Лекция 3. МОНОТОННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса.
2. Число e.
3. Принцип выбора.
4. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Теорема о вложенных отрезках.

1. Определение монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса.

Определение 1. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***неубывающей***, если ее элементы удовлетворяют условию

$$x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots .$$

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***возрастающей***, если ее элементы удовлетворяют условию

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots .$$

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***невозрастающей***, если ее элементы удовлетворяют условию

$$x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots .$$

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***убывающей***, если ее элементы удовлетворяют условию

$$x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots .$$

Определение 2. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***монотонной***, если удовлетворяет неравенствам определения 1. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***строго монотонной***, если она возрастающая или убывающая.

Пример. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является убывающей, $(2n-1)_{n=1}^{\infty}$ – возрастающей, $(1;1;3;3;5;5;\ldots)$ – неубывающей, $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\ldots\right)$ – невозрастающей.

Очевидно, что монотонные последовательности ограничены,

по крайней мере, с одной стороны: неубывающие снизу, невозрастающие сверху.

Терема 1 (Вейерштрасса). *Каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.*

► Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ неубывающая, т.е. $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$.

Поскольку $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, то $\forall n \in \mathbf{N}\ \exists M : x_n \le M$.

Рассмотрим множество $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n \ldots\}$ значений последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. В силу условия, оно не пусто и ограничено. Тогда это множество имеет точную верхнюю грань $\sup X = a$. Согласно определению верхней грани

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon):\quad x_{N(\varepsilon)} > \sup X - \varepsilon \text{, т.е. } x_{N(\varepsilon)} > a - \varepsilon .$$

С другой стороны, по определению верхней грани $\forall n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_{N(\varepsilon)} \le a < a + \varepsilon$.

Тогда $\forall\, n > N(\varepsilon)$ получим $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Отсюда $|x_n - a| < \varepsilon$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Аналогично теорема доказывается в случае, когда последовательность невозрастающая. ◄

Замечание. Не всякая сходящаяся последовательность является монотонной.

Пример. Последовательность $\left(\frac{(-1)^n}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n} = 0$, но она не является монотонной.

2. Число e.

Терема 2. *Последовательность* $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ *имеет предел, равный* e *:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

► *Шаг 1.* Докажем, что последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонна.

Применяя формулу бинома Ньютона, имеем

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=$$

$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Тогда

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\ldots+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).$$

Поскольку $1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}$ для всех k, $0<k<n$, то каждое слагаемое в x_{n+1} больше каждого слагаемого в x_n. Потому для любого n верно $x_n<x_{n+1}$.

Шаг 2. Докажем, что последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена.

Для каждого члена последовательности имеем

$$2\le x_n\le 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

т.е. $2\le x_n\le 3$.

Итак, последовательность $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает и ограничена. По теореме Вейерштрасса она сходится и $2\le\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 3$. ◄

Замечание. Предел последовательности $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ называется ***числом*** ***e*** **:**

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

Число e является иррациональным: e=2,7182818…. В математическом анализе e играет особую роль. Показательная функция $y=e^x$ называется ***экспонентой*** и иногда обозначается $y=\exp(x)$. Логарифмы по основанию e называются ***натуральными***, их обозначаются

$$\ln a=\log_e a.$$

Модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным обозначают $M=\lg e=0{,}4343\ldots$ Тогда

$$\lg a=M\cdot\ln a=\lg e\cdot\ln a.$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}\cdot\left(\frac{-4}{n+3}\right)\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+3}}=e^{-4}.$$

3. Принцип выбора.

Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Если удалить часть элементов так, чтобы оставшихся элементов осталось бесконечно много, то получим подпоследовательность (частичная последовательность)

$$\left(x_{k_n}\right)_{n=1}^{\infty}=\left(x_{k_1};x_{k_2};x_{k_3};\ldots\right),$$

где $k_1<k_2<k_3<\ldots$.

Саму последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ можно рассматривать как подпоследовательность.

Пример. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ имеет подпоследовательности: $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{2n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{1}{n+5}\right)_{n=1}^{\infty}$ и другие.

Определение 3. ***Частичным пределом*** последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется предел ее подпоследовательности $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$.

Определение 4. Наибольший частичный предел числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***верхним пределом***.

Обозначается: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Наименьший частичный предел числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***нижним пределом***.

Обозначается: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Пример. Последовательность $x_n=(-1)^n$ имеет верхний предел

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n=\lim_{k\to\infty}(-1)^{2k}=1,$$

и нижний предел

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}(-1)^n=\lim_{k\to\infty}(-1)^{2k-1}=-1.$$

Теорема 3. *Если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к пределу a, то любая ее подпоследовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ сходится к этому же самому пределу a.*

► По определению предела

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \iff \forall\,\varepsilon>0\ \exists N=N(\varepsilon):\forall n\geq N(\varepsilon)\ \ |x_n-a|<\varepsilon.$$

И пусть $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ произвольная подпоследовательнoть последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Можно найти номер k_N такой, что $k_N\geq N$, что для всех номеров $n>N$ элементы подпоследовательности $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют неравенству $|x_{k_n}-a|<\varepsilon$. Это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_{k_n}=a$. ◄

Если все подпоследовательности $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходятся к одному и тому же пределу a, то и сама последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится к пределу a.

Теорема 4. *Любая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ содержит монотонную подпоследовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$*.

► *Случай 1.* Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ не имеет наибольшего элемента.

Пусть последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ после удаления $(m-1)$ элементов имеет остаток x_m, x_{m+1}, ... без наибольшего элемента. Тогда и все последующие остатки такими элементами не обладают. Обозначим $k_1=m$. В остатке, начинающемуся с x_{k_1}, нет наибольшего элемента. Поэтому можно найти x_{k_2} такое, что $x_{k_1}<x_{k_2}$, где $k_1<k_2$. Затем рассмотрим остаток последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, начинающийся с элемента x_{k_2}. Выберем x_{k_3} такое, что $x_{k_2}<x_{k_3}$, где $k_2<k_3$. Аналогично поступая дальше, получим возрастающую последовательность $\{x_{k_1};x_{k_2};x_{k_3};...\}$.

Случай 2. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет наибольший элемент. И пусть x_{k_1} один из наибольших элементов остатка, начинающегося с x_1. Обозначим x_{k_2} наибольший элемент остатка, начинающегося с элемента x_{k_1}. Поступая таким образом дальше, получим невозрастающую последовательность $x_{k_1}>x_{k_2}>x_{k_3}>...$. ◄

Теорема 5 (принцип выбора). *Любая ограниченная последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *имеет сходящуюся подпоследовательность* $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$.

► По теореме 4 можно выбрать монотонную последовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$, которая является ограниченной. По теореме Вейерштрасса последовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся.◄

4. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши.

Определение 4. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется ***фундаментальной***, если для любого малого действительного числа ε найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, больших $N(\varepsilon)$ и любого $p \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Символическая запись: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна $\Leftrightarrow$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall\, p \in \mathbf{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon .$$

Геометрически это означает, что если последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна, то $\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon)$ такое, что расстояние между любыми двумя членами последовательности с номерами, большими, чем $N(\varepsilon)$, меньше ε.

Теорема 6 (критерий Коши сходимости последовательности). *Для того, чтобы последовательность* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

► 1. *Необходимость.*

Поскольку последовательность сходится, то согласно определению предела, имеем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Leftrightarrow\; \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \;\; |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $\forall\, p \in \mathbf{N}$

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+p} - a + a - x_n| \leq |x_{n+p} - a| + |a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна.

2. *Достаточность.*

Поскольку последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна, то по определению имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon): \forall n \geq N(\varepsilon) \text{ и } \forall\, p \in \mathbf{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon .$$

Отсюда $x_n - \varepsilon < x_{n+p} < x_n + \varepsilon$. Из этого неравенства заключаем, что, зафиксировав номер $N(\varepsilon)$, все остальные элементы последовательности с большими номерами лежат в окрестности точки x_n.

Положим

$$A = \max\left\{ |x_1|; |x_2|; \ldots; |x_{N(\varepsilon)} - \varepsilon|; |x_{N(\varepsilon)} + \varepsilon| \right\}.$$

Тогда $\forall n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $|x_n| \leq A$. Значит, последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограничена.

Согласно принципу выбора из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$: $\lim\limits_{n\to\infty} x_{k_n} = a$.

Из фундаментальности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ можно записать $|x_{k_n} - x_n| < \varepsilon$. Переходя в данном неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим $|a - x_n| < \varepsilon$. Следовательно, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ является сходящейся.◄

Пример. Исследовать последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на сходимость, если

$$x_n = 1 + \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos n}{2^n}.$$

Решение. Для любого $p \in \mathbf{N}$

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\cos(n+2)}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}}\right|\le$$

$$\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}<\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+p}}+\ldots=$$

$$=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon .$$

Тогда $n>-\log\varepsilon$.

Полагая $N(\varepsilon)=[-\log\varepsilon]+1$, заключаем, что последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна. Согласно критерию Коши, она сходится. Однако, чему равен ее предел, неизвестно.

Определение 5. Последовательность отрезков $([a_n;b_n])_{n=1}^{\infty}$ (рис.1) называется ***вложенной***, если она удовлетворяет условиям:

1) каждый следующий отрезок содержится в предыдущем

$$[a_1;b_1]\supset[a_2;b_2]\supset\ldots\supset[a_n;b_n]\supset\ldots,$$

2) концы отрезков $\forall n\in\mathbf{N}$ удовлетворяют неравенству

$$a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n ,$$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

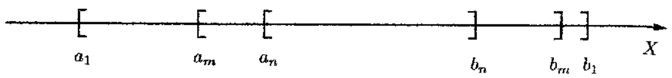

Рис.1.

Теорема 6. *Для любой последовательности вложенных отрезков* $([a_n;b_n])_{n=1}^{\infty}$ *существует единственная точка, принадлежащая всем отрезкам этой последовательности.*

► *1. Существование.*

Из условия 2) следует, что концы $a_1;a_2;a_3;\ldots$ образуют неубывающую последовательность, а правые концы $b_1;b_2;b_3;\ldots$ – невозрастающую последовательность.

Поэтому $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограничена снизу, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ – ограничена сверху. Следовательно, существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c_2$.

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}b_n-\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c_1-c_2=0$.

Значит, $c_1=c_2$, т.е. последовательности $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ имеют общий предел $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=c$.

Тогда $\forall n\in\mathbf{N}$ справедливо неравенство $a_n\le c\le b_n$. Это значит, что существует точка c , принадлежащая всем отрезкам.

2. Единственность.

Предположим, что существует еще одна точка d , $c\ne d$, которая принадлежит всем отрезкам. Тогда для любого $n\in\mathbf{N}$ выполняется неравенство $b_n-a_n\ge|c-d|\ne0$.

Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)\ne0$, что противоречит условию.◄

Вопросы для самоконтроля

1. Какая последовательность называется монотонной? Приведите примеры монотонных и строго монотонных последовательных последовательностей.
2. Сформулируйте теорему Вейерштрасса. Является ли ограниченность последовательности необходимым и достаточным условием сходимости: а) монотонной последовательности, б) произвольной последовательности?
3. Сформулируйте определение подпоследовательности. Является ли сама последовательность подпоследовательностью?
4. Что называется нижним и верхним пределом последовательности? Сформулируйте принцип выбора.
5. Дайте определение фундаментальной последовательности и сформулируйте критерий Коши.
6. Сформулируйте и докажите теорему о вложенных отрезках.