Тема 6
ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

Лекция 1. СОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

1. Определение собственного интеграла, зависящего от параметра.
2. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра.
3. Дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.

1. Определение собственных интегралов, зависящих от параметра.

Пусть на множестве $Y \subset \boldsymbol{R}$ определены функции $\varphi=\varphi(y)$ и $\psi=\psi(y)$, причем $\varphi(y) \le \psi(y)$. И пусть на множестве

$$Q=\{(x;y) \mid \varphi(y) \le x \le \psi(y),\, y \in Y\}$$

определена функция $f(x;y)$. Если при любом значении параметра $y \in Y$ функция $f(x;y)$ интегрируема по Риману, то интеграл $\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$ есть функция параметра y, определенная на множестве Y.

Определение 1. ***Собственным интегралом, зависящим от параметра***, называется интеграл вида

$$\Phi(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx, \qquad (1)$$

где переменная y называется ***параметром***.

Если $\varphi(y)=a$ и $\psi(y)=b$, где a и b постоянные числа, $a<b$, то собственный интеграл, зависящий от параметра y примет вид

$$\Phi(y)=\int\limits_{a}^{b} f(x;y)dx. \qquad (2)$$

Пример. Функция Бесселя

$$J_0(y)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} \cos(y \cdot \cos x)dx$$

является собственным интегралом, зависящим от параметра y.

Пусть $Y=[c;d] \subset \boldsymbol{R}$, функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на $[c;d]$. рассмотрим область G, образованную графиками функций $\varphi(y)$, $\psi(y)$ и прямыми $y=c$, $y=d$. Тогда областью определения функции $\Phi(y)$ является замкнутая область

$$\overline{G}=\{(x;y) \mid \varphi(y) \le x \le \psi(y),\, c \le y \le d\}.$$

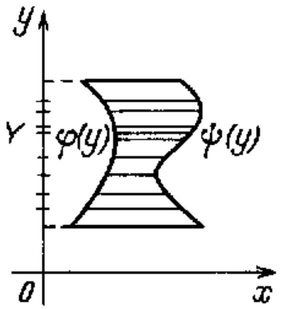

Рис.1.

2. Непрерывность собственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 1. *Пусть 1) функция $f(x;y)$ определена на прямоугольнике*

$$\Pi=\{(x;y) \mid a \le x \le b,\, c \le y \le d\},$$

2) при любом фиксированном $y \in [c;d]$ непрерывна по x на отрезке $[a;b]$,

3) $f(x;y) \rightrightarrows f(x;y_0)$ (сходится равномерно) при $y \to y_0 \in [c;d]$.

Тогда функция $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ непрерывна на $[c;d]$.

► Рассмотрим приращение

$$\Delta\Phi(y)=\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)=\int_a^b f(x;y+\Delta y)dx-\int_a^b f(x;y)dx=$$

$$=\int_a^b\left[f(x;y+\Delta y)-f(x;y)\right]dx.$$

Тогда

$$|\Delta\Phi(y)|=\left|\int_a^b\left[f(x;y+\Delta y)-f(x;y)\right]dx\right|\le\int_a^b\left|f(x;y+\Delta y)-f(x;y)\right|dx.$$

По условию функция $f(x;y)$ равномерно сходится к функции $f(x;y_0)$ при $y\to y_0$, то по теореме Кантора имеем:

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\forall x$ и $\forall y\ \ |y-y_0|<\delta\ \ \Rightarrow$

$$\left|f(x;y+\Delta y)-f(x;y)\right|<\varepsilon<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

По теореме об оценке интеграла получим:

$$|\Delta\Phi(y)|\le\int_a^b\left|f(x;y+\Delta y)-f(x;y)\right|dx<\frac{\varepsilon}{b-a}<\varepsilon$$

для всех $\Delta y<\delta$.

Следовательно, функция $\Phi(y)$ непрерывна. ◄

Теорема 2. *Пусть 1) функции $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ непрерывны на отрезке $[c;d]$ и $-\infty<c\le y\le d<+\infty$, причем $\varphi(y)\le\psi(y)$,*

2) функция $f(x;y)$ непрерывна множестве

$$\overline{G}=\left\{(x;y)\middle|\varphi(y)\le x\le\psi(y),\,c\le y\le d\right\}.$$

Тогда функция $\Phi(y)=\int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x;y)dx$ непрерывна на $[c;d]$.

Без доказательства.

Следствие. *Предельный переход под знаком интеграла*

$$\lim_{\lambda\to0}\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}f(x;y)dx=\int_{\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)}^{\lim\limits_{y\to y_0}\psi(y)}\lim_{y\to y_0}f(x;y)dx. \qquad (3)$$

3. Дифференцирование и интегрирование собственных интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 3 (правило Лейбница). *Если функции $f(x;y)$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике*

$$\Pi=\left\{(x;y)\middle|a\le x\le b,\,c\le y\le d\right\},$$

то функция $\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x;y)dx$ дифференцируема на отрезке $[c;d]$ и справедлива формула

$$\frac{d\Phi}{dy}=\int_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx. \qquad (4)$$

► Пусть $y\in[c;d]$ и $y+\Delta y\in[c;d]$. Тогда, используя теорему конечных приращений Лапласа, имеем

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}=\frac{\Phi(y+\Delta y)-\Phi(y)}{\Delta y}=\frac{1}{\Delta y}\left(\int_a^b f(x;y+\Delta y)dx-\int_a^b f(x;y)dx\right)=$$

$$=\int_a^b\frac{f(x;y+\Delta y)-f(x;y)}{\Delta y}dx=\left[\begin{array}{l}\text{по теореме}\\ \text{конечных приращений}\end{array}\right]=$$

$$=\int_a^b\frac{\partial f(x;y+\theta y)}{\partial y}dx,$$

где $\theta\in(0;1)$.

Оценим разность $\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}-\int\limits_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx$ при $y\to y_0$.

Имеем:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y}-\int_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx\right|=\left|\int_a^b\frac{\partial f(x;y+\theta y)}{\partial y}dx-\int_a^b\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}dx\right|\le$$

$$\le\int_a^b\left|\frac{\partial f(x;y+\theta y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x;y)}{\partial y}\right|dx.$$

По условию функция $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрерывна на прямоугольнике Π. Следовательно, она равномерно непрерывна на Π. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда по определению равномерной непрерывности, существует $\delta > 0$ такое, что $\forall x$ и $\forall y$ из условия $|y - y_0| < \delta$ следует выполнение неравенства

$$\left|\frac{\partial f(x; y+\Delta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}\right| < \varepsilon < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Причем, если $\Delta y = |y - y_0| < \delta$, то $\theta \cdot |\Delta y| < |\Delta y| < \delta$.

Поэтому

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta y} - \int_a^b \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} dx\right| \le \int_a^b \left|\frac{\partial f(x; y+\theta y)}{\partial y} - \frac{\partial f(x; y)}{\partial y}\right| dx \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \int_a^b dx = \varepsilon.$$

Это означает, что

$$\frac{d\Phi}{dy} = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta y} = \int_a^b \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} dx. \blacktriangleleft$$

Теорема 4 (дифференцирование собственного интеграла по параметру). *Пусть 1) функции* $f(x; y)$ *и* $\frac{\partial f(x; y)}{\partial y}$ *непрерывны на прямоугольнике* $\Pi = \{(x; y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}$;

2) $\overline{G} = \{(x; y) | \varphi(y) \le x \le \psi(y), c \le y \le d\} \subset \Pi$;

3) функции $\varphi(y)$, $\psi(y)$ *непрерывны и имеют непрерывные производные* $\varphi'(y)$, $\psi'(y)$ *на отрезке* $[c; d]$, $-\infty < c \le y \le d < +\infty$.

Тогда функция $\Phi(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x; y) dx$ *имеет производную на* $[c; d]$ *справедлива формула*

$$\frac{d\Phi}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x; y) dx\right) =$$

$$= \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} \frac{\partial f(x; y)}{\partial y} dx + f(\psi(y); y)\psi'(y) - f(\varphi(y); y)\varphi'(y). \quad (5)$$

Без доказательства.

Пример. Найти производную функции

$$\Phi(y) = \int_0^y (x^2 + y^2 + xy) dx$$

Решение. Используем формулу (5)

$$\Phi'(y) = \int_0^y (2y + x) dx + (y^2 + y^2 + y^2) \cdot 1 - (y^2) \cdot 0 =$$

$$= \left(2xy - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^y + 3y^2 = 2y^2 + \frac{y^2}{2} + 3y^2 = 5{,}5y^2.$$

Теорема 5 (интегрирование по параметру). *Пусть функция* $f(x; y)$ *непрерывна на прямоугольнике*

$$\Pi = \{(x; y) | a \le x \le b, c \le y \le d\}.$$

Тогда

$$\int_c^d \Phi(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x; y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x; y) dy.$$

► Интеграл $\int_c^d \Phi(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x; y) dx$ есть повторный интеграл.

По теореме о переходе от двойного интеграла от функции $f(x; y)$ к повторному, имеем

$$\iint_\Pi f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x; y) dx. \blacktriangleleft$$

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение собственного интеграла, зависящего от параметра.
2. Сформулируйте теоремы о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.
3. Сформулируйте теоремы о дифференцировании собственного интеграла, зависящего от параметра.
4. Сформулируйте теорему об интегрировании собственного интеграла, зависящего от параметра.