Лекция 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

1. Рациональные дроби.
2. Интегрирование простейших рациональных дробей.
3. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби.
4. Интегрирование рациональных дробей.

1. Рациональные дроби.

Определение 1. ***Рациональной дробью*** $R(x)$ называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены:

$$R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе $n\ge m$, то дробь называется ***неправильной***. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе $n<m$, то дробь называется ***правильной***.

Пример. Дробь $\frac{2x^5}{x^2+3x+2}$ является неправильной дробью, $\frac{x^2+1}{x^4+x-2}$ – правильной дробью.

Всякую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби. Это представление достигается путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочленов:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $R(x)$ – многочлен-частное (целая часть) дроби $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$; $P_n(x)$ – остаток (многочлен степени $n<m$).

Интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

2. Интегрирование простейших рациональных дробей.

Определение 2. ***Простейшей дробью*** называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\frac{A}{x-a}$, 2) $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(n\ge 2)$,

3) $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n\ge 2)$.

Здесь A, a, p, q, M, N – действительные числа, а квадратный трехчлен не имеет действительных корней, т.е. $\frac{p^2}{4}-q<0$.

Простейшие дроби *первого* типа интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

$$\int\frac{Adx}{x-a}=A\int\frac{dx}{x-a}=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C.$$

Дроби *второго* типа интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

$$\int\frac{A}{(x-a)^n}=A\int(x-a)^{-n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=$$

$$=\frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}}+C.$$

Интеграл от простейшей дроби *третьего* типа приводится к табличным интегралам путем выделения в числителе дифференциала знаменателя и приведения знаменателя к сумме квадратов:

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}=\left[\begin{array}{l} d(x^2+px+q)=(2x+p)dx, \\ Mx+N=\frac{M}{2}(2x+p)+N-\frac{Mp}{2} \end{array}\right]=$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d\left(x^2+px+q\right)}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

При интегрировании простейшей рациональной дроби *четвертого* типа $\int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n}$ сделаем замену переменной, положив $x+\frac{p}{2}=t$. Откуда $dx=dt$ и :

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} = t^2+a^2,$$

где $a^2 = q-\frac{p^2}{4}$.

Тогда

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{\left(x^2+px+q\right)^n} = \int \frac{M\left(x+p/2\right)+N-Mp/2}{\left(\left(x+p/2\right)^2+q-p^2/4\right)^n}dx =$$

$$= M\int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = = MI_0 + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n.$$

Вычислим интеграл I_0:

$$I_0 = \int \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2}\int \left(t^2+a^2\right)^{-n} d\left(t^2+a^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} + C.$$

Для вычисления интеграла $I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$, представим его в виде

$$I_n = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-t^2}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt = \frac{1}{a^2}\left(\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\right)$$

Замечая, что $\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} = I_{n-1}$, получаем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}\right).$$

Вычисление интеграла $\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$ осуществляется с помощью метода интегрирования по частям:

$$\int \frac{t^2dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \begin{bmatrix} u=t, du=dt, \\ dv = \frac{tdt}{\left(t^2+a^2\right)^n}, \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)}I_{n-1}$$

Подставляя найденное выражение, имеем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Данная формула является ***рекуррентной***.

Зная табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C,$$

находятся интегралы I_n, $n \geq 2$.

Действительно, при $n=2$ имеем

$$I_2 = \int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} + \frac{t}{2\left(t^2+a^2\right)}\right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2\left(t^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C .$$

3. Разложение рациональной дроби на простейшие дроби.

Теорема 1. *Правильную рациональную дробь* $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, *где* $Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \left(x^2+px+q\right)^s$, *можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:*

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} =$$

$$= \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s},$$

где A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ..., B_i, M_1, N_1, M_2, M_2, ..., M_s, N_s *– некоторые действительные числа.*

Без доказательства.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Пример. Разложить на элементарные дроби $\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2}$

Решение. А. Выделим из неправильной дроби целую часть, деля числитель на знаменатель

$$\frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4+3x^2} .$$

Б. Разложим полученную в результате дробь на элементарные слагаемые:

$$x^4+3x^2 = x^2\left(x^2+3\right).$$

Тогда $\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3}$.

Чтобы найти коэффициенты разложения, чаще всего используется метод неопределенных коэффициентов и метод частных значений.

Метод неопределенных коэффициентов. Суть метода неопределенных коэффициентов состоит в следующем.

▪ Раскладываем правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ на простейшие дроби с неопределенными коэффициентами.

▪ Простейшие дроби приводим к общему знаменателю $Q_m(x)$.

▪ Многочлен, получившийся в числителе, приравниваем к многочлену $P_n(x)$.

▪ Для тождественного равенства двух многочленов необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при одинаковых степенях x этих многочленов были равны. Учитывая это, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях полученного тождества. Имеем систему m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов A_1, A_2, ..., A_k, B_1, B_2, ..., B_k, M_1, M_2, ..., M_s, N_1, N_2, …., N_s.

Пример. Для предыдущего примера, имеем

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} .$$

Приведем к общему знаменателю в правой части

$$\frac{1}{x^2\left(x^2+3\right)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+3} = \frac{Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2}{x^2\left(x^2+3\right)} .$$

Отсюда $1 = Ax\left(x^2+3\right)+B\left(x^2+3\right)+(Cx+D)x^2$

Раскроем скобки в правой части и сгруппируем:
$1 = x^3(A+C) + x^2(B+D) + x \cdot 3A + 3B$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов A, B, C, D.

$x^3 : 0 = A + C$,

$x^2 : 0 = B + D$,

$x^1 : 0 = 3A$,

$x^0 : 1 = 3B$.

Отсюда $A = 0$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = -\frac{1}{3}$.

Следовательно,

$$\frac{2x^5 + 6x^3 + 13}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2+3)}.$$

Метод частных значений. При нахождении неопределенных коэффициентов вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты при одинаковых степенях x, можно дать переменной x несколько частных значений (по числу неопределенных коэффициентов). Тогда получим систему уравнений относительно неопределенных коэффициентов. Этот метод удобно применять в случае, когда корни знаменателя рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ просты и действительны. Тогда последовательно полагают x равным каждому из корней знаменателя.

Пример. Разложить рациональную дробь $\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}$ на простейшие.

Решение. Поскольку $x^3 - 4x = x(x+2)(x-2)$, имеем

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получим

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2)}{x(x+2)(x-2)}.$$

Отсюда

$$4x^2 + 16x - 8 = A(x+2)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+2).$$

Придавая x последовательно частные значения, равные корням $x = 0$, $x = -2$ и $x = 2$, получим

$-8 = -4A$,

$-24 = 8B$,

$40C = 8C$.

Отсюда $A = 2$, $B = -3$, $C = 5$.

Таким образом,

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x} = \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}.$$

Иногда для нахождения неопределенных коэффициентов удобно применять комбинацию указанных выше методов, т.е. придавать x ряд частных значений и приравнивать коэффициенты при некоторых степенях x.

4. Интегрирование рациональных дробей.

Интегрирование рациональных дробей осуществляется по следующему правилу.

Правило интегрирования рациональных дробей. Для того чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо выполнить действия:

1) если рассматриваемая рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ – неправильная ($k \geq m$),то необходимо представить ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = R(x) + \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

где $n < m$; $R(x)$ – многочлен;

2) если рассматриваемая рациональная дробь $\frac{P_k(x)}{Q_m(x)}$ – правильная ($k < m$), то необходимо представить ее в виде суммы

простейших рациональных дробей;

3) интеграл от рациональной дроби представить в виде суммы интегралов от целой части и от соответствующих простейших дробей и вычислить эти интегралы.

Пример.

Вычислить интеграл $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 13}{x^4 + 3x^2} dx$.

Решение. Ранее было получено

$$\frac{2x^5 + 6x^3 + 13}{x^4 + 3x^2} = 2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2 + 3)}.$$

Тогда

$$\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 13}{x^4 + 3x^2} dx = \int \left(2x + \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{3(x^2 + 3)} \right) dx =$$

$$= 2\int x dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2 + 3} dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}} =$$

$$= x^2 - \frac{1}{3x} + \frac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется правильной рациональной дробью?
2. Какие виды простейших рациональностей вы знаете?
3. Как интегрируются простейшие рациональные дроби?
4. Сформулируйте теорему о разложении правильной дроби на простейшие.
5. В чем суть метода неопределенных коэффициентов?
6. В чем суть метода частных значений?
7. Сформулируйте правило интегрирования рациональной дроби.