Лекция 6. ПРИЛОЖЕНИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА

1. Геометрические приложения двойного интеграла.
2. Физические приложения двойного интеграла.

1. Геометрические приложения двойных интегралов.

Вычисление площадей плоских фигур. Площадь S области G может быть вычислена по формуле

$$S = \iint_G dxdy. \qquad (1)$$

Данная формула применима не только к криволинейным трапециям, но и к фигурам, расположенным произвольно по отношению к координатным осям.

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $x = 4y - y^2$, $x + y = 6$.

Решение. 1. Найдем координаты точек пересечения данных линий. Для этого решим систему

$$\begin{cases} x = 4y - y^2, \\ x + y = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4y - y^2, \\ 4y - y^2 + y - 6 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4y - y^2, \\ y^2 - 5y + 6 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4, x_2 = 3, \\ y_1 = 2, y_2 = 3. \end{cases}$$

Итак, имеем две точки пересечения $A(4;2)$ и $B(3;3)$.

2. Вычисляем площадь фигуры.

Подставляя в формулу (1), получим

$$S = \iint_G dxdy = \int_2^3 dy \int_{6-y}^{4y-y^2} dx = \int_2^3 \left(x\Big|_{6-y}^{4y-y^2} \right) dy =$$

$$= \int_2^3 \left(-y^2 + 5y - 6\right) dy = \left(-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 6y \right)\Bigg|_2^3 = \frac{1}{6}.$$

Вычисление площади поверхности. Площадь S поверхности, заданной уравнением $z = f(x;y)$, вычисляется с помощью двойного интеграла по формуле

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dxdy, \qquad (2)$$

где G – проекция поверхности на плоскость Oxy.

Пример. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Из уравнения конуса имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Проекцией поверхности на плоскость Oxy является круг, ограниченный окружностью $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рис.2).

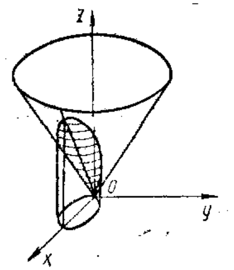

Рис.2.

Тогда

$$S = \iint_G \sqrt{1 + \left(f_x'\right)^2 + \left(f_y'\right)^2}\, dxdy =$$

$$= \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2}\, dxdy = \sqrt{2}\iint_G dxdy =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, J = r, \\ -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{array} \right] = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r dr =$$

$$= 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 2\sqrt{2}\left.\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{2}\,.$$

Вычисление объема тела. С помощью двойного интеграла объем тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x;y) > 0$, снизу плоскостью $z = 0$, с боковых сторон цилиндрической поверхностью, у которой образующая параллельна оси Oz, а направляющей служит контур области G, находится по формуле:

$$V = \iint\limits_G f(x;y)dxdy\,. \qquad (3)$$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = x^2,\ x + y + z = 4,\ y = 1,\ z = 0\,.$$

Решение. Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z = 4 - x - y$, снизу – частью плоскости, заключенной между параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (рис.3).

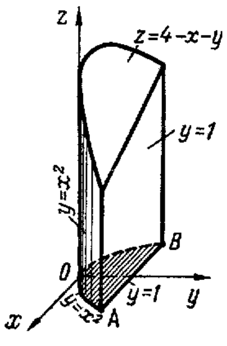

Рис.3.

Тогда по формуле 3 получим,

$$V = \iint\limits_G (4 - x - y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y)dx =$$

$$= \int\limits_0^1\left(\left.\left((4-y)x - \frac{x^2}{2}\right)\right|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\right)dy = 2\int\limits_0^1 (4-y)\sqrt{y}\,dy =$$

$$= 8\int\limits_0^1 y^{\frac{1}{2}}dy - 2\int\limits_0^1 y^{\frac{3}{2}}dy = \frac{68}{15}\,.$$

2. Физические приложения двойного интеграла.

Вычисление массы пластины. Масса плоской пластины G с переменной плотностью $\rho = \rho(x;y)$ вычисляется по формуле

$$m = \iint\limits_G \rho(x;y)dxdy\,.$$

Пример. Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Решение. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через r_1 и r_2, $r_1 < r_2$. Поместим полярный радиус системы координат в центре кольца. Тогда уравнения окружностей примут вид $r = r_1$ и $r = r_2$. Поверхностная плотность в любой точке кольца равна $\rho = \dfrac{k}{r^2}$.

Масса кольца равна

$$m = \iint\limits_G \rho(x;y)dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, |J| = r, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, r_1 \le r \le r_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{k}{r^2} r\,dr = k\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}dr = k\int\limits_0^{2\pi}\left(\ln r\Big|_{r_1}^{r_2}\right)d\varphi =$$

$$= k\ln\frac{r_1}{r_2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi k\ln\frac{r_1}{r_2}\,.$$

Статические моменты и координаты центра тяжести. Статические моменты пластины G относительно осей Ox и Oy могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \iint\limits_G y \cdot \rho(x;y)dxdy\,, \quad S_y = \iint\limits_G x \cdot \rho(x;y)dxdy\,,$$

а координаты центра масс пластины – по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m}\,,\ y_c = \frac{S_x}{m}\,.$$

Моменты инерции пластины. Момент инерции материальной точки массы m относительно оси относительно некоторой оси равен произведению массы точки на квадрат расстояния точки до оси.

Моменты инерции пластины G относительно осей Ox и Oy находятся по формулам

$$I_x = \iint\limits_G y^2 \rho(x;y)dxdy\,, \qquad I_y = \iint\limits_G x^2 \rho(x;y)dxdy\,.$$

Момент инерции пластины G относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_G \left(x^2 + y^2\right)\rho(x;y)dxdy\,.$$

Пример. Найти центр масс равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы. Найти момент инерции данного треугольника относительного его гипотенузы.

Решение. Пусть в прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC гипотенуза AB (рис.4).

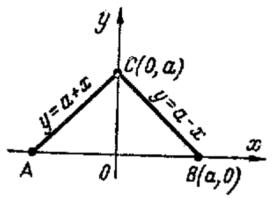

Рис.4.

Тогда относительно системы координат Oxy уравнения катетов AC и BC будут $y = x + a$ и $y = a - x$. Согласно условию задачи в точке $(x;y)$ треугольника ABC плотность имеет вид $\rho(x;y) = ky$.

1. Вычислим величины массу и координаты центра масс для данного треугольника.

Для массы получим:

$$m = \iint\limits_{ABC} ky\,dxdy = k\int\limits_0^a ydy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = k\int\limits_0^a y\left(x\Big|_{y-a}^{a-y}\right)dy =$$

$$= k\int\limits_0^a y(a - y - y + a)dy = 2k\int\limits_0^a \left(ay - y^2\right)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^3}{3}\,.$$

Статические моменты:

$$S_x = \iint\limits_{ABC} y \cdot ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y^2dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^2(a - y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^4}{6}\,.$$

$$S_y = \iint\limits_{ABC} x \cdot ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y\,dy \int\limits_{y-a}^{a-y} x\,dx = 0\,.$$

Тогда координаты

$$x_c = \frac{S_y}{m} = 0\,,\ y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{a}{2}\,.$$

2. Момент инерции относительно гипотенузы AB представляет собой I_x. Поэтому

$$I_x = \iint\limits_{ABC} y^2\,ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y^3dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^3(a - y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^5}{10} .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие геометрические приложения имеет двойной интеграл?

2. Перечислите, при вычислении каких физических величин используется двойной интеграл.