Лекция 8. ЛОКАЛЬНЫЕ ЭКСТРЕМУМЫ

1. Признаки монотонности функции.
2. Точки локального и глобального экстремума функции.
3. Необходимое и достаточное условия существования локального экстремума функции.
4. Наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

1. Признаки монотонности функции.

С помощью производной функции можно произвести полное ее исследование (найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы, точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости, асимптоты графика) и построить график этой функции.

Теорема 1. *Для того чтобы дифференцируемая на* $(a;b)$ *функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы* $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) *для всех* $x\in(a;b)$. *Если же для любого* $x\in(a;b)$ $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$), *то функция* f *возрастает (убывает) на этом интервале.*

► 1. Рассмотрим случай неубывающей функции.

Необходимость: Пусть $f(x)$ не убывает на $(a;b)$. Тогда $\forall x\in(a;b)$ при $\Delta x>0$ приращение $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)\geq 0$.

Значит, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\geq 0$.

Тогда $\forall x\in(a;b)$ имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)\geq 0$.

Достаточность. Пусть $\forall x\in(a;b)$ выполняется $f'(x)\geq 0$. Тогда по формуле Лагранжа имеем

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1).$$

Так как $f'(\xi)\geq 0$ $(x_1<\xi<x_2)$, то $\forall x_1,x_2\in(a;b)$: $x_1<x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)\geq 0,$$

т.е. f не убывает на $(a;b)$.

2. Докажем теорему для случая возрастающей функции.

Пусть $f'(x)>0$ на $(a;b)$.

Тогда $\forall\xi\in(a;b)$ $f'(\xi)>0$ и поэтому $\forall x_1,x_2: x_1<x_2$

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)>0.$$

Значит $f(x)$ возрастает на $(a;b)$. ◄

Замечание. Условия теоремы для возрастающей и убывающей функций являются достаточными, но не необходимыми.

Пример. Функция $y=x^3$ возрастает на $(-1;1)$, однако производная в точке $x=0$ обращается в нуль.

Геометрический смысл теоремы: касательная к графику возрастающей на $(a;b)$ функции ($f'(x)>0$) составляет острый угол с осью Ox, касательная к графику убывающей на $(a;b)$ функции, ($f'(x)<0$) образует тупой угол с осью Ox. Если функция $f(x)$ на $(a;b)$ является постоянной: $f(x)=C$, $C=\text{const}$, то $f'(x)=0$ и касательная к графику функции параллельна оси Ox.

2. Точки локального и глобального экстремума функции.

Особую роль в исследовании поведения функции на множестве играют точки, разделяющие интервалы возрастания и убывания функции. Для функции $y=f(x)$ на интервале $(a;b)$ такой точкой является точка x_0, отделяющая интервал возрастания $f(x)$ $(a;x_0)$ от интервала убывания $(x_0;b)$ функции. Из рисунка 1 видно, что существует $U(\delta;x_0)$, $\delta>0$, такая, что

$$f(x_0)>f(x)\quad \forall x\in U(\delta;x_0).$$

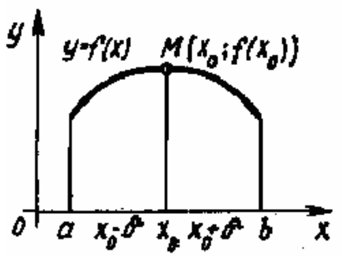

Рис.1.

О п р е д е л е н и е 1. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума (минимума)*** функции $f(x)$ если существует δ-

окрестность точки x_0, такая, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ выполняется неравенство

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0$$

$$(\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Значение $f(x_0)$ называется ***локальным максимумом (минимумом)*** функции.

Обозначается:

$$\max_{x \in U(\delta; x_0)} f(x) = f(x_0)$$

$$(\min_{x \in U(\delta; x_0)} f(x) = f(x_0)).$$

Точки максимума или минимума функции называются ***точками экстремума функции***, а максимумы и минимумы функции называются ***экстремумами функции***.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями. Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ имеет несколько максимумов и минимумов, то возможен случай, когда максимум функции меньше ее минимума.

Наименьшее и наибольшее значения функции на $[a;b]$ называются ***абсолютными минимумом* и *максимумом*** или ***глобальными экстремумами*** функции $f(x)$

Обозначается: $\min\limits_{x \in [a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x \in [a;b]} f(x)$.

3. Необходимое и достаточное условия существования локального экстремума функции.

Теорема 2. *Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.*

► Пусть $f(x)$ в точке x_0 достигает максимума. Тогда существует $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ такая, что для любого $x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$

$f(x_0) > f(x)$ или $f(x_0) > f(x_0 + \Delta x)$ при $\Delta x \neq 0$.

При $\Delta x < 0$ имеем $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0$,

при $\Delta x > 0$ имеем $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0$.

Если пределы левых частей этих неравенств при $\Delta x \to 0$ существуют, то:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x < 0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0) \geq 0,$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ (\Delta x > 0)}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0) \leq 0.$$

Когда производные функции $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точке x_0 равны нулю, то существует производная $f'(x_0)$ и

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = 0.$$

В случае, если $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$, отличны от нуля, то производная $f'(x_0)$ не существует.

Аналогично доказывается случай, когда x_0 точка минимума.◄

Геометрический смысл теоремы: в точках экстремума функции $f(x)$ касательная к ее графику

1) параллельна оси абсцисс, если существует $f'(x_0) = 0$ (рис.2.а);

2) параллельна оси ординат, если $f'(x_0)$ бесконечна (рис.2.б);

3) существуют не совпадающие левая и правая касательные, если $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ (рис.2.в).

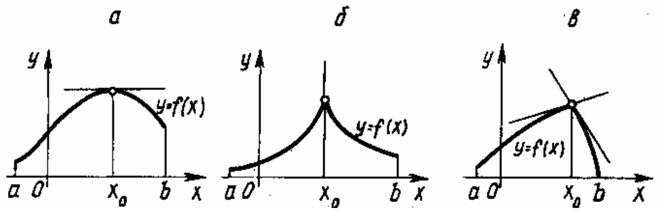

Рис.2

О п р е д е л е н и е 2. Точки, в которых производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль или не существует, называют ***критическими*** или ***точками возможного экстремума***. Точки, в которых производная функции $y = f(x)$ обращается в нуль, называют ***стационарными***.

Критическая точка x_0 называется ***угловой точкой*** функции $f(x)$ если $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$ (см. рис.*в*). Критическая точка x_0 называется ***точкой возврата*** функции, если ее левая $f'_-(x_0)$ и правая $f'_+(x_0)$ производные бесконечны (см. рис.2.*б*).

Не всякая критическая точка функции $f(x)$ является точкой ее локального экстремума.

Пример. Для функции $f(x) = x^5$ точка $x = 0$ – критическая точка, так как $f'(x) = 5x^4$ и при $x = 0$ обращается в нуль. Однако, $x = 0$ не является точкой локального экстремума функции. В этой точке функция возрастает.

Выяснить, какая из критических точек функции будет точкой ее локального экстремума, можно с помощью трех достаточных признаков существования экстремума функции.

Теорема 3 (первый достаточный признак существования экстремума функции). *Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.*

► Пусть x_0 – точка возможного экстремума.

При $\forall x \in U(\delta; x_0 - 0)$ имеем $f'(x) > 0$. Значит $f(x_0) > f(x)$.

При $\forall x \in U(\delta; x_0 + 0)$ имеем $f'(x) < 0$. Значит $f(x_0) < f(x)$.

Поэтому существует окрестность $U(\delta; x_0)$ такая, что для всех x из этой окрестности $f(x_0) > f(x)$, т. е. точка x_0 является точкой локального максимума.

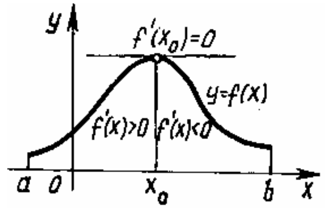

Рис.3.

Аналогично доказывается и существование точки локального минимума.

Если $f'(x)$ сохраняет знак в окрестности точки x_0, то в этой окрестности функция монотонна, т.е. точка x_0 не является точкой локального экстремума. ◄

Теорема 4 (второй достаточный признак существования экстремума функции). *Стационарная точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в $U(\delta; x_0)$, является точкой локального минимума $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, и точкой локального максимума, если $f''(x_0) < 0$.*

► Пусть выполнены условия теоремы и $f''(x_0) > 0$. Тогда $f'(x)$ в $U(\delta; x_0)$ возрастает. По условию $f'(x_0) = 0$. Следовательно, в окрестности $U(\delta; x_0)$ функция $f'(x)$ меняет знак с «–» на «+» (рис.3). Согласно теореме 3, точка x_0 является точкой локального минимума функции $f(x)$.

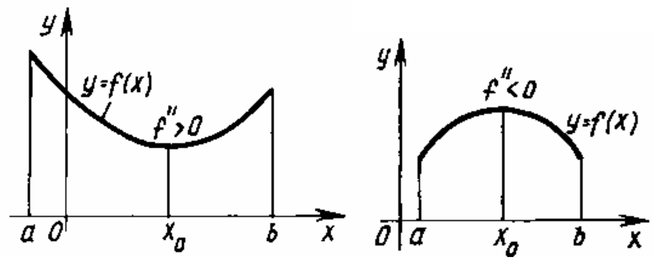

Рис.3.

Если $f''(x_0) < 0$, то $f'(x)$ в $U(\delta; x_0)$ убывает. Однако

$f'(x_0)=0$. Значит, в окрестности $U(\delta;x_0)$ производная функции $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–». Согласно теореме 3, точка x_0 является точкой локального максимума функции $f(x)$.◄

Теорема 5 (третий достаточный признак существования экстремума функции). *Пусть функция $f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и*

$$f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда: 1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума.

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Без доказательства.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ являются ее глобальные экстремумы, т.е. наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a;b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах этого отрезка или в точках ее локального экстремума. Следовательно, для отыскания абсолютных экстремумов $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ надо найти ее значения на концах отрезка $[a;b]$ в точках локального экстремума и выбрать соответственно наименьшее и наибольшее из них.

Если x_1, x_2, ..., x_n – точки локальных экстремумов, то

$$\min_{x\in[a;b]} f(x)=\min\{f(a); f(b); f(x_1);...;(x_n)\},$$

$$\max_{x\in[a;b]} f(x)=\max\{f(a); f(b); f(x_1);...; f(x_n)\}$$

Пример. Найти абсолютные экстремумы функции $f(x)=x^3-6x^2+9x$ на $[-1;4]$ (рис.4).

Решение. 1) Определяем стационарные точки $f(x)$: $f'(x)=3x^2-12x+9$, $3x^2-12x+9=0$.

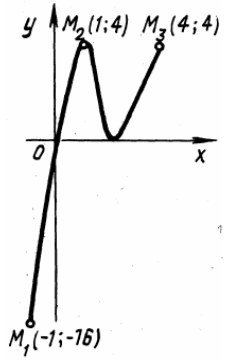

Рис.4.

Значит, $x_1=1$ и $x_2=3$.

2) Вычисляем значения $f(x)$ на концах отрезка и в стационарных точках: $f(-1)=-16$, $f(4)=4$, $f(1)=4$, $f(3)=0$. Тогда

$$\min_{x\in[-1;4]} f(x)=\min\{-16,4,4,0\}=-16,$$

$$\max_{x\in[-1;4]} f(x)=\max\{-16,4,4,0\}=4$$

Наименьшее значение данная функция принимает на левом конце отрезка в точке $x=-1$, наибольшее – в стационарной точке $x=1$ и на правом конце отрезка в точке $x=4$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие условия должны выполнятся, чтобы функция возрастала, убывала, была неубывающей и невозрастающей?
2. Какая точка называется точкой локального экстремума?
3. Какая точка называется точкой абсолютного экстремума?
4. Сформулируйте необходимое условие локального экстремума.
5. Сформулируйте достаточные условия экстремума.
6. Как находится глобальный экстремум функции на отрезке?