Лекция 11. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

1. Понятие условного экстремума.
2. Методы отыскания условного экстремума.
3. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

1. Понятие условного экстремума.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x; y)$. При отыскании экстремумов этой функции иногда необходимо найти их не на всей области определения $D(f)$, а только на некотором ее подмножестве, например на линии $\Gamma \subset D(f)$. Таким образом, ставится задача отыскания на линии Γ точки P_0, в которой значение функции является наибольшим или наименьшим по сравнению с ее значениями в других точках линии Γ, находящихся вблизи точки P_0.

Пример. Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x + y - 1 = 0$.

Решение. Уравнение $x + y - 1 = 0$ в $\boldsymbol{R}^3$ определяет плоскость, параллельную оси Oz и пересекающую плоскость Oxy по прямой Γ.

Функция $z = x^2 + y^2$ определена на всей плоскости $\boldsymbol{R}^2$, а ее экстремумы требуется найти только среди тех точек плоскости, которые лежат на прямой Γ: $x + y - 1 = 0$. Из данного уравнения находим $y = 1 - x$. Подставляя это выражение в уравнение $z = x^2 + y^2$, получаем функцию $z = 2x^2 - 2x - 1$ одной переменной x.

Таким образом, задача свелась к задаче отыскания безусловных локальных экстремумов функции одной переменной. Найдем точки локальных экстремумов, лежащих на линии Γ. Так как $z'_x = 4x - 2$, то $x_0 = \dfrac{1}{2}$ – точка возможного экстремума. Она является точкой локального минимума, поскольку

$z''(x_0) = z''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4 > 0$, т.е. $z_{\min} = z\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0{,}5$. Следовательно, функция $z = x^2 + y^2$ при условии $x + y - 1 = 0$ имеет условный локальный минимум $z = \dfrac{1}{2}$ в точке $P_0\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Из рис.1 видно, что на поверхности параболоида вращения $z = x^2 + y^2$ безусловный минимум равен 0 и достигается в точке $O(0;0)$, т.е. он не совпадает с точкой $P_0\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ условного минимума, лежащей на прямой $x + y - 1 = 0$.

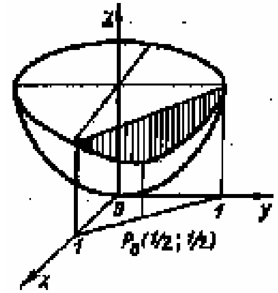

Рис.1.

Рассмотрим функцию $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f(P)$ при условии, что ее аргументы являются связанными между собой соотношениями

$$\begin{cases} F_1(x_1; x_2; \ldots x_n) = 0, \\ F_2(x_1; x_2; \ldots x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_k(x_1; x_2; \ldots x_n) = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

которые называются ***уравнениями связи.*** И пусть координаты точки $P_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ удовлетворяют данной системе уравнений.

Определение 1. Говорят, что функция $u = f(x_1; x_2; \ldots; x_n) = f(P)$ имеет в точке $P_0(x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$ ***условный минимум (максимум)*** при условиях связи (1), если существует такая δ-окрестность точки P_0, что для любой точки $P(x_1;x_2;...;x_n)\in\delta$, $P\neq P_0$, координаты которой удовлетворяют уравнениям (1), выполняется неравенство $f(P)>f(P_0)$ ($f(P)<f(P_0)$).

В отличие от обычной (безусловной) точки экстремума, значение функции в точке условного экстремума сравнивается с ее значениями не во всех точках некоторой δ-окрестности точки P_0, а только в тех ее точках, которые связаны между собой условиями связи.

2. Методы отыскания условного экстремума.

Метод исключения части переменных. Рассмотрим задачу отыскания условного экстремума применительно к функции двух переменных.

Пусть требуется найти локальный экстремум функции $z=f(x;y)$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению связи $\varphi(x,y)=0$.

Если уравнение связи можно однозначно разрешить относительно переменной y, т.е. выразить y как функцию x: $y=y(x)$, то, подставив в аналитическое выражение функции $z=f(x,y)$ вместо y функцию $y(x)$, получим функцию одной переменной $z=f(x,y(x))$. Вычислив значения x, при которых эта функция достигает экстремума, и, определив затем из уравнения связи соответствующие им значения y, найдем искомые точки условного экстремума. Тот же самый результат получится, если уравнение $\varphi(x,y)=0$ можно однозначно разрешить относительно переменной x, т.е. x выразить как функцию y.

Если условие связи (линии Γ) задается параметрическими уравнениями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in T$, то, подставляя x и y в аналитическое выражение функции $z=f(x,y)$, приходим к задаче отыскания экстремума функции одной переменной. Однако если уравнение связи нельзя разрешить относительно какой-либо одной из переменных и представить параметрическими

уравнениями, данная задача значительно усложняется.

Метод множителей Лагранжа. Рассмотрим задачу нахождения условного экстремума функции $z=f(x;y)$, не разрешая уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ относительно x или y. Для этого используем ***метод множителей Лагранжа***.

Введем вспомогательную функцию, называемую ***функцией Лагранжа***:

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

где $f(x;y)$ – заданная функция; $\varphi(x;y)$ – левая часть уравнения связи.

Теорема 1. *Пусть 1) функция $z=f(x;y)$ определена и дифференцируема в точке $P_0(x_0;y_0)$ и имеет в этой точке условный экстремум при условиях связи $\varphi(x,y)=0$;*

2) уравнение $\varphi(x,y)=0$ удовлетворяет в δ-окрестности точки P_0 условиям теоремы 1 (лекция 10)

Тогда существует такое число λ, что

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial y}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0,\quad \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{P_0(x_0;y_0)}=0.$$

► Функция $z=f(x,y)$ может иметь максимум или минимум при тех значениях x, при которых производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ обращается в нуль.

Учитывая, что уравнение $\varphi(x,y)=0$ разрешимо относительно $y=y(x)$, найдем полную производную функции $z=f(x;y)$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

которая в точках экстремума обращается в нуль:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0. \qquad (2)$$

Продифференцировав уравнение связи $\varphi(x,y)=0$ по x, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Данному равенству удовлетворяют все точки x, y, лежащие на линии Γ, задаваемой уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$. Умножив все члены этого равенства на неизвестный коэффициент λ и сложив их с соответствующими членами равенства (2), получим:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) + \lambda\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

или

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{dy}{dx} = 0. \qquad (3)$$

Равенство (3) выполняется во всех точках локального экстремума, лежащих на линии Γ. Подберем неопределенный множитель λ так, чтобы для значений x и y, соответствующих экстремуму функции $z = f(x; y)$, коэффициент $\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ обратился в нуль. Тогда выражение $\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ тоже обратится в нуль. Таким образом, точки локального экстремума, лежащие на линии Γ, задаваемой уравнением связи $\varphi(x, y) = 0$, должны удовлетворять следующим условиям:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \qquad (4)$$
$$\varphi(x, y) = 0.$$

Из уравнений видно, что левые части уравнений являются частными производными функции $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$ по переменным x, y, λ.◄

Решив систему (4), найдем критические точки и вспомогательное число λ.

Замечание. Система уравнений (4) представляет собой необходимые условия существования условного экстремума: не всякая критическая точка $P_0(x_0; y_0)$, координаты x_0 и y_0 которой удовлетворяют системе уравнений (4), будет точкой условного экстремума. Для исследования характера критической точки требуется провести дополнительный анализ знака приращения Δz в окрестности критической точки P_0, лежащей на линии Γ.

Правило нахождения точек условного экстремума. Для того чтобы определить точки условного экстремума функции $z = f(x; y)$, удовлетворяющие уравнению связи $\varphi(x, y) = 0$, необходимо:

1) составить функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$;

2) вычислить частные производные функции Лагранжа по переменным x, y, λ;

3) приравняв нулю найденные производные, составить систему уравнений (4); решив ее, можно определить координаты критических точек P возможного условного экстремума;

4) определить знак приращения Δz в окрестностях критических точек по тем точкам окрестности, которые удовлетворяют уравнению $\varphi(x, y) = 0$, т.е. лежат на линии L.

Если $(\forall P \in L) \cap (P \in U(\delta; P_0))$ выполняется условие $\Delta z = f(P) - f(P) > 0$, то $P_0(x_0; y_0)$ – точка условного минимума.

Если $(\forall P \in L) \cap (P \in U(\delta; P_0))$ выполняется условие $\Delta z = f(P) - f(P) < 0$, то $P_0(x_0; y_0)$ – точка условного максимума.

Пример. Найти локальный минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии, что точки $(x; y)$ лежат на прямой l, уравнение которой $x + y - 1 = 0$.

Решение. Составляем функцию Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x + y - 1).$$

Находим частные производные функции Лагранжа по переменным x, y и λ:

$$L'_x = 2x + \lambda, \; L'_y = 2y + \lambda, \; L'_\lambda = x + y - 1.$$

Составляем и решаем систему уравнений вида (4):

$$\left.\begin{aligned} 2x + \lambda = 0, \\ 2y + \lambda = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{aligned}\right\}.$$

Отсюда $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}5$, $\lambda = -1$.

Таким образом, мы нашли единственную критическую точку $P_0(0{,}5;0{,}5) \in l$. Для любой точки $P \in l$ выполняется условие $f(P_0) > f(P)$. Следовательно, точка $P_0(0{,}5;0{,}5)$ является точкой условного минимума.

Метод множителей Лагранжа имеет место и для функции многих переменных $u = f(x_1; x_2; ...; x_n)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Тогда в области D она достигает своих наименьшего и наибольшего значений, причем эти значения достигаются либо внутри области D, либо на ее границе.

Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения в ограниченной замкнутой области, называются ***точками абсолютного*** или ***глобального экстремума***. Если наибольшее или наименьшее значения достигаются во внутренних точках области, то это – точки локального экстремума функции $z = f(x; y)$.Таким образом, точки, в которых функция z принимает наибольшее и наименьшее значения, являются либо точками локального экстремума, либо граничными точками области.

Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x; y)$ в ограниченной замкнутой области D необходимо:

1) вычислить значения функции в точках возможного экстремума, принадлежащих области D,

2) найти наибольшее и наименьшее значения на ее границе,

3) сравнить найденные значения и выбрать наибольшее и наименьшее.

Предположим, что граница области D задана уравнением $\varphi(x, y) = 0$. Задача нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на границе области D сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений (абсолютного экстремума) функции одной переменной, так как уравнение границы области D связывает переменные x и y между собой. Значит, если разрешить это уравнение относительно одной из переменных или представить его в параметрическом виде и подставить выражения $x = x(t)$, $y = y(t)$ в уравнение $z = f(x, y)$, то придем к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной. Если же уравнение $\varphi(x, y) = 0$ нельзя разрешить ни относительно x, ни относительно y, а также невозможно представить его параметрическими уравнениями, то задача сводится к отысканию условного экстремума.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области D, ограниченной осью Oy, прямой $y = 2$ и параболой $y = \frac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (рис.2).

Решение. Определим критические точки, лежащие внутри области D (на рис.2. она заштрихована). Для этого вычислим частные производные: $z'_x = 6x^2 - 6y$, $z'_y = -6x + 6y$. Приравняв их нулю, составим систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0. \end{aligned}\right\}$$

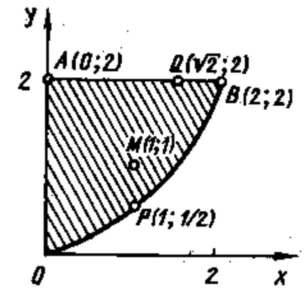

Рис.2.

Решив ее, найдем две критические точки: $O(0;0)$ и $M(1;1)$, в которых обе частные производные равны нулю. Точка $O(0;0)$ принадлежит границе области D. Следовательно, если функция z принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то этой точкой может быть только $M(1;1)$.

Исследуем функцию на границе области.

На отрезке OA $x=0$ и, следовательно, $z=3y^2$ ($0 \le y \le 2$). Функция $z=3y^2$ является возрастающей функцией одной переменной y на отрезке $[0;2]$, наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка OA.

На отрезке AB $y=2$, и поэтому здесь функция $z=2x^2-12x+12$ ($0 \le x \le 2$) представляет собой функцию одной переменной x. Ее глобальные экстремумы находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка. Находим частную производную $z'_x=6x^2-12$. Решаем уравнение $z'_x=0$ (или $6x^2-12=0$), откуда $x=\pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $[0;2]$ имеется лишь одна критическая точка $x=\sqrt{2}$, на отрезке AB ей соответствует точка $Q(\sqrt{2};2)$.

Итак, глобальные экстремумы функции z на отрезке AB могут достигаться среди ее значений в точках A, Q и B.

На дуге параболы $y=\frac{1}{2}x^2$ имеем

$$z=2x^3-6x\left(\frac{1}{2}x^2\right)+3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2=\frac{3}{4}x^4-x^3 \text{ при } 0 \le x \le 2.$$

Решая уравнение

$$z'_x=3x^3-3x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0,$$

находим критические точки $O(0;0)$ и $P\left(1;\frac{1}{2}\right)$.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z=2x^3-6xy+3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках O, A, Q, B, P, M, т.е. среди значений

$$z(O)=z(0;0)=0, \qquad z(B)=z(2;2)=4,$$

$$z(A)=z(0;2)=12, \qquad z(P)=z(1;1/2)=-\frac{1}{4},$$

$$z(Q)=z(\sqrt{2};2)=12-8\sqrt{2}, \quad z(M)=z(1;1)=-1.$$

Откуда $\max\limits_D z=z(A)=12$, $\min\limits_D z=z(M)=-1$.

Таким образом, точка A является точкой глобального максимума, а точка M – точкой глобального минимума данной функции в рассматриваемой замкнутой области D.

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение условного экстремума функции.
2. Объясните, в чем состоит метод исключения части переменных.
3. Что такое функция Лагранжа? Сформулируйте теорему о необходимых условиях Лагранжа условного экстремума.
4. Объясните, как исследовать точку возможного условного экстремума, найденную методом Лагранжа.
5. Как найти глобальные экстремумы функции двух переменных?