Лекция 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

1. Площадь криволинейной трапеции.
2. Длина дуги кривой.
3. Площадь поверхности вращения
4. Объем пространственного тела.

1. Площадь криволинейной трапеции.

Теорема 1. *Если функция* $y = f(x)$ *неотрицательна и непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то площадь криволинейной трапеции*

$$P\{(x;y)| a \le x \le b;\ 0 \le y \le f(x)\}$$

вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$.

► Пусть

$$\tau_n = \{x_0, x_1, ..., x_n | a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b\}$$

разбиение отрезка $[a;b]$.

И пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k. Тогда значение функции $y = f(x)$ в точке ξ_k равно $f(\xi_k)$. Построим прямоугольники, основанием которых являются отрезки $[a;x_1]$, $[x_1;x_2]$, ..., $[x_{n-1};b]$, а высота равна $f(\xi_k)$.

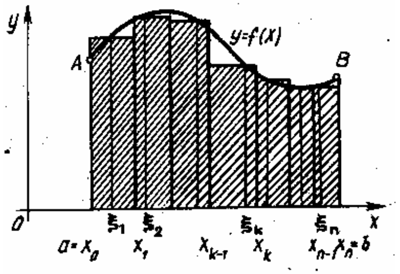

Рис.1.

Площадь каждого прямоугольника равна $S_k = f(\xi_k)\Delta x_k$.

Сумма $\sigma_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ представляет собой площадь заштрихованной ступенчатой фигуры, изображенной на рисунке 1.

Эта площадь зависит от разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k. Чем меньше Δx_k, $k = \overline{1,n}$, тем площадь ступенчатой фигуры ближе к площади криволинейной трапеции. Поэтому $S \approx \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Точное значение площади S криволинейной трапеции получается при $\lambda \to 0$:

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

где $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i$. ◄

Замечания. 1. Если $f(x) < 0$ $\forall x \in [a;b]$, то и $\int\limits_a^b f(x)dx \le 0$, $a < b$.

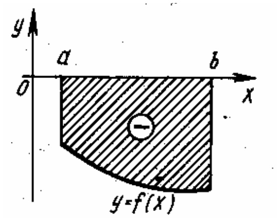

Рис.1.

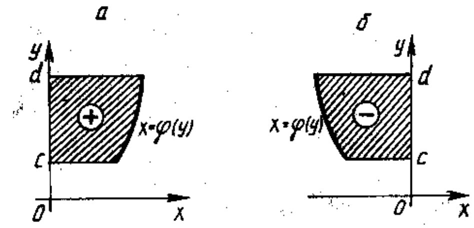

Рис.2

Следовательно, в этом случае

$$S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| = -\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_a^b ydx.$$

2. Если же криволинейная трапеция ограничена кривой $x = \varphi(y)$, осью ординат Oy и прямыми $y = c$, $y = d$ (рис.2), то ее площадь определяется формулами:

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy=\int_c^d xdy \text{, если } \varphi(y)\geq 0 \ \ \forall y\in[c;d] \text{, (рис.2,}a\text{),}$$

$$S=\left|\int_c^d \varphi(y)dy\right|=-\int_c^d xdy \text{, если } \varphi(y)\leq 0 \ \ \forall y\in[c;d] \text{, (рис.2,}б\text{).}$$

3. Если подынтегральная функция $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a;b]$, то интеграл $S=\int_a^b f(x)dx$ равен алгебраической сумме площадей соответствующих криволинейных трапеций, лежащих над осью Ox (со знаком «+») и под этой осью (со знаком «–») (рис.3). Для того чтобы получить общую площадь заштрихованной фигуры, отрезок интегрирования $[a;b]$ надо разбить на частичные отрезки, на которых функция $f(x)$ сохраняет знак, и вычислить площади. Тогда

$$S=-\int_a^{c_1} f(x)dx+\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx-\int_{c_2}^{c_3} f(x)dx+\int_{c_3}^{b} f(x)dx .$$

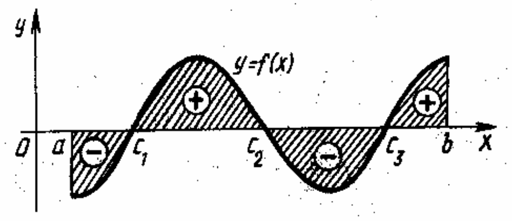

Рис.3.

4. Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$, то эту площадь рассматривают как разность площадей двух криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b (рис.4). В этом случае можно воспользоваться одной из формул:

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx \text{, если } f(x)\geq g(x) \ \ \forall x\in[a;b] \text{ (рис.4,}a\text{),}$$

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx \text{, если } g(x)\geq f(x) \ \ \forall x\in[a;b] \text{ (рис.4,}б\text{).}$$

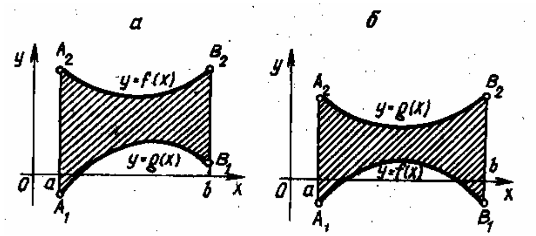

Рис.4.

В случае, когда разность $f(x)-g(x)$ не сохраняет знак на отрезке $[a;b]$,этот отрезок разбивают на частичные отрезки, на каждом из которых функция $f(x)-g(x)$ сохраняет знак. Например, для случая, изображенного на рис.5, площадь заштрихованной фигуры находится по формуле

$$S=\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^d (g(x)-f(x))dx+\int_d^b (f(x)-g(x))dx .$$

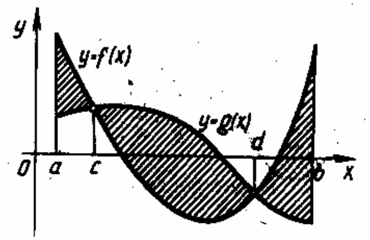

Рис.5.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной аркой синусоиды $y=\sin x$.

Решение. Имеем

$$S=\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2 .$$

В параметрическом виде. Если криволинейная трапеция ограничена линией, заданной уравнениями в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$, причем $x(t_1) = a$, $x(t_2) = b$, то ее площадь S при $y(t) \ge 0$ вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t) x'(t) dt,$$

которая получается заменой переменной $x = x(t)$, $y = y(t)$, $dx = x'(t)dt$. Пределы t_1, t_2 определяют из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

Пример. Вычислить площадь эллипса

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases}$$

где $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса и поэтому делят его на четыре одинаковые части. Следовательно,

$$S = 4S_1,$$

где S_1 – площадь части эллипса, расположенная в первом квадранте. Тогда

$$S = 4S_1 = 4\int_0^a y dx = \left[\begin{array}{l} x = a\cos t,\ y = b\sin t, \\ dx = -a\sin t\, dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2}, \\ x = a \Rightarrow t = 0. \end{array} \right] = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t dt =$$

$$= -2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t \right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = ab\pi.$$

В полярной системе координат. Пусть фигура, ограниченная линией l, заданной в полярной системе координат $\{O, r, \varphi\}$ уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Криволинейным сектором называется фигура, ограниченная линией $r = r(\varphi)$ и радиусами-векторами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис.6).

При этом криволинейный сектор является *правильной фигурой*, если любой луч $\varphi = \varphi^*$, $\alpha \le \varphi^* \le \beta$, исходящий из полюса O, пересекает линию $r = r(\varphi)$ не более чем в одной точке. И пусть функция $r = r(\varphi)$ непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$.

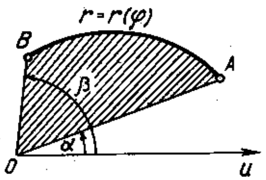

Рис.6.

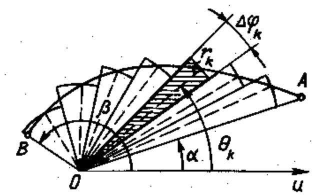

Рис.7

Теорема 2. *Площадь криволинейного сектора вычисляется по формуле:*

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

► Для вычисления площади криволинейного сектора OAB применяется алгоритм составления интегральной суммы с последующим предельным переходом к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок $[\alpha; \beta]$ на n частичных отрезков точками $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < ... < \varphi_n = \beta$. Обозначим $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$, $k = \overline{1, n}$. Проведем лучи $\varphi = \varphi_k$, $k = \overline{1, n}$. Тогда криволинейный сектор OAB разобьется на n частичных криволинейных секторов (рис.7).

2. На каждом частичном отрезке $[\varphi_k; \varphi_{k-1}]$, $k = \overline{1, n}$, выберем произвольным образом точку θ_k и найдем значения функции $r(\varphi)$ в этих точках: $r_k = r(\theta_k)$, $k = \overline{1, n}$.

3. Предположим, что на каждом из частичных отрезков $[\varphi_{k-1}; \varphi_k]$ функция $r = r(\varphi)$ постоянна и совпадает со значением $r_k = r(\theta_k)$. Тогда каждый частичный криволинейный сектор можно заменить круговым сектором с радиусом $r_k = r(\theta_k)$ и центральным углом $\Delta\varphi_k$. Площадь такого кругового сектора вы-

числяется по формуле

$$\Delta S_k = \frac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k .$$

За площадь S криволинейного сектора OAB примем площадь фигуры, состоящей из n частичных круговых секторов:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k .$$

Приближенное равенство тем точнее, чем меньше отрезки $[\varphi_{k-1};\varphi_k]$, т.е. чем больше n. Правая часть равенства является интегральной суммой для непрерывной функции $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$.

4. За точное значение площади S криволинейного сектора OAB принимается предел интегральной суммы при $\lambda = \max\limits_{[\alpha;\beta]}\{\Delta\varphi_k\} \to 0$:

$$S = \lim_{\substack{\lambda\to 0\\(n\to\infty)}} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} r^2(\theta_k)\Delta\varphi_k = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi . \blacktriangleleft$$

Пример. Вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного кардиоидой

$$r = a(1+\cos\varphi),$$

где $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Решение. Имеем

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_{0}^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{2\pi} 1 d\varphi + 2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + +\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi} + 2\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) = \frac{3}{2}\pi a^2 .$$

2. Длина дуги кривой.

Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и кривая l – график этой функции (рис.8). Требуется найти длину дуги плоской кривой l, заключенной между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$.

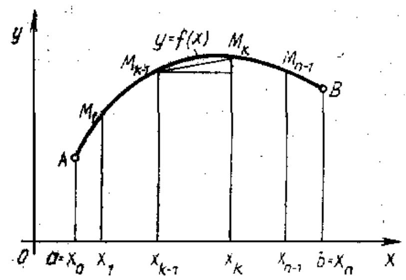

Рис.8.

Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольным образом на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b .$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = \overline{1,n}$. Через точки x_i, $i = \overline{1,n}$, проведем вертикальные прямые, параллельные оси Oy, до пересечения с кривой l. Тогда дуга AB разобьется на n частей. Соединив каждые две соседние точки разбиения кривой l отрезками (хордами), получим ломаную $AM_1M_2 \ldots M_{n-1}B$, вписанную в дугу AB. Обозначим длину ломаной через l_n:

$$l_n = \left|\overline{AM_1}\right| + \left|\overline{M_1M_2}\right| + \ldots + \left|\overline{M_{n-1}B}\right| = \sum_{k=1}^{n}\Delta l_k ,$$

где Δl_k – длина хорды, стягивающей дугу $M_{k-1}M_k$.

Длина ломаной является приближенным значением длины дуги AB $(l \approx l_n)$. Очевидно, что если увеличивать число n точек разбиения отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки так, чтобы длина максимального из них стремилась к нулю, то длина вписанной ломаной стремится к длине дуги кривой AB

Если существует конечный предел l_n при $\lambda=\max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\}\to 0$, то этот предел называется ***длиной*** дуги l, а сама дуга называется ***спрямляемой***:

$$l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\Delta l_k .$$

Если конечный предел l_n не существует, то и длина дуги не существует, а сама дуга называется ***неспрямляемой***.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$. на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то кривая l – спрямляемая, и ее длина вычисляется по формуле*

$$l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx .$$

►Вычислим длину стягивающей хорды $M_{k-1}M_k$. Так как $M_{k-1}(x_{k-1};f(x_{k-1}))$, $M_k(x_k;f(x_k))$, то

$$\Delta l_k\left|M_{k-1}M_k\right|=\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2}=\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}\Delta x_k .$$

По теореме Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=f'(\xi_k),\ \xi_k\in(x_{k-1};x_k).$$

Следовательно, $\Delta l_k=\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\Delta x_k$.

Подставляя полученное выражение, получаем

$$l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\Delta x_k .$$

В правой части формулы стоит интегральная сумма для функции: $\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}$ на отрезке $[a;b]$. Предел такой суммы существует и равен определенному интегралу от этой функции на отрезке $[a;b]$:

$$l=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\left(f'(\xi_k)\right)^2}\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx .$$ ◄

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y=x^{\frac{3}{2}}$, если $0\le x\le 5$.

Решение. Имеем

$$l=\int_0^5\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}dx=\frac{8}{27}\left(1+\frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5=\frac{235}{27}.$$

В параметрическом виде. Пусть уравнение кривой задано параметрическими уравнениями

$$x=x(t),$$
$$y=y(t),$$

где $t\in[t_1;t_2]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $x'(t)\neq 0\ \ \forall t\in[t_1;t_2]$.

Для вычисления длины дуги кривой воспользуемся формулой $l=\int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$, предварительно выполнив замену переменной: $x=x(t)$. Тогда $dx=x'(t)dt$ и $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Подставляя в формулу дины дуги, получим:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1+\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2}x'(t)dt$$

или $l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2}\,dt$.

Если пространственная кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ $t_1\le t\le t_2$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – непрерывные функции, имеющие непрерывные производные на отрезке $[t_1;t_2]$, то длина дуги этой кривой определяется по формуле

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'_t)^2+(y'_t)^2+(z'_t)^2}\,dt .$$

Пример. Вычислить длину астроиды

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$$

если $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. В силу симметричности астроиды относительно осей ее длина l равна

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \begin{bmatrix} x' = -3a\cos^2 t\sin t, \\ y' = 3a\cos t\sin^2 t \end{bmatrix} =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt = 6a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a .$$

В полярной системе координат. Пусть кривая задана в полярной системе координат уравнением $r = r(\varphi)$ $\forall\varphi \in [\alpha;\beta]$. Предположим, что $r(\varphi)$ и $r'(\varphi)$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$.

Декартовы и полярные координаты связаны соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Учитывая, что $r = r(\varphi)$, получаем

$$\left.\begin{aligned} x = r(\varphi)\cos\varphi, \\ y = r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\}, \ \forall\varphi \in [\alpha;\beta].$$

Эти уравнения можно рассматривать как параметрические уравнения кривой.

Найдем производные от x и y по параметру φ:

$$\left.\begin{aligned} x_\varphi' = r'\cos\varphi - r\sin\varphi, \\ y_\varphi' = r'\sin\varphi + r\cos\varphi. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда $(x_\varphi')^2 + (y_\varphi')^2 = r^2 + (r')^2$

Следовательно, $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + (r')^2}\,d\varphi$.

Пример. Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

Решение. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла $0 \le \varphi \le 2\pi$. Поэтому

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\varphi^2 + a^2}\,d\varphi = a\int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi^2 + 1}\,d\varphi =$$

$$= a\left(\pi\sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}\right)\right).$$

3. Площадь поверхности вращения.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x)$ *не отрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной* $f'(x)$ *на отрезке* $[a;b]$. *Тогда поверхность, образованная вращением графика этой функции вокруг оси* Ox, *имеет площадь* S, *которая может быть вычислена по формуле*:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx .$$

► Разобьем произвольно отрезок $[a;b]$ на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b .$$

Пусть A_0, A_1, …, A_n — соответствующие точки графика функции $f(x)$. Построим ломаную $A_0 A_1 \ldots A_n$ (рис. 9).

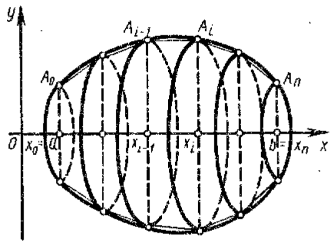

Рис.9.

При вращении этой ломаной вокруг оси Ox получается поверхность, составленную из боковых поверхностей усеченных конусов (цилиндров). Площадь боковой поверхности усеченного конуса (цилиндра), образованного вращением k -го звена ломаной, равна

$$S_k = 2\pi \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{2} l_k,$$

где l_k – длина хорды $A_{k-1}A_k$, равная

$$l_k = \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2}.$$

По формуле Лагранжа

$$f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

где $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$.

Полагая $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, получаем $l_k = \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$.

Тогда площадь S поверхности вращения приближенно равна площади поверхности, полученной от вращения ломаной

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} 2\pi \frac{f(x_{k-1}) - f(x_k)}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k.$$

Представим эту сумму в виде двух сумм

$$S \approx 2\pi \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k +$$

$$+ \pi \sum_{k=1}^{n} ([f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] + [f(x_k) - f(\xi_k)])\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k.$$

Первая сумма в правой части последнего равенства является интегральной суммой и при $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\} \to 0$ в силу непрерывности функции $f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}$ имеет своим пределом интеграл $\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$. Покажем, что вторая сумма в правой части равенства имеет при $\lambda \to 0$ предел, равный нулю. Действительно, так как функция $f(x)$ равномерно- непрерывна на $[a;b]$, то по теореме Кантора для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при $\lambda < \delta$ выполняются неравенства

$$|f(x_{k-1}) - f(\xi_k)| < \varepsilon, \qquad |f(x_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon.$$

Пусть M максимальное значение функции $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ на отрезке $[a;b]$.

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} ([f(x_{k-1}) - f(\xi_k)] + [f(x_k) - f(\xi_k)])\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\Delta x_k\right| <$$

$$< 2M\varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = 2M\varepsilon(b - a).$$

Так как ε произвольно мало, то отсюда следует, что указанного выражения равен нулю при $\lambda \to 0$.

Таким образом, переходя в равенстве для площади поверхности к пределу при $\lambda \to 0$, имеем

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \blacktriangleleft$$

В п а р а м е т р и ч е с к о м в и д е. Пусть поверхность получается вращением вокруг оси Ox кривой AB, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t),\ y = y(t),$$

где $t \in [\alpha;\beta]$, $x(t)$, $y(t)$ – непрерывные функции с непрерывными производными, причем $y(t) \ge 0$, $a \le x(t) \le b$ при $\alpha \le t \le \beta$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

Тогда, производя в интеграле для площади S поверхности вращения переменной замену переменной $x = x(t)$, получаем

$$S = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt$$

В п о л я р н ы х к о о р д и н а т а х. Пусть кривая задана уравнением в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, где $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\alpha;\beta]$.

Тогда, учитывая формулы

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\varphi)\cos\varphi, \\ y &= r(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}\right\},\ \forall \varphi \in [\alpha;\beta],$$

получаем

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)}d\varphi .$$

Пример. Вычислить площадь S поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ 0 \le t \le 2\pi ,$$

вокруг оси Ox .

Решение. Имеем

$$S = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{(a\sin t)^2 + (a(1 - \cos t))^2}\, dt =$$

$$= 2\sqrt{2}\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^{\frac{3}{2}} dt = \frac{64}{3}\pi a^2 .$$

4. Объем пространственного тела.

Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям. Пусть дано тело T , ограниченное замкнутой поверхностью. И пусть известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс (рис.10,*а*). Эти сечения называются ***поперечными***. Положение поперечного сечения определяется абсциссой точки его пересечения с осью Ox .

С изменением x площадь S поперечного сечения изменяется, т.е. является некоторой функцией от x . Обозначим ее $S(x)$. Функцию $S(x)$ будем считать непрерывной на отрезке $[a;b]$, где a и b – абсциссы крайних сечений тела T .

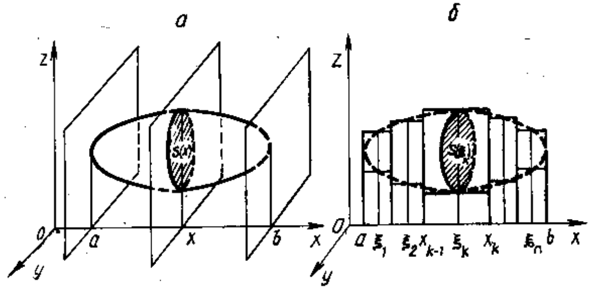

Рис.10.

Теорема 5. *Объем тела, заключенного между двумя плоскостями $x = a$ и $x = b$, в случае, если площадь сечения, проведенная перпендикулярно к оси Ох, есть известная функция от x, $S = S(x)$ $\forall x \in [a;b]$, вычисляется по формуле*

$$V = \int_a^b S(x)dx .$$

► Для вычисления объема V тела T применяется алгоритм составления интегральной суммы и предельного перехода к определенному интегралу.

1. Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частичных отрезков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b .$$

Обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\}$ $k = \overline{1,n}$. Через точки разбиения x_k $k = \overline{1,n}$, проведем плоскости, перпендикулярные к оси *Ох*. Семейство плоскостей $\Delta x_k = x_k$, $k = \overline{1,n}$, разобьет данное тело T на слои, толщина каждого из которых равна Δx_k, $k = \overline{1,n}$.

2. На каждом из частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$, выберем произвольным образом точку ξ_k и найдем значения $S(\xi_k)$ функции $S(x)$ в этих точках.

3. Предположим, что на каждом из частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$ функция $S = S(x)$ постоянна и совпадает со значением $S(\xi_k)$. Тогда каждый слой тела T представляет собой прямой цилиндр с основанием $S(\xi_k)$ и образующими, параллельными оси *Ох*. Объем такого частичного прямого цилиндра вычисляется по формуле

$$\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k .$$

где Δx_k – высота частичного цилиндра.

Объем V всего тела T приближенно равен объему фигуры, состоящей из n ступенчатых частичных цилиндров (см. рис.10,*б*):

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k \ .$$

Очевидно, что последнее приближенное равенство тем точнее, чем меньше диаметр разбиения отрезка $[a;b]$ $\lambda = \max\limits_{[a;b]}\{\Delta x_k\}$.

4. За точное значение искомого объема примем

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k \ .$$

Заметим, что сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$ является интегральной суммой для непрерывной функции $S(x)$ на отрезке $[a;b]$. Следовательно,

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b S(x)dx \ . \blacktriangleleft$$

Пример. Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Пересечем эллипсоид плоскостью $x = h$. В сечении получим эллипс $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(1 - \dfrac{x^2}{a^2}\right)} = 1, \\ x = h. \end{cases}$

Площадь поперечного сечения равна $S(x) = \pi bc\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2}\right)$.

Тогда $V = \int\limits_{-a}^{a} \pi bc\left(1 - \dfrac{h^2}{a^2}\right)dh = \pi bc\left(x - \dfrac{h^2}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a} = \dfrac{4}{3}\pi abc$.

Вычисление объемов тел вращения. Рассмотрим тело, образованное вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис.11).

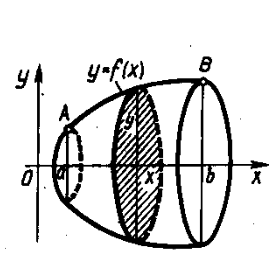

Рис.11.

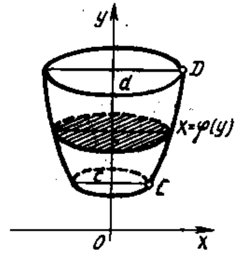

Рис.12.

Если пересечь это тело плоскостями, перпендикулярными к оси Ox, получим круги, радиусы которых равны модулю ординат $y = f(x)$ точек данной кривой. Следовательно, площадь сечения рассматриваемого тела

$$S(x) = \pi y^2 = \pi(f(x))^2 \ .$$

Применяя формулу $V = \int\limits_a^b S(x)dx$, получаем формулу для вычисления объема тела вращения

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b (f(x))^2 dx \ .$$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$ (рис.12), то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy \ ,$$

где $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, – уравнение кривой CD.

Пример. Вычислить объем тела, получающегося от вращения вокруг оси одной арки синусоиды $y = \sin x$.

***Решение*.** Имеем

$$S = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2x x dx\right) = \frac{\pi^2}{2} \ .$$

Вопросы для самоконтроля

1. По каким формулам вычисляются площади криволинейных трапеций, ограниченных линиями, заданными в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат?

2. Приведите формулы для вычисления длин дуги кривой, заданной в декартовой системе координат, в параметрическом виде и в полярной системе координат?

3. Как вычислить площадь поверхности тела?

4. Как вычисляется объем пространственных тел?