Лекция 3. ПОВЕРХНОСТНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПЕРВОГО РОДА

1. Задача о массе изогнутой пластины.
2. Определение и свойства поверхностного интеграла первого рода.
3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.
4. Приложения поверхностных интегралов первого рода.

1. Задача о массе изогнутой пластины.

Пусть на поверхности Ω непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(x;y;z)$. Требуется определить массу материальной поверхности Ω.

Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. Наибольший из диаметров обозначим $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n} d(\Omega_i)$. Предположим, что в каждой части Ω_i, $i=1,2,...,n$ плотность постоянна и равна $\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$, где точка $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\in\Omega_i$. Тогда масса i-ой части Ω_i поверхности Ω приблизительно равна

$$m_i \approx \rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i .$$

Для массы всей поверхности имеем

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i .$$

Переходя к пределу при $\lambda\to 0$, получим точное значение массы

$$m = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i . \qquad (1)$$

2. Определение поверхностного интеграла первого рода.

Пусть в точках некоторой поверхности $\Omega\in \boldsymbol{R}^3$, гладкой или кусочно-гладкой, с площадью S определена непрерывная ограниченная функция $f(x;y;z)$. Разобьем поверхность Ω на n частичных поверхностей Ω_1, Ω_2, ..., Ω_n без общих внутренних точек с площадями ΔS_1, ΔS_2, ..., ΔS_n и диаметрами d_1, d_2, ..., d_n. В каждой частичной поверхности Ω_i, $i=1,2,...,n$, возьмем произвольную точку $M_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$ (рис.1).

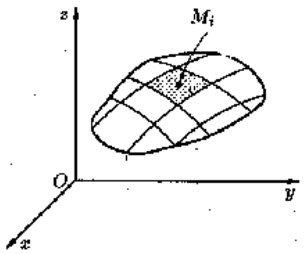

Рис.1.

О п р е д е л е н и е 1. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i \qquad (2)$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x;y;z)$ по поверхности Ω.

О п р е д е л е н и е 2. ***Поверхностным интегралом первого рода*** от функции $f(x;y;z)$ называется предел (если он существует) интегральной суммы (2) при $\lambda\to 0$.

Обозначается:

$$\iint\limits_{\Omega} f(x;y;z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta S_i , \qquad (3)$$

функция $f(x;y;z)$ называется ***интегрируемой по поверхности*** Ω, поверхность Ω – ***поверхностью интегрирования***, dS – ***элемент поверхности***.

Основными **свойствами** поверхностного интеграла первого рода являются следующие**.**

1. $\iint\limits_{\Omega} dS = \mathrm{S}$, где S – площадь поверхности Ω.

2 (линейность). Если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы на поверхности Ω, то функция $\alpha \cdot f(x;y;z)+\beta \cdot g(x;y;z)$ также интегрируема на поверхности Ω и справедливо равенство

$$\iint_{\Omega}(\alpha f(x;y;z)+\beta g(x;y;z))dS=\alpha\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS+\beta\iint_{\Omega} g(x;y;z)dS$$

.

3 (аддитивность). Если поверхность Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2, $\Omega=\Omega_1 \cup \Omega_2$, а пересечение Ω_1 и Ω_2 состоит лишь из границы, их разделяющей, и функция $f(x;y;z)$ интегрируема на Ω_1 и Ω_2, то функция $f(x;y;z)$ также интегрируем на поверхности Ω и справедлива формула

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS=\iint_{\Omega_1} f(x;y;z)dS+\iint_{\Omega_2} f(x;y;z)dS .$$

4 (монотонность). Если на поверхности Ω выполнено неравенство $f(x;y;z)\le g(x;y;z)$, то

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS \le \iint_{\Omega} g(x;y;z)dS .$$

5 (оценка интеграла). $\left|\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS\right| \le \iint_{\Omega}|f(x;y;z)|dS .$

6 (теорема о среднем). Если $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, то на этой поверхности существует такая точка $M_0(x_0;y_0;z_0)$, что

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS=f(x_0;y_0;z_0)\cdot S ,$$

где S – площадь поверхности Ω.

3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Вычисление поверхностного интеграла первого рода сводится к вычислению двойного интеграла по области G – проекции поверхности Ω на плоскость Oxy.

Векторное задание поверхности Ω. Пусть $\Omega=\left\{\vec{r}(u;v) \mid (u;v)\in G \subset \boldsymbol{R}^2_{uv}\right\}$ – поверхность, G – квадратируемая область, $\vec{r}(x(u;v),y(u;v);z(u;v))$ – непрерывная на замыкании $\overline{G}$

векторная функция, функция $f(x(u;v);y(u;v);z(u;v))=F(u;v)$ задана на поверхности Ω. Согласно определению элемента поверхности Ω (лекция 13, определение 2), имеем

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS=\iint_{\Omega} F(u;v)\sqrt{a_{11}a_{22}-(a_{12})^2}\,dudv ,$$

где $a_{11}=\vec{r}_u^{\,2}$, $a_{12}=\vec{r}_u \cdot \vec{r}_v$, $a_{22}=\vec{r}_v^{\,2}$ – коэффициенты первой квадратичной формы.

Явное задание поверхности Ω. Пусть $\Omega=\left\{z=z(x;y)\in \boldsymbol{R}^3 \mid (x;y)\in \boldsymbol{R}^2_{xy}\right\}$ – поверхность, заданная уравнением $z=z(x;y)$. Здесь функция $z(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z_x и z_y в замкнутой области G. И пусть функция $f(x;y;z)$ непрерывна на поверхности Ω, и, следовательно, интегрируема на ней. Учитывая, что элемент поверхности есть $dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$, имеем

$$\iint_{\Omega} f(x;y;z)dS=\iint_{G} f(x;y;z(x;y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy .$$

Пример. Вычислить интеграл $\iint_{\Omega}(x-3y+2z)ds$, где $S=\{(x;y;z)|4x+3y+2z-4=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\}$.

Решение. Запишем уравнение плоскости в виде $z=2-2x-\dfrac{3}{2}y$. Тогда $z'_x=-2$, $z'_y=-\dfrac{3}{2}$.

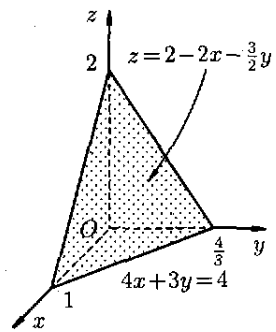

Рис.2.

Подставляя в формулу, имеем

$$\iint_{\Omega}(x-3y+2z)dS=$$

$$=\iint_{G}\left(x-3y+2\left(2-2x-\frac{3}{2}y\right)\right)\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\iint_{G}(4-3x-6y)dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_{0}^{1}dx\int_{0}^{\frac{4}{3}(1-x)}(4-3x-6y)dy=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_{0}^{1}\left(4y-3xy-3y^2\right)\Big|_{0}^{\frac{4}{3}(1-x)}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int_{0}^{1}\left(\frac{16}{3}(1-x)-4x(1-x)-\frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\left(-\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}-2x^2+4\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

4. Приложения поверхностных интегралов первого рода.

1. Площадь поверхности. Пусть поверхность Ω задана уравнением $z=z(x;y)$, где $z(x;y)$ непрерывна вместе со своими частными производными z_x и z_y в замкнутой области G. Тогда площадь S данной поверхности вычисляется по формуле

$$\iint_{\Omega}dS=\mathrm{S}\ .$$

2. Масса материальной поверхности. Пусть на поверхности Ω непрерывно распределено вещество с известной плотностью $\rho(x;y;z)$. Тогда масса m материальной поверхности Ω равна

$$m=\iint_{\Omega}\rho(x;y;z)dS.$$

3. Статические моменты материальной поверхности и координаты центра тяжести. Статические моменты материальной поверхности Ω относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам:

$$S_{xy}=\iint_{\Omega}z\cdot\rho(x;y;z)dS.$$

$$S_{yz}=\iint_{\Omega}x\cdot\rho(x;y;z)dS,$$

$$S_{zx}=\iint_{\Omega}y\cdot\rho(x;y;z)dS.$$

Координаты центра тяжести материальной поверхности Ω находятся по формулам:

$$x_c=\frac{S_{yz}}{m},\quad y_c=\frac{S_{zx}}{m},\quad z_c=\frac{S_{xy}}{m}.$$

4. Моменты инерции материальной поверхности. Моменты инерции материальной поверхности Ω относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$M_x=\iint_{\Omega}\left(y^2+z^2\right)\cdot\rho(x;y;z)dS.$$

$$M_y=\iint_{\Omega}\left(x^2+z^2\right)\cdot\rho(x;y;z)dS,$$

$$M_z=\iint_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)\cdot\rho(x;y;z)dS,$$

относительно начала координат

$$M_0=\iint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\rho(x;y;z)dS.$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какая задача приводит к понятию поверхностного интеграла первого рода?
2. Дайте определение интегральной суммы и поверхностного интеграла первого рода.
3. Перечислите свойства поверхностного интеграла первого рода.
4. Как вычисляется поверхностный интеграл первого рода?
5. Запишите формулы, которые используются в приложениях поверхностного интеграла первого рода.