik} поменять местами индексы, то получится новый тензор T_{ki}, матрица которого $\begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{31} \\ \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{32} \\ \mathrm{T}_{13} & \mathrm{T}_{23} & \mathrm{T}_{33} \end{bmatrix}$.

Итак, простейшая операция (перестановка индексов) приводит к построению нового тензора. Пусть σ – перестановка чисел $1, 2, ..., q$: $\sigma = \begin{pmatrix} 12...q \\ \sigma(1)\sigma(2)...\sigma(q) \end{pmatrix}$. Перестановка σ действует на наборах $(j_1, ..., j_q)$ по правилу $\sigma(j_1, ..., j_q) = (j_{\sigma(1)}, ..., j_{\sigma(q)})$. Будем говорить, что тензор $\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}$ получается из тензора $\mathrm{T}^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ <u>перестановкой нижних индексов</u>, если

$\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{\delta\left(j_1\cdots j_q\right)}$. Перестановка верхних индексов определяется аналогично. Нельзя переставлять между собой верхние и нижние индексы.

2) Сложение тензоров.

Мы отмечали, что если $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q}\right)$ и $S = \left(S^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q}\right)$, то $U = \mathrm{T} + S = \left(\mathrm{T}^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q} + S^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q}\right)$.

Пусть A_{ik} и B_{ik} – тензоры второго ранга. Составим $A_{ik} + B_{ik} = C_{ik}$. Числа C_{ik} образуют тензор второго ранга:

$$A_{i'k'} = A_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}};\quad B_{i'k'} = B_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}};$$

$$\underbrace{A_{i'k'} + B_{i'k'}}_{C_{i'k'}} = \underbrace{\left(A_{ik} + B_{ik}\right)}_{C_{ik}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = C_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} = C_{i'k'}$$ – тензор второго ранга.

<u>Определение</u>. Суммой тензоров типа (p,q) называется тензор типа (p,q), компоненты которого равны сумме соответствующих компонент слагаемых.

Аналогично сумме тензоров определяется и их разность. Таким образом, складывать и отнимать тензоры можно только одного и того же ранга.

3) Умножение тензоров.

Пусть дан тензор $A = \left(A_{ik}\right)$ и тензор $B = \left(B_{ik}\right)$. Составим в каждой координатной системе всевозможные произведения: $A_{ik}B_{ik} = C_{ik\ell m}$ $A_{ik}B_{ik} = C_{ik\ell m}$.

Так как A и B тензоры, то $A_{i'k'} = A_{ik}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}$ и $B_{\ell'm'} = B_{\ell m}\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}$. Перемножив, получаем:

$$\underbrace{A_{i'k'}B_{\ell'm'}}_{C_{i'k'\ell'm'}} = \underbrace{\left(A_{ik}B_{\ell m}\right)}_{C_{ik\ell m}}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}},$$ то есть $$C_{i'k'\ell'm'} = C_{ik\ell m}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{m'}}.$$

В результате этой операции мы получили тензор четвёртого ранга.

Произведением тензоров $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\right)$ типа (p,q) и $P = \left(P^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_l}\right)$ типа (k,ℓ), называется тензор $S = \mathrm{T}P$ типа $(p+k, q+e)$ с компонентами $S^{i_1 i_2\cdots i_{p+k}}_{j_1 j_2\cdots j_{q+e}} = \mathrm{T}^{i_1 i_2\cdots i_p}_{j_1 j_2\cdots j_q}\cdot\mathrm{T}^{i_{p+1}\cdots i_{p+k}}_{j_{q+1}\cdots j_{q+k}}$. Таким образом, можно перемножить тензоры любого ранга и типа. Здесь порядок сомножителей существенен.

Пример. Пусть задан вектор $\left(\xi^i\right)$ и задан ковектор $\left(\eta_j\right)$. Если мы перемножим $\left(\xi^i\eta_j\right) = \mathrm{T}^i_j$, то получим тензор второго ранга.

4) Свёртывание тензоров (свёртка).

<u>Определение.</u> Для тензора $T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ типа (p,q) его <u>свёрткой</u> по индексам (i_k, j_l) будем называть тензор $\widetilde{T}^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}}$ типа $(p-1, q-1)$, который определяется следующей формулой:

$\widetilde{T}^{i_1\cdots i_{p-1}}_{j_1\cdots j_{q-1}} = T^{i_1\cdots i_{k-1} i\, i_{k+1}\cdots i_p}_{j_1\cdots j_{\ell-1} i\, j_{\ell+1}\cdots j_q}$. По дважды входящему сверху и снизу индексу i мы производим суммирование от 1 до n.

Пример. Пусть задан тензор T^i_j типа (1, 1). Произведём его свёртку, тогда $T^i_i \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} = T^i_i$ – след линейного оператора T^i_j. Умножим вектор (ξ^i) на линейный оператор A^k_ℓ. Получаем $A^k_\ell \xi^i = \left(T^{k\ell}_\ell\right)$ – тензор типа (2, 1).

<u>Теорема.</u> В результате перечисленных выше операций 1) – 4), получаем тензор, причём результаты их применений не зависят от выбора системы координат.

◀Доказательство:

1) Пусть $\sigma = \begin{pmatrix} 1\ldots k\ldots \ell\ldots q \\ 1\ldots \ell\ldots k\ldots q \end{pmatrix}$. Тогда $\widetilde{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_k\ldots j_e\ldots j_q} = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_\ell\cdots j_k\cdots j_q}$. Перейдём к штрихованной системе координат:

$$\widetilde{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = T^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_l\cdots j_k\cdots j_q} = T^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_k}}{\partial x^{j_\ell}}\cdots\frac{\partial x^{j'_l}}{\partial x^{j_k}}\cdots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}.$$

Сменим обозначения: j'_k обозначим через j'_l, а j'_l обозначим через j'_k. Это не изменит всего выражения, так как по этим индексам мы производим суммирование:

$$T^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_e\cdots j'_k\cdots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_k}}{\partial x^{j_l}}\cdots\frac{\partial x^{j'_l}}{\partial x^{j_k}}\cdots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} =$$

$$= \widetilde{T}^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_k}}{\partial x^{j_k}}\cdots\frac{\partial x^{j'_l}}{\partial x^{j_l}}\cdots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}.$$

Таким образом, $\widetilde{T}^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}$ – компоненты тензор типа (p,q).

2) Для тензора, свёрнутого по индексам i'_k и j'_ℓ, (i_k и j_ℓ означает, что эти индексы пропущены) будем иметь:

$$\widetilde{\mathrm{T}}^{i_1\cdots i_k\cdots i_p}_{j_1\cdots j_\ell\cdots j_p} = \mathrm{T}^{i'_1\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}.$$

$$\wedge \qquad\qquad \wedge$$

$$\mathrm{T}^{i'_1\cdots i'_{p1}}_{j'_1\cdots j'_q}\delta^{j'_{\ell e}}_{i'_k}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_\ell}}{\partial x^{j_\ell}}\cdots\frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}}.$$

$$\wedge \qquad\qquad \wedge$$

$$\widetilde{\mathrm{T}}^{i'_1\cdots i'_k\cdots i'_p}_{j'_1\cdots j'_e\cdots j'_q}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}}\cdots\frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}\cdots\frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}}\frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}}\cdots\frac{\partial x^{j'_\ell}}{\partial x^{j_e}}\cdots\frac{\partial x^{j'_p}}{\partial x^{j_q}}.$$

Здесь $\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'_k}}\frac{\partial x^{j'_e}}{\partial x^{i}} = \delta^{j'_e}_{i'_k}$.

Доказательство тензорности произведения следует из определения. ►

5) Поднятие и опускание индексов

В присутствии метрики g_{ij} можно определить операцию опускания индексов. Если $\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ – тензор типа $(p,\ q)$, то можно определить тензор $\mathrm{T}^{i_2\cdots i_p}_{i_1 j_1\cdots j_q}$ типа $(p-1,\ q+1)$, полагая, что $\mathrm{T}^{i_2\cdots i_p}_{i_1 j_1\cdots j_q} = g_{i_1 k}\mathrm{T}^{k\, i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$.

<u>Определение.</u> Переход от тензора $\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$ к тензору $\mathrm{T}^{i_2\cdots i_p}_{i_1 j_1\cdots j_q}$ называется <u>опусканием индекса</u> i_1 с помощью метрики g_{ij}.

Если (ξ^i) – вектор, то после опускания индекса мы получим ковектор (ξ_i): $\xi_i = g_{ij}\xi^i$.

Для <u>поднятия нижних индексов</u> при наличии метрики g_{ij} необходимо рассмотреть обратную матрицу g^{ij}, то есть если $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$. По определению $\mathrm{T}^{j_1 i_1\cdots i_k}_{j_2\cdots j_q} = g^{j_1 k}\mathrm{T}^{i_1\cdots i_k}_{k j_2\cdots j_q}$. Это операция поднятия индексов.

<u>Теорема.</u> Если индекс опустить, а потом его поднять, то получим исходный тензор.

◄Доказательство. Имеем тензор $\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$. Опустим индекс i_1. Получим $g_{i_1 k}\mathrm{T}^{k\, i_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$. Поднимем теперь индекс i_1:

$g^{i_1 e}g_{\ell k}\mathrm{T}^{k i_2\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q} = \sigma_k^{\ i_1}\ \mathrm{T}^{k i_2\cdots i_k}_{j_1\cdots j_q} = \mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$. ►

Тема 22 Тензоры типа (0, *k*)

Рассмотрим тензор типа (0, 1) – это ковектор (пример – градиент функции $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$). Если взять дифференциал от функции *f*, то $df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$. Пусть задана замена координат $x^i = \left(x^{1'},\dots,x^{n'}\right)$. Тогда

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'},\quad df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'} = \frac{\partial f^{i}}{\partial x^{i'}} dx^{i'}.$$

Мы видим, что выражение df инвариантно относительно замены координат. Точно также, если каждому ковектору T_i мы поставим в соответствие выражение $T_i dx^i$ (дифференциальную форму), то это выражение будет инвариантно относительно замены координат. Что такое символ dx^i? Базисные ковекторные поля e^i преобразуются по закону: $e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'}$, $T_i e^i = T_{i'} e^{i'}$. Базисные ковекторы e^i преобразуются по тому же закону, что и dx^i:

$$e^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} e^{i'};\quad dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} dx^{i'},\quad e^i \leftrightarrow dx^i,\quad e^{i'} \leftrightarrow dx^{i'}$$

Таким образом, можно сказать, что символы dx^i есть базисные ковекторы e^i. Дифференциальная форма $T_i dx^i$ соответствует разложению $T_i e^i$ ковектора по базису.

Рассмотрим тензор типа (0, 2).

Базис в пространстве таких тензоров составляет всевозможные произведения $e^i e^j$. Разложение любого тензора T_{ij} по этому базису имеет вид: $T_{ij} e^i e^j$.

Известно, что любой тензор типа (0, 2) распадается на сумму симметрического $\left(T_{ij} = T_{ij}\right)$ и кососимметрического $\left(T_{ij} = -T_{ji}\right)$:

$$T_{ij} = \underbrace{T^{SYM}}_{\text{ñèììåòðè÷å ñêèé}} + \underbrace{T^{ALT}}_{\text{êîñîñèììåòð è÷åñêèé}}$$

. Это следует из того, что $T^{SYM}_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right)$; $T^{ALT}_{ij} = \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right)$.

В дифференциальной форме базис в пространстве симметрических тензоров будет записываться в виде $dx^i dx^j = dx^j dx^i$, а в пространстве кососимметрических тензоров $dx^i \wedge dx^j = dx^j \wedge dx^i$.

Пример. Риманова метрика g_{ij} есть пример симметрического тензора типа (0, 2). Его разложение по базису $dx^i dx^j$ имеет вид: $g_{ij} dx^i dx^j$.

Определение. Кососимметрическим тензором типа (0, k) называется такой тензор $T_{i_1 i_2 \cdots i_k}$, что $T_{\sigma(i_1 i_2 \cdots i_k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) T_{i_1 i_2 \cdots i_k}$, где $\mathrm{sgn}(\sigma) = \pm 1$ – знак перестановки σ.

Базис в пространстве таких тензоров состоит из элементов
$dz^{i_1} \wedge dz^{i_2} \wedge \ldots \wedge dz^{i_k}$ где $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и
$dz^{i_1} \wedge dz^{i_2} \wedge \ldots \wedge dz^{i_k} = \sum_{\sigma \in S_k} \mathrm{sgn}(\sigma) e^{\sigma(i_1} e^{i_2} \ldots e^{i_k)}$.

Для кососимметрического тензора $T_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ получаем дифференциальную форму: $T_{i_1 i_2 \cdots i_k} e^{i_1} \ldots e^{i_k} = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} T_{i_1 i_2 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$.

Определим теперь внешнее произведение двух кососимметрических тензоров типа (0, p) и (0, q) (дифференциальных форм ранга p и q соответственно). Пусть

$$W_1 = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} T_{i_1 i_2 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \text{ и}$$

$$W_2 = \sum_{j_1 < \ldots < j_q} S_{j_1 j_2 \cdots j_q} dx^{j_1} \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$$

Определим форму W ранга ($p + q$) следующим образом:

$$W = W_1 \wedge W_2 = \sum_{k_1 < \ldots < k_{p+q}} R_{k_1 k_2 \cdots k_{p+q}} dx^{k_1} \wedge dx^{k_2} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{p+q}},$$

где $R_{k_1 k_2 \cdots k_{p+q}} = \sum \frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{p!q!} T_{\sigma(k_1 \cdots k_p} \cdot S_{k_{p+1} \cdots k_{p+q})}$.

Величины $R_{k_1 k_2 \cdots k_{p+q}}$ образуют тензор, который получается из тензоров $T_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ и $S_{j_1 j_2 \cdots j_k}$ комбинацией операций тензоров произведения и перестановки индексов.

Какие существуют дифференциальные операции над тензорами, которые не зависят от системы координат? Пусть заданы функция $f(x, \alpha)$ и тензорное поле $T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_q}(x, \alpha)$, где $x = (x^1, x^2, x^3)$ – точки пространства, а α – некоторый параметр, не связанный с пространством. Тогда можно взять частную производную по параметру α: $\frac{\partial f(x, \alpha)}{\partial \alpha}$, $\frac{T^{i_1 \cdots i_k}_{j_1 \cdots j_q}(x, \alpha)}{\partial \alpha}$ в каждой заданной точке.

Эта операция не связана с геометрией пространства. Другой дифференциальной операцией, не связанной с римановой метрикой, является операция взятия градиента.

Если задана функция f, то $grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right)$. Это ковектор. Введём многомерное обобщение градиента на кососимметрические тензоры.

Определение. Пусть $\mathrm{T}_{i_1 \cdots i_k}$ – кососимметрический тензор по всем индексам в n-мерном пространстве с координатами (x^1, ..., x^n). Его градиентом $\left(d\mathrm{T}\right)_{j_1 \cdots j_k j_{k+1}} = \left(\nabla \mathrm{T}\right)_{j_1 \cdots j_k j_{k+1}}$ называется кососимметрический тензор типа (0, k + 1) с компонентами $\left(d\mathrm{T}\right)_{j_1 \cdots j_k j_{k+1}} = \sum\limits_{q=1}^{k+1} \dfrac{\partial \mathrm{T}_{j_1 \cdots \hat{j}_q \cdots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}} \left(-1\right)^q$.

Здесь значок $\hat{j}_q$ означает, что индекс j_q пропущен.

Примеры. 1) Пусть $\kappa + 1 = 1$. В этом случае $\mathrm{T} = f\left(x\right)$ – функция. По определению имеем: $\left(d\mathrm{T}_i\right) = \dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x^i}$ – обычный градиент функции.

2) Пусть $\mathrm{T} = \left(\mathrm{T}_i\right)$ – ковектор. Тогда

$\left(d\mathrm{T}\right)_{ij} = \dfrac{\partial \mathrm{T}_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial \mathrm{T}_j}{\partial x^i} = -\left(d\mathrm{T}\right)_{ji}$. Этот тензор $\left(\partial \mathrm{T}\right)_{ij}$ называется ротором ковекторного поля и обозначается $rot\, \mathrm{T}$. Это есть кососимметрический тензор типа (0, 2).

Если n = 3, пространство и координаты (x^1, x^2, x^3) евклидовы, то тензору $\left(d\mathrm{T}\right)_{ij}$ ставится в соответствие вектор $rot\, \mathrm{T} = \left(\eta^k\right)$, где

$$\eta^1 = \frac{\partial \mathrm{T}_2}{\partial x^3} - \frac{\partial \mathrm{T}_3}{\partial x^2} = \left(d\mathrm{T}\right)_{23}, \quad \eta^2 = \frac{\partial \mathrm{T}_3}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial x^3} = \left(d\mathrm{T}\right)_{31} = -\left(d\mathrm{T}\right)_{13},$$

$$\eta^3 = \frac{\partial \mathrm{T}_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathrm{T}_2}{\partial x^1} = \left(d\mathrm{T}\right)_{12}.$$

3) Пусть n = 3 и задан кососимметрический тензор $\mathrm{T}_{ij} = -\mathrm{T}_{ji}$. Кососимметрический тензор третьего ранга dT здесь имеет вид:

$$\left(d\mathrm{T}\right)_{123} = -\frac{\partial \mathrm{T}_{12}}{\partial x^3} + \frac{\partial \mathrm{T}_{13}}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathrm{T}_{23}}{\partial x^1}.$$

Если координаты евклидовы (x^1, x^2, x^3) и $\eta^1 = -\mathrm{T}_{23}$, $\eta^2 = \mathrm{T}_{13}$, $\eta^3 = -\mathrm{T}_{12}$, то в соответствии с указанным правилом сопоставления вектора кососимметрическому тензору, имеем $\left(d\mathrm{T}\right)_{123} = \dfrac{\partial \eta^1}{\partial x^1} + \dfrac{\partial \eta^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial \eta^3}{\partial x^3} = \sum\limits_{i=1}^{3} \dfrac{\partial \eta^i}{\partial x^i}$.

Определение. Операция, сопоставляющая в евклидовых координатах векторному полю $\eta = \left(\eta^i\right)$ число $\dfrac{\partial \eta^i}{\partial x^i} = div\, \eta$ называется дивергенцией.

Теорема 1. Градиент dТ кососимметрического тензора ранга κ типа (0, κ) является кососимметрическим тензором ранга κ + 1 типа (0, κ + 1).

◀Доказательство.

Пусть задана замена $x^i = x^i\left(z^1,...,z^n\right)$, $i=1,...,n$. По определению $\left(d\mathrm{T}\right)_{i_1,...,i_{k+1}} = \sum_q (-1)^q \frac{\partial \mathrm{T}_{i_1 \cdots i_q \cdots i_{k+1}}}{\partial x^{i_q}}$. Пусть $\mathrm{T}_{i_1 \cdots i_k}$ – компоненты тензора в координатах (x) и $\mathrm{T}_{i'_1 \cdots i'_k}$ – компоненты в координатах ($\tilde{\sigma}'$). По определению

$$\mathrm{T}_{i'_1 \cdots i'_k} = \mathrm{T}_{i_1 \cdots i_k} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \cdots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial x^{i'_k}}. \tag{1}$$

По определению градиента тензора имеем

$$\begin{gathered} \left(d\mathrm{T}\right)_{i'_1,...,i'_{k+1}} = \sum_q (-1)^q \frac{\partial \mathrm{T}_{i'_1 \cdots i'_q \cdots i'_{k+1}}}{\partial x^{i'_q}} \\ \left(d\mathrm{T}\right)_{i_1,...,i_{k+1}} = \sum_p (-1)^p \frac{\partial \mathrm{T}_{i_1 \cdots i_p \cdots i_{k+1}}}{\partial x^{i_p}} \end{gathered}. \tag{2}$$

Подставив формулы (2) в (1), после преобразования убеждаемся, что $\left(d\mathrm{T}\right)_{(i')}$выражается через $\left(d\mathrm{T}\right)_{(i)}$ по тензорному закону. Покажем это для κ =1, κ + 1 = 2. Пусть T_j – ковектор, тогда $\left(d\mathrm{T}\right)_{ij} = \frac{\partial \mathrm{T}_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \mathrm{T}_j}{\partial x^i}$, $\mathrm{T}_{i'} = \mathrm{T}_i \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}$, $\left(d\mathrm{T}\right)_{k'\ell'} = \frac{\partial \mathrm{T}_{k'}}{\partial x^{\ell'}} - \frac{\partial \mathrm{T}_{\ell'}}{\partial x^{k'}}$.

Имеем, что:

$$\left(d\mathrm{T}\right)_{k'\ell'} = \frac{\partial \mathrm{T}_{k'}}{\partial x^{\ell'}} - \frac{\partial \mathrm{T}_{\ell'}}{\partial x^{k'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\ell'}}\left(\mathrm{T}_k \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{k'}}\left(\mathrm{T}_\ell \frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}}\right) = \frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial x^{\ell'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} + \mathrm{T}_k \frac{\partial^2 x^k}{\partial x^{\ell'}\partial x^{k'}} -$$

$$- \frac{\partial \mathrm{T}_\ell}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} - \mathrm{T}_\ell \frac{\partial^2 x^\ell}{\partial x^{k'}\partial x^{\ell'}} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial x^\ell}\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}}\right)\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} - \left(\frac{\partial \mathrm{T}_\ell}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\right)\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} = \left(\frac{\partial \mathrm{T}_k}{\partial x^\ell} - \frac{\partial \mathrm{T}_\ell}{\partial x^k}\right)\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}} =$$

$$= \left(\partial \mathrm{T}\right)_{k\ell}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^\ell}{\partial x^{\ell'}}. \quad ▶$$

Приведём другое определение градиента кососимметрического тензора.

Тензору $\mathrm{T}_{i_1 \cdots i_k}$ соответствует форма $W = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \mathrm{T}_{i_1 \cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. Определим форму dW степени κ + 1 следующим образом:

$$dW = \sum_{\substack{i_0 \\ i_1 < \ldots < i_k}} \frac{\partial \mathrm{T}_{i_1 \cdots i_k}}{\partial x^{i_0}} dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Если $W = f$, мы имеем $dW = df = \dfrac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ – дифференциал функции.

<u>Теорема 2.</u> Имеет место следующее тождество:

$$dW = \sum_{j_1<..<j_{k+1}} \left(d\mathrm{T}\right)_{j_1\cdots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}$$

◄Доказательство.

Из определения $d\mathrm{T}$ имеем, что

$$\sum_{j_1<\ldots<j_{k+1}} (dT)_{j_1\ldots j_{k+1}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}} = \sum_{j_1<\ldots<j_{k+1}} \sum_q (-1)^q \frac{\partial T_{j_1\cdots \hat{j}_q \cdots j_{k+1}}}{\partial x^{j_q}} dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}.$$

Отметим, что

$$dx^{j_1} \wedge \ldots dx^{j_q} \ldots \wedge dx^{j_{k+1}} = (-1)^q dx^{j_q} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \widehat{dx^{j_q}} \ldots \wedge dx^{j_{k+1}}.$$

Переобозначим индексы суммирования: в q-ом слагаемом положим, что $i_0 = j_q$, $i_1 = j_1$, …, $i_k = j_{k+1}$. В этом случае выполняется неравенство $i_1 < \ldots < i_k$, и индекс i_0 пробегает все значения от 1 до n. ►

<u>Теорема 3.</u> Дважды взятая операция градиента кососимметрического тензора даёт нуль: $d\left(d\mathrm{T}\right) = 0$, $d\left(dW\right) = 0$

◄Доказательство.

Пусть $W = \sum\limits_{i_1<\ldots<i_k} \mathrm{T}_{i_1\cdots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $dW = \sum\limits_{\substack{p \\ i_1<\ldots<i_k}} \dfrac{\partial \mathrm{T}_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^p} dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$,

$d\left(dW\right) = \sum\limits_{\substack{p,q \\ i_1<\ldots<i_k}} \dfrac{\partial^2 \mathrm{T}_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^q \partial x^p} dx^q \wedge dx^p \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$. Выражение $\dfrac{\partial^2 \mathrm{T}_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^q \partial x^p}$ симметрично по индексам p и q, а выражение $dx^p \wedge dx^q$ кососимметрично, то есть $dx^p \wedge dx^q = -dx^q \wedge dx^p$. Поэтому их свертка даёт тождественный нуль. ►

<u>Теорема 4</u>. Пусть W_1 и W_2 дифференциальные формы степени p и q соответственно. Тогда $d\left(W_1 \wedge W_2\right) = dW_1 \wedge W_2 + (-1)^p W_1 \wedge dW_2$.

◄Доказательство: Доказательство проведём для случая, когда формы W_1 и W_2 одночлены. $W_1 = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$, $W_2 = g dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$. Тогда $W_1 \wedge W_2 = fg dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$. Поэтому

$$d\left(W_1\wedge W_2\right)=\frac{\partial f}{\partial x^k}g\,dx^k\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}+$$

$$+\frac{\partial g}{\partial x^k}f\,dx^k\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}=\left(\frac{\partial f}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\right)\wedge$$

$$\wedge\left(g\,dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}\right)+\left(-1\right)^p\left(f\,dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\right)\wedge\left(\frac{\partial g}{\partial x^k}dx^k\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}\right)=$$

$=dW_1\wedge W_2+\left(-1\right)^pW_1\wedge dW_2$, так как

$dx^k\wedge dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}=\left(-1\right)^p dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_p}\wedge dx^k\wedge dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}$.►

Тема 23 Ковариантное дифференцирование

Операция взятия градиента кососимметрического тензора приводит к кососимметрическому тензору ранга на единицу большего:

$$\left(d\mathrm{T}\right)_{i_1\cdots i_{k+1}}=\sum_{g=1}^{k+1}\left(-1\right)^q\frac{\partial\mathrm{T}_{i_1\cdots \hat{i}_q\cdots i_{k+1}}}{\partial x^{i_q}}.$$

Отмечалось, что dT снова являлась тензором. Операция d единственная, не связанная ни с какой геометрией дифференциальная операция над тензорами в том смысле, что все остальные операции сводились к данной чисто алгебраическими операциями (перестановкой индексов, сложением, произведением, свёрткой). Обозначим результат операции

$\dfrac{\partial\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^k}=\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q;k}$. В пространстве с декартовыми координатами (x^1, …, x^n) он не является тензором типа (p, $q+1$) в общем случае.

Теорема 1. Если в пространстве заданы координаты и тензорное поле $\mathrm{T}=\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}$, то поле $\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q;k}=\dfrac{\partial\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}}{\partial x^k}$ преобразуется как тензор типа (p, $q+1$) при всех линейных заменах координат $x^i=a^i_jz^j$, где $a^i_j=const$, $z^i=b^i_jx^j$, где $b^i_ja^j_k=\sigma^i_k=\begin{cases}0, i\neq j\\ 1, i=j\end{cases}$.

◄Доказательство. Для линейных преобразований $\dfrac{\partial x^i}{\partial z^j}=a^i_j=const$ и $\dfrac{\partial^2x^i}{\partial z^j\partial z^k}=0$, $\dfrac{\partial z^i}{\partial x^j}=b^i_j=const$, $a^i_jb^j_k=\delta^i_k$. Из определения тензора имеем, что $\widetilde{\mathrm{T}}^{k_1\cdots k_p}_{\ell_1\cdots\ell_q}=\mathrm{T}^{i_1\cdots i_p}_{j_1\cdots j_q}\dfrac{\partial z^{k_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\dfrac{\partial z^{k_p}}{\partial x^{i_p}}\cdot\dfrac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{\ell_1}}\cdots\dfrac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{\ell_q}}=\mathrm{T}^{(i)}_{(j)}b^{(k)}_{(i)}a^{(j)}_{(\ell)}$. Так как $a^i_j=const$,

$b_k^j = const$, то, дифференцируя последнюю формулу, имеем:

$\widetilde{\mathrm{T}}^{(k)}_{(\ell);r} = \dfrac{\partial \widetilde{\mathrm{T}}^{(k)}_{(\ell)}}{\partial z^r} = \dfrac{\partial \mathrm{T}^{(i)}_{(j)}}{\partial z^r} b^{(k)}_{(i)} a^{(j)}_{(\ell)} = \dfrac{\partial \mathrm{T}^{(i)}_{(j)}}{\partial x^S}\dfrac{\partial x^S}{\partial z^r} b^{(k)}_{(i)} a^{(j)}_{(\ell)} = \mathrm{T}^{(i)}_{(j);S} \cdot a^S_r \cdot a^{(j)}_{(\ell)} \cdot b^{(k)}_{(i)}$ – закон преобразования тензора. ►

Сделаем предположения: 1)операция взятия градиента существенно связана с евклидовой геометрией, 2) она применяется по формуле $\mathrm{T}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q;k} = \dfrac{\partial \mathrm{T}^{i_1 \cdots i_p}_{j_1 \cdots j_q}}{\partial x^k}$ только в евклидовой геометрии, 3) результат этой операции есть тензор.

По каким формулам эта операция должна применяться в других системах координат, связанных с евклидовыми нелинейной заменой? Для этого мы должны вычислить результат применения этой операции к тензорному полю T в евклидовых координатах (x^1, …, x^n), затем преобразовать этот результат в другую систему координат $x^i = x^i(z^1, \ldots, z^n)$. Итак, по определению $\mathrm{T}^{(i)}_{(j);S} = \dfrac{\partial \mathrm{T}^{(i)}_{(j)}}{\partial x^S}$ считается тензором. Тогда $\widetilde{\mathrm{T}}^{(k)}_{(l);r} = \mathrm{T}^{(i)}_{(j);S} \dfrac{\partial x^{(j)}}{\partial z^{(\ell)}} \dfrac{\partial z^{(k)}}{\partial x^{(i)}} \dfrac{\partial x^S}{\partial z^r}$, где $\dfrac{\partial x^{(i)}}{\partial z^{(\ell)}} = \dfrac{\partial x^{j_1}}{\partial z^{\ell_1}} \cdots \dfrac{\partial x^{j_q}}{\partial z^{\ell_q}}$. То же для (k) и (i). Какой же операцией в системе координат (z) компоненты $\widetilde{\mathrm{T}}^{(k)}_{(l);q}$ получаются из компонент $\mathrm{T}^{(k)}_{(l)}$? Рассмотрим для простоты векторные поля $\left(\mathrm{T}^i\right)$ и ковекторные поля $\left(\mathrm{T}_j\right)$:

$\widetilde{\mathrm{T}}^k_{;q} = \mathrm{T}^{(i)}_{;S} \dfrac{\partial z^k}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^S}{\partial z^q}$; $\widetilde{\mathrm{T}}_{\ell;r} = \mathrm{T}_{j;S} \dfrac{\partial x^j}{\partial z^\ell} \dfrac{\partial x^S}{\partial z^r}$. Так как $\mathrm{T}^i_{;S} = \dfrac{\partial \mathrm{T}^i}{\partial x^S}$, но из предыдущих формул вытекает, что

$\widetilde{\mathrm{T}}^k_{;q} = \dfrac{\partial \mathrm{T}^i}{\partial x^S} \dfrac{\partial x^S}{\partial z^q} \dfrac{\partial z^k}{\partial x^i} = \dfrac{\partial \mathrm{T}^i}{\partial z^q} \dfrac{\partial z^k}{\partial x^i}$. Но $\widetilde{\mathrm{T}}^k = \mathrm{T}^i \dfrac{\partial z^k}{\partial x^i}$. Поэтому

$\widetilde{\mathrm{T}}^k_{;q} = \dfrac{\partial \mathrm{T}^i}{\partial z^q} \dfrac{\partial z^k}{\partial x^i} = \dfrac{\partial}{\partial z^q}\left(\widetilde{\mathrm{T}}^k\right) - \mathrm{T}^i \dfrac{\partial}{\partial z^q}\left(\dfrac{\partial z^k}{\partial x^i}\right)$. Так как $\mathrm{T}^i = \widetilde{\mathrm{T}}^S \dfrac{\partial x^i}{\partial z^S}$, то получаем

$\widetilde{\mathrm{T}}^k_{;q} = \dfrac{\partial \widetilde{\mathrm{T}}^k}{\partial z^q} - \widetilde{\mathrm{T}}^S \dfrac{\partial x^i}{\partial z^S} \dfrac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^m} \dfrac{\partial x^m}{\partial z^q}$. Введём обозначения: $\Gamma^k_{Sq} = -\dfrac{\partial x^i}{\partial z^S} \dfrac{\partial x^m}{\partial z^q} \dfrac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^m}$.

Тогда, $\widetilde{\mathrm{T}}^k_{;q} = \dfrac{\partial \widetilde{\mathrm{T}}^k}{\partial z^q} + \Gamma^k_{sq} \widetilde{\mathrm{T}}^S$. Итак, получили теорему.

<u>Теорема 2.</u> Если градиент векторного поля $\left(\mathrm{T}^i\right)$ преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовых координатах (x)

вычисляется по формулам $T^i_{;k} = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^k}$, то в любой другой системе координат (z) градиент вычисляется следующим образом: $\widetilde{T}^k_{;r} = \dfrac{\partial \widetilde{T}^k}{\partial z^r} + \Gamma^k_{sr}\widetilde{T}^S$, где $\Gamma^k_{Sr} = -\dfrac{\partial x^i}{\partial z^S}\dfrac{\partial x^m}{\partial z^r}\dfrac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^m}$.

Аналогичную <u>теорему</u> можно доказать и для ковекторного поля: если градиент ковекторного поля (T_i) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат вычисляется по обычной формуле $T_{i;k} = \dfrac{\partial T_i}{\partial x^k}$, то в любой другой системе координат (z) он вычисляется по формуле: $\widetilde{T}_{k;r} = \dfrac{\partial \widetilde{T}_k}{\partial z^r} - \widetilde{T}_S \Gamma^S_{kr}$.

Как видно, это разные формулы. Однако наборы Γ^i_{qk} здесь общие. Можно получить и общую <u>теорему</u>: Если градиент $T^{(i)}_{(j);k}$ тензорного поля $T^{(i)}_{(j)}$ типа (p, q) преобразуется как тензор при любых заменах координат и в евклидовой системе координат вычисляется по формуле: $T^{(i)}_{(j);k} = \dfrac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$, то в любой другой системе координат $x = x(z)$ он вычисляется по формуле:
$$\widetilde{T}^{(k)}_{(\ell);r} = \frac{\partial \widetilde{T}^{(k)}_{(\ell)}}{\partial x^r} + \sum_{S=1}^{p} \widetilde{T}^{k_1 \dots (k_S \to i) \dots k_p}_{\ell_1 \dots \ell_q} \Gamma^{k_S}_{ir} - \sum_{S=1}^{q} \widetilde{T}^{k_1 \dots k_p}_{\ell_1 \dots (\ell_S \to i) \dots \ell_q} \Gamma^i_{\ell_S r}.$$
(запись $k_1 ... (k_S \to i) ... k_p$ означает, что в наборе $k_1 ... k_p$ следует вместо k_S взять i).

Например, для тензора второго ранга имеем:
$$\widetilde{T}^i_{j;k} = \frac{\partial \widetilde{T}^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k} + \widetilde{T}^p_j \Gamma^i_{pk} - \widetilde{T}^i_p \Gamma^p_{jk}, \qquad \widetilde{T}_{ij;k} = \frac{\partial \widetilde{T}_{ij}}{\partial x^k} - \widetilde{T}_{pj}\Gamma^p_{ik} - \widetilde{T}_{ip}\Gamma^p_{jk},$$
$$\widetilde{T}^{ij}_{;k} = \frac{\partial \widetilde{T}^{ij}}{\partial x^k} + \widetilde{T}^{pj}\Gamma^i_{pk} + \widetilde{T}^{ip}\Gamma^j_{pk}.$$

Выясним, каким образом набор $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ij}(z)$ меняется при замене координат.

Пусть заданы евклидовы координаты (x^1, …, x^n), $x^i = x^i(z(z'))$. Тогда $\Gamma^k_{pq} = -\dfrac{\partial x^i}{\partial z^p}\dfrac{\partial x^j}{\partial z^q}\dfrac{\partial^2 z^k}{\partial x^i \partial x^j} = \dfrac{\partial^2 x^m}{\partial z^p \partial z^q}\dfrac{\partial z^k}{\partial x^m}$. В системе координат ($z'$) имеем:
$$\Gamma^{k'}_{p'q'} = -\frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}}\frac{\partial^2 z^{k'}}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 x^m}{\partial z^{p'} \partial z^{q'}}\frac{\partial z^{k'}}{\partial x^m}.$$

Из этих формул имеем:

$$\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}}=-\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^p}\frac{\partial x^j}{\partial z^q}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}}=-\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}}=$$

$$=-\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}+\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\text{, так как}$$

$$\frac{\partial^2\left(z^k\left(x\left(z'\right)\right)\right)}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}=\frac{\partial}{\partial z^{p'}}\left(\frac{\partial z^k}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial z^{q'}}\right)=\frac{\partial^2 x^i}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\frac{\partial z^k}{\partial x^i}+\frac{\partial x^i}{\partial z^{p'}}\frac{\partial^2 z^k}{\partial x^i\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial z^{q'}}\text{. Поэтому}$$

$$\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}}+\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}=\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\quad\text{и}$$

$$\frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}}+\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\right)=\frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\frac{\partial z^k}{\partial x^j}\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}=\frac{\partial^2 x^j}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\frac{\partial z^{k'}}{\partial x^j}=\Gamma^k_{p'q'}.$$

Итак, $$\Gamma^{k'}_{p'q'}=\frac{\partial z^{k'}}{\partial z^k}\left(\Gamma^k_{pq}\frac{\partial z^p}{\partial z^{p'}}\frac{\partial z^q}{\partial z^{q'}}+\frac{\partial^2 z^k}{\partial z^{p'}\partial z^{q'}}\right).\qquad(1)$$

Определение. Будем говорить, что задана операция ковариантного дифференцирования (взятия градиента) тензоров любого типа, если в любой системе координат (z^1, …, z^n) задан набор функций $\Gamma^k_{pq}(z)$, который при замене координат $z = z(z')$ преобразуется по формуле (1). Величины $\Gamma^k_{pq}(z)$ называются символами Кристоффеля.

Операция ковариантного дифференцирования называется также дифференциально-геометрической связностью. Связность называется евклидовой, если существуют такие координаты (x^1, …, x^n), что $\Gamma^k_{ij}=0$, то есть $T^i_{(j);k}=\frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k}$ в этих координатах. Такие координаты называются также евклидовыми. Операцию ковариантного дифференцирования обозначим символом ∇ : $\nabla_k T^{(i)}_{(j)}=T^{(i)}_{(j);k}$.

Пусть в каждой системе координат (x^1, …, x^n) заданы величины $\Gamma^i_{kj}(x)$. Зададим ковариантную производную векторных и ковекторных полей. Покажем, что закон преобразования (1) при заменах координат $x=x(x')$ для величин Γ^i_{kj} определяется исходя из требования, что результат операции ковариантного дифференцирования есть тензор.

Теорема 3. При замене координат $x^i=x^i(x^{1'},...,x^{n'})$ величины Γ^i_{kj} преобразуются по формуле: $\Gamma^{i'}_{k'j'}=\Gamma^i_{kj}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}+\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'}\partial x^{j'}}$.

◀Доказательство. Так как $T^i_{;j} = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k$ есть тензор $\left(T^i = T^{i'} \dfrac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \right)$,

то $$T^{i'}_{;j} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^j} + \Gamma^{i'}_{k'j'} T^{k'} = \left(\frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} \right) \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} =$$

$$= \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^{j'}} \left(T^{k'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \right) + \Gamma^i_{kj} T^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial T^{k'}}{\partial x^{j'}} + T^{k'} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} +$$

$$+ \Gamma^i_{kj} T^{k'} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial T^{i'}}{\partial x^{j'}} + \left(\Gamma^i_{kj} \frac{\partial x^k}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{d^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} \right) T^{k'}.$$ ▶

Следствие 1. Символ Γ^i_{kj} преобразуются как тензор только при линейных или аффинных преобразованиях координат $x^i = x^i(x^{1'}, \ldots, x^{n'})$, где $\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}} \equiv 0 \ \forall i, k', j'$.

Следствие 2. Альтернированное выражение $T^i_{kj} = \Gamma^i_{kj} - \Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{[kj]}$ образует тензор, который называется тензором кручения.

◀Доказательство. Из формулы в условии теоремы видно, что при перестановке индексов k' и j' слагаемое $\dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial^2 x^i}{\partial x^{k'} \partial x^{j'}}$ не изменится. Поэтому закон преобразования для $T^{i'}_{k'j'}$ не будет содержать этого слагаемого, то есть будет тензорным. ▶

Определение. Связность Γ^i_{kj} называется симметричной, если тензор кручения $T^i_{kj} = \Gamma^i_{[kj]}$ тождественно равен нулю, то есть $\tilde{A}^i_{kj} = \Gamma^i_{jk}$.

Ковариантное дифференцирование тензоров любого ранга однозначно определяется следующими требованиями:

1) ковариантное дифференцирование есть линейная операция;

2) ковариантная производная тензора нулевого ранга, есть обычная производная $\nabla_k f = \dfrac{\partial f}{\partial x^k}$;

3) ковариантная производная векторного и ковекторного полей определяется формулами: $T^i_{;j} = \dfrac{\partial T^i}{\partial x^j} + \Gamma^i_{kj} T^k$; $T_{i;j} = \dfrac{\partial T_i}{\partial x_j} - \Gamma^k_{ij} T_k$.

4) ковариантная производная произведения:

$$\nabla_k \left(T^{(i)}_{(p)} S^{(j)}_{(q)} \right) = \left(\nabla_k T^{(i)}_{(p)} \right) S^{(j)}_{(q)} + T^{(i)}_{(p)} \left(\nabla_k S^{(j)}_{(q)} \right)$$

Теорема 4. При выполнении перечисленных выше условий 1–4 ковариантная производная тензоров второго ранга задаётся следующими формулами:

$$\nabla_k T^{ij} = \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^k} + \Gamma^i_{\ell k} T^{\ell j} + \Gamma^j_{\ell k} T^{i\ell}, \quad \nabla_k T^i_j = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{\ell k} T^\ell_j - \Gamma^\ell_{jk} T^i_\ell,$$

$\nabla_k T_{ij} = \dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\ell_{ik} T_{\ell j} - \Gamma^\ell_{jk} T_{i\ell}$. Для тензоров $T^{(i)}_{(j)}$ типа (p, q) ковариантная производная вычисляется по формуле:

$$\nabla_k T^{(j)}_{(i)} = \frac{\partial T^{(i)}_{(j)}}{\partial x^k} - T^{(i)}_{j j_2 \dots j_q} \Gamma^j_{j_1 k} - \dots - T^{(i)}_{j_2 \dots j} \Gamma^j_{j_q k} + T^{i i_2 \dots i_p}_{(j)} \Gamma^{i_1}_{ik} + \dots + T^{i_1 \dots i}_{(j)} \Gamma^{i_p}_{ik}.$$

◄Доказательство. Проведём для тензоров T_{ij} типа (0, 2). Пусть e_i – базисные векторные поля, e_i – базисные ковекторные поля. Поэтому имеем: $\nabla_k e_i = \Gamma^j_{ik} e_j$, $\nabla_k e^i = -\Gamma^i_{jk} e^j$. Любой тензор $T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \dots e_{i_p} e^{j_1} \dots e^{j_q}$. Тензор типа (0, 2): $T = T_{ij} e^i e^j$. Тогда

$$\nabla_k(T) = \nabla_k(T_{ij}) e^i e^j + T_{ij}(\nabla_k e^i) e^j + T_{ij} e^i (\nabla_k e^j) =$$

$$= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} e^i e^j - T_{ij} \Gamma^i_{\ell k} e^\ell e^j - T_{ij} e^i \Gamma^j_{\ell k} e^\ell = \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\ell_{ik} T_{\ell j} - \Gamma^\ell_{jk} T_{i\ell} \right) e^i e^j.$$ Значит, компоненты тензора $\nabla_k T$ имеют вид: $\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^\ell_{ik} T_{\ell j} - \Gamma^\ell_{jk} T_{i\ell}$, а это и есть $T_{ij;k}$ по определению. ►

Пусть задан вектор $\xi = (\xi^k)$ в некоторой точке P. Производная тензора $T^{(i)}_{(j)}$ по направлению определяется формулой: $\nabla_\xi T^{(i)}_{(j)} = \xi^k \nabla_k T^{(i)}_{(j)}$. Это есть тензор того же типа в точке Р. Пусть теперь в пространстве заданы координаты (x^1, …, x^n), ковариантное дифференцирование Γ^i_{kj} и произвольная кривая $x^i = x^i(t)$ на некотором отрезке $a \le t \le b$.

Определение. Будем говорить, что векторное (тензорное) поле T ковариантно постоянно или параллельно вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ на отрезке $a \le t \le b$, если ковариантная производная этого поля T в точках кривой по направлению вектора скорости этой кривой равна нулю: $\nabla_\xi T = \xi^k \nabla_k T \equiv 0, \xi^k \equiv \dfrac{dx^k}{dt}$.

Пример. Если мы двигаемся вдоль кривой $x^i = x^i(t)$ и если производная функции f по направлению вектора скорости этой кривой равна нулю, то функция не меняется вдоль кривой: $\xi^k \dfrac{\partial f}{\partial x^k} = \dfrac{d}{dt} f\left(x^1(t),...,x^n(t)\right) \equiv 0$, где $\xi^k \equiv \dfrac{dx^k}{dt}$, то $f\left(x^1(t),...,x^n(t)\right) = const$. Для векторных полей мы имеем: $\nabla_\xi \mathrm{T}^i = \xi^k \nabla_k \mathrm{T}^i = \xi^k \left(\dfrac{\partial \mathrm{T}^i}{\partial z^k} + \Gamma^i_{jk} \mathrm{T}^j \right) = 0$.

Понятие параллельности зависит от кривой. Исключение представляет лишь евклидова геометрия: в евклидовых координатах (x^1, …, x^n) определяются параллельные векторные поля, имеющие постоянные компоненты в этих координатах. Эти поля параллельны вдоль любой кривой. Так как результат ковариантного дифференцирования не зависит от выбора координат, то те же поля будут параллельны в любой системе координат (z), хотя у них в новой системе координат компоненты будут зависеть от точки. Итак, понятие параллельности векторов в разных точках зависит как от способа ковариантного дифференцирования, так и от пути, соединяющего эти две точки.

<u>Определение.</u> <u>Параллельным переносом вектора</u> T^i_p из точки $P = \left(x^1_0,...,x^n_0\right)$ в точку $Q = \left(x^1_1,...,x^n_1\right)$ вдоль кривой $x^i = x^i(t)$, $0 \le t \le 1$, ведущей из P в Q, называется векторное поле T^i, которое задано во всех точках кривой и параллельно вдоль этой кривой: $\dfrac{dx^k}{dt} \nabla_k \mathrm{T}^i \equiv 0, \quad 0 \le t \le 1$.

При $t = 0$ векторное поле T^i в точке P должно совпадать с исходным вектором T^i_p . При $t = 1$ векторное поле T^i в точке Q есть вектор T^i_Q, называющийся результатом переноса вектора T^i_P вдоль заданной кривой $x^i = x^i(t)$ из P в Q. В координатах (x^1, …, x^n) получаем:
$\dfrac{dx^k}{dt} \nabla_k \mathrm{T}^i = \dfrac{d\mathrm{T}^i}{dx^k} \dfrac{dx^k}{dt} + \mathrm{T}^j \Gamma^i_{jk} \dfrac{dx^k}{dt} = \dfrac{d\mathrm{T}^i}{dt} + \left(\dfrac{dx^k}{dt} \Gamma^i_{jk} \right) \mathrm{T}^\ell = 0$. Это есть уравнение параллельного переноса.

Из теории дифференциальных уравнений можно сделать вывод, что вдоль любой фиксированной гладкой кривой результат параллельного переноса существует, однозначно определяется начальным вектором T^i_P и линейно зависит от начального вектора T^i_P.

Если связность евклидова, то есть для них $\Gamma^i_{kj} \equiv 0$ в евклидовых координатах, то уравнение параллельного переноса имеет вид: $\dfrac{d\mathrm{T}^i}{dt} = 0$. Значит, в евклидовой геометрии и евклидовых координатах параллельными вдоль любой кривой являются векторы, прикреплённые к разным точкам и имеющие одинаковые компоненты. В любых координатах результат параллельного переноса вектора вдоль кривой не зависит от кривой, если геометрия евклидова.

Рассмотрим линии, являющиеся аналогом прямых для случая произвольной связности. Это геодезические линии.

Определение. Линия $x^i = x^i(t)$ называется геодезической, если её вектор скорости $\mathrm{T}^i = \dfrac{dx^i}{dt}$ параллелен вдоль неё самой, то есть $\nabla_k(\mathrm{T}) = 0$. В координатах имеем, что

$$0 = \nabla_{\mathrm{T}}(\mathrm{T})^j = \frac{dx^i}{dt}\nabla_i\left(\frac{dx^j}{dt}\right) = \frac{dx^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{dx^j}{dt}\right) + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\right) = \frac{d^2x^j}{dt^2} + \Gamma^j_{ki}\frac{dx^k}{dt}\frac{dx^i}{dt}. \quad (2)$$

Если $\Gamma^j_{ki} = 0$, то решениями этого уравнения есть обыкновенные прямые линии, как и должно быть в евклидовой геометрии. Для произвольной связности уравнение (2) есть система дифференциальных уравнений второго порядка. В окрестности точки $P = \left(x_0^1, \dots, x_0^n\right)$ существует единственное решение этого уравнения с начальными условиями $x^j\big|_{t=0} = x_0^j$, $\left.\dfrac{dx^j}{dt}\right|_{t=0} = \left(x_0^j\right)'$, $j = 1, .., n$, для любых x_0^j и $\left(x_0^j\right)'$ по теореме существования и единственности. Поэтому в некоторой окрестности любой точки P и для любого вектора T^i_p в этой точке существует единственная геодезическая линия связности $\left(\Gamma^i_{jk}\right)$, которая начинается в точке P с начальным вектором скорости T^i_p.

Приведем еще одно определение геодезической линии (рис. 46).

Определение. Линия на поверхности называется геодезической, если её главная нормаль во всех точках линии совпадает с нормалью к поверхности.

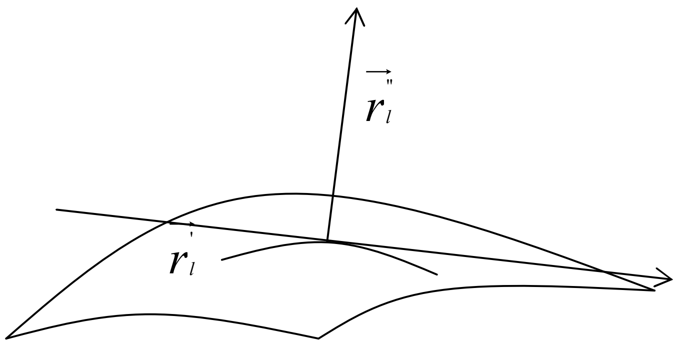

Рисунок 46

Прямая линия считается геодезической, так как любая нормаль к прямой может быть принята за главную. На сфере геодезическими линиями являются окружности больших кругов, т. к. главная нормаль такой окружности в каждой её точке проходит через центр сферы и совпадает с нормалью к сфере. Выведем формулу для нахождения геодезической линии.

Пусть задана поверхность $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$, а геодезическая линия на поверхности задана уравнениями $u = u(l)$ и $v = v(l)$. Будем считать, что поверхность отнесена к ортогональной системе координат, то есть

$$E = \overrightarrow{r_u^2}\,,\ F = \overrightarrow{r_u}\overrightarrow{r_v}\,,\ G = \overrightarrow{r_v^2}\,. \tag{3}$$

Вектор $\dfrac{d^2\vec{r}}{dl^2}$ направлен по главной нормали к линии, а так как линия геодезическая, то он перпендикулярен касательной плоскости поверхности.

Таким образом, $\dfrac{d^2\vec{r}}{dl^2}\overrightarrow{r_u} = 0$; $\dfrac{d^2\vec{r}}{dl^2}\overrightarrow{r_v} = 0$.

Вектор $\dfrac{d\,\vec{r}}{dl} = \overrightarrow{r_u}\dfrac{du}{dl} + \overrightarrow{r_v}\dfrac{dv}{dl}$;

$$\frac{d^2\vec{r}}{dl^2} = \overrightarrow{r_{uu}}\left(\frac{du}{dl}\right)^2 + 2\overrightarrow{r_{uv}}\frac{du}{dl}\frac{dv}{dl} + \overrightarrow{r_{vv}}\left(\frac{dv}{dl}\right)^2 + \overrightarrow{r_u}\frac{d^2u}{dl^2} + \overrightarrow{r_v}\frac{d^2v}{dl^2}.$$

Умножим последнее равенство сначала на $\overrightarrow{r_u}$, а потом на $\overrightarrow{r_v}$ поочерёдно.

$$\overrightarrow{r_{uu}}\left(\frac{du}{dl}\right)^2\overrightarrow{r_u} + 2\overrightarrow{r_{uv}}\frac{du}{dl}\frac{dv}{dl}\overrightarrow{r_u} + \overrightarrow{r_{vv}}\left(\frac{dv}{dl}\right)^2\overrightarrow{r_u} + \overrightarrow{r_u}\frac{d^2u}{dl^2}\overrightarrow{r_u} = 0$$

$$\overrightarrow{r_{uu}}\left(\frac{du}{dl}\right)^2\overrightarrow{r_v} + 2\overrightarrow{r_{uv}}\frac{du}{dl}\frac{dv}{dl}\overrightarrow{r_v} + \overrightarrow{r_{vv}}\left(\frac{dv}{dl}\right)^2\overrightarrow{r_v} + \overrightarrow{r_v}\frac{d^2v}{dl^2}\overrightarrow{r_v} = 0.$$

Дифференцируем по u и v равенства (3):

$$\frac{\partial E}{\partial u} = 2\overrightarrow{r_{uu}}\overrightarrow{r_u};\quad \frac{\partial E}{\partial v} = 2\overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_u};\quad \frac{\partial F}{\partial u} = \overrightarrow{r_{uu}}\overrightarrow{r_v} + \overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_v} = 0;\quad \frac{\partial F}{\partial v} = \overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_v} + \overrightarrow{r_{vv}}\overrightarrow{r_u} = 0;$$

$$\frac{\partial G}{\partial u} = 2\overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_v};\quad \frac{\partial E}{\partial v} = 2\overrightarrow{r_{vv}}\overrightarrow{r_v}.$$

Из последних равенств имеем, что:

$$\overrightarrow{r_{uu}}\overrightarrow{r_u} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u};\quad \overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_u} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v};\quad \overrightarrow{r_{vv}}\overrightarrow{r_u} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u},\quad \overrightarrow{r_{uu}}\overrightarrow{r_v} = -\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v};\quad \overrightarrow{r_{uv}}\overrightarrow{r_v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u};$$

$$\overrightarrow{r_{vv}}\overrightarrow{r_v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}$$

Следовательно,

$$\frac{d^2u}{dl^2} = -\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{dl}\right)^2 - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{du}{dl}\frac{dv}{dl} + \frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{dl}\right)^2 \tag{4}$$

$$\frac{d^2 v}{dl^2} = -\frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}\left(\frac{du}{dl}\right)^2 - \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{du}{dl}\frac{dv}{dl} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{dl}\right)^2 \qquad (5)$$

При интегрировании (4) и (5) следует учесть, что

$$dl^2 = Edu^2 + Gdv^2 \quad \text{или} \quad E\left(\frac{du}{dl}\right)^2 + G\left(\frac{dv}{dl}\right)^2 = 1 \qquad (6)$$

Уравнения (4), (5), (6) позволяют выразить вдоль геодезической координаты u, v как функции от параметра l. Более простым уравнением является следующее дифференциальное уравнение, непосредственно связывающее u и v:

$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{d\ell}}{\frac{du}{d\ell}}$; $\frac{d^2v}{du^2} = \frac{d}{d\ell}\left(\frac{\frac{dv}{d\ell}}{\frac{du}{d\ell}}\right)$: $\frac{du}{d\ell} = \frac{\frac{du}{d\ell}\frac{d^2v}{d\ell^2} - \frac{dv}{d\ell}\frac{d^2u}{d\ell^2}}{\left(\frac{du}{d\ell}\right)^3}$. С помощью этих равенств находим из 4) и 5)

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v} + \left(\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{G}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\frac{dv}{du} + \left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 - \frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{du}\right)^3.$$

Согласно теории дифференциальных уравнений последнее равенство определяет однозначно v как функцию от u, если при некотором $u = u_0$ будут заданы значения $v = v_0$ и $\frac{dv}{du} = v_0$. Так как $\frac{dv}{du}$ задаёт направление геодезической, то через каждую точку поверхности в данном направлении проходит одна и только одна геодезическая линия.

Мы встретились с двумя определениями евклидовых координат:

1) координаты евклидовы, если метрика g_{ij} в них имеет евклидов вид $g_{ij} = \delta_{ij}$;

2) координаты евклидовы, если компоненты Γ_{ij}^k связности в этих координатах нулевые: $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$, $i, j, k = 1,...,n$.

Понятие связности и понятие римановой метрики не связаны между собой. Однако существует способ сопоставить метрике связность.

<u>Определение.</u> Связность Γ_{ij}^k называется <u>согласованной с метрикой</u> g_{ij}, если ковариантная производная метрического тензора тождественно равна 0: $\nabla_k g_{ij} = 0$, $k, i, j = 1,...,n$.