## Тема 3
## КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### *Лекция 1.* МЕРА ЖОРДАНА В $\boldsymbol{R}^n$

1. Клетки и клеточные множества в $\boldsymbol{R}^n$.
2. Множества измеримые по Жордану. Мера Жордана.
3. Критерий измеримости множества в $\boldsymbol{R}^n$.
4. Разбиение измеримых множеств.

### 1. Клетки и клеточные множества в $\boldsymbol{R}^n$.

**О п р е д е л е н и е 1.** ***Клетками*** в $\boldsymbol{R}$ называются промежутки, точки и пустое множество Ø. Если клетка $I$ есть *промежуток*, то ее ***мера*** есть число $m(I)$, равное длине промежутка $I$. Если клетка $I$ есть *точка* или *пустое множество*, то $m(I)=0$.

Пусть $I_1$, $I_2$, ..., $I_n$ — клетки в $\boldsymbol{R}$.

**О п р е д е л е н и е 2.** Множество точек $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ называется ***клеткой*** в $\boldsymbol{R}^n$. ***Мерой*** $m(\Pi)$ клетки $\Pi$ называется произведение мер клеток $I_k$:

$$m(\Pi)=m(I_1)\cdot m(I_2)\cdot \ldots \cdot m(I_n)=\prod_{k=1}^{n} m(I_k).$$

Здесь «$\times$» обозначает декартово произведение множеств.

Ниже приведены **свойства** клеток.

**1.** Если хотя бы одна из клеток $I_1$, $I_2$, ..., $I_n$ – пустое множество то и клетка $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ есть пустое множество (пустая клетка) и $m(\Pi)=0$. Если хотя бы одна из клеток $I_1$, $I_2$, ..., $I_n$ есть точка в $\boldsymbol{R}$, то $m(\Pi)=0$. Если все клетки $I_1$, $I_2$, ..., $I_n$ являются точками в $\boldsymbol{R}$, то и $\Pi$ есть точка в $\boldsymbol{R}^n$ и $m(\Pi)=0$. Если $m(\Pi)>0$, то все клетки $I_1$, $I_2$, ..., $I_n$ являются промежутками в $\boldsymbol{R}$ и $m(I_k)>0$, $k=1,2,\ldots,n$.



**2.** Отрезки, точки и пустое множество являются замкнутыми множествами в $\boldsymbol{R}$ (замкнутыми клетками). Замыкание любой клетки в $\boldsymbol{R}$ есть замкнутая клетка.

**3.** Интервалы и пустое множество являются открытыми множествами в $\boldsymbol{R}$ (открытыми клетками). Внутренность любой клетки в $\boldsymbol{R}$ есть открытая клетка.

**4.** Пересечение двух клеток в $\boldsymbol{R}$ есть клетка. Разность двух клеток в $\boldsymbol{R}$ есть объединение не более чем двух непересекающихся клеток.

**5.** Для любой клетки $I \subset \boldsymbol{R}$ справедливы равенства $m(I)=m(I^\circ)=m(\bar{I})$, где $I^\circ$ – внутренность клетки $I$, а $\bar{I}$ – замыкание клетки $I$ в $\boldsymbol{R}$.

**6.** Для любой клетки $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ справедливы соотношения:

$$\Pi^\circ = I^\circ_1 \times I^\circ_2 \times \ldots \times I^\circ_n,\ \overline{\Pi} = \bar{I}_1 \times \bar{I}_2 \times \ldots \times \bar{I}_n,\ m(\Pi)=m(\Pi^\circ)=m(\overline{\Pi}).$$

**7.** Если $\Pi$ и $\Theta$ клетки в $\boldsymbol{R}^n$ и $\Pi \subset \Theta$, то $m(\Pi)<m(\Theta)$.

**8.** Если $I_1$, $J_1$, $I_2$, $J_2$, ..., $I_n$, $J_n$ клетки в $\boldsymbol{R}$, $\Pi = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ и $\Theta = J_1 \times J_2 \times \ldots \times J_n$, то $\Pi \cap \Theta$ есть клетка в $\boldsymbol{R}^n$, причем

$$\Pi \cap \Theta = \{(x_1; x_2; \ldots; x_n) \mid x_1 \in I_1 \cap J_1, \ldots, x_n \in I_n \cap J_n\}.$$

**9.** Если клетка $I$ есть промежуток в $\boldsymbol{R}$ с концами $a$ и $b$, то граница клетки $\partial I = \{a; b\}$. Если клетка $I \subset \boldsymbol{R}$ есть точка или пустое множество, то $\partial I = I$.

**10.** Пусть совокупность клеток $\{I_1; I_2; \ldots; I_t\}$ есть разбиение клетки $I \subset \boldsymbol{R}$. Тогда

$$m(I)=m(I_1)+m(I_2)+m(I_t).$$

**11.** Пусть совокупность клеток $\{I_1; I_2; \ldots; I_t\}$ есть разбиение клетки $I \subset \boldsymbol{R}$, а совокупность клеток $\{J_1; J_2; \ldots; J_p\}$ есть разбиение клетки $J \subset \boldsymbol{R}$. Тогда совокупность клеток $\{\Pi_{ij} = I_i \times J_j\}$, $i=1,2,\ldots,t$, $j=1,2,\ldots,p$, есть разбиение клетки $\Pi = I \times J$, причем

$m(\Pi)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{p}m(\Pi_{ij})$. Такое разбиение клетки называется ***стандартным***.

**12.** Если совокупность клеток $\{\Pi_1,\Pi_2,...,\Pi_p\}$ есть разбиение клетки $\Pi\subset \boldsymbol{R}^2$, то

$$m(\Pi)=\sum_{i=1}^{p}m(\Pi_i).$$

Аналогично строится стандартное разбиение клетки в $\boldsymbol{R}^n$.

**Пример**. Разбиение клетки $\Pi$ в пространстве $\boldsymbol{R}^2$ изображено на рисунке 1.

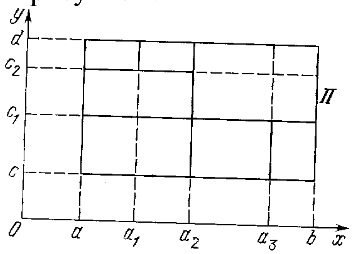


Рис.1.

**О п р е д е л е н и е 3.** Множество $A\subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***клеточным***, если это множество можно представить в виде конечного объединения попарно непересекающихся клеток $\{\Pi_1,\Pi_2,...,\Pi_s\}$. ***Мерой*** множества $A$ называется число $m(A)=\sum_{k=1}^{s}m(\Pi_k)$.

Клеточные множества обладают следующими **свойствами**.

**1.** Мера клеточного множества не зависит от способа разбиения этого множества на клетки.

**2.** Если клеточные множества $A$ и $B$ не пересекаются, то объединение $A\cup B$ есть клеточное множество и $m(A\cup B)=m(A)+m(B)$.

**3.** Если $A$ и $B$ являются клеточными множествами в $\boldsymbol{R}$, то $A\times B$ есть клеточное множество в $\boldsymbol{R}^2$.



**4.** Декартово произведение $n$ клеточных множеств в $\boldsymbol{R}$ является клеточным множеством в $\boldsymbol{R}^n$.

**5.** Разность двух клеточных множеств в $\boldsymbol{R}^n$ есть клеточное множество.

**6.** Пересечение двух клеточных множеств есть клеточное множество.

**7.** Если $A$ и $B$ – клеточные множества и $A\subset B$, то

$$m(B)=m(A)+m(B\setminus A) \text{ и } m(B)>m(A).$$

**8.** Если $A_1$, $A_2$, ..., $A_p$ — клеточные множества, то

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{p}A_k\right)\le\sum_{k=1}^{p}m(A_k).$$

## 2. Множества измеримые по Жордану. Мера Жордана.

**О п р е д е л е н и е 4.** Множество $Q\subset \boldsymbol{R}^n$ называется ***измеримым по Жордану***, если для любого $\varepsilon>0$ найдутся два клеточных множества $A$ и $B$ такие, что $A\subset Q\subset B$ и $m(B)-m(A)<\varepsilon$.

**О п р е д е л е н и е 5.** ***Мерой*** измеримого по Жордану множества $Q$ называется такое число $m(Q)$, что для любых двух клеточных множеств $A$ и $B$, удовлетворяющих условию $A\subset Q\subset B$, выполнено неравенство $m(A)\le m(Q)\le m(B)$.

**Лемма 1.** *Для любого измеримого по Жордану множества $Q$ существует и единственно число $m(Q)$, причем*

$$m(Q)=\sup_{A\subset Q}m(A)=\inf_{B\supset Q}m(B).$$

Без доказательства.

**О п р е д е л е н и е 6.** Будем говорить, что множество $E\subset \boldsymbol{R}^n$ имеет жорданову меру нуль, если для любого $\varepsilon>0$ найдется клеточное множество $B$ такое, что $E\subset B$ и $m(B)<\varepsilon$.

Множества жордановой меры нуль обладают следующими **свойствами.**

**1.** Множество $E$ меры нуль измеримо по Жордану и $m(E)=0$.

**2.** Объединение двух множеств (конечного числа множеств) меры нуль есть множество меры нуль.

**3.** Подмножество множества меры нуль есть множество меры нуль.

**4.** Если связное множество $A \subset \boldsymbol{R}^n$ не содержит ни одной граничной точки множества $B \subset \boldsymbol{R}^n$, то $A \subset B^\circ$ или $A \subset \left(\boldsymbol{R}^n \setminus \overline{B}\right)$.

### 3. Критерий измеримости множества в $\boldsymbol{R}^n$.

**Теорема 1 (критерий измеримости множества в $\boldsymbol{R}^n$).** *Для того чтобы множество $Q \subset \boldsymbol{R}^n$ было измеримым по Жордану, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным, а его граница $\partial Q$ имела жорданову меру нуль.*

►*Необходимость.*

Пусть множество $Q$ измеримо по Жордану. Покажем, что его граница $\partial Q$ имеет жорданову меру нуль.

Из измеримости $Q$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся клеточные множества $A$ и $B$ такие, что $A \subset Q \subset B$ и $m(B) - m(A) < \varepsilon$. Без ограничения общности можно считать, что $A$ есть открытое клеточное множество, а $B$ замкнутое клеточное множество. В самом деле, если $A = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Pi_k$ и $B = \bigcup\limits_{k=1}^{m} \Pi'_k$, то отбрасывая у всех клеток $\Pi_k$ их границы, получаем открытое клеточное множество $A^\circ$, причем $m\left(A^\circ\right) = m(A)$. Присоединяя ко всем $\Pi'_k$ их границы, получаем замкнутое множество $\overline{B}$, которое будет клеточным как объединение конечного числа клеток, причем $m\left(\overline{B}\right) = m(B)$. Но $A^\circ \subset Q \subset \overline{B}$ и множество $A^\circ$ не имеет общих точек с $\partial Q$, а множество $\overline{B}$ содержит $\partial Q$. Поэтому $C = \overline{B} \setminus A^\circ$ есть клеточное множество такое, что

$$\partial Q \subset C, \ m(C) = m\left(\overline{B}\right) - m\left(A^\circ\right) < \varepsilon .$$

В силу произвольности $\varepsilon$ множество $\partial Q$ имеет жорданову меру нуль. Так как $Q \subset B$, то $Q$ – ограничено.



*Достаточность.* Пусть $m(\partial Q) = 0$ и $Q$ – ограниченное множество в $\boldsymbol{R}^n$. Заключим множество $Q$ в клетку $\Pi$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим клеточное множество $C$ такое, что $\partial Q \subset C$ и $m(C) < \varepsilon$. Тогда $\Pi \setminus C$ является клеточным множеством, не содержащим граничных точек множества $Q$.

Пусть $\Pi \setminus C = \bigcup\limits_{k=1}^{N} \Pi_k$. Так как клетка $\Pi_k$ не содержит граничных точек множества $Q$, то в силу свойства 4 либо $\Pi_k \cap Q = \varnothing$, либо $\Pi_k \subset Q$. Занумеруем клетки $\Pi_k$ в таком порядке, что $\Pi_1$, ..., $\Pi_l \subset Q$, а $\Pi_{l+1}$, ..., $\Pi_N$ имеют с $Q$ пустое пересечение.

Обозначим $A = \bigcup\limits_{k=1}^{l} \Pi_k$, $B = A \cup C = \Pi \setminus \left(\bigcup\limits_{k=l+1}^{N} \Pi_k\right)$. Тогда $A \subset Q \subset B$ и $m(B) - m(A) = m(C) < \varepsilon$. Следовательно, множество $Q$ измеримо по Жордану. ◄

Ниже приведены **свойства** меры Жордана.

**1 (неотрицательность меры).**. Для любого измеримого множества $Q \subset \boldsymbol{R}^n$ всегда $m(Q) \geq 0$.

**2.** Если множества $Q_1$ и $Q_2$ измеримы по Жордану, то $Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 \cap Q_2$, $Q_1 \setminus Q_2$ измеримы по Жордану.

**3 (полуаддитивность меры).** Если множества $Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_n$ измеримы по Жордану, то и множество $\bigcup\limits_{k=1}^{n} Q_k$ измеримо по Жордану и

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} m(Q_k).$$

**4 (свойство конечной аддитивности меры Жордана).** Если множества $Q_1$, $Q_2$, ..., $Q_n$ измеримы по Жордану и попарно не пересекаются, то

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} Q_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(Q_k).$$

**4. Разбиение измеримых множеств.**

Пусть множество $G$ измеримо по Жордану в $\boldsymbol{R}^n$.

**О п р е д е л е н и е 7.** ***Разбиением*** множества $G$ называется совокупность измеримых по Жордану в $\boldsymbol{R}^n$ и попарно непересекающихся множеств $G_1$, $G_2$, ..., $G_m$ таких, что $G=\bigcup\limits_{k=1}^{m} G_k$.

*Обозначается*: $\tau=\{G_k\}$, $k=1,2,...,m$.

Пусть $d(G_k)$ есть диаметр множества $G_k$: $d(G_k)=\sup\limits_{x,y\in G_k} \rho(x;y)$.

**О п р е д е л е н и е 8.** ***Мелкостью разбиения*** $\tau$ множества $G$ называется число:

$$\lambda=\max_{1\le k\le N} d(G_k).$$

Если каждое из множеств $G_k$, $k=1,2,...,m$, является подмножеством некоторого множества $G_k^{'}$, $k=1,2,...,m$, то говорят, что ***разбиение*** $\tau=\{G_k\}$ ***вписано в разбиение*** $\tau'=\{G_k^{'}\}$.

*Обозначается*: $\tau \prec \tau^{'}$ или $\tau^{'} \succ \tau$.

Разбиения обладают следующими **свойствами**.

**1 (транзитивность).** Если $\tau \prec \tau^{'}$ и $\tau^{'} \prec \tau^{''}$, то $\tau \prec \tau^{''}$.

**2 (финальность).** Для любых двух разбиений $\tau^{'}$ и $\tau^{''}$ множества $G$ существует такое его разбиение $\tau$, что $\tau \succ \tau^{'}$, $\tau \succ \tau^{''}$.

**3.** Если $\tau=\{G_k\}$ – разбиение множества $G$, то $m(G)=\sum\limits_{k=1}^{m} m(G_k)$.



**Вопросы для самоконтроля**

1. Какие множества называются клетками в $\boldsymbol{R}^n$? Перечислите свойства клеток.
2. Что называется клеточным множеством в $\boldsymbol{R}^n$? Перечислите свойства клеточных множеств.
3. Какие множества называются измеримыми по Жордану? Что такое мера Жордана?
4. Сформулируйте и докажите критерий измеримости множества в $\boldsymbol{R}^n$.
5. Что такое разбиение множества, и какими свойствами оно обладает?