Лекция 5. ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

1. Определение интеграла Фурье. Формула обращения.
2. Свойства преобразования Фурье.
3. Свертка функций.

1 Определение интеграла Фурье. Формула обращения.

Пусть функция локально интегрируема, т.е. она непрерывна на любом отрезке $[a,b]$ числовой оси $\mathbf{R}$. ***Интегралом в смысле главного значения*** называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b} f(x)dx,\ b>0. \quad (1)$$

Отличие интеграла в смысле главного значения от несобственного интеграла состоит в том, что несобственный интеграл есть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (2)$$

при произвольных a и b, а интеграл в смысле главного значения (1) есть предел того же интеграла, но при $a=b$

Очевидно, что, если существует несобственный интеграл (2), то и существует интеграл в смысле главного значения (1). Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения (1) может существовать, а несобственный интеграл (2) – нет.

Рассмотрим множество $L^1(-\infty;\infty)$ кусочно-непрерывных и абсолютно интегрируемых на $\mathbf{R}$ функций, т.е. $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$.

Пример. Несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int_{a}^{b} xdx$$

не существует, а интеграл в смысле главного значения

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xdx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{b} xdx = 0.$$

Определение 1. ***Интегралом Фурье*** функции $f(x)$ называется функция вида

$$\hat{f}(y) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx. \ (3)$$

Поскольку

$$\left|f(x)e^{-iyx}\right| = |f(x)|\cdot\left|e^{-iyx}\right| = |f(x)|\cdot|\cos yx - i\sin yx| =$$
$$= |f(x)|\cdot\sqrt{\cos^2 yx+\sin^2 yx} = |f(x)|$$

и интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx<\infty$, то на основании признака сравнения несобственных интегралов, данный интеграл сходится при любом $u\in\mathbf{R}$.

Определение 2. Отображение F, ставящее в соответствие функции $f(x)$ функцию $\hat{f}(y)$ и определяемое формулой (3), называется ***преобразованием Фурье***.

Обозначается: $F[f](y)=\hat{f}(y)$.

Отображение F^{-1}, ставящее в соответствие функции $\hat{f}(y)$ функцию $f(x)$ по формуле

$$f(x) = v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(y)e^{iyx}dy. \quad (4)$$

называется ***обратным преобразованием Фурье***.

Обозначается: $F^{-1}[f](y)=f(x)$.

Функция $F[f]$ называется ***образом Фурье*** функции $f(x)$.

Теорема 1 (формула обращения). *Если функция* $f(x)\in L^1$ *и существуют* $f'_-(x)$, $f'_+(x)$, *то*

$$F^{-1}[Ff]=F[F^{-1}f]=f.$$

Без доказательства.

Замечание. Формула обращения может быть записана в виде

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iyt}dt\right)e^{iyx}dy$$

или

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dy\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{i(x-t)y}dt .$$

Тригонометрическая форма интеграла Фурье. Используя формулу Эйлера $e^{iz}=\cos z+i\sin z$, интеграл Фурье можно записать в виде

$$F[f](y)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)(\cos yx-i\sin yx)dx=$$

$$=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos yxdx-v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin yxdx .$$

Обратное преобразование Фурье примет вид

$$f(x)=F^{-1}[f](x)=$$

$$=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\cos yxdy+v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\sin yxdy .$$

Определение 3. ***Косинус преобразованием Фурье*** называется действительная часть преобразования Фурье:

$$F_c[f](y)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos yx\,dx .$$

Синус преобразованием Фурье называется мнимая часть преобразования Фурье:

$$F_s[f](y)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin yx\,dx .$$

Очевидно, что

$$F[f]=F_c[f]-iF_s[f].$$

Если $f(x)$ – четная функция, то функция $f(x)\sin yx$ – нечетная функция. Тогда $F_s[f](y)=0$ и

$$F[f](y)=F_c[f](y),$$

при этом

$$F_c[f](y)=v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\cos yx\,dx ,$$

$$f(x)=v.p.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\cos yxdy=v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}F_c(y)\cos yxdy .$$

Если $f(x)$ – нечетная функция, то функция $f(x)\cos yx$ – четная функция. Тогда $F_c[f](y)=0$ и

$$F[f](y)=-iF_s[f](y),$$

при этом

$$F_s[f](y)=v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}f(x)\sin yx\,dx ,$$

$$f(x)=v.p.\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\sin yxdx=v.p.\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}F_s(y)\sin yxdx .$$

Пример. Найти косинус- и синус-преобразования Фурье функции $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$.

Решение. Функция $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$, – гладкая и абсолютно интегрируемая на интервале $[0;\infty)$. Следовательно, для нее существуют преобразования Фурье:

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-t}\cos ytdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-t}\cos yt\Big|_0^B-u\int_0^B e^{-t}\sin ytdt\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{B\to\infty}\left(e^{-B}\cos yB+1-u\left(-e^{-t}\sin yt\Big|_0^B+u\int_0^B e^{-t}\cos ytdt\right)\right)=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(1-y^2\int_0^{\infty}e^{-t}\cos ytdt\right).$$

Отсюда

$$F_c(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+y^2} .$$

Аналогично получим

$$F_s(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-t}\sin ytdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{y}{y^2+1}.$$

Обратные косинус- и синус -преобразования Фурье примут вид:

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos yx}{y^2+1}dy,$$

$$e^{-x}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{y\sin yx}{y^2+1}dy.$$

2. Свойства преобразования Фурье.

Преобразование Фурье обладает следующими свойствами.

1 (линейность). *Прямое и обратное преобразования Фурье являются линейными отображениями:*

$$F[\alpha\cdot f+\beta\cdot g]=\alpha\cdot F[f]+\beta\cdot F[g],$$

$$F^{-1}[\alpha\cdot f+\beta\cdot g]=\alpha\cdot F^{-1}[f]+\beta\cdot F^{-1}[g].$$

► Доказательство следует из свойств линейности интеграла (все интегралы понимаются в смысле главного значения):

$$F[\alpha\cdot f+\beta\cdot g](y)=(\alpha\cdot f+\hat{\beta}\cdot g)(y)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x))e^{-iyx}dx=$$

$$=\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}dx+\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)e^{-iyx}dx=$$

$$=\alpha\cdot F[f](y)+\beta\cdot F[g](y).$$

Аналогично доказывается для обратного преобразования Фурье.◄

2 (преобразование Фурье от сдвига). *Если* $f(x)\in L^1(-\infty;\infty)$, *то*

$$F[f(x-a)]=e^{iay}\cdot F[f].$$

► Имеем

$$F[f(x-a)](y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-a)e^{-iyx}dx=$$

$$=\begin{bmatrix}x-a=t,dx=dx,\\ x\to-\infty\Rightarrow t\to-\infty,\\ x\to+\infty\Rightarrow t\to+\infty\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iy(t+a)}dt=$$

$$=e^{-iya}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iyt}dt=e^{-iya}\cdot\hat{f}(y)=e^{-iya}\cdot F[f](y).\ ◄$$

3 (преобразование Фурье от производной). *Пусть* $f(x)$, $f'(x)\in L^1(-\infty;\infty)$ *и* $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=0$. *Тогда*

$$F[f']=iy\cdot F[f].$$

► По определению преобразования Фурье имеем

$$F[f'](y)=\hat{f}'(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)e^{-iyx}dx=$$

$$=\begin{bmatrix}u=e^{-iyx},dv=f'(x)dx,\\ du=-iye^{-iyx}dx,v=f(x)\end{bmatrix}=e^{-iyx}\cdot f(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}+iy\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}dx=$$

$$=iy\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-iyx}dx=iy\cdot F[f](y).\ ◄$$

Следствие. Если функции $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n-1)}(x)\in L^1(-\infty;\infty)$ и $f^{(n)}(x)$ – кусочно-непрерывна на любом отрезке, то

$$F\left[f^{(n)}\right]=(iy)^n\cdot F[f].$$

4. *Пусть* $f(x)$ *и ее первообразная* $g(x)=\int_0^x f(t)dt$ *абсолютно интегрируемые функции на* $(-\infty;+\infty)$, $f(x)$ *– непрерывна,* $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. *Тогда*

$$F[g]=\frac{F[f]}{iy}.$$

► По свойству интеграла с переменным верхним пределом, имеем

$$(g(x))' = f(x).$$

Значит, $F[g'](y) = F[f](y)$.

С другой стороны, на основании свойства 5, получим

$$F[g'](y) = iyF[g](y).$$

Приравнивая, получим

$$iyF[g](y) = F[f](y).$$

Отсюда

$$F[g](y) = \frac{F[f](y)}{iy}. \ ◄$$

5 (дифференцирование преобразования Фурье). *Пусть функции* $f(x)$, $xf(x)$ *абсолютно интегрируемые функции на* $(-\infty;+\infty)$, *функции. Тогда функция* $\hat{f}(y) = F[f](y)$ *имеет на* $(-\infty;+\infty)$ *непрерывную производную, причем*

$$\frac{d}{dy}(F[f]) = F[(-ix)f].$$

► $\left(\hat{f}(y)\right)' = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx\right) =$

=[по правилу дифференцирования несобственного интеграла, зависящего от параметра]=

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dy}\left(f(x)e^{-iyx}\right)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)(-ix)e^{-iyx}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(-ixf(x))e^{-iyx}dx = F[-ixf(x)](y). \ ◄$$

Следствие. *Если* $f(x)$ *непрерывна, а функции* $xf(x)$, $x^2 f(x)$, …, $x^n f(x)$ – *абсолютно интегрируемы, то*

$$\frac{d^n}{dy^n}(F[f]) = F\left[(-ix)^n f\right].$$

6 (единственность). *Если* $F[f] = F[g]$, *то* $f(x) = g(x)$.

3. Свертка функций.

Определение 4. Пусть функции $f(x)$ и $g(x) \in L^1(-\infty;\infty)$. Функция (если несобственный интеграл сходится $\forall x \in \boldsymbol{R}$)

$$(f * g)(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt$$

называется ***сверткой*** функций $f(x)$ и $g(x)$.

Теорема 2. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на* $\boldsymbol{R}$, *то свертка* $f * g$ *есть непрерывная ограниченная и абсолютно интегрируемая функция на* $\boldsymbol{R}$.

Без доказательства.

Теорема 3. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны, ограничены и абсолютно интегрируемы на* $\boldsymbol{R}$, *то*

$$F[f * g] = F[f] \cdot F[g].$$

► По определению преобразования Фурье имеем

$$F[f * g](y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}(f * g)(x)e^{-iyx}dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)dt\right)e^{-iyx}dx =$$

=[изменяем порядок интегрирования]=

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)e^{-iyx}dx\right)g(t)dt =$$

=[свойство 2]=

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} F[f](y)e^{-iyt}g(t)dt = F[f] \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-iyt}g(t)dt = F[f] \cdot F[g]. \ ◄$$

Пусть функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x) \in L^1(-\infty;\infty)$. Свертка обладает следующими **свойствами**.

1 (коммутативность): $f*g=g*f$.

2 (распределительный закон): $(f+g)*h=f*h+g*h$.

3 (сочетательный закон): $(f*g)*h=f*(g*h)$.

Справедливость данных формул следует из теоремы 3.

Вопросы для самоконтроля

1. Для каких функций существует преобразование Фурье?
2. Дайте определение прямого и обратного преобразования Фурье.
3. В чем суть теоремы обращения?
4. Что называется косинус-, синус- преобразованием Фурье?
5. В чем особенность нахождения преобразования Фурье для четных и нечетных функций?
6. Какими свойствами обладает преобразование Фурье?
7. Что называется сверткой функций?
8. Чему равно преобразование Фурье от свертки функций?