Лекция 8. **ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ В ТРОЙНОМ ИНТЕГРАЛЕ**

1. Формула замены переменных в тройном интеграле.
2. Цилиндрические координаты.
3. Сферические координаты.
4. Приложения тройного интеграла.

1. Формула замены переменных в тройном интеграле.

Аналогично случаю двойного интеграла замена переменных в тройном интеграле $\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz$ состоит в переходе от координат x, y, z к новым криволинейным координатам u, v, w по формулам

$$\begin{cases} x = x(u;v;w), \\ y = y(u;v;w), \\ z = z(u;v;w), \end{cases} \tag{1}$$

где $(u;v;w) \in Q^* \subset \boldsymbol{R}^3_{uvw}$. При этом каждая точка $(x;y;z) \in Q \subset \boldsymbol{R}^3_{xyz}$ соответствует по формулам (1) некоторой точке $(u;v;w) \in V^*$, а каждая точка $(u;v;w) \in V^*$ переходит в некоторую точку $(x;y;z) \in V$. Другими словами, функции (1) осуществляют отображение области $Q^* \subset \boldsymbol{R}^3_{uvw}$ на область $V \subset \boldsymbol{R}^3_{xyz}$, причем Q и Q^* измеримые по Жордану множества.

Теорема 1. *Пусть 1) Q и Q^* замкнутые ограниченные области в пространствах $\boldsymbol{R}^3_{xyz}$* и *$\boldsymbol{R}^3_{uvw}$;*

2) функция $f(x;y;z)$ ограничена в области Q и непрерывна в ней;

3) отображение (1) удовлетворяет условиям:

а) оно взаимно однозначно,

б) функции $x(u;v;w)$, $y(u;v;w)$, $z(u;v;w)$ имеют в области Q^* непрерывные частные производные первого порядка,

в) якобиан $J = \dfrac{D(x;y;z)}{D(u;v;w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0$ *в области Q^*.*

Тогда справедливо равенство

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{Q^*} f\big(x(u;v;w); y(u;v;w); z(u;v;w)\big)|J|dudvdw. \tag{2}$$

Без доказательства.

Формула (2) называется ***формулой замены переменных в тройном интеграле***.

2. Цилиндрические координаты.

Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно определяется тройкой чисел $(r;\varphi;z)$, где $(r;\varphi)$ – полярные координаты точки M', z – аппликата точки M (рис.1).

Определение 1. Тройка чисел $(r;\varphi;z)$ называется ***цилиндрическими координатами*** точки M.

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к цилиндрическим координатам $(r;\varphi;z)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \tag{3}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Иногда в качестве промежутка изменения φ берётся промежуток $-\pi < \varphi \le \pi$.

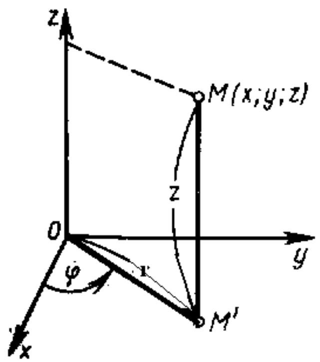

Рис.1.

Якобиан отображения есть

$$J=\frac{D(x,y,z)}{D(p,\varphi,z)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r.$$

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_Q\left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область Q ограничена поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=1$ (рис.2).

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к цилиндрическим координатам.

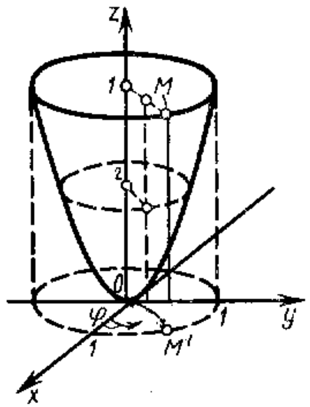

Рис.2.

Область Q проектируется в круг $x^2+y^2\le 1$. Поэтому $0\le\varphi<2\pi$, $0\le r\le 1$. Постоянному значению r в пространстве $Oxyz$ соответствует цилиндр $x^2+y^2=r^2$. Рассматривая пересечение этого цилиндра с областью Q, получаем изменение координаты z от точек, лежащих на параболоиде, до значений тех точек, лежащих на плоскости $z=1$, т.е. $r^2\le z\le 1$.

Применяя формулу (2), имеем

$$\iiint\limits_Q\left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 dr\int\limits_{\rho^2}^1 r^2\cdot rdz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(r^3z\right)\Big|_{\rho^2}^1 dr=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

3. Сферические координаты.

Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно задается тройкой чисел $(r;\theta;\varphi)$, где r – расстояние точки M до точки O (начала координат), θ – угол между лучами OM и Oz, φ – полярный угол точки M' на плоскости Oxy (рис.3).

Определение 2. Тройка чисел $(r;\theta;\varphi)$ называется ***сферическими координатами*** точки M.

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к сферическим координатам $(r;\theta;\varphi)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \qquad (4)$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

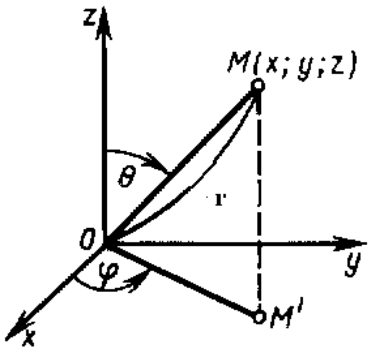

Рис.3.

Якобиан отображения есть

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta .$$

Пример. Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область Q есть шар $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к сферическим координатам. Из вида области Q следует, что $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. В этом случае подынтегральная функция примет вид

$$x^2+y^2+z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta =$$
$$= r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2 .$$

Тогда $\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin\theta\, d\varphi =$

$$= \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^R r^4 dr = 4\pi \frac{r^5}{5}\bigg|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

4. Приложения тройного интеграла.

Пусть Q материально тело с плотностью $\rho(x;y;z)$. Тогда справедливы следующие формулы для вычисления соответствующих величин.

1. Объем тела.

$$V = \iiint\limits_V dxdydz .$$

2. Масса тела.

$$m = \iiint\limits_V \rho(x;y;z)dxdydz$$

3. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\rho(x;y;z)dxdydz ,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_V y\rho(x;y;z)dxdydz ,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\rho(x;y;z)dxdydz .$$

4. Координаты центра тяжести тела

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \qquad z_0 = \frac{M_{xy}}{m}.$$

5. Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy

$$I_{yz} = \iiint\limits_V x^2\rho(x;y;z)dxdydz ,$$

$$I_{zx} = \iiint\limits_V y^2\rho(x;y;z)dxdydz ,$$

$$I_{xy} = \iiint\limits_V z^2\rho(x;y;z)dxdydz .$$

6. Моменты инерции тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz.

$$I_x = I_{zx} + I_{xy}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{yz} + I_{zx} .$$

7. Момент инерции тела относительно начала координат

$$I_0 = \iiint\limits_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)\rho(x;y;z)dxdydz = I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} .$$

Вопросы для самоконтроля

1. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.

2. Какие координаты называются цилиндрическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим?

3. Какие координаты называются сферическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к сферическим?

4. Напишите формулы, используемые в приложениях тройного интеграла.