Лекция 12. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. Постановка задачи.
2. Метод средних прямоугольников.
3. Метод трапеций.
4. Метод Симпсона.

1. Постановка задачи.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл.

$$I=\int_a^b f(x)dx.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и известна ее первообразная $F(x)$. Определенный интеграл от этой функции в пределах от a до b может быть вычислен по формуле Ньютона – Лейбница:

$$I=\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

Однако в некоторых случаях невозможно найти первообразную $F(x)$ по ряду причин: либо $F(x)$ не выражается через элементарные функции, либо выражается достаточно сложно. В этих случаях определенный интеграл вычисляют приближенно.

Известно, что определенный интеграл есть некоторое число. Любой приближенный метод интегрирования основан на вычислении приближенного значения этого числа. Пусть I – искомое число, I^* – его приближенное значение. Тогда $|I^*-I|=\Delta$ – абсолютная погрешность вычисления интеграла I.

При вычислении определенных интегралов приближенными методами можно сформулировать две задачи:

1) найти приближенное значение числа I и оценить погрешность вычислений;

2) найти приближенное значение числа I с заданной погрешностью Δ, т.е. подобрать метод вычислений таким образом, чтобы $|I^*-I|<\Delta$.

2. Метод средних прямоугольников.

Пусть требуется вычислить интеграл $I=\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция. Для простоты рассуждений ограничимся случаем, когда $f(x)\ge 0$. В основе приближенного вычисления определенного интеграла I лежит его геометрический смысл: I выражает площадь криволинейной трапеции. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n равных частичных отрезков точками $x_k=a+\frac{b-a}{n}k$, $k=\overline{1,n-1}$. Длина каждого отрезка $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=\frac{b-a}{n}$ называется ***шагом разбиения***. На каждом частичном отрезке $[x_k;x_{k-1}]$ выберем точку $\xi_k-\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ и вычислим $f(\xi_k)=y_k$. Тогда по определению определенного интеграла Римана

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Значит, ***формула средних прямоугольников*** имеет вид

$$\int_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}y_1+\frac{b-a}{n}y_2+\ldots+\frac{b-a}{n}y_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k.$$

Данная формула означает, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ приближенно равна площади ступенчатой фигуры, заштрихованной на рис.1.

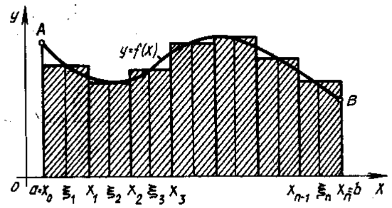

Рис.1.

Замечание. Если существует непрерывная вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то вычисление интеграла I по формуле средних прямоугольников производится с погрешностью, величина которой оценивается неравенством

$$\Delta(n) \le M_2 \frac{(b-a)^3}{24n^2},$$

где $M_2 = \sup\limits_{[a;b]} \left| f''(x) \right|$.

3. Метод трапеций.

Этот метод основан на замене графика подынтегральной функции $y = f(x)$ ломаной линией $AM_1M_2...M_{n-1}B$ (рис.2). Разобьем отрезок интегрирования $[a;b]$ на n равных частей точками $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = \overline{1,n}$, и с помощью прямых $x = x_k$ построим n «прямолинейных» трапеций (эти трапеции заштрихованы на рис.2)

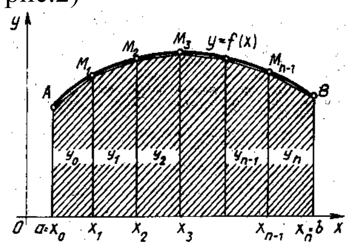

Рис.2.

Сумма площадей «прямолинейных» трапеций приближенно равна площади криволинейной трапеции $aABb$, т.е.

$$\int_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{y_0 + y_1}{2}(x_1 - x_0) + \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1) + ... + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}(x_n - x_{n-1}).$$

где $y_k = f(x_k)$, $k = \overline{1,n}$, – основания «прямолинейных» трапеций; $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ – их высоты.

Таким образом, получена приближенная формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1} \right),$$

которая называется ***формулой трапеций***. Правая часть этой формулы является интегральной суммой $I^*(n)$, которая при $h = \frac{b-a}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$ стремится к данному интегралу I, т.е. точность формулы трапеций тем выше, чем больше n.

Замечание. При конечном шаге разбиения h, т.е. при конечном n, вычисления производятся с некоторой погрешностью $\Delta(n)$, величина которой оценивается неравенством

$$\Delta(n) \le \sup\limits_{[a;b]} \left| f''(x) \right| \frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

Если задана погрешность вычислений $\Delta(n)$, то, пользуясь этим неравенством, можно подобрать такое число n разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки (или, что то же, шаг h), при котором приближенное вычисление определенного интеграла будет выполнено с погрешностью, не превышающей заданную. Если погрешность вычисления не задана, то при фиксированном n ее можно оценить по данной формуле.

4. Метод параболических трапеций (метод Симпсона).

Данный метод приближенного вычисления определенного интеграла основан на замене графика подынтегральной функции дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy.

Разобьем отрезок интегрирования $[a;b]$ точками $x_0 = a$, x_1, x_2, …, $x_{2n} = b$ на $2n$ равных частей. Обозначим через y_0, y_1, …, y_{2n} значения функции $f(x)$ в точках деления (рис.3). Пусть шаг разбиения $\frac{b-a}{2n} = h$, точки разбиения $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $k = \overline{1, 2n-1}$. В силу свойства аддитивности определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int\limits_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \ldots + \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)dx .$$

Через каждые три точки M_0, M_1 и M_2, M_2, M_3 и M_4, …, M_{2n-2}, M_{2n-1} и M_{2n} проведены параболы, уравнения которых $y_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k c$, $k = \overline{1,n}$. В результате получим n криволинейных трапеций, ограниченных сверху параболами. Эти трапеции изображены на рис.3.

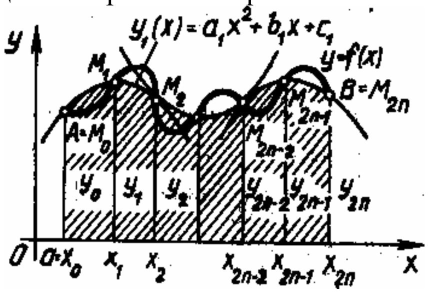

Рис.3.

Заменим площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ на $[a;b]$ суммой площадей фигур, лежащих под параболами, т.е. положим

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \int\limits_{x_0}^{x_2} \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)dx + \int\limits_{x_2}^{x_4} \left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right)dx + \ldots +$$

$$+ \int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} \left(a_nx^2 + b_nx + c_n\right)dx .$$

Вычислим интеграл:

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)dx = \frac{a_1}{3}\left(x_2^3 - x_0^3\right) + \frac{b_1}{2}\left(x_2^2 - x_0^2\right) + c_1\left(x_2 - x_0\right) =$$

$$= \frac{x_2 - x_0}{6}\left(2a_1\left(x_2^2 + x_2x_0 + x_0^2\right) + 3b_1\left(x_2 + x_0\right) + 6c_1\right) =$$

$$= \frac{b-a}{6n} \times$$

$$\times \left(a_1x_0^2 + b_1x_0 + c_1 + 4a_1\left(\frac{x_2 + x_0}{2}\right) + 4b_1\frac{x_2 + x_0}{2} + 4c_1 + a_1x_2^2 + b_1x_2 + c_1\right) =$$

$$= \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Итак,

$$\int\limits_{x_0}^{x_2} \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Аналогично

$$\int\limits_{x_2}^{x_4} \left(a_2x^2 + b_2x + c_2\right)dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right),$$

……………………………………………..,

$$\int\limits_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} \left(a_nx^2 + b_nx + c_n\right)dx = \frac{b-a}{6n}\left(y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right).$$

Просуммировав эти интегралы, получим:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} \left(a_kx^2 + b_kx + c_k\right)dx = \frac{b-a}{6n}\sum_{k=1}^{n}\left(y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}\right)$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx$$

$$\approx \frac{b-a}{6n}\left(y_0 + y_{2n} + 2\left(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}\right) + 4\left(y_1 + y_3 + \ldots + y_{2n-1}\right)\right).$$

Эта формула называется ***формулой парабол*** или ***формулой Симпсона***.

Замечания. 1. Абсолютная погрешность вычисления определенного интеграла по формуле Симпсона не превосходит

$$\Delta(n) \le \sup_{[a;b]}\left|f^{IV}(x)\right|\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} .$$

2. Если формула Симпсона применяется для вычисления интегралов вида

$$\int_a^b P_n(x)dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n, то при $n \le 3$ имеем $\sup\limits_{[a;b]}\left|P_n^{IV}(x)\right| = 0$. Следовательно, вычисления производятся без погрешности.

При приближенном вычислении определенного интеграла на ЭВМ оценка точности вычислений по формуле как правило, не применяется ввиду трудности нахождения $\sup\limits_{[a;b]}\left|P^{IV}(x)\right|$. В таких случаях используется ***правило Рунге***.

Для метода Симпсона правило Рунге основано на соотношении

$$\frac{\left|I^*_{2n} - I_n\right|}{15} < \Delta,$$

где I^*_n, I^*_{2n} – приближенные значения определенного интеграла, вычисленные при разбиении отрезка интегрирования на n и $2n$ частей соответственно; Δ – заданная точность. При каждом последующем приближении число отрезков разбиения удваивается. Если данное условие выполнено, то за приближенное значение интеграла принимается значение I^*_{2n}, т.е. $I = I^*_{2n} \pm \Delta$.

Очевидно, что точность приближенных формул вычисления определенных интегралов возрастает с ростом n, т.е. всегда можно подобрать такое n, чтобы погрешность Δ вычислений определенного интеграла не превосходила заданной.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем суть метода средних прямоугольников?
2. В чем суть метода трапеций?
3. В чем суть метода Симпсона?

ЛИТЕРАТУРА

1. Герасимович А.И. Математический анализ: Справочное пособие. В 2 ч.Ч.1., Ч.2. – Мн.: Выш.шк., 1989.
2. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ: Учебное пособие: В 6 ч. – Мн.: БГУ, 2003.
3. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1, Ч.2. – М.: Наука, 1981, 1984.
4. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.:Наука, 1985.
5. Кудрявцев. Л.Д. Краткий курс математического анализа: Учебник для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. – 736 с.
6. Математический анализ в вопросах и задачах: учебн. Пособие для вузов. – Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984. – 200с.
7. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1, Т.2.– М.: Наука, 1990, 1991.
8. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977.
9. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 816 с.