Лекция 4. **ФОРМУЛА ГРИНА**

1. Формула Грина.
2. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

1. Формула Грина.

Пусть в плоскости Oxy задана замкнутая элементарная относительно оси Ox или Oy область G, ограниченная замкнутым контуром Γ.

Теорема 1 (формула Грина). *Если функции* $P(x;y)$ *и* $Q(x;y)$ *непрерывны вместе со своими частными производными* $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ *и* $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *в области* G*, то имеет место формула*

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy, \qquad (1)$$

где контур Γ *обходится в положительном направлении.*

► Рассмотрим область $G=\{(x;y)|a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$.

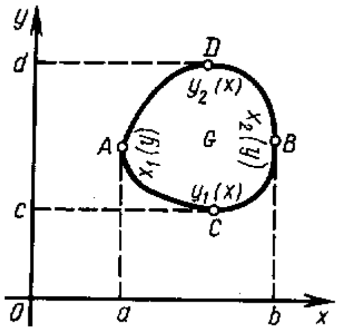

Рис.1.

Преобразуем двойной интеграл $\iint\limits_G \dfrac{\partial P}{\partial y}dxdy$ к криволинейному интегралу. Имеем

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=\int\limits_a^b\left(P(x;y)\Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)}\right)dx=$$

$$=\int\limits_a^b P(x;y_2(x))dx-\int\limits_a^b P(x;y_1(x))dx.$$

Каждый из полученных интегралов равен криволинейному интегралу второго рода, взятому по соответствующей кривой:

$$\int\limits_a^b P(x;y_2(x))dx=\int\limits_{ADB}P(x;y)dx=-\int\limits_{BDA}P(x;y)dx,$$

$$\int\limits_a^b P(x;y_1(x))dx=\int\limits_{ACB}P(x;y)dx.$$

Тогда

$$\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\left[\int\limits_{BDA}P(x;y)dx+\int\limits_{ACB}P(x;y)dx\right]=-\oint\limits_\Gamma P(x;y)dx. \qquad (2)$$

Аналогично доказывается формула:

$$\iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}dxdy=\oint\limits_\Gamma Q(x;y)dy. \qquad (3)$$

При этом область G удобно задать в виде:

$$G=\{(x;y)|c\le y\le d,\ x_1(y)\le x\le x_2(y)\}.$$

Вычитая почленно из равенства (3) равенство (2), получим формулу Грина

$$\iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy. \ ◄$$

Следствие. *Площадь* S *области* G*, ограниченной контуром* Γ*, можно вычислить по одной из следующих формул*

$$S=\oint\limits_\Gamma xdy, \qquad S=-\oint\limits_\Gamma ydx, \qquad S=\frac{1}{2}\oint\limits_\Gamma xdy-ydx.$$

► Положим $Q=x$ и $P=0$. Тогда

$$\oint\limits_\Gamma Pdx+Qdy=\oint\limits_\Gamma 0dx+xdy=\iint\limits_G(1-0)dxdy=S.$$

Аналогично, полагая $P=-y$ и $Q=0$, получим $S=-\oint\limits_{L} y dx$. ◄

Замечание. 1. Формула Грина справедлива для произвольной области, которую можно разбить на конечное число правильных областей.

2. Формула Грина связывает интеграл по границе области с интегралом по самой области.

Пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_{\Gamma}(x-y)dx+(x+y)dy$, где $\Gamma=\left\{(x;y)\middle| x^2+y^2=4\right\}$.

Решение. Вычислим интеграл с помощью формулы Грина. Имеем

$$P(x;y)=x-y,\ Q(x;y)=x+y,\ \frac{\partial P}{\partial y}=-1,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Тогда

$$\oint\limits_{x^2+y^2=4}(x-y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(1+1)dxdy=2\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}dxdy=2\cdot\pi\cdot 2^2=$$
$$=8\pi.$$

2. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Определение 1. Плоская область G называется ***односвязной***, если каков бы ни был замкнутый контур Γ, лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром часть плоскости целиком принадлежит области G.

Пример. Односвязными являются круг, эллипс, многоугольник и так далее. Кольцо не является односвязной областью, так как любая окружность, лежащая внутри этой области содержит точки, не принадлежащие этой области.

Теорема 2. *Пусть функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области G. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

1) для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой Γ, расположенной в G, верно

$$\oint\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy=0;$$

2) для любых двух точек A и B области G значение интеграла

$$\int\limits_{AB} Pdx+Qdy$$

не зависит от выбора пути интегрирования AB, целиком лежащего в G;

3) выражение $Pdx+Qdy$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции, определенной в области G:

$$Pdx+Qdy=dF;$$

4) в области G всюду $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$.

► Доказательство теоремы проведем по схеме $1\to 2\to 3\to 4\to 1$.

Шаг 1 $1\to 2$.

Рассмотрим в области G два произвольных пути, соединяющих точки A и B, которые в сумме составляют замкнутую кривую $L=ACB+BDA$, расположенную в G.

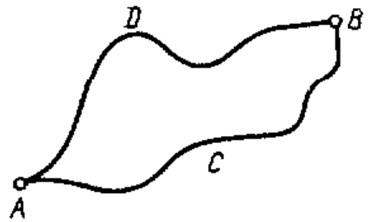

Рис.2.

Согласно условию 1) имеем

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0 .$$

С другой стороны

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{ACB} Pdx + Qdy + \int_{BDA} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{ACB} Pdx + Qdy - \int_{ADB} Pdx + Qdy .$$

Сравнивая, получаем

$$\int_{ACB} Pdx + Qdy = \int_{ADB} Pdx + Qdy .$$

Шаг 2 $2 \to 3$.

Пусть интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути интегрирования, а зависит только от выбора точек A и B. Зафиксируем точку $A = A(x_0; y_0)$.

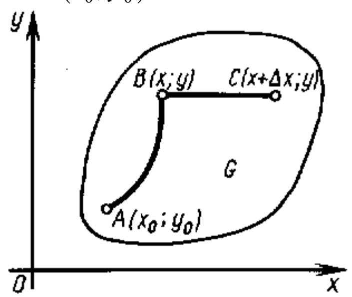

Рис.3.

Тогда интеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ является некоторой функцией координат x и y точки $B = B(x; y)$

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = F(x; y).$$

Покажем, что $F(x; y)$ дифференцируема в области G.

Рассмотрим частное приращение функции $F(x; y)$ по x в точке $B(x; y)$

$$\Delta_x F = F(x + \Delta x; y) - F(x; y) = \int_{AC} Pdx + Qdy - \int_{AB} Pdx + Qdy =$$

$$= \int_{BC} Pdx + Qdy ,$$

где точка $C(x + \Delta x; y)$.

Так как интеграл не зависит от вида кривой, то возьмем путь от $B(x; y)$ до $C(x + \Delta x; y)$ прямолинейный.

$$\Delta_x F = \int_{BC} Pdx + Qdy = \int_{BC} Pdx = \int_{x}^{x+\Delta x} P(x; y) dx .$$

Применяя к последнему интегралу теорему о среднем, получаем

$$\Delta_x F = P(x + \theta \cdot \Delta x; y) \cdot \Delta x , \quad 0 < \theta < 1 .$$

Отсюда

$$\frac{\Delta_x F}{\Delta x} = P(x + \theta \cdot \Delta x; y), \quad 0 < \theta < 1 .$$

Учитывая, что функция $P(x; y)$ непрерывна, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x + \theta \cdot \Delta x; y) = P(x; y).$$

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x; y)$.

Это означает, что функция $F(x; y)$ дифференцируема и справедливо равенство $dF = Pdx + Qdy$.

Шаг 3 $3 \to 4$.

Пусть в области G определена функция $F(x; y)$ такая, что $dF = Pdx + Qdy$.

Тогда $\frac{\partial F}{\partial x} = P(x; y)$ и $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x; y)$.

По теореме о равенстве смешанных производных, имеем:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} .$$

Шаг 4 $4 \to 1$.

Пусть выполнено условие 4) и пусть Γ – кусочно-гладкая кривая, лежащая в области G и ограничивающая некоторую область G^*. Тогда применяя формулу Грина к области G^*, получаем

$$\oint_{\Gamma} Pdx + Qdy = \iint_{G^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy .$$

В силу условия 4) интеграл справа равен 0.

Следовательно, $\oint\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = 0$. ◄

Замечание. Из эквивалентности условий 1-4 теоремы 2 следует, что условие 4) является необходимым и достаточным условием независимости криволинейного интеграла 1-го рода $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ от пути интегрирования.

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx + xdy$.

Решение. Здесь $P = y$, $Q = x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Согласно теореме 3, интеграл не зависит от пути интегрирования. Из выполнения условия 4) следует справедливость условия 3). Так как $d(xy) = xdy + ydx$, то

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx + xdy = xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)} = 1 - 0 = 1 .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие условия должны выполнятся для того. Чтобы была справедлива формула Грина.

2. Перечислите эквивалентные условия, если функции $P(x;y)$ и $Q(x;y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой односвязной области