Лекция 4.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

1. Теорема Ферма.
2. Теорема Ролля.
3. Теорема Лагранжа.
4. Теорема Коши.

Одним из важнейших классов (множеств) функций, изучаемых в курсе математического анализа и имеющих первостепенное значение при решении задач практического характера, является класс $C_{[a;b]}$ – непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций. Класс $C^1_{[a;b]}$ дифференцируемых функций является подмножеством множества $C_{[a;b]}$. Дифференцируемые функции представляют особый интерес, так как большинство задач техники и естествознания приводят к исследованию функций, имеющих производную. Также дифференцируемые функции обладают некоторыми общими свойствами, среди которых важную роль играют *теоремы о среднем*. В каждой из этих теорем утверждается существование на отрезке $[a;b]$ такой точки, в которой исследуемая функция $y=f(x)$ обладает тем или иным свойством.

1. Теорема Ферма.

Теорема 1 (Ферма). *Пусть функция $y=f(x)$ определена на $(a;b)$ и в некоторой точке x_0 этого промежутка имеет наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если в точке x_0 существует производная, то она равна* 0.

► Пусть функция $y=f(x)$ в точке x_0 имеет наибольшее значение, т.е.

$$f(x)\le f(x_0)\quad \forall x\in(a;b).$$

Отсюда

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x_0)\le 0$$

для любой точки $x=x_0+\Delta x\in(a;b)$.

При $\Delta x<0$ для точек $x<x_0$ имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0$ и

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ge 0.$$

При $\Delta x>0$ для точек $x>x_0$ имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\le 0$ и

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\le 0.$$

По условию производная $f'(x_0)$ в точке x_0 существует, значит, $f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$. Это возможно лишь в том случае, если $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=0$. Следовательно, $f'(x_0)=0$. ◄

Геометрический смысл теоремы Ферма: Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, где она принимает наибольшее или наименьшее значение, то в точке $(x_0;f(x_0))$ касательная графика параллельна оси Ox (рис.1).

Замечание. Теорема не верна, если $f(x)$ рассматривать на отрезке $[a;b]$.

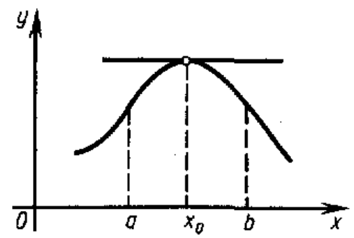

Рис.1.

2. Теорема Роля

Теорема 2 (Ролля). *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям на отрезке $[a;b]$:*

1) $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$;

2) $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$;

3) $f(a)=f(b)$.

Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$, такая, что $f'(\xi)=0$.

► Известно, что если $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то на этом отрезке она принимает свое наибольшее M и наименьшее m значения. Возможны два случая.

1. $M = m \Leftrightarrow f(x) = \text{const} \Rightarrow f'(x) = 0 \ \ \forall x \in [a;b]$.

2. $M > m$. Тогда из условия $f(a) = f(b)$ следует, что хотя бы одно из двух значений M или m функция принимает в некоторой внутренней точке ξ отрезка $[a;b]$. Пусть для определенности $f(\xi) = m$ (рис.2). Это означает, что $f(x) \geq f(\xi) \ \ \forall x \in [a;b]$.

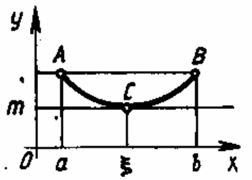

Рис.2.

Покажем, что $f'(\xi) = 0$. Согласно условию 2 теоремы Ролля, для функции $f(x)$ существует конечная производная $f'(\xi)$ $\forall \xi \in (a;b)$

$$f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}.$$

Это условие равносильно существованию разных односторонних пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x}.$$

Найдем односторонние пределы. Так как $M > m$, то

$$f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \geq 0 \ \ \forall \xi \in (a;b).$$

Следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} &= f'(\xi - 0) \leq 0, \\ \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} &= f'(\xi + 0) \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f'(\xi) = 0. \ ◄$$

Геометрический смысл теоремы Роля. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает на концах этого отрезка равные значения, то на графике этой функции найдется хотя бы одна такая точка C с абсциссой $x = \xi$, в которой касательная параллельна оси Ox (см. рис.2).

Замечание. Условия теоремы Ролля являются достаточными, но не необходимыми.

Пример. Функция $f(x) = x^3$ определена и непрерывна на отрезке $[-1;1]$, дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, однако для нее не выполняется третье условие теоремы Ролля: $f(-1) \neq f(1)$. Однако, существует точка $\xi = 0$, такая, что $f'(\xi) = 0$ (рис.3).

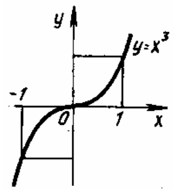

Рис.3.

3. Теорема Лагранжа.

Теорема 3 (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

► Составим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = (b - a) f(x) - (f(b) - f(a)) x.$$

Покажем, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Действительно:

1) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$, так как является суммой непрерывных на $[a;b]$ функций;

2) $\varphi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, так как является суммой

дифференцируемых на $(a;b)$ функций;

3) $\varphi(a)=\varphi(b)=bf(a)-af(b)$.

Итак, $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, причем

$$\varphi'(x)=(b-a)f'(x)-(f(b)-f(a)).$$

По теореме Ролля существует точка $\xi\in(a;b)$, такая, что $\varphi'(\xi)=0$, т.е.

$$(b-a)f'(\xi)-(f(b)-f(a))=0.$$

Отсюда

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a) \blacktriangleleft$$

Теорему Лагранжа называется также ***теоремой о конечных приращениях***. Формула $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ называется ***формулой Лагранжа***, которую удобно записывать в виде

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),\ \xi\in(a;b).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Выражение $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=k$ представляет собой угловой коэффициент хорды AB, а $f'(\xi)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $f(x)$ в точке C. Теорема Лагранжа утверждает, что между точками A и B на дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой касательная параллельна хорде AB, при условии, что в каждой точке дуги AB существует касательная (рис.4).

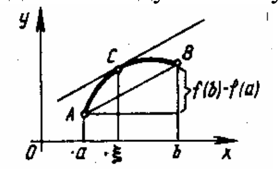

Рис.4.

Замечания. 1. Если в формуле Лагранжа положить $f(a)=f(b)$, получим теорему Ролля, т.е. теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

2. Положим в формуле Лагранжа $a=x_0$, $b=x_0+\Delta x$. Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0<\theta<1$. Данная формула связывает приращения аргумента и функции, поэтому она называется ***формулой конечных приращений***.

3. Формула Лагранжа в виде

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\Delta x$$

дает точное выражение приращения функции через вызвавшее его приращение аргумента в отличие от дифференциала функции, который определяет приближенное значение приращения функции: $\Delta y\approx dy=f'(x_0)\Delta x$. В приближенных вычислениях приращение функции заменяют чаще дифференциалом, т.е. полагают $\Delta y\approx dy$. Формула Лагранжа применяется реже, так как для ее использования необходимо указать точку $\xi=x_0+\theta\Delta x\in(a;b)$, что, вообще говоря, не всегда удается.

4. Теорема Коши.

Обобщением теоремы Лагранжа является теорема Коши.

Теорема 4 (Коши). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

1) непрерывны на отрезке $[a;b]$;

2) дифференцируемы в интервале $(a;b)$, причем $g'(x)\neq 0$ для любого $x\in(a;b)$.

Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi\in(a;b)$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

► Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Шаг 1. Покажем, что $g(b)\neq g(a)$.

Действительно, если бы $g(b)=g(a)$, то для функции $g(x)$ на отрезке $[a;b]$ были бы выполнены все условия теоремы Роля. Тогда по этой теореме внутри отрезка $[a;b]$ нашлась бы, по крайней мере, одна точка ξ, для которой $g'(\xi)=0$, что противоречит условию теоремы. Следовательно, $g(b)\neq g(a)$.

Шаг 2. Покажем, что вспомогательная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля.

Действительно:

1) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a;b]$ как сумма непрерывных на $[a;b]$ функций;

2) $\varphi(x)$ дифференцируема на $(a;b)$ как сумма дифференцируемых на $(a;b)$ функций;

3) $\varphi(a)=0$ и $\varphi(b)=0$, значит, $\varphi(a)=\varphi(b)$.

По теореме Ролля существует точка $\xi\in[a;b]$, такая, что $\varphi'(\xi)=0$.

Найдем производную функции $\varphi(x)$:

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)\quad \forall x\in(a;b).$$

Тогда

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0$$

Отсюда

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)},\ \xi\in(a;b).\ \blacktriangleleft$$

Замечание. Если положить в формуле Коши $g(x)=x$, то все условия теоремы Коши будут выполнены, и формула Коши

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

«перейдет» в формулу Лагранжа

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Таким образом, теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите теорему Ферма.
2. В чем состоит геометрический смысл теоремы Ферма?
3. Сформулируйте и докажите теорему Ролля.
4. В чем состоит геометрический смысл теоремы Роля?
5. Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.
6. В чем состоит геометрический смысл теоремы Лагранжа.
7. Сформулируйте и докажите теорему Коши.