Лекция 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО РОДА

1. Задача о работе переменной силы.
2. Определение и свойства криволинейного интеграла второго рода.
3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
4. Приложения криволинейного интеграла второго рода.

1. Задача о работе переменной силы.

Пусть материальная точка под действием переменной силы $\vec{F}$ перемещается в плоскости Oxy вдоль некоторой кривой AB от точки A до точки B. Требуется найти работу силы $\vec{F}$.

Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$, на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n.

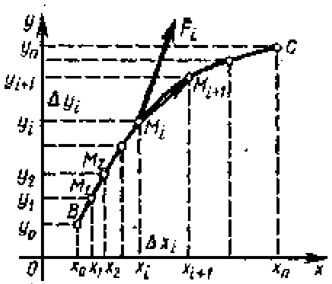

Рис.1.

В виду малости дуги l_i, будем считать:

1) вектор силы перемещения $\vec{F}$ сохраняет на дуге $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ постоянное значение $\vec{F}_i = \vec{F}\left(P(\xi_i;\eta_i);Q(\xi_i;\eta_i)\right)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i)$ – произвольная точка дуги l_i, $P(\xi_i;\eta_i)$ и $Q(\xi_i;\eta_i)$ – проекции вектора $\vec{F}_i$ на оси Ox и Oy,

2) дуга $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ может быть заменена вектором $\overline{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i;\Delta y_i)$, где Δx_i Δy_i – проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси, $i = 1,2,...,n$.

Тогда работа A силы $\vec{F}$ на элементе дуги $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$ приблизительно равна скалярному произведению векторов $\vec{F}_i$ и $\overline{M_{i-1}M_i}$

$$A_i \approx \vec{F}_i \cdot \overline{M_{i-1}M_i}$$

или в координатной форме

$$A_i \approx P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i. \qquad (1)$$

Работа A силы $\vec{F}$ вдоль всей дуги AB

$$A \approx \sum_{i-1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i. \qquad (2)$$

Обозначим наибольшую из длин Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n как $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$. Сумма (2) тем точнее, чем меньше длина каждой части l_1, l_2, ..., l_n. Поэтому точным значением работы A силы $\vec{F}$ всей дуги AB можно считать

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i. \qquad (3)$$

2. Определение и свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

Пусть в плоскости Oxy задана непрерывная кривая AB. И пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены в каждой точке кривой AB. Разобьем дугу AB точками $A = M_0 < M_1 < ... < M_n = B$ в направлении от точки A к точке B на n частичных дуг l_1, l_2, ..., l_n, длины которых равны Δl_1, Δl_2, ..., Δl_n. Выберем на каждой частичной дуге $l_i = \overset{\cup}{M_{i-1}M_i}$,

$i=1,2,...,n$, точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Проекциями дуги $l_i = M_{i-1}M_i$ на оси Ox и Oy являются Δx_i и Δy_i.

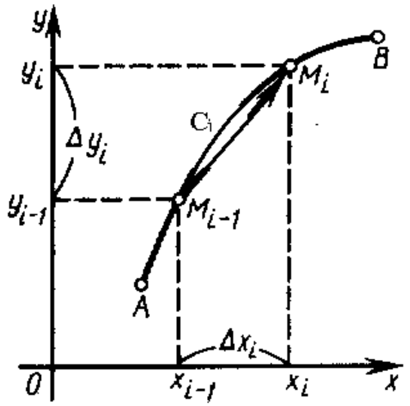

Рис.2.

Определение 1. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i;)\cdot \Delta x_i \qquad (3)$$

называется ***интегральной суммой по переменной*** x для функции $P(x;y)$;

сумма

$$\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i;)\cdot \Delta y_i \qquad (4)$$

называется ***интегральной суммой по переменной*** y для функции $Q(x;y)$.

Обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \Delta l_i$.

Определение 2. ***Криволинейным интегралом по координате*** x ***по кривой*** AB от функции $P(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (3) при $\lambda \to 0$.

Обозначается:

$$\int\limits_{AB} P(x;y)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i \qquad (5)$$

Криволинейным интегралом по координате y ***по кривой*** AB от функции $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (4) при $\lambda \to 0$.

Обозначается:

$$\int\limits_{AB} Q(x;y)dy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i\,. \qquad (6)$$

Определение 3. ***Криволинейным интегралом второго рода по кривой*** AB от функций $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i$$

при $\lambda \to 0$.

Обозначается:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i;\eta_i)\Delta y_i = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy\,. \qquad (7)$$

Теорема 1 (существование криволинейного интеграла 2-го рода). *Если кривая AB гладкая, а функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ непрерывны на кривой AB, то криволинейный интеграл второго рода существует.*

Без доказательства.

Пусть AB – ***замкнутая кривая (замкнутый контур)***, т.е. точка A совпадает с точкой B. Тогда для нее можно определить два направления обхода от точки A к точке B.

Определение 4. Направление обхода замкнутой кривой Γ называется ***положительным***, если область, лежащая внутри этого контура остается слева по отношению к точке, совершающей обход. Противоположное направление называется ***отрицательным***.

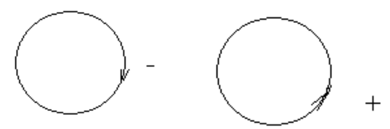

Рис.3.

Интеграл по замкнутому контуру Γ в положительном направлении обозначается как

$$\oint_L P(x;y)dx+Q(x;y)dy. \qquad (8)$$

Ниже приведены основные **свойства** криволинейного интеграла второго рода.

1. Криволинейный интеграл второго рода можно записать в виде

$$\int_{AB} P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int_{AB} P(x;y)dx+\int_{AB} Q(x;y)dy.$$

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $P_1(x;y)$ и $P_2(x;y)$ интегрируемы на дуге AB по переменной x, то функция $\alpha\cdot P_1(x;y)+\beta\cdot P_2(x;y)$ также интегрируема на дуге AB по переменной x и справедливо равенство

$$\int_{AB}(\alpha P_1(x;y)+\beta P_2(x;y))dx=\alpha\int_{AB}P_1(x;y)dx+\beta\int_{AB}P_2(x;y)dx.$$

Аналогично по переменной y.

3 (аддитивность). Если дуга AB состоит из двух частей AC и CB, $AB=AC\cup CB$, имеющих одну общую точку, на каждой из которых $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ интегрируемы, то функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ также интегрируемы на дуге AB и справедлива формула

$$\int_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=$$

$$=\int_{AC}P(x;y)dx+Q(x;y)dy+\int_{CB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy.$$

4 (ориентированность). При изменении направления пути интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак на противоположный:

$$\int_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=-\int_{BA}P(x;y)dx+Q(x;y)dy.$$

5. Если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Ox, то $\int_{AB}P(x;y)dx=0$; если кривая AB лежит в плоскости, перпендикулярной оси Oy, то $\int_{AB}Q(x;y)dy=0$.

6. Интеграл по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла.

Параметрическое представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$$

где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем начальной точке A соответствует значение параметра $t=\alpha$, а конечной точке B – $t=\beta$. И пусть функция $P(x;y)$ непрерывна на кривой AB. Тогда, по определению 2, имеем

$$\int_{AB}P(x;y)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i.$$

Так как

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=x(t_i)-x(t_{i-1}),$$

то по формуле Лагранжа имеем

$$\Delta x_i=x'(c_i)\Delta t_i$$

где $c_i\in(t_{i-1};t_i)$ и $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$.

Выберем точку $(\xi_i;\eta_i)$ так, чтобы $\xi_i=x(c_i)$ и $\eta_i=y(c_i)$. Тогда преобразованная интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i;\eta_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}P(x(c_i);y(c_i))x'(c_i)\Delta t_i$$

является интегральной суммой для функции одной переменной $P(x(t);y(t))x'(t)$ на промежутке $[\alpha;\beta]$. Потому

$$\int_{AB} P(x;y)dx = \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t);y(t))x'(t)dt. \qquad (9)$$

Аналогично получаем

$$\int_{AB} Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} Q(x(t);y(t))y'(t)dt. \qquad (10)$$

Складывая равенства (10) и (11), имеем

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_{\alpha}^{\beta}\left[P(x(t);y(t))x'(t) + Q(x(t);y(t))y'(t)\right]dt. \qquad (11)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{AB} xdx + xydy$, где $AB = \left\{(x;y)\middle| x^2+y^2=1,\, x\geq 0,\, y\geq 0\right\}$.

Решение. Перейдем к полярным координатам

$$\begin{cases} x = r\cos t, \\ y = r\sin t, \end{cases}$$

где $r=1$ и $0\leq t\leq \frac{\pi}{2}$. Точке A соответствует значение параметра $t=0$, а точке B – значение $t=\frac{\pi}{2}$. Тогда $x'(t) = -\sin t$ и $y'(t)=\cos t$. Подставим в формулу (11)

$$\int_{AB} xdx + xydy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos t\cdot\sin t + \cos t\cdot\sin t\cdot\cos t\right]dt =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt = \left.\frac{\cos^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} - \left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = -\frac{1}{6}.$$

Явное представление кривой интегрирования. Пусть кривая AB задана уравнением $y=y(x)$, $x\in[a;b]$, где функции $y(x)$ и

$y'(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$, то, принимая x за параметр, имеем параметрические уравнения кривой AB:

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \end{cases}$$

где $x\in[a;b]$.

Тогда получим:

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy = \int_a^b\left[P(x;y(x)) + Q(x;y(x))y'(x)\right]dx. \qquad (12)$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{AB}(x^2+y)dx + xydy$, где

1) $AB = \left\{(x;y)\middle| y=x,\, 0\leq x\leq 1\right\}$,

2) $AB = \left\{(x;y)\middle| y=x^2,\, 0\leq x\leq 1\right\}$,

3) $AB = \left\{(x;y)\middle|\text{ломаная, проходящая через точки } A(0;0), C(1;0), B(1;1)\right\}$.

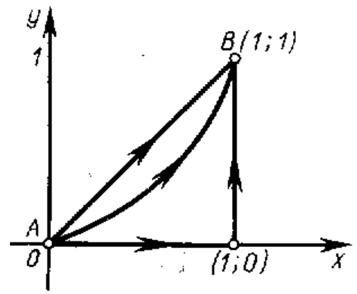

Рис.4.

Решение. По формуле (12) имеем

1) $\int_{AB}(x^2+y)dx + xydy = \begin{bmatrix} y = x, \\ y'=1, \\ 0\leq x\leq 1. \end{bmatrix} = \int_0^1 (x^2 + x + x\cdot x\cdot 1)dx =$

$$= \int_0^1 (2x^2+x)dx = \left.\left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right)\right|_0^1 = \frac{2}{3}+\frac{1}{2} = \frac{7}{6}.$$

2) $\int\limits_{AB}(x^2+y)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x^2, \\ y'=2x, \\ 0\le x\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1(x^2+x^2+x^2\cdot x\cdot 2x)dx=$

$$=\int\limits_0^1(2x^2+2x^4)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15}.$$

3) $\int\limits_{AB}(x^2+y)dx+xydy=\int\limits_{AC}(x^2+y)dx+xydy+\int\limits_{CB}(x^2+y)dx+xydy=$

$$=\begin{bmatrix} AC: y=0,\ 0\le x\le 1, \\ CB: x=1,\ 0\le y\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1(x^2+0)dx+\int\limits_0^1(1+y)\cdot 0+1\cdot ydy=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

Теорема 2 (Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода). *Пусть 1) кусочно-гладкая кривая AB, лежит в плоскости Oxy и задана уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где функции $x(t)$ и $y(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$ и $y'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $A(x(\alpha);y(\alpha))$, $B(x(\beta);y(\beta))$; 2) функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ кусочно-непрерывны вдоль кривой AB; 3) вектор $\vec{\tau}=(\cos\alpha;\cos\beta)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y)$, где α и β углы, составляемые с осями координат, причем направление вектора $\vec{\tau}$ соответствует направлению движения от точки A к точке B. Тогда имеет место равенство*

$$\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int\limits_{AB}(P(x;y)\cos\alpha+Q(x;y)\cos\beta)dl. \quad (13)$$

► Обозначим α и β углы, составляемые с осями координат касательной к кривой AB в точке $M(x;y)$ (рис.5.).

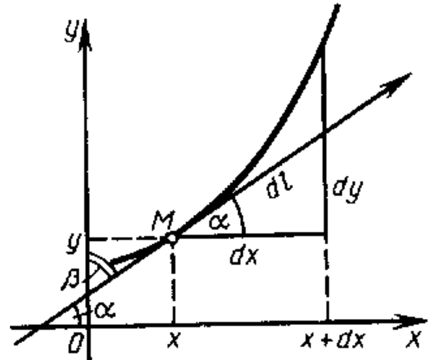

Рис.5.

Тогда получим соотношения $dx=\cos\alpha dl$, $dy=\cos\beta dl$. Заменяя в криволинейном интеграле 2-го рода dx и dy их выражениями, получим

$$\int\limits_{AB}P(x;y)dx+Q(x;y)dy=\int\limits_{AB}(P(x;y)\cos\alpha+Q(x;y)\cos\beta)dl. \blacktriangleleft$$

Замечания. 1. Данная теорема выражает криволинейный интеграл второго рода через криволинейный интеграл первого рода и устанавливает связь между ними. При изменении направления движущейся точки по кривой на противоположное значения $\cos\alpha$, $\cos\beta$, dx и dy меняют знак. Поэтому формула (13) остается в силе.

2. Для пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \\ z=z(t), \end{cases}$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ непрерывны вместе со своими производными $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$ на отрезке $[\alpha;\beta]$, причем $A(x(\alpha);y(\alpha);z(\alpha))$, $B(x(\beta);y(\beta);z(\beta))$, аналогично вводится интеграл 2-го рода

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz .$$

При этом формула, выражающая связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода имеет вид

$$\int\limits_{AB} P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy + R(x;y;z)dz =$$

$$= \int\limits_{AB} \left(P(x;y;z)\cos\alpha + Q(x;y;z)\cos\beta + R(x;y;z)\cos\gamma\right)dl ,$$

где $\vec{\tau} = (\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma)$, единичный касательный вектор к кривой AB в точке $M(x;y;z)$, α, β, γ углы, составляемые с осями координат, причем направление вектора $\vec{\tau}$ соответствует направлению движения от точки A к точке B.

4. Приложения криволинейного интеграла второго рода.

1. Работа силы. Пусть материальная точка под действием переменной силы $\vec{F}$ перемещается в плоскости Oxy вдоль некоторой кривой AB от точки A до точки B. Тогда работа силы $\vec{F}$ равна

$$A = \int\limits_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y)dy ,$$

где $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ проекции силы $\vec{F}$ на координатные оси.

2. Площадь фигуры. Площадь S области G, ограниченной контуром Γ, можно вычислить по одной из следующих формул

$$S = \oint\limits_{\Gamma} xdy , \qquad S = -\oint\limits_{\Gamma} ydx , \qquad S = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Gamma} xdy - ydx .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая задача приводит к определению криволинейного интеграла второго рода?
2. Сформулируйте определения: а) интегральных сумм для криволинейного интеграла второго рода; б) криволинейного интеграла второго рода.
3. Перечислите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.
4. Как вычисляется криволинейный интеграл второго рода в случае параметрического задания кривой интегрирования и в случае явного задания.
5. Сформулируйте теорему, выражающую связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.