## *Лекция 2.* ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
2. Определение и свойства двойного интеграла.

**1. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.**

***Задача о массе неоднородной пластины.*** Пусть плоская пластина $G$ заполнена веществом с известной плотностью $\rho = \rho(x; y)$. Требуется найти массу (количество вещества) всей пластины.

**Определение 1.** Под ***плотностью*** вещества в точке $M(x; y)$ понимается предел средней плотности бесконечно малой части $G$, содержащей точку $M(x; y)$.

Разобьем область $G$ произвольно на $n$ частичных областей $G_1$, $G_2$,..., $G_n$, не имеющих общих внутренних точек, с площадями $\Delta S_1$, $\Delta S_2$, ..., $\Delta S_n$.

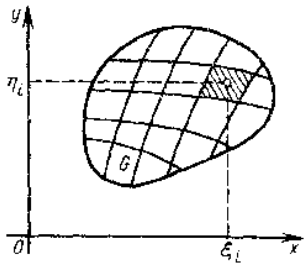


Рис.1.

Предположим, что в каждой малой частичной области $G_i$, $i = 1,2,...,n$, плотность постоянна и равна $\rho(M_i)$, где $M_i(\xi_i; \eta_i)$ – произвольная точка $G_i$. Тогда масса $G_i$ приблизительно будет равна

$$m_i \approx \rho(M_i) \cdot \Delta S_i = \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i .$$

Для массы всей пластины $G$ получим

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i . \qquad (1)$$



Обозначим $\lambda_i$, $i = 1,2,...,n$, диаметр (наибольшее расстояние между точками области) частичной области $G_i$. И пусть $\lambda$ – наибольший из диаметров $\lambda_i$, т.е. $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \lambda_i$. Сумма (1) тем точнее, чем меньше каждый из диаметров частичных областей $G_1$, $G_2$,..., $G_n$. Поэтому массой пластины можно считать

$$m = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i . \qquad (2)$$

***Задача об объеме цилиндроида.*** Тело, ограниченное сверху поверхностью $z = f(x; y)$, снизу областью $G$, лежащей в плоскости $Oxy$, с боков цилиндрической поверхностью, направляющей которой является граница области $G$, а образующая параллельна оси $Oz$, называется ***криволинейным цилиндром*** или ***цилиндроидом***.

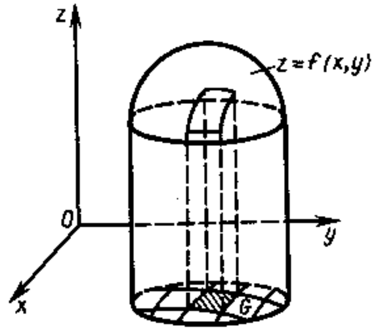


Рис.2.

Необходимо найти объем данного цилиндроида.

Разобьем область $G$ произвольно на $n$ частичных областей $G_1$, $G_2$,..., $G_n$, не имеющих общих внутренних точек, с площадями $\Delta S_1$, $\Delta S_2$, ..., $\Delta S_n$. В каждой из областей $G_i$ выберем точку $M_i(\xi_i; \eta_i)$ и рассмотрим прямой цилиндрический столбик с основанием $G_i$ и высотой $f(\xi_i; \eta_i)$. Очевидно, что объем этого столбика равен $V_i \approx f(\xi_i; \eta_i) \cdot \Delta S_i$. Сумма объемов всех цилиндрических столбиков представляет собой объем ступенчатого тела, приближенно заменяющего объем криволинейного цилиндра. Поэтому

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i \, . \qquad (3)$$

Эта сумма тем точнее выражать искомый объем $V$, чем меньше каждый из диаметров $\lambda_i$, $i=1,2,...,n$, частичных областей $G_1$, $G_2$, ..., $G_n$. Следовательно,

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i \, , \qquad (4)$$

где $\lambda$ – наибольший из диаметров $\lambda_i$, т.е. $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\lambda_i$.

**2. Определение двойного интеграла.**

Пусть $G \subset \boldsymbol{R}^2$ – измеримое по Жордану множество, $z = f(x;y)$ — произвольная функция, определенная и ограниченная на этом множестве. Будем предполагать, что граница множества $G$ состоит из конечного числа кривых, заданных уравнениями вида $y = y(x)$ или $x = x(y)$, где $y(x)$ и $x(y)$ непрерывные функции.

И пусть $\tau = \{G_i\}$, $i=1,2,...,n$, разбиение множества $G$ с площадями $\Delta S_i$, $i=1,2,...,n$, $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(G_i)$ – мелкость разбиения, где $d(G_i)$ диаметр множества $G_i$. В каждой части $G_i$, выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i)$. Тогда $f(\xi_i;\eta_i)$ – значение функции в этой точке.

**О п р е д е л е н и е 2.** Сумма

$$\sigma_n(\tau, C_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i \qquad (5)$$

называется ***интегральной суммой Римана*** для функции $z = f(x;y)$ на множестве $G$, соответствующей разбиению $\tau$ и выбору точек $C_i(\xi_i;\eta_i)$.

Если функция $z = f(x;y)$, ограничена на $G$, то для любого разбиения $\tau = \{G_i\}$, $i=1,2,...,n$, определены числа:



$$m_i = \inf_{(x;y)\in G_i} f(x;y), \; M_i = \sup_{(x;y)\in G_i} f(x;y).$$

**О п р е д е л е н и е 3.** Суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta S_i \, ,$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta S_i$$

называются ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу***, соответствующими разбиению $\tau$.

**О п р е д е л е н и е 4.** ***Двойным интегралом*** от функции $z = f(x;y)$ по множеству $G$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (5) при $\lambda \to 0$:

$$I = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i \, .$$

*Обозначается*:

$$I = \iint\limits_G f(x;y)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i \, , \qquad (6)$$

подынтегральная функция $f(x;y)$ называется ***интегрируемой*** на множестве $G$, множество $G$ – ***областью интегрирования***, $x$, $y$ – ***переменными интегрирования***, $dS$ – ***элементом площади***.

Учитывая определение предела, можно записать:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i)\cdot \Delta S_i = I \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; \forall \tau = \{G_i\} \;\; \lambda(\tau) < \delta \quad |I - \sigma_n| < \varepsilon \, .$$

**Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости).** *Если функция $z = f(x;y)$ интегрируема на множестве $G$, то она ограничена на этом множестве.*

**Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости).** *Если функция $z = f(x;y)$ непрерывна на замкнутом множестве $G$, то она интегрируема на этом множестве.*

**Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу).** *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема на измеримом* *по Жордану множестве* $G \subset \boldsymbol{R}^2$*, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon > 0$ *нашлось такое* $\delta > 0$*, что для любого разбиения* $\tau = \{G_i\}$ *с мелкостью* $\lambda(\tau) < \delta$ *выполнялось неравенство:*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon .$$

Доказательство теорем 1-3 проводится аналогично соответствующим теоремам для функции одной переменной.

**Замечание**. Из определения двойного интеграла следует, что для интегрируемой на множестве $G$ функции $z = f(x;y)$ предел интегральных сумм существует и не зависит от разбиения множества на части. Поэтому, не ограничивая общности, можно разбивать область интегрирования $G$ на части прямыми, параллельными координатным осям (рис.3). Тогда $\Delta S_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i$. Поэтому можно записать

$$\iint_G f(x;y)dS = \iint_G f(x;y)dxdy ,$$

где $dS = dxdy$ .

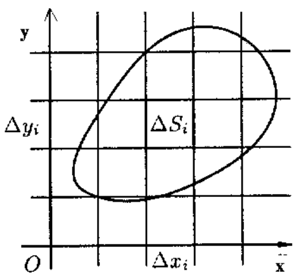


Рис.3.

Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла.

**1.** $\iint_G dS = \iint_G dxdy = S$ , где $S$ – площадь области $G$ .

**2 (линейность).** Если $\alpha$ и $\beta$ — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемые на измеримом



по Жордану множестве $G$, то функция $\alpha \cdot f(x;y) + \beta \cdot g(x;y)$ тоже интегрируема на $G$ и справедливо равенство:

$$\iint_G (\alpha f(x;y) + \beta g(x;y))dxdy = \alpha \iint_G f(x;y)dxdy + \beta \iint_G g(x;y)dxdy .$$

**3 (аддитивность).** Если измеримое по Жордану множество $G$ является объединением измеримых множеств $G_1$ и $G_2$, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y)$ интегрируема, то функция $f(x;y)$ также интегрируема на множестве $G$ и справедлива формула:

$$\iint_G f(x;y)dxdy = \iint_{G_1} f(x;y)dxdy + \iint_{G_2} f(x;y)dxdy .$$

**4.** Если на измеримом множестве $G$ имеет место неравенство $f(x;y) \geq 0$ , то:

$$\iint_G f(x;y)dxdy \geq 0 .$$

**5 (монотонность).** Если $f(x;y)$ и $g(x;y)$ интегрируемы на множестве $G$ и $f(x;y) \leq g(x;y)$ при $(x;y) \in G$, то $\iint_G f(x;y)dxdy \leq \iint_G g(x;y)dxdy$ .

**6.** Если функция $f(x;y)$ непрерывна на замкнутом измеримом по Жордану множестве $G$ , площадь которого $S$ , то

$$m \cdot S \leq \iint_G f(x;y)dxdy \leq M \cdot S ,$$

где $m$ и $M$ – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве $G$ .

**7 (теорема о среднем).** Если функция $f(x;y)$ непрерывна на замкнутом измеримом по Жордану множестве $G$, площадь которого $S$, то существует такая точка $P_0(x_0;y_0) \in G$ , что выполняется неравенство:

$$\iint_G f(x;y)dxdy = f(x_0;y_0) \cdot S .$$

**8.** Произведение интегрируемых на измеримом множестве $G$ функций есть интегрируемая функция.

**9.** Если функция $f(x;y)$ интегрируема на измеримом множестве $G$, то функция $|f(x;y)|$ также интегрируема и справедливо неравенство:

$$\left|\iint\limits_G f(x;y)dxdy\right| \le \iint\limits_G |f(x;y)|dxdy.$$

**Вопросы для самоконтроля**

1. Сформулируйте задачу о массе неоднородной пластины.
2. Сформулируйте задачу об объеме криволинейного цилиндра.
3. Что называется интегральной суммой? Какие суммы называются верхней и нижней суммой Дарбу?
4. Дайте определение двойного интеграла.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции двух переменных.
6. В чем суть критерия интегрируемости?
7. Перечислите свойства двойного интеграла.