Лекция 6. ПРОИЗВОДНАЯ ПО НАПРАВЛЕНИЮ

1. Производная по направлению.
2. Градиент.

1. Производная по направлению.

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, определенную и дифференцируемую в окрестности точки $P_0(x_0; y_0)$. и пусть $\vec{l} = (\cos\alpha; \cos\beta)$ – произвольный вектор плоскости, отличный от нулевого, где $\cos\alpha$ и $\cos\beta$ направляющие косинусы вектора $\vec{l}$. Проведем через точку $P_0(x_0; y_0)$ прямую Г так, чтобы одно из ее направлений совпадало с направлением вектора $\vec{l}$.

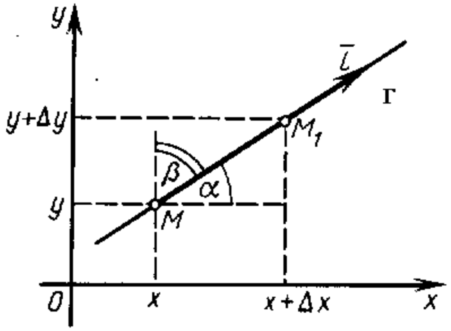

Рис.1

Возьмем на направленной прямой точку $P_1(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$. Тогда $P_0P_1 = \Delta l = \pm\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ есть приращение вдоль прямой Г. Функция $z = f(x, y)$ получит при этом приращение $\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$.

Определение 1. ***Производной по направлению*** вдоль вектора $\vec{l}$ функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0; y_0)$ называется предел отношения $\dfrac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$.

Обозначается: $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \dfrac{\Delta z}{\Delta l}$.

Теорема 1. *Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то производная по направлению в этой точке вычисляется по формуле:*

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta .$$

► Так как функция дифференцируема в точке $P_0(x_0; y_0)$, то ее приращение в этой точке вдоль прямой Г можно записать в виде:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y ,$$

где $\alpha_1 \to 0$ и $\alpha_2 \to 0$ при $\Delta l \to 0$.

Разделим обе части этого равенства на Δl, получим

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta l} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta l} + \alpha_1 \frac{\Delta x}{\Delta l} + \alpha_2 \frac{\Delta y}{\Delta l} .$$

Учитывая, что (рис.1), имеем $\dfrac{\Delta x}{\Delta l} = \cos\alpha$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta l} = \cos\beta$.

Поэтому

$$\frac{\Delta z}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta + \alpha_1 \cos\alpha + \alpha_2 \cos\beta .$$

Переходя к пределу при $\Delta l \to 0$, имеем:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta . ◄$$

В частности, при $\alpha = 0$ и $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ имеем $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, а при $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ и $\beta = 0$ имеем $\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Отсюда следует, что частные производные по переменным x и y являются частными случаями производной по направлению.

Пример. Вычислить производную по направлению функции

$$z = x^2 + xy^2$$

в точке $P_0(1;2)$ в направлении вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$, где $P_1(3;0)$.

Решение. Координаты вектора $\overrightarrow{P_0P_1}$ равны

$$\overrightarrow{P_0P_1}=(3-1;0-2)=(2;-2).$$

Тогда длина вектора есть

$$\overrightarrow{P_0P_1}=\sqrt{2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}.$$

Координаты нормированного вектора есть

$$\vec{l}=\left(\frac{2}{2\sqrt{2}};-\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Отсюда $\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\beta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Поэтому $\alpha=\frac{3\pi}{4}$.

Значения частных производных в точке $P_0(1;2)$ есть

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1;2)}=\left.\left(2x+y^2\right)\right|_{(1;2)}=6,$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1;2)}=\left.2xy\right|_{(1;2)}=4.$$

Тогда производная по направлению равна

$$\frac{\partial z}{\partial l}=\sqrt{2}.$$

2. Градиент.

Определение 2. ***Градиентом*** функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, взятым в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Обозначается: $\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ или $\nabla f=\left(\frac{\partial z}{\partial x};\frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Градиент ∇f функции $z=f(x,y)$ можно записать с помо-

щью координатных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в виде $\nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$.

Используя скалярное произведение векторов в координатной форме, можно записать

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta=\vec{l}_0\cdot\nabla f,$$

где $\vec{l}_0=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$, $|\vec{l}_0|=1$.

С другой стороны, скалярное произведение векторов равно

$$\vec{l}_0\cdot\nabla f=|\vec{l}_0|\cdot|\nabla f|\cdot\cos\varphi,$$

где φ– угол между векторами $\vec{l}_0$ и ∇f. Сравнивая, получим $\frac{\partial z}{\partial l}=|\nabla f|\cdot\cos\varphi$. Отсюда следует, что $\frac{\partial z}{\partial l}$ имеет наибольшую длину при $\cos\varphi=1$, т.е. когда направление вектора $\vec{l}$ совпадает с направлением вектора ∇f.

Градиент ∇f функции $z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0;y_0)$ характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в данной точке.

Замечания. **1.** Производная по направлению для функции трех переменных $u=f(x,y,z)$ имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ направляющие косинусы вектора $\vec{l}$.

2. Пусть функция $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $n\geq 2$, определена и дифференцируема в точке $x_0=\left(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0\right)$. И пусть задан n-мерный вектор $\vec{l}\neq 0$, единичный вектор $\vec{l}_0=\frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(\cos\alpha_1;\cos\alpha_2;...;\cos\alpha_n)$, где $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, ..., $\cos\alpha_n$ направляющие косинусы в пространстве $\boldsymbol{R}^n$. Тогда существует производная по любому направлению и

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial l}=\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2}\cos\alpha_2+\ldots+\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\cos\alpha_n .$$

2. Градиент $\operatorname{grad} f(x)=\nabla f(x)$ функции $u=f(x)$, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $n\geq 2$, определяется по формуле:

$$\operatorname{grad} f(x)=\left(\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_1};\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_2};...;\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_n}\right).$$

Пример. Найти градиент функции $u=x^2+y^2+z^2$ в точке $P(1;1;1)$.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}=2y\,,\ \frac{\partial f}{\partial z}=2z\,.$$

Тогда

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1;1;1)}=2\,,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1;1;1)}=2\,,\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1;1;1)}=2\,.$$

Следовательно, градиент функции равен

$$\operatorname{grad} f(x)=(2;2;2).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте определение производной по направлению. Докажите формулу $\frac{\partial z}{\partial l}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta$.

2. Дайте определение градиента функции в пространствах $\boldsymbol{R}^2$, $\boldsymbol{R}^3$, $\boldsymbol{R}^n$.