Лекция 7. ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛ

1. Задача о массе пространственного тела.
2. Определение и свойства тройного интеграла.
3. Вычисление тройного интеграла.

1. Задача о массе пространственного тела.

Пусть в пространстве $\boldsymbol{R}^3$ имеется ограниченное тело Q с переменной плотностью $\rho(x;y;z)$. Требуется найти массу этого тела.

Для решения этой задачи, разобьем тело на частичные поверхности Q_1, Q_2, ..., Q_n объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. Предположим, что в каждой малой части Q_i, $i=1,2,...,n$, плотность постоянна и равна $\rho(C_i)$, где $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ – произвольная точка Q_i. Тогда масса частичной поверхности V_i приблизительно будет равна

$$m_i \approx \rho(C_i)\cdot \Delta Q_i = \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta Q_i .$$

Для массы всего тела Q получим

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta V_i . \qquad (1)$$

Обозначим λ_i, $i=1,2,...,n$, диаметр (наибольшее расстояние между точками области) частичной поверхности Q_i тела Q. И пусть λ – наибольший из диаметров λ_i, т.е. $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} \lambda_i$. Сумма (1) тем точнее, чем меньше каждый из диаметров частей Q_1, Q_2, ..., Q_n. Поэтому массой всего тела можно считать

$$m = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta V_i . \qquad (2)$$

2. Определение тройного интеграла.

Пусть Q измеримое по Жордану множество пространства $\boldsymbol{R}^3$, на котором задана непрерывная функция $u=f(x;y;z)$. И пусть $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,...,n$, разбиение множества Q на частичные области Q_1, Q_2, ..., Q_n объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. В каждой малой части Q_i, $i=1,2,...,n$, выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$. При этом мелкость разбиения есть $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(Q_i)$, где $d(Q_i)$, $i=1,2,...,n$, – диаметр частичной области Q_i.

О п р е д е л е н и е 1. Сумма

$$\sigma_n(\tau, C_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot \Delta V_i \qquad (3)$$

называется ***интегральной суммой*** Римана для функции $f(x;y;z)$ на множестве Q, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i \in Q_i$, $i=1,2,...,n$.

Если функция $z=f(x;y;z)$, ограничена на Q, то для любого разбиения $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i = \inf_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z),\ M_i = \sup_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z).$$

О п р е д е л е н и е 2. Суммы

$$s_\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta V_i ,$$

$$S_\tau = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta V_i$$

называются ***нижней*** и ***верхней суммами Дарбу***, соответствующими разбиению $\tau=\{Q_i\}$ множества Q.

О п р е д е л е н и е 3. ***Тройным интегралом*** от функции $f(x;y;z)$ по множеству Q называется предел (если он существует) интегральной суммы (3) при $\lambda\to 0$.

Обозначается:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i , \quad (4)$$

подынтегральная функция $f(x;y;z)$ называется ***интегрируемой*** по измеримому множеству Q, множество Q – ***областью*** интегрирования, x, y, z – ***переменными*** интегрирования, dv – ***элементом*** объема.

Учитывая определение предела, можно записать:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i = I \iff$$

$$\iff \forall\varepsilon>0 \ \exists\delta>0: \forall\tau=\{Q_i\} \ \lambda(\tau)<\delta \quad |I-\sigma_n|<\varepsilon .$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $dv = dxdydz$. Поэтому можно записать:

$$\iiint_V f(x;y;z)dxdydz = \iiint_V f(x;y;z)dv .$$

Для тройного интеграла справедливы теоремы существования и критерий интегрируемости Дарбу, как и для двойного интеграла.

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости). *Если функция $u = f(x;y;z)$ интегрируема на измеримом по Жордану множестве Q, то она ограничена на этом множестве.*

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости). *Если функция $u = f(x;y;z)$ непрерывна на замкнутом измеримом множестве Q то она интегрируема на этом множестве.*

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу). *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема на измеримом по Жордану множестве $Q\subset \boldsymbol{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое $\delta>0$, что для любого разбиения $\tau=\{Q_i\}$ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ выполнялось неравенство:*

$$S_\tau - s_\tau < \varepsilon .$$

Основные **свойства тройного интеграла** аналогичны соответствующим свойствам двойного интеграла.

1. $\iiint_Q dv = V$, где V – объем области V.

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы на измеримом множестве Q, то функция $\alpha\cdot f(x;y;z)+\beta\cdot g(x;y;z)$ тоже интегрируема на Q и справедливо равенство:

$$\iiint_Q (\alpha f(x;y;z)+\beta g(x;y;z))dv =$$

$$=\alpha\iiint_Q f(x;y;z)dv + \beta\iiint_Q g(x;y;z)dv .$$

3 (аддитивность). Если измеримое по Жордану множество Q является объединением измеримых множеств Q_1 и Q_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых $f(x;y;z)$ интегрируема, то функция $f(x;y;z)$ также интегрируема на множестве Q и справедлива формула:

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv = \iiint_{Q_1} f(x;y;z)dv + \iiint_{Q_2} f(x;y;z)dv .$$

4 (монотонность). Если на измеримом множестве Q имеет место неравенство $f(x;y;z)\ge 0$, то

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv \ge 0 ;$$

если на измеримом множестве Q выполняется неравенство:

$$f(x;y;z)\le g(x;y;z),$$

то

$$\iiint_Q f(x;y;z)dv \le \iiint_Q g(x;y;z)dv .$$

5. Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна на замкнутом измеримом по Жордану множестве Q, объем которого V, то

$$m\cdot V \le \iiint_Q f(x;y;z)dv \le M\cdot V ,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве Q.

6 (теорема о среднем). Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна на замкнутом измеримом по Жордану множестве Q, объем которого V, то в этой области существует такая точка $P_0(x_0;y_0z_0)$, что

$$\iiint\limits_{Q} f(x;y;z)dv = f(x_0;y_0;z_0)\cdot V . \qquad (5)$$

3. Вычисление тройного интеграла.

В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных.

Пусть функция $u = f(x;y;z)$ определена на измеримом множестве

$$Q = \{(x;y;z) \mid (x;y) \in G \subset Oxy,\ z_1(x;y) \le z \le z_2(x;y)\},$$

где $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ – непрерывные функции на измеримом множестве G. И пусть каждая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области Q не более чем в двух точках (рис.1), т.е. пространственная область Q является элементарной относительно оси Oz.

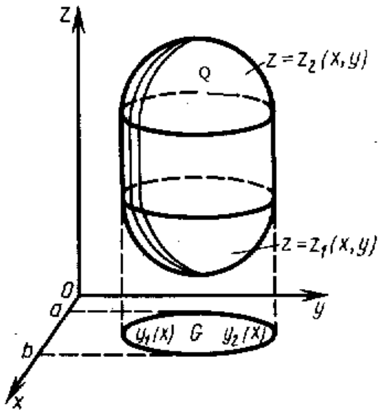

Рис.1.

Теорема 3. *Пусть 1) существует тройной интеграл*

$$\iiint\limits_{Q} f(x;y;z)dxdydz ;$$

2) $\forall (x;y) \in G$ существует определенный интеграл

$$I(x;y) = \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

(при постоянных x и y).

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint\limits_{G} I(x;y)dxdy = \iint\limits_{G} dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_{V} f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_{G} dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz . \qquad (6)$$

Без доказательства.

Данная формула позволяет свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области G.

Выражение

$$I(x;y) = \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz \qquad (7)$$

представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и области $G = \{(x;y) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_1(x)\}$, по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы о сведении двойного интеграла к повторному, то, переходя от двойного интеграла $\iint\limits_{G} I(x;y)dxdy$ к повторному интегралу, получаем

$$\iiint\limits_{Q} f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_{a}^{b} dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_1(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz . \qquad (8)$$

Данная формула сводит вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению трех определенных интегралов.

Замечания. 1. Если пространственная область Q более сложная, чем рассматриваемая, то ее необходимо разбить на конечное число таких областей, к которым можно применить формулу (8).

2. Порядок интегрирования в формуле при определенных условиях может быть иным, т.е. переменные x, y, z можно менять местами.

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_{Q}(x+y+z)dxdydz$, область Q ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-1=0$.

Решение. Область V проектируется на плоскость Oxy в треугольник (рис.2)

$G=\{(x;y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$.

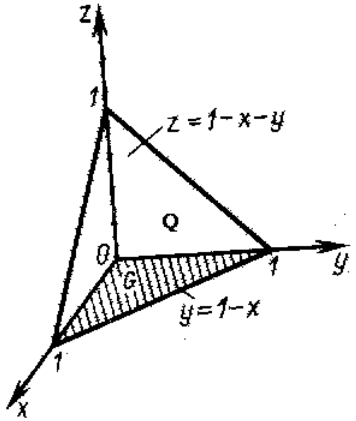

Рис.2.

По формуле (8) имеем

$$\iiint\limits_{Q}(x+y+z)dxdydz=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y-yx^2-xy^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1\left(2-3x+x^3\right)dx=\frac{1}{6}\left(2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Как вычислить массу пространственного тела?
2. Дайте определение интегральной суммы.
3. Что называется тройным интегралом. Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $u=f(x;y;z)$.
4. Перечислите свойства тройного интеграла.
6. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному, в котором внутренний интеграл является определенным.