Лекция 10. НЕЯВНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Неявные функции, задаваемые одним уравнением.
2. Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением.
3. Неявные функции, определяемые системой уравнений.
4. Зависимость функций. Достаточное условие независимости функций

1. Неявные функции, задаваемые одним уравнением.

Известно, что функция $y=f(x)$ может быть задана неявно уравнением, связывающим переменные x и y:

$$F(x,y)=0 . \qquad (1)$$

Примеры.

1. Уравнение $x-2y-1=0$ определяет функцию $y=\frac{1}{2}(x+1)$; $D(y)=E(y)=\boldsymbol{R}$.

2. Уравнение $x^2+y^2=0$ выполняется только при $x=y=0$ и задает точку $O(0;0)$.

3. Уравнение $x^2+y^2+4=0$ не определяет никакой функции на $\boldsymbol{R}$, так как оно не имеет действительных корней, а значит, нельзя рассматривать y как функцию от x.

Итак, уравнение вида (1) не всегда задает функцию $y=f(x)$.

Возникает вопрос, при каких условиях уравнение $F(x,y)=0$ определяет одну из переменных как функцию другой.

Теорема 1 (существование неявной функции). *Пусть функция $F(x,y)=0$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) существует точка $P_0(x_0;y_0)$, в которой $F(x_0,y_0)=0$;

2) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$;

3) функции $F'_x(x,y)$ и $F'_y(x,y)$ непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$.

Тогда существует единственная функция $y=f(x)$ определенная на некотором интервале, содержащем точку x_0, и удовлетворяющая при любом x из этого интервала уравнению $F(x,y)=0$, такая, что $f(x_0)=y_0$.

Без доказательства.

Замечание. Условие $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$ является достаточным, но необходимым условием для существования в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$ единственной неявной функции $y=f(x)$, определяемой уравнением (1).

Пример. Доказать, что уравнение $y^3+2xy+x^4-4=0$ задает неявную функцию.

Решение. Обозначим левую часть данного уравнения через $F(x,y)$. Имеем:

1) $F(1,1)=0$;

2) $F(1,1)=0$; $F'_y(1,1)=\left(3y^2+2x\right)\Big|_{(1;1)}=5\neq 0$;

3) частные производные $F'_x=2y+4x^3$ и $F'_y=3y^2+2x$ являются непрерывными функциями в любой окрестности точки $P(1,1)$.

Следовательно, существует единственная функция $y=f(x)$, удовлетворяющая уравнению $y^3+2xy+x^4-4=0$ и условию

$$f(1)=1 .$$

Неявная функция двух независимых переменных определяется уравнением $F(x,y,z)=0$, связывающим три переменные. Справедлива теорема, аналогичная приведенной выше.

Теорема 2. *Пусть функция $F(x,y,z)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) $\exists P(x_0;y_0;z_0): F(x_0,y_0,z_0)=0$;

2) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$;

3) $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$ *и* $F'_z(x,y,z)$ *непрерывны в некоторой окрестности точки $P_0(x_0;y_0;z_0)$.*

Тогда существует единственная функция $z=f(x,y)$ определенная в некоторой δ-окрестности точки $P_0(x_0;y_0)$, удовле-

творяющая уравнению $F(x,y,z)=0 \quad \forall\, x,y\in U(\delta,P_0)$, *такая, что* $f(x_0,y_0)=z_0$.

Без доказательства.

2. Дифференцирование неявной функции, задаваемой одним уравнением.

Пусть условия 1–3 теоремы 1. выполнены и уравнение (1) определяет y как некоторую функцию от x. Если в это уравнение подставить вместо y функцию $f(x)$, то получим тождество

$$F(x,f(x))=0.$$

Продифференцируем данную функцию по правилу дифференцирования сложной функции:

$$F'_x\cdot 1+F'_y\frac{dy}{dx}=0.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Теорема 3. *Пусть 1) функция* $F(x,y)=0$ *дифференцируема в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0(x_0;y_0)$*;2) частная производная* $F'_y(x,y)$ *непрерывна в точке* $P_0(x_0;y_0)$*; 3)* $F(x_0,y_0)=0$, $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$. *Тогда существует такой прямоугольник*

$$\Pi_{(P_0;d_1;d_2)}=\left\{(x;y)\,\big|\,|x-x_0|<d_1,|y-y_0|<d_2\right\}\subset\delta,$$

в котором уравнение $F(x,y)=0$ *определяет единственную неявную функцию вида* $y=f(x)$*, причем* $f(x_0)=y_0$. *Функция* $y=f(x)$ *дифференцируема на интервале* $(x_0-d_1;x_0+d_1)$*, и ее производная вычисляется по формуле*

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x;y)}{F'_y(x;y)}\Bigg|_{y=f(x)}=-\frac{F'_x(x;f(x))}{F'_y(x;f(x))}.$$

Без доказательства.

Замечание. В формуле важен порядок действий при вычислении $F_x(x;f(x))$: сначала берется частная производная по x

функции $F(x;y)$, а затем вместо y подставляется $f(x)$, но не наоборот.

Пример. Вычислить производную неявной функции, заданной уравнением $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1=0$.

Решение. Обозначим через $F(x,y)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$. Имеем $F'_x=\dfrac{2x}{a^2}$, $F'_y=\dfrac{2y}{b^2}$. Следовательно, $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2x}{a^2y}$.

Пусть уравнение $F(x_1;x_2;...;x_n;y)=0$ определяет y как некоторую функцию независимых переменных x_1, $x_2,\ldots,x_n$. Если в это уравнение вместо переменной u подставить выражение $u=f(x_1;x_2;...;x_n)$ получается тождество $F(x_1;x_2;...;x_n;y(x_1;x_2;...;x_n))=0$

Теорема 4. *Пусть 1) функция* $F(x_1;x_2;...;x_n;y)=F(P)$ *дифференцируема в некоторой* δ*-окрестности точки* $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;y_0)$*; 2) частная производная* $F'_y(x_1;x_2;...;x_n;y)$ *непрерывна в точке* $P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;y_0)$*; 3)* $F(P_0)=0$, $F'_y(P_0)\neq 0$. *Тогда существует такой параллелепипед*

$$\Pi=\left\{(x_1;x_2;...;x_n;y)\,\big|\,|x_i-x_i^0|<d_i,\,i=1,2,...,n,|y-y_0|<c\right\}\subset\delta,$$

в котором уравнение $F(x_1;x_2;...;x_n;y)=0$ *определяет единственную неявную функцию вида* $y=f(x_1;x_2;...;x_n)$*, причем* $f(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0)=y_0$. *Функция* $y=f(x_1;x_2;...;x_n)$ *дифференцируема при* $|x_i-x_i^0|<d_i$, $i=1,2,...,n$*, ее частные производные вычисляются по формулам*

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=-\frac{F'_{x_1}}{F'_y}\Bigg|_{y=f(x_1;x_2;...;x_n)},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_2}=-\left.\frac{F'_{x_2}}{F'_y}\right|_{y=f(x_1;x_2;...;x_n)}, \qquad (2)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_n}=-\left.\frac{F'_{x_n}}{F'_y}\right|_{y=f(x_1;x_2;...;x_n)}.$$

Без доказательства.

Замечания. 1. Пусть уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет z как некоторую функцию $z=f(x,y)$ независимых переменных x и y. Если в это уравнение вместо z подставить $f(x,y)$ получается тождество $F(x,y,f(x))=0$. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

2. Если уравнение поверхности Q задано неявной функцией $F(x,y,z)=0$, то:

$$z'_x(x_0,y_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)},$$

$$z'_y(x_0,y_0)=-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Следовательно, уравнение ***касательной*** плоскости α к поверхности имеет вид

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

и каноническое уравнение ***нормали*** к поверхности принимает вид

$$\frac{(x-x_0)}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(y-y_0)}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{(z-z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Пример. Найти частные производные неявной функции

$$e^{-xy}-2z+e^z=0.$$

Решение. Имеем

$$F'_x=-ye^{-xy},\ F'_y=-xe^{-xy},\ F'_z=-2+e^z.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{ye^{-xy}}{e^z-2},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xe^{-xy}}{e^z-2}.$$

Пример. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2+2y^2+3z^2=5$ в точке $M_0(0;1;1)$.

Решение. Уравнение поверхности задано неявно. Вычислим частные производные функции в точке M_0:

$F'_x(x,y,z)=2x$, $\quad F'_x(0,1,1)=0$,

$F'_y(x,y,z)=4y$, $\quad F'_y(0,1,1)=4$,

$F'_z(x,y,z)=6z$, $\quad F'_z(0,1,1)=6$.

Следовательно, уравнение касательной плоскости α имеет вид $4(y-1)+6(z-1)=0$ или $2y+3z-5=0$.

Уравнение нормали $\frac{x-0}{0}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-1}{6}$ или $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$.

Так как проекция направляющего вектора $\vec{n}(0;2;3)$ нормали на ось Ox равна нулю, то нормаль перпендикулярна к оси Ox, а касательная плоскость параллельна этой оси.

3. Неявные функции, определяемые системой уравнений.

Рассмотрим систему из m уравнений

$$\begin{cases} F_1(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0,\\ F_2(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ F_m(x_1;x_2;...x_n;y_1;y_2;...;y_m)=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Решение этой системы относительно y_1, y_2, ..., y_m есть

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1;x_2;...;x_n),\\ y_2=f_2(x_1;x_2;...;x_n),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\\ y_m=f_m(x_1;x_2;...;x_n), \end{cases} \qquad (4)$$

и называется ***совокупностью неявных функций***, определяемых системой уравнений (3).

Определитель

$$J=\frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}\\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial y_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}\end{vmatrix}, \qquad (5)$$

составленный из частных производных, называется ***определителем Якоби (якобианом)*** функций F_1, F_2, ..., F_m по переменным y_1, y_2, ..., y_m.

Теорема 5. *Пусть 1) функции F_1, F_2, ..., F_m дифференцируемы в некоторой δ-окрестности точки*

$$P_0(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;y_1^0;y_2^0;...;y_m^0),$$

2) частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial y_j}$, $i,j=1,2,...,m$ непрерывны в этой точке P_0,

3) $F_1(P_0)=0$, $F_2(P_0)=0$, ..., $F_m(P_0)=0$, $\left.\frac{D(F_1;F_2;...;F_m)}{D(y_1;y_2;...;y_m)}\right|_{P_0}\neq 0$.

Тогда существует такой параллелепипед

$$\Pi=\left\{(x_1;x_2;...;x_n;y_1;y_2;...;y_m)\left|\begin{array}{l}\left|x_i-x_i^0\right|<d_i,\ i=1,2,...,n;\\ \left|y_j-y_j^0\right|<c_j,\ j=1,2,...,m\end{array}\right.\right\}\subset\delta,$$

в котором система уравнений (3) определяет единственную совокупность неявных функций вида (4), и эти функции дифференцируемы при $\left|x_i-x_i^0\right|<d_i$, $i=1,2,...,n$.

Без доказательства.

Для того чтобы найти частные производные неявных функций, необходимо решить n систем линейных уравнений относительно $\frac{\partial f_1}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f_2}{\partial x_i}$, ..., $\frac{\partial f_m}{\partial x_i}$, $i=1,2,...,n$:

$$\begin{cases}\frac{\partial F_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_1}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+...+\frac{\partial F_1}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \frac{\partial F_m}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_i}+\frac{\partial F_m}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial x_i}+...+\frac{\partial F_m}{\partial y_m}\cdot\frac{\partial f_m}{\partial x_i}=0,\end{cases}$$

определителем, которой является якобиан (в силу теоремы 5, якобиан отличен от нуля).

4. Зависимость функций. Достаточное условие независимости функций.

Пусть n функций

$$\begin{cases}y_1=f_1(x_1;x_2;...;x_n),\\ y_2=f_2(x_1;x_2;...;x_n),\\ \dots\dots\dots\dots\dots,\\ y_m=f_m(x_1;x_2;...;x_n)\end{cases} \qquad (6)$$

определены и дифференцируемы в некоторой области $D\subset\boldsymbol{R}^n$, $m\leq n$.

Определение 1. Функция $y_k=f_k(x_1;x_2;...;x_n)=f_k(P)$ называется ***зависимой*** в области D от остальных функций, если ее можно представить в виде

$$y_k=\Phi(y_1;y_2;...y_{k-1};y_{k+1};...;y_m), \qquad (7)$$

где Φ – дифференцируемая функция своих аргументов.

Определение 2. Функции, заданные системой (6), называются ***зависимыми*** в области D, если одна из них (любая) зависит в области D от остальных функций. Если ни одна из функций (6) не зависит от остальных, то функции (6) называются ***независимыми*** в области D.

Пример. Функции

$y_1=x_1+x_2+x_3$,

$y_2=x_1^2+x_2^2+x_3^2$,

$y_3=2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$

являются зависимыми, так как $y_2=y_1^2-y_3$.

Теорема 6 (достаточное условие независимости). *Пусть:*

1) функции (6) дифференцируемы в δ-окрестности точки $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$, 2) якобиан этих функций по каким-либо переменным не равен нулю в точке P_0. Тогда эти функции независимы в δ-окрестности точки $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.

Без доказательства.

Следствие. *Если функции (6) зависимы в δ-окрестности точки $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$, то все якобианы $\dfrac{D\left(y_1;y_2;...;y_m\right)}{D\left(x_{i_1};x_{i_2};...;x_{i_n}\right)}$ равны нулю в δ-окрестности точки $P_0\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$.*

Пример. Доказать, что функции $y_1 = x_1 + x_2$ и $y_2 = x_1x_2$ независимы в любой окрестности точки $O(0;0)$.

Решение. Составим якобиан функций y_1 и y_2 по переменным x_1 и x_2

$$J = \frac{D\left(y_1;y_2\right)}{D\left(x_1;x_2\right)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_2 .$$

В точке $O(0;0)$ якобиан равен нулю $\left.\dfrac{D\left(y_1;y_2\right)}{D\left(x_1;x_2\right)}\right|_{(0;0)} = 0$. Для любой точки $P\left(x_1;x_2\right)$, где $x_1 \neq x_2$, из окрестности точки $O(0;0)$ якобиан отличен от нуля $\left.\dfrac{D\left(y_1;y_2\right)}{D\left(x_1;x_2\right)}\right|_{P\left(x_1;x_2\right)} \neq 0$. Согласно теореме 6, функции y_1 и y_2 независимы в окрестности точки $O(0;0)$.

Вопросы для самоконтроля

1. Какая функция называется неявной? Приведите примеры неявных функций. Сформулируйте теорему о существовании единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y)=0$,.

2. Сформулируйте теорему о существовании единственности и непрерывности неявной функции $F(x;y;z)=0$.

3. Сформулируйте теорему о дифференцировании функции $F(x;y)=0$, $F\left(x_1;x_2;...;x_n\right)=0$.

4. Что называется якобианом функций? Сформулируйте теорему о существовании, единственности и дифференцируемости совокупности неявных функций, определяемых системой уравнений.

5. Дайте определение функции, зависимой от других функций в некоторой области.

6. Дайте определение зависимости и независимости функций. Сформулируйте теорему о достаточном условии независимости функций.