Лекция 2. РЯДЫ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

1. Интегральный признак Коши.
2. Признаки сравнения.
3. Признак Даламбера.
4. Признак Коши.

1. Интегральный признак Коши.

Пусть дан ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, члены a_k которого неотрицательны, $a_k \geq 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм этого ряда была ограничена.*

► *Необходимость.* В силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ последовательность его частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится. Следовательно, она ограничена.

Достаточность. Пусть последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена. Поскольку данный ряд является рядом с неотрицательными членами, то частичные суммы образуют неубывающую последовательность

$$0 \leq S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n \leq S_{n+1} \leq \ldots .$$

В силу теоремы Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности последовательность $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. ◄

Теорема 2 (интегральный признак Коши). *Если неотрицательная интегрируемая функция* $f(x)$ *на промежутке* $[1;+\infty)$

монотонно убывает и члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *имеют вид* $a_k = f(k)$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 .$$

► В силу монотонности функции $f(x)$ для $k \leq x \leq k+1$ справедливо неравенство $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. Интегрируя его в пределах от k до $k+1$, имеем

$$\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx$$

или

$$a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k ,$$

так как $f(k) = a_k$. Запишем полученные неравенства для $k = \overline{1,n}$:

$$a_2 \leq \int_1^{2} f(x)dx \leq a_1 ,$$

$$a_3 \leq \int_2^{3} f(x)dx \leq a_2 ,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq a_n .$$

Просуммировав их, найдем

$$S_{n+1} - a_1 \leq \int_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n .$$

Случай 1. Пусть интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится и равен I, тогда

$\int\limits_1^{n+1} f(x)dx \le I$ и $S_{n+1} \le I + a_1 = C$ или $S_n \le C \quad \forall n \in N$. Итак, монотонно возрастающая последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху и, следовательно, сходится. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Переходя в неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$S \ge \int\limits_1^{\infty} f(x)dx \ge S - a_1.$$

Откуда следует

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx \le S \le \int\limits_1^{\infty} f(x)dx + a_1.$$

Наоборот, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то его последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена, а тем более ограничена и сходится монотонно возрастающая последовательность $I_{n+1} = \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$, т.е. сходится интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Случай 2. Пусть интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится, тогда в силу неравенства $S_n \ge \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$ последовательность частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ неограниченна. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. Если же расходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, то последовательность его частичных сумм $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ неограниченна. Поэтому неограничена последовательность $I_{n+1} = \int\limits_1^{n+1} f(x)dx$.

Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$ расходится. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ***обобщенный гармонический ряд***

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \quad p \in \mathbf{R}.$$

Решение. При $p = 1$ ряд совпадает с гармоническим рядом и расходится.

Если $p \le 0$, то $\frac{1}{k^p} \ge 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k^p} \ne 0$. В этом случае ряд расходится, так как нарушается необходимое условие сходимости ряда.

Пусть $p > 0$ и $p \ne 1$. Положим $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Функция $f(x)$ монотонно убывает на промежутке $[1;+\infty)$.

Обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится и расходится одновременно с интегралом $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

Известно, что несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{1}{1-p}, & \text{если } p > 1, \\ \infty, & \text{если } 0 < p < 1. \end{cases}$$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

2. Признаки сравнения.

Теорема 3 (признак сравнения)*.* *Пусть для членов рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *справедливо неравенство* $0 \le a_k \le b_k \quad \forall k \ge n_0 \in \mathbf{N}$.

Тогда: 1) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится,*

2) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

► Предположим сначала, что $n_0 = 1$.

1. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится. Обозначим через S_n и S'_n n-е частичные суммы рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ соответственно. Заметим, что $S_n \le S'_n \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Тогда, согласно теореме 1 из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует ограниченность последовательности $(S'_n)_{n=1}^{\infty}$, а значит, и последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$. Из ограниченности последовательности $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится. Тогда последовательность $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ неограниченна. Следовательно, неограничена и последовательность $(S'_n)_{n=1}^{\infty}$. Значит, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Если $n_0 > 1$, то для доказательства теоремы достаточно рассмотреть ряды $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=n_0}^{\infty} b_k$, так как отбрасывание конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость. ◄

Замечание. Доказанный признак является *достаточным* для

сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Пример. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{k^k} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^k}.$$

Решение. Так как $\frac{1}{k^k} \le \frac{1}{k^2} \quad \forall k \ge 2$ и обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится ($p = 2 > 1$), то сходится и заданный ряд.

Следствие (предельный признак сравнения). *Пусть для членов рядов* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k > 0$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k > 0$, *существует предел* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A$. *Тогда 1) если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится и* $0 \le A < +\infty$, *то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, 2) если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится и* $0 < A \le +\infty$, *то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, 3) если* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 1$, *то ряды* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся или расходятся одновременно.*

► Из определения предела $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = A$ для любого положительного ε, например $0 < \varepsilon < L$, найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$A - \varepsilon < \frac{a_k}{b_k} < A + \varepsilon \quad \forall k \ge N(\varepsilon)$$

или, так как $b_k > 0$,

$$(A - \varepsilon) b_k < a_k < (A + \varepsilon) b_k \quad \forall k \ge N(\varepsilon).$$

Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, согласно свойству 3 числовых рядов, следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}(A+\varepsilon)b_k$, а значит, по теореме 3 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, то расходятся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(A-\varepsilon)b_k$ и, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Аналогично доказывается, что из сходимости (расходимости) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ следует сходимость (расходимость) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{k}$.

Решение. Сравним этот ряд с гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Поскольку

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{1}{k}} = \pi \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{k}}{\frac{\pi}{k}} = \pi,\ 0<\pi<\infty,$$

и гармонический ряд расходится, то расходится и исходный ряд.

Замечание. При применении признаков сходимости рядов, в качестве рядов, используемых для сравнения, выбирают, как правило:

1) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, $(a\neq 0)$, из элементов геометрической прогрессии, сходящийся при $|q|<1$ и расходящийся при $|q|\geq 1$;

2) обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$, сходящийся при $p>1$ и расходящийся при $p\leq 1$.

3. Признак Д'Аламбера.

Теорема 4 (признак Д'Аламбера). *Пусть для ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k>0$, *существует предел* $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=L$. *Тогда: 1) при* $L<1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится; 2) при* $L>1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

► По определению предела следует, что для любого $\varepsilon>0$, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, выполняются неравенства

$$L-\varepsilon<\frac{a_{k+1}}{a_k}<L+\varepsilon \quad \forall k\geq N(\varepsilon).$$

Случай 1. Если $L<1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что число $q=L+\varepsilon<1$. Тогда из неравенства $\frac{a_{k+1}}{a_k}<q \quad \forall k\geq N(\varepsilon)=N$ следует, что

$$a_{N+1}<a_N q,$$
$$a_{N+2}<a_{N+1}q<a_N q^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots,$$
$$a_{N+k}<a_{N+k-1}q<a_N q^k,$$
$$\dots\dots\dots\dots.$$

Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_N q^k$ при $|q|<1$ сходится, то сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{N+k}=\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$, а следовательно, и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Случай 2. Если $L>1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что число $q=L-\varepsilon>1$. Тогда имеем неравенство

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}>q \quad \forall k\geq N(\varepsilon)$$

или

$$a_{k+1}>qa_k \quad \forall k\geq N(\varepsilon).$$

Это означает, что, начиная с номера $N(\varepsilon)$, члены ряда возрастают, т.е. необходимый признак сходимости не выполняется и ряд расходится. ◄

Примеры. Исследовать сходимость ряды

1) $1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^3}+...=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^k}$,

2) $2+\frac{2^2}{2^4}+\frac{2^3}{3^4}+\frac{2^4}{4^4}+...=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^n}{k^4}$.

Решение. 1. Вычислим предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{(k+1)!k^k}{(k+1)^{k+1}k!}=\lim_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^n}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}=\frac{1}{e}.$$

Следовательно, $L=\frac{1}{e}<1$ и данный ряд сходится.

2. Вычислим предел

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}k^4}{(k+1)^4\cdot 2^k}=2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^4}=2.$$

Так как $L=2>1$, то исходный ряд расходится.

Замечание. Если в условиях теоремы 4 $L=1$, то о сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ нельзя сказать ничего определенного.

4. Признак Коши.

Теорема 5 (признак Коши). *Пусть для ряда* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $a_k>0$, *существует предел* $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=L$. *Тогда 1) при* $L<1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходится; 2) при* $L>1$ *ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *расходится.*

► По определению предела следует, что для любого $\varepsilon>0$

найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что выполняются неравенства

$$L-\varepsilon<\sqrt[k]{a_k}<L+\varepsilon \quad \forall k\ge N(\varepsilon).$$

Случай 1. Если $L<1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что число $q=L+\varepsilon<1$. Тогда имеем $a_k<q^k \quad \forall k\ge N(\varepsilon)$, и, согласно признаку сравнения, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$ при $0<q<1$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$.

Случай 2. Если $L>1$, то найдется такое $\varepsilon>0$, что $L-\varepsilon=q>1$. Тогда получаем $a_k>q^k \quad \forall k\ge N(\varepsilon)$. Из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty}q^k$, $q>1$, согласно признаку сравнения, следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$. ◄

Пример. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k$.

Решение. Так как

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{2k}{k+1}\right)^k}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{k+1}=2>1,$$

то данный ряд расходится.

Замечание. Можно доказать, что если существует предел $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}$, то существует и предел $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k}$ (и они равны между собой). Обратное утверждение не всегда имеет место, т.е. признак Коши «сильнее» признака Д'Аламбера.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте и докажите интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами.
2. Сформулируйте и докажите признак сравнения сходимости рядов с неотрицательными членами.
3. Сформулируйте и докажите признак Д'Аламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.
4. Сформулируйте и докажите признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.