Лекция 3. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

1. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями.
2. Производная неявной функции.
3. Логарифмическая производная.
4. Производные и дифференциалы высших порядков.

1. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями.

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $t \in T \subset \mathbf{R}$.

Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы для любого $t \in T$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Кроме этого, будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, которая также дифференцируема. Тогда функцию $y = y(x)$ заданную параметрическими уравнениями (1), можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, считая t промежуточным аргументом.

Продифференцировав функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, по правилу дифференцирования сложной функции, получим $y'_x = \psi'(t) \cdot t'_x$. Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Учитывая, что $\varphi'(t) = x'_t$, $\psi'(t) = y'_t$, окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t). \end{cases}$$

Пример. Найти $y'(x)$, если

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

где $0 < t < \pi$.

Решение. Имеем:

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y'_x = -\dfrac{\cos t}{\sqrt{1-\cos^2 t}}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{R}, \end{cases} \Rightarrow$$

Отсюда

$$y'_x = -\frac{\dfrac{x}{R}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{R}\right)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}.$$

2. Производная неявной функции.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема. Если в уравнении $F(x, y) = 0$ под y подразумевать функцию $y(x)$, то это уравнение обращается в тождество по аргументу x:

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [a; b].$$

Дифференцируем уравнение по x и считаем, что y есть функция x. Получается новое уравнение, содержащее x, y и y'. Разрешая его относительно y', находим производную искомой функции $y = f(x)$ заданной в неявном виде.

Пример. Найти производную функции $x^3 + x^2y^2 - xy - y^3 = 0$ заданной неявно.

Решение. Продифференцируем данное уравнение по переменной x, считая, что y есть функция от x:

$$3x^2 + 2xy^2 + 2x^2 y\,y' - y - x\,y' - 3y^2\,y' = 0.$$

Отсюда $y' = \dfrac{y-3x^2-2xy^2}{2x^2y-x-3y^2}$.

3. Логарифмическая производная.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x)>0 \quad \forall x\in[a;b]$. Тогда определен логарифм

$$\ln y = \ln f(x).$$

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной x, имеем

$$(\ln y)' = (\ln f(x))'.$$

Отсюда

$$\frac{y'}{y} = (\ln f(x))' \text{ и } y' = y\cdot(\ln f(x))'.$$

Производная $(\ln f(x))'$ от логарифма функции $f(x)$ называется ***логарифмической производной***.

Логарифмическое дифференцирование удобно применять в двух случаях.

1. При нахождении производной большого числа сомножителей.

Действительно, пусть $y=u_1u_2...u_n$, где каждая из функций u_i, $i=\overline{1,n}$, дифференцируема и $u_i>0 \quad \forall x\in D(f)$. Логарифмируя функцию y, имеем $\ln y=\ln u_1+\ln u_2+...+\ln u_n$. Отсюда

$$\frac{y'}{y}=\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+...+\frac{u_n'}{u_n}.$$

Умножая левую и правую части последнего равенства на y, имеем

$$y'=u_1u_2...u_n\left(\frac{u_1'}{u_1}+\frac{u_2'}{u_2}+...+\frac{u_n'}{u_n}\right).$$

2. При нахождении производной степенно-показательной функции.

Рассмотрим функцию $y=u(x)^{v(x)}$, $u(x)>0$, у которой основание степени $u(x)$ и ее показатель $v(x)$ являются функциями переменной x. Предположим, что функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемые функции для рассматриваемых значений x. Логарифмируя степенно-показательную функцию, имеем

$$\ln y = v(x)\cdot \ln u(x).$$

Дифференцируем последнее равенство с учетом того, что правая и левая его части являются сложными функциями аргумента x. Получаем

$$\frac{y'}{y}=v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Откуда

$$y'=u(x)^{v(x)}\ln u(x)\cdot v'(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}\cdot u'(x).$$

Таким образом, производная степенно-показательной функции равна сумме производных этой функции, если ее рассматривать сначала как показательную, а затем как степенную.

Пример. Найти производную функции $y=x^x$, $x>0$.

Решение. Логарифмируя степенно-показательную функцию $y=x^x$, получим

$$\ln y = x\cdot\ln x.$$

Дифференцируем обе части равенства:

$$\frac{y'}{y}=\ln x + x\cdot\frac{1}{x}.$$

Отсюда $y'=x^x(\ln x+1)$.

4. Производные и дифференциалы высших порядков.

Пусть функция $y=f(x)$ является дифференцируемой. Производная $f'(x)$ является также функцией от x и может быть дифференцируема.

Производная от производной функции $y=f(x)$ называется ***производной второго порядка*** или ***второй производной функции***.

Обозначается: y'', $f''(x)$.

Механический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ – закон движения материальной точки, тогда первая производная определяет скорость движения $v = s'(t)$. Вторая же производная есть скорость изменения скорости движения, т.е. ускорение $a = \frac{dv}{dt} = s''(t)$.

Аналогично вводятся производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Производная от производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется ***производной третьего порядка***.

Обозначается: y''', $f'''(x)$.

Аналогично

$$y^{IV} = (y''')' = f^{IV}(x).$$

Производной n***-го порядка*** от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

Пример. Найти производную n-го порядка от функции $y = \sin x$.

Решение. Выполняя последовательное дифференцирование, получаем:

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

.... ,

$$y^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Производные высших порядков от функции, заданной неявно. Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Найденная производная y'_x содержит, в общем случае, как аргумент x, так и функцию y.

По определению вторая производная от функции $y = f(x)$ есть производная от первой производной. Следовательно, для нахождения второй производной, надо продифференцировать найденную первую производную по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. В выражение для второй производной войдут x, y и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'', зависящую только от x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''', y^{IV} и производных более высоких порядков.

Пример. Найти производную второго порядка от функции $y(x)$, заданной уравнением: $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Найдем первую производную $2x + 2y\,y' = 0$. Отсюда $y' = -\frac{x}{y}$. Дифференцируя данное уравнение вторично, получим

$$y'' = \left(-\frac{x}{y}\right)' = -\frac{y - y'x}{y^2}.$$

Учитывая, что $y' = -\frac{x}{y}$, имеем

$$y'' = -\frac{y - \left(-\frac{x}{y}\right)x}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{R^2}{y^3}.$$

Производные высших порядков от функции, заданной параметрическими уравнениями. Пусть y – функция от x, заданная уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array}\right\}$$

где $t \in T$.

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к отысканию первой производной от функции, заданной параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, по определению первой производной для функции, заданной параметрическими уравнениями, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y''_x &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Аналогично находится третья производная:

$$\left.\begin{aligned} y'''_x &= \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

и производные высших порядков.

Пример. Найти вторую производную функции

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

где $0 < t < \pi$.

Решение. Известно, что

$$\begin{cases} y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{R\cos t}{-R\sin t} = -\operatorname{ctg} t, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} y''_x = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x = \varphi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = \dfrac{(-\operatorname{ctg} t)'}{(R\cos t)'}, \\ x = R\cos t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ x = R\cos t. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} y''_x = -\dfrac{1}{\sin^3 t}, \\ t = \arccos\dfrac{x}{r}. \end{cases}$$

Тогда

$$y''_x = -\frac{1}{\sin^3\left(\arccos\dfrac{x}{R}\right)} = -\frac{1}{\left(1-\left(\dfrac{x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{R^3}{\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Дифференциалы высших порядков. Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ зависит от x и $dx = \Delta x$, причем Δx от x не зависит, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от точки x. Поэтому dx в формуле первого дифференциала будет постоянным. Тогда выражение $f'(x)dx$ зависит только от x и его можно дифференцировать по x.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ в данной точке x называется ***дифференциалом второго порядка*** или ***вторым дифференциалом***.

Дифференциал второго порядка обозначается $d^2 y$ или $d^2 f(x)$, т.е. $d^2 y = d(dy)$.

Аналогично дифференциал третьего порядка от функции $y = f(x)$ имеет вид $d^3 y = d\left(d^2 y\right)$.

Дифференциал n-го порядка (или ***n-й дифференциал***) функции $y = f(x)$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^{(n)} y = d\left(d^{(n-1)} y\right)$.

Найдем выражение для второго дифференциала функции $y = f(x)$, полагая dx в формуле $dy = f'(x)dx$ первого дифференциала постоянным.

Имеем

$$d^2 y = d(dy) = d\left(f'(x)dx\right) = d\left(f'(x)\right)\cdot dx + f'(x)\cdot d(dx) =$$
$$= \left(f''(x)dx\right)dx = f''(x)(dx)^2,$$

т.е.

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 .$$

Аналогично для дифференциала 3-го порядка:

$$d^3y = d\left(d^2y\right) = d\left(f''(x)(dx)^2\right) = d\left(f''(x)\right)(dx)^2 + f''(x)d\left((dx)^2\right) =$$

$$= \left(f'''(x)dx\right)(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3 ,$$

для дифференциала n-го порядка

$$d^{(n)}y = f^{(n)}(x)(dx)^n .$$

Скобки при степенях dx можно опустить:

$$d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n .$$

Отсюда следует, что производная n-го порядка функции $y = f(x)$ есть отношение ее дифференциала n-го порядка к n-й степени дифференциала независимой переменной:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} .$$

В частности, при $n = 1,2,3$ получим соответственно:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} ,\ f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} ,\ f'''(x) = \frac{d^3y}{dx^3} .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями?
2. Как найти производную неявной функции.
3. Что такое логарифмическая производная? При нахождении производных каких функций ее желательно использовать?
4. Как определяются производные высших порядков?
5. Как найти дифференциалы высших порядков?