

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Тема 1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ	
<i>Лекция 1.</i> Пространство R^n	6
<i>Лекция 2.</i> Предел и непрерывность функции нескольких переменных.....	15
<i>Лекция 3.</i> Функции многих переменных, непрерывные на множествах.....	25
<i>Лекция 4.</i> Частные производные.....	31
<i>Лекция 5.</i> Дифференцируемость функции нескольких переменных.....	40
<i>Лекция 6.</i> Производная по направлению.....	52
<i>Лекция 7.</i> Частные производные и дифференциалы высших порядков.....	57
<i>Лекция 8.</i> Теорема Тейлора для функции нескольких переменных.....	65
<i>Лекция 9.</i> Экстремум функции многих переменных.....	70
<i>Лекция 10.</i> Неявные функции	82
<i>Лекция 11.</i> Условный экстремум.....	92
Тема 2 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	
<i>Лекция 1.</i> Криволинейные интегралы первого рода.....	102
<i>Лекция 2.</i> криволинейные интегралы второго рода.....	112
Тема 3 КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	
<i>Лекция 1.</i> Мера Жордана в R^n	124
<i>Лекция 2.</i> Двойные интегралы.....	132
<i>Лекция 3.</i> Сведение двойного интеграла к повторному.....	139
<i>Лекция 4.</i> Формула Грина.....	147
<i>Лекция 5.</i> Замена переменных в двойном интеграле.....	154
<i>Лекция 6.</i> Приложения двойного интеграла.....	161
<i>Лекция 7.</i> Тройной интеграл.....	168
<i>Лекция 8.</i> Замена переменных в тройном интеграле.....	176
<i>Лекция 9.</i> n -кратные интегралы.....	183
Тема 4 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ	
<i>Лекция 1.</i> Элементы теории поверхностей.....	190
<i>Лекция 2.</i> Площадь поверхности.....	198

<i>Лекция 3.</i> Поверхностный интеграл первого рода.....	205
<i>Лекция 4.</i> Поверхностный интеграл второго рода.....	211
<i>Лекция 5.</i> Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса.....	221
Тема 5 ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ	
<i>Лекция 1.</i> Скалярные поля	230
<i>Лекция 2.</i> Векторные поля.....	237
<i>Лекция 3.</i> Циркуляция и ротор векторного поля.....	248
<i>Лекция 4.</i> Специальные виды векторных полей.....	257
Тема 6 ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА	
<i>Лекция 1.</i> Собственные интегралы, зависящие от параметра.....	266
<i>Лекция 2.</i> Несобственные интегралы, зависящие от параметра.....	273
<i>Лекция 3.</i> Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра.....	245
<i>Лекция 4.</i> Интегралы Эйлера.....	292
<i>Лекция 5.</i> Интеграл Фурье.....	296
<i>Лекция 6.</i> Обобщенные функции.....	305
ЛИТЕРАТУРА	315

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное «Дифференциальное и интегральное исчисление функции нескольких переменных» пособие является четвертой частью текстов лекций по математическому анализу для студентов физического факультета. Их содержание включает материал второго семестра в соответствии с учебной программой по данной дисциплине.

Как и в предыдущих частях, в начале каждой лекции сформулированы основные рассматриваемые вопросы, отражающие ее содержание. Далее приводятся определения основных понятий, формулировки теорем и следствий из них, доказательства наиболее важных теорем. Теоретические положения иллюстрируются решениями задач, многие из которых имеют прикладную направленность. Каждая лекция имеет свою нумерацию определений, теорем, рисунков и таблиц. В конце каждой лекции сформулированы вопросы, позволяющие учащемуся организовать самоконтроль знаний. Поскольку объем пособия не позволяет привести доказательства всех утверждений, то читателю предлагается воспользоваться учебниками, приведенными в списке литературы.

Пособие рекомендуется для использования студентами при самостоятельном изучении математического анализа, является основой для подготовки к сдаче экзаменов и зачетов.

Автор надеется, что пособие будет полезным и для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Лекция 1. ПРОСТРАНСТВО R^n

1. Определение n -мерного пространства.
2. Сходимость последовательности точек в n -мерном пространстве.
3. Основные подмножества пространства R^n .
4. Предельные точки. Замкнутые множества.

1. Определение n -мерного пространства.

При изучении многих физических процессов часто приходится иметь дело с такими функциональными зависимостями, в которых числовые значения одной из них полностью определяются значениями нескольких других.

Примеры.

1. Температура T тела в данный момент времени t может меняться от точки к точке. Каждая точка определяется тремя координатами x, y, z . Если при этом учитывать время, то температура в общем случае зависит от четырех переменных $T = T(x, y, z, t)$.

2. При изучении звуковых колебаний газа плотность ρ и его давление P определяются значениями переменных x, y, z, t .

3. Объем параллелепипеда есть функция трех переменных x, y, z , т.е. $V = V(x, y, z)$.

Для изучения таких закономерностей вводится понятие функции нескольких переменных и рассматривается аппарат для исследования таких функций.

Определение 1. n -мерным арифметическим точечным пространством называется множество всех упорядоченных наборов $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ действительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n и обозначается R^n , а его элементы – *точками* или *векторами* пространства R^n (n -мерными точками или n -мерными векторами). Числа x_1, x_2, \dots, x_n называются *координатами* точки (вектора) $(x_1; x_2; \dots; x_n)$.

Точки пространства R^n обозначаются $M(x_1; x_2; \dots; x_n)$ или

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Точка $O(0; 0; \dots; 0)$ называется *началом координат*. Для n -мерного пространства (n – произвольное) вводится понятие расстояния между двумя точками.

Определение 2. Расстоянием (метрикой) $\rho(x, x')$ между двумя точками $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $x' = (x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$ n -мерного пространства называется число

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x'_i)^2}.$$

Расстояние $\rho(x; x')$ между двумя точками $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ и $x' = (x'_1; x'_2; \dots; x'_n)$ n -мерного пространства \mathbf{R}^n обладает **свойствами**:

1) *рефлексивность*: $\rho(x; x') = 0$ тогда и только тогда, когда $x = x'$;

2) *симметричность*: $\rho(x; x') = \rho(x'; x)$;

3) *транзитивность*: $\rho(x; x'') \leq \rho(x; x') + \rho(x'; x'')$.

Если положить $n = 1$, то получается формула расстояния между двумя точками на прямой (в пространстве \mathbf{R}^1): $\rho(x, x') = |x_1 - x'_1|$, при $n = 2$ – формула для вычисления расстояния между двумя точками на плоскости (в пространстве \mathbf{R}^2):

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2},$$

при $n = 3$ – в пространстве \mathbf{R}^3 :

$$\rho(x; x') = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2}.$$

Арифметическое n -мерное пространство, в котором определено расстояние между двумя точками, называют **метрическим пространством \mathbf{R}^n (евклидовым пространством)**.

При $n = 1, 2, 3$ между точками пространства \mathbf{R}^n и числовой прямой \mathbf{R} (координатной плоскостью \mathbf{R}^2 , координатным пространством \mathbf{R}^3) установлено взаимно однозначное соответствие, которое позволяет изучать реальные геометрические объекты

аналитически. При $n > 3$ пространство \mathbf{R}^n является абстракцией, при которой можно рассматривать произвольные подмножества этого пространства, удовлетворяющие некоторым условиям, как определенные «фигуры». Они задаются аналитически так же, как в \mathbf{R}^2 и \mathbf{R}^3 , т.е. с помощью уравнений, неравенств и их систем, которым удовлетворяют координаты этих точек.

2. Сходимость последовательности точек в n -мерном пространстве.

Пусть $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; \dots; x_n^m)$, – последовательность точек метрического пространства \mathbf{R}^n .

Определение 3. Говорят, что последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ *сходится* к точке a , $a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ (имеет *предел a*), если $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho(x_m; a) = 0$.

Обозначается: $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = a$.

Определение 4. Последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если $\exists C \in \mathbf{R}$ и $\exists a \in X$ такие, что для любого $m \in \mathbf{N}$ выполнено неравенство $\rho(x_m; a) \leq C$.

Свойства сходящихся последовательностей

1. Если последовательность $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; \dots; x_n^m)$, имеет предел, то она ограничена.

2. Последовательность $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; \dots; x_n^m)$, не может сходить к двум различным точкам.

3. Для того чтобы последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; \dots; x_n^m)$, сходилась к пределу $a = (a_1; a_2; \dots; a_n) \in \mathbf{R}^n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_1^m = a_1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_2^m = a_2, \quad \dots, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_n^m = a_n.$$

4. Если последовательность точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ метрического пространства \mathbf{R}^n сходится, то она является фундаментальной.

Замечание. Обратное утверждение для произвольного метрического пространства неверно. Фундаментальная последовательность может и не быть сходящейся.

Определение 5. Метрическое пространство \mathbf{R}^n называется **полным**, если любая фундаментальная последовательность его точек сходится.

В силу критерия Коши сходимости числовой последовательности пространство \mathbf{R} действительных чисел является полным.

Теорема 1. Пространство \mathbf{R}^n – полное.

► Пусть $(x_m)_{m=1}^\infty$, $x_m = (x_1^m; x_2^m; \dots; x_n^m)$, – фундаментальная последовательность точек в \mathbf{R}^n . По определению фундаментальной последовательности $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)$ такое, что для любых $l, m > N(\varepsilon)$ выполнено неравенство $\rho(x_l, x_m) < \varepsilon$.

Рассмотрим числовые последовательности $(x_k^m)_{m=1}^\infty$, $k = 1, 2, \dots, n$. Тогда $|x_k^l - x_k^m| \leq \rho(x_l, x_m) < \varepsilon$, $k = 1, 2, \dots, n$. Значит, числовые последовательности $(x_k^m)_{m=1}^\infty$, $k = 1, 2, \dots, n$, являются фундаментальными. В силу критерия Коши они являются сходящимися. По свойству 3 сходится и последовательность точек $(x_m)_{m=1}^\infty$ в \mathbf{R}^n . ◀

3. Основные подмножества пространства \mathbf{R}^n .

Определение 6. Множество точек $x = (x_1; x_2; \dots; x_n) \in \mathbf{R}^n$, расстояние от каждой из которых до фиксированной точки $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ не превосходит положительного числа r , называется **n -мерным замкнутым шаром радиусом r с центром в точке x_0** .

Обозначается:

$$B_{[x_0, r]} = \left\{ x \in \mathbf{R}^n \mid (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2 \leq r^2 \right\},$$

$$\text{или } B_{[x_0, r]} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x, x_0) \leq r \}.$$

В частности,

1) при $n = 1$ имеем

$$B_{[x_0, r]} = \{ x \mid |x - x_0| \leq r \} = \{ x_0 - r \leq x \leq x_0 + r \},$$

т.е. **одномерный** замкнутый шар – это **отрезок** длиной $2r$ с центром в точке x_0 ;

2) при $n = 2$ имеем

$$B_{[x_0, y_0; r]} = \left\{ (x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leq r^2 \right\},$$

т.е. это множество является **кругом** радиусом r с центром в точке $P_0(x_0; y_0)$;

3) при $n = 3$

$$B_{[M_0, r]} = \left\{ M(x, y, z) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 \leq r^2 \right\},$$

т.е. это множество является **шаром** радиуса r с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Определение 7. **Открытым n -мерным шаром с центром в точке x_0** называется множество точек x пространства \mathbf{R}^n , расстояние от каждой из которых до точки x_0 меньше r : $\rho(x, x_0) < r$.

Обозначается: $B_{(M_0, r)} = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x, x_0) < r \}$.

Определение 8. Множество точек $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) = r$, называется **n -мерной сферой радиусом r с центром в точке x_0** .

Обозначается: $\{ x \in \mathbf{R}^n \mid \rho(x, x_0) = r \}$

Определение 9. ε -**окрестностью** точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ называется открытый n -мерный шар радиусом ε с центром в точке x_0 .

Обозначается:

$$U(\varepsilon, x_0) = \{ x \mid \rho(x, x_0) < \varepsilon \}.$$

В частности,

1) при $n = 1$ ε -окрестность $U(\varepsilon, x_0) = \{ x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \}$,

т.е. окрестностью точки x_0 является интервал $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$;

2) при $n = 2$ ε -окрестность

$$U(\varepsilon, M_0) = \left\{ M(x; y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \right\},$$

т.е. ε -окрестностью точки M_0 будет множество точек открытого круга радиусом ε с центром в этой точке.

Определение 10. Множество точек $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ пространства \mathbf{R}^n , координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_1 - x_1^0| \leq d_1, |x_2 - x_2^0| \leq d_2, \dots, |x_n - x_n^0| \leq d_n$, называется *n -мерным замкнутым параллелепипедом с центром в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$.*

Обозначается:

$$P_{[d_1, d_2, \dots, d_n; x_0]} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid |x_1 - x_1^0| \leq d_1, |x_2 - x_2^0| \leq d_2, \dots, |x_n - x_n^0| \leq d_n \right\}$$

Аналогично открытому n -мерному параллелепипеду определяется *открытый n -мерный параллелепипед.*

Определение 11. Множество точек $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ пространства \mathbf{R}^n , координаты которых удовлетворяют неравенствам $|x_1 - x_1^0| < d, |x_2 - x_2^0| < d, \dots, |x_n - x_n^0| < d$, называется *n -мерным открытым кубом с центром в точке $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$.*

Обозначается:

$$P_{(d; x_0)} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid |x_1 - x_1^0| < d, |x_2 - x_2^0| < d, \dots, |x_n - x_n^0| < d \right\}$$

Определение 12. Всякий n -мерный открытый параллелепипед

$$P_{(d_1, d_2, \dots, d_n; x_0)} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid |x_1 - x_1^0| < d_1, |x_2 - x_2^0| < d_2, \dots, |x_n - x_n^0| < d_n \right\}$$

называется *прямоугольной окрестностью* точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$.

Лемма 1. Любая ε -окрестность $U(\varepsilon, x_0)$ точки $x_0 = (x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ содержит некоторую прямоугольную окрестность $P_{[d_1, d_2, \dots, d_n; x_0]}$ и наоборот.

Без доказательства.

Определение 13. *Проколотой ε -окрестностью* точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ радиусом ε называется множество точек $x \in \mathbf{R}^n$, удовлетворяющих неравенству $0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon$.

Обозначается:

$$\overset{\circ}{U}(\varepsilon, x_0) = \{x \in \mathbf{R}^n \mid 0 < \rho(x, x_0) < \varepsilon\}.$$

Из определения проколотой окрестности точки $x_0 \in \mathbf{R}^n$ следует, что эта окрестность состоит из множества точек открытого n -мерного шара, исключая его центр.

4. Предельные точки. Замкнутые множества.

Пусть G – некоторое множество пространства \mathbf{R}^n .

Определение 14. Точка $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется *внутренней точкой* множества G , если существует ε -окрестность $U(\varepsilon, x)$ точки x , целиком принадлежащая множеству G .

Определение 15. Множество $G \subset \mathbf{R}^n$ называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Определение 16. Точка $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется *границной точкой* множества G , если в любой ε -окрестности $U(\varepsilon, x)$ точки x содержатся точки, как принадлежащие множеству G , так и не принадлежащие ему. Множество граничных точек называется *границей* множества G и обозначается ∂G .

Граничная точка может как принадлежать множеству G , так и не принадлежать ему.

Определение 17. Точка $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется *предельной точкой* множества G , если в любой ε -окрестности $U(\varepsilon, x)$ точки x содержатся точки множества G , отличные от x . Точка $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$, не являющаяся предельной точкой

множества G , называется **изолированной** точкой множества G .

Если точка $x = (x_1; x_2; \dots; x_n)$ является изолированной точкой множества G , то существует такая ε -окрестность $U(\varepsilon, x)$ точки x , в которой нет точек множества G , отличные от x .

Определение 18. Множество $G \subset \mathbf{R}^n$ называется **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки. Множество, которое получается, если присоединить к множеству G все его предельные точки, называется замыканием G .

Обозначается: \overline{G} .

Пример. $B_{(x_0, r)} = B_{[x_0, r]}$.

Определение 19. Множество $G \subset \mathbf{R}^n$ называется **ограниченным**, если существует такой n -мерный шар, который содержит внутри себя все точки множества G .

Определение 20. Множество

$L = \{P(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \dots, x_n = \varphi_n(t); \alpha \leq t \leq \beta\}$, где $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, непрерывные функции на отрезке $[\alpha; \beta]$, называется **непрерывной кривой** в пространстве \mathbf{R}^n , соединяющей **концы** $P_1(\varphi_1(\alpha); \varphi_2(\alpha); \dots; \varphi_n(\alpha))$ и $P_2(\varphi_1(\beta); \varphi_2(\beta); \dots; \varphi_n(\beta))$ кривой Γ .

Определение 21. Множество $G \subset \mathbf{R}^n$ называется **линейно связным (связным)**, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой Γ , целиком принадлежащей этому множеству.

Определение 22. Открытое связное множество называется **областью**, объединение области и ее границы называется **замкнутой областью**.

Определение 23. Множество $G \subset \mathbf{R}^n$ называется **компактом** в \mathbf{R}^n , если из любой последовательности точек $(x_m)_{m=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке, принадлежащей множеству G .

Пример. Отрезок $[a; b]$ есть компакт в \mathbf{R} , а промежуток $[a; b)$ не является компактом в \mathbf{R} .

На пространство \mathbf{R}^n обобщается теорема Больцано–Вейерштрасса.

Теорема 2. Из любой ограниченной последовательности точек пространства \mathbf{R}^n можно выделить сходящуюся подпоследовательность точек.

Следствие. Для того чтобы множество $G \subset \mathbf{R}^n$ было компактом, необходимо и достаточно, чтобы множество G было ограниченным и замкнутым.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определения: n -мерного арифметического пространства, расстояния в пространстве \mathbf{R}^n , n -мерного евклидова пространства.
2. Дайте определения: n -мерного открытого шара, n -мерного замкнутого шара, n -мерной сферы, n -мерного параллелепипеда (открытого и замкнутого), n -мерного куба, ε -окрестности точки в пространстве \mathbf{R}^n .
3. Дайте определения внутренней точки множества. Может ли внутренняя точка не принадлежать множеству?
4. Дайте определение граничной точки множества. Может ли точка одновременно быть внутренней и граничной для некоторого множества?
5. Какие точки множества называются предельными?
6. Дайте определение открытого и замкнутого множества.
7. Что является границей n -мерного замкнутого шара и параллелепипеда.
8. Дайте определения: ограниченного множества, непрерывной кривой в пространстве \mathbf{R}^n , связного множества. Являются ли связными множествами n -мерная сфера, n -мерный шар, прямая в пространстве \mathbf{R}^n ?
9. Дайте определения открытой и замкнутой области. Приведите примеры.
10. Дайте определение компакта в пространстве \mathbf{R}^n .