Лекция 6. ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ

1. Общие понятия.
2. Пространства основных и обобщенных функций.
3. Операции над обобщенными функциями.

1. Общие понятия.

Понятие обобщенной функции было вызвано не стремлением к обобщениям. А конкретными физическими задачами, когда обобщенных функций оказалось недостаточно для описания наблюдаемых явлений. Идею введения проиллюстрируем на следующем примере.

Когда говорят о материальной точке массы 1, то это идеализированная модель шара достаточно малого радиуса ε и массы 1. Плотность такого шара есть единица, поделенная на объем шара. Если в пространстве нет других масс, то плотность материи в пространстве будет распределена по следующему закону:

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3} \text{ при } |x|\le\varepsilon,\\ 0 \text{ при } |x|>\varepsilon,\end{cases}$$

где $x\in \boldsymbol{R}$.

При этом $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)dx=1$.

Если $\varepsilon\to+0$, то предельная плотность $\delta(x)$ примет следующий вид:

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty \text{ при } x=0,\\ 0 \text{ при } x\ne 0.\end{cases}$$

По плотности $\delta(x)$ нельзя восстановить массу при помощи интегрирования, так как функция $\delta(x)$ не интегрируема ни по Риману, ни в несобственном смысле.

Будем рассматривать $\delta_\varepsilon(x)$ как линейный функционал над линейным пространством непрерывных на **R** функций, ставя-

щий в соответствие каждой непрерывной в **R** функции $\varphi(x)$ число

$$(\delta_\varepsilon, f)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)\cdot\varphi(x)dx.$$

Применяя теорему о среднем, получим:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(\delta_\varepsilon,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varphi(x_\varepsilon)=\varphi(0)=(\delta,\varphi), \qquad (1)$$

где δ есть линейный функционал, ставящий в соответствие непрерывной функции число $\varphi(0)$.

Если для любой непрерывной функции выполнено данное равенство, то говорят, что линейный функционал δ есть ***слабый предел*** линейных функционалов δ_ε при $\varepsilon\to+0$.

При таком подходе по плотности можно восстановить массу точки. Она равна

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta_\varepsilon(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}(\delta_\varepsilon,1)=(\delta,1)=1.$$

Функционал (1) называется δ***-функцией Дирака***.

2. Пространство основных и обобщенных функций.

Определение 1. ***Носителем*** функции $\varphi(x)$ называется замыкание множества тех x, для которых $\varphi(x)\ne 0$.

Обозначается: $\operatorname{supp}\varphi(x)=\overline{\{x|\ \varphi(x)\ne 0\}}$.

Определение 2. Функция $\varphi(x)$ называется ***финитной***, если носитель функции есть ограниченное замкнутое множество, т.е. функция обращается в нуль вне некоторого отрезка.

Пример. На рисунке 1 изображен график финитной функции.

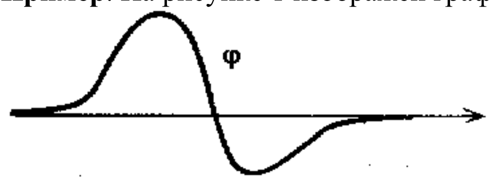

Рис.1.

Пусть $\mathbf{D}$ есть множество финитных и бесконечно дифференцируемых на $\mathbf{R}$ функций. Очевидно, что $\mathbf{D}$ есть линейное пространство.

Определение 3. Будем говорить, что последовательность функций $(\varphi_n(x))_{n=1}^{\infty}$, где $\varphi_n(x) \in \mathbf{D}$ при любом $n \in \mathbf{N}$, ***сходится*** к функции $\varphi(x) \in \mathbf{D}$, если выполнены следующие условия:

1) носители всех функций $\varphi_n(x)$, $\varphi(x) \in \mathbf{D}$ лежат на некотором отрезке $[a;b]$:

$$\varphi_n(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a;b] \quad n \in \mathbf{N},$$

2) при любом $k \in \mathbf{N}$ последовательность производных $\varphi_n^{(k)}(x)$ равномерно на $[a;b]$ сходится к $\varphi^{(k)}(x)$: $\varphi_n^{(k)}(x) \rightrightarrows \varphi^{(k)}(x)$.

Обозначается: $\varphi_n(x) \xrightarrow{\mathbf{D}} \varphi(x)$ при $n \to \infty$.

Определение 4. Линейное пространство $\mathbf{D}$ с введенной выше сходимостью называется ***пространством основных функций***.

Пример. 1. Если $\varphi(x) = 0$ для всех $x \in \mathbf{R}$, то $\varphi \in \mathbf{D}$.

2. Показать, что функция (шапочка)

$$\varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}}, \text{ если } |x| < \varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x| \geq \varepsilon \end{cases}$$

принадлежит пространству $\mathbf{D}$.

Решение. Действительно, односторонние производные всех порядков справа и слева в точках $x = -\varepsilon$ и $x = \varepsilon$ равны нулю. Поэтому функция бесконечно дифференцируема на всей числовой оси. При этом $\varphi_\varepsilon(x)$ – финитная, так как $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon(x) = [-\varepsilon;\varepsilon]$. Значит, $\varphi_\varepsilon(x) \in \mathbf{D}$. На рисунке 2 изображена данная функция при различных ε.

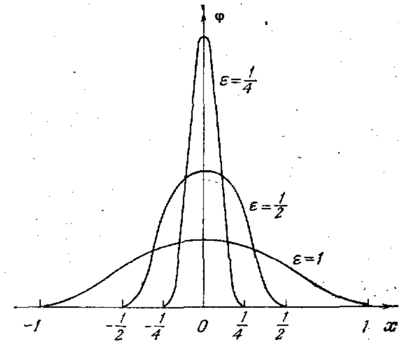

Рис.2.

Определение 5. ***Обобщенной функцией*** называется всякий линейный непрерывный функционал на пространстве основных функций $\mathbf{D}$.

Из определения следует, что $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ является обобщенной функцией, если выполнены следующие условия:

1) $f : \mathbf{D} \to \mathbf{R}$ есть *функционал* на $\mathbf{D}$: каждой функции $\varphi \in \mathbf{D}$ сопоставляется число (f, φ);

2) f – есть *линейный функционал*: для любых двух чисел α, β и любых двух функций $\varphi(x)$, $\psi(x) \in \mathbf{D}$ выполнено равенство

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(f, \psi);$$

3) f является *непрерывным функционалом*: из $\varphi_n \xrightarrow{\mathbf{D}} \varphi$ при $n \to \infty$ следует, что

$$(f, \varphi_n) \xrightarrow{\mathbf{D}} (f, \varphi) \text{ при } n \to \infty.$$

Множество всех линейных непрерывных функционалов обозначается через $\mathbf{D'}$. Множество $\mathbf{D'}$ является линейным пространством относительно линейной комбинации непрерывных линейных функционалов:

$$(\alpha f + \beta g, \varphi) = \alpha(f, \varphi) + \beta(g, \varphi) \quad \varphi \in \mathbf{D},$$

поскольку функционал $\alpha f + \beta g$ является линейным и непрерывным (показать самостоятельно).

В пространстве $\mathbf{D'}$ выделяют класс ***регулярных функционалов***: если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на любом конечном отрезке (локально интегрируема), то выражение

$$(f,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

определяет линейный и непрерывный функционал на $\mathbf{D}$.

Обобщенные функции также называются ***распределениями***, так как плотность $\rho(x)$ распределения вещества неизмерима никаким прибором и представляет собой функционал

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x)\varphi(x)dx .$$

Линейные непрерывные функционалы, не являющиеся регулярными, называются ***сингулярными***.

Пример. Показать, что δ-функция, определяемая как функционал, действующий на функции $\varphi\in\mathbf{D}$ по правилу

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0) \qquad (2)$$

является сингулярным функционалом пространства $\mathbf{D'}$.

► Линейность и непрерывность функционала (2) очевидны. Докажем его сингулярность.

Пусть существует такая локально интегрируемая функция, что

$$(\delta,\varphi)=\varphi(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall\ \varphi\in\mathbf{D}. \qquad (3)$$

В частности, равенство (3) должно быть выполнено для функции $\varphi_\varepsilon(x)\in\mathbf{D}$, определенной равенством

$$\varphi_\varepsilon(x)=\begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}}, \text{ если } |x|<\varepsilon, \\ 0, \text{ если } |x|\ge\varepsilon \end{cases}$$

при любом $\varepsilon>0$.

Поэтому

$$(\delta,\varphi_\varepsilon)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx=\varphi_\varepsilon(0)=\frac{1}{e}. \qquad (4)$$

С другой стороны, пользуясь локальной интегрируемостью функции $f(x)$, подберем такое ε, что

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |f(x)|dx<1 .$$

Поскольку $\varphi_\varepsilon(x)\le\varphi_\varepsilon(0)$, то получаем

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right|=\left|\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)dx\right|\le\varphi_\varepsilon(0)\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}|f(x)|dx=\frac{1}{e},$$

что противоречит равенству (4). Противоречие доказывает, что δ-функция есть сингулярный линейный и непрерывный на $\mathbf{D}$ функционал.

Пространство $\mathbf{D'}$ называется ***пространством обобщенных функций***, а элементы этого пространства – ***обобщенными функциями***.

Определение 6. Будем говорить, что последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, где $f_n\in\mathbf{D'}$, ***сходится*** в $\mathbf{D'}$ к $f\in\mathbf{D'}$, если для любой функции $\forall\ \varphi\in\mathbf{D}$ выполнено равенство

$$(f_n,\varphi)\to(f,\varphi) \text{ при } n\to\infty .$$

Обозначается: $f_n \xrightarrow{\mathbf{D'}} f$

Такая сходимость функционалов называется ***слабой сходимостью***.

Пример. Доказать, что в пространстве $\mathbf{D'}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin nx=0$.

Решение. Каждая функция из пространства основных функций $\mathbf{D}$ абсолютно дифференцируема на всей числовой оси. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(\sin nx,\varphi)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\sin nxdx=0 .$$

Иногда вместо последовательности функционалов $f_n\in\mathbf{D'}$ рассматривают семейство функционалов (f_ε), зависящих от параметра ε. В этом случае запись

$$f_\varepsilon \xrightarrow{\mathbf{D'}} f \text{ при } \varepsilon\to+0$$

означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon,\varphi)=(f,\varphi)\quad\forall\,\varphi\in\mathbf{D}.$$

В частности, запись

$$f_\varepsilon\xrightarrow{\mathbf{D'}}\delta\ \text{ при }\ \varepsilon\to+0$$

означает, что

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon,\varphi)=(\delta,\varphi)=\varphi(0)\quad\forall\,\varphi\in\mathbf{D}.$$

Примеры. Доказать, что

$$f_\varepsilon(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\xrightarrow{\mathbf{D'}}\delta(x)\ \text{ при }\ \varepsilon\to+0.$$

Решение. Очевидно, что функции $f_\varepsilon(x)$ локально интегрируемы и поэтому порождают регулярные функционалы в $\mathbf{D'}$. Возьмем любую функцию $\varphi\in\mathbf{D}$. Пусть ее носитель лежит на отрезке $[-A;a]$. Тогда

$$(f_\varepsilon,\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx=\int_{-A}^{+A}f_\varepsilon(x)\varphi(x)dx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)]dx.$$

Так как функция $\varphi(x)$ дифференцируема и финитна на $\mathbf{R}$, то, применяя формулу конечных приращений Лагранжа, получаем неравенство:

$$|\varphi(x)-\varphi(0)|=|x\varphi(\xi)|\le|x|\cdot\max_{x\in[-A;A]}=c_0|x|.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx=\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{A}{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{}1,$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\varepsilon^2}dx\right|\le\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{c_0\varepsilon|x|}{x^2+\varepsilon^2}dx=\frac{c_0\varepsilon}{\pi}\ln\frac{A^2+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\xrightarrow[\varepsilon\to+0]{}0,$$

то получим

$$\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon,\varphi)=\lim_{\varepsilon\to+0}(f_\varepsilon,\varphi)\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}[\varphi(x)-\varphi(0)+\varphi(0)]dx=$$

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon[\varphi(x)-\varphi(0)]}{x^2+\varepsilon^2}dx+\frac{\varphi(0)}{\pi}\int_{-A}^{+A}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}dx\right)=\varphi(0)=(\delta,\varphi).$$

Согласно определению это означает, что $\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\xrightarrow{\mathbf{D'}}\delta(x)$.

3. Операции над обобщенными функциями.

1. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию. Введем операцию умножения обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию $\psi(x)$.

Если $f\in\mathbf{D'}$, а $\psi(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, то $\psi\cdot f$ – такая обобщенная функция, которая действует на произвольную функцию $\varphi\in\mathbf{D}$ по следующему правилу:

$$(\psi\cdot f,\varphi)=(f,\psi\cdot\varphi).\qquad(5)$$

Данная операция линейна и непрерывна из $\mathbf{D'}$ в $\mathbf{D'}$.

Пример. Показать, что $x\delta=0$.

Решение. Пользуясь равенством (5), получаем

$$(x\delta,\varphi)=(\delta,\varphi)=(x\varphi)(0)=0\cdot\varphi(0)=0\quad\forall\,\varphi\in\mathbf{D}.$$

2. Производная обобщенной функции. Пусть $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая на $\mathbf{R}$ функция. Тогда ее производная $f'(x)$ является локально абсолютно интегрируемой функцией.

Пусть $\forall\,\varphi\in\mathbf{D}$. Для нее существует отрезок $[-A;A]$ такой, что

$$\operatorname{supp}\varphi(x)\subset[-A;A].$$

Отсюда $\varphi(-A)=\varphi(a)=0$.

Тогда

$$(f',\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}f'(x)\varphi(x)dx=\int_{-A}^{+A}f'(x)\varphi(x)dx=\begin{bmatrix}u=\varphi(x),dv=f'(x)dx,\\ du=\varphi'(x),v=f(x)\end{bmatrix}=$$

$$= f(x)\cdot\varphi(x)\Big|_{-A}^{A} - \int_{-A}^{+A} f(x)\varphi'(x)dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -(f,\varphi').$$

О п р е д е л е н и е 7. ***Производной обобщенной функции*** $f \in \mathbf{D'}$ называется линейный и непрерывный функционал $f' \in \mathbf{D'}$, задаваемый формулой

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi') \quad \forall\ \varphi \in \mathbf{D}. \qquad (6)$$

Производные высших порядков определяются для обобщенных функций по индукции:

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)',\ n = 1,2,\ldots.$$

Отсюда следует, что любая обобщенная функция f бесконечно дифференцируема, причем

$$\left(f^{(n)},\varphi\right) = (-1)^n\left(f,\varphi^{(n)}\right) \quad \forall\ \varphi \in \mathbf{D}.$$

Пример. Найти производную функции Хевисайда

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \ge 0, \\ 0 \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. При $x = 0$ функция $\sigma(x)$ является разрывной. Поэтому она не имеет производной в обычном смысле. Однако $\sigma(x)$ является локально интегрируемой, и ее можно рассматривать как обобщенную функцию, действующую на основные функции по правилу

$$(\sigma,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)\varphi(x)dx = \int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx.$$

Для любой функции $\varphi \in \mathbf{D}$ имеем:

$$(\sigma',\varphi) = -(\sigma,\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty}\sigma(x)\varphi'(x)dx = -\int_{0}^{+\infty}\varphi'(x)dx = -\varphi(+\infty) + \varphi(0) =$$

$$= \varphi(0) = (\delta,\varphi),$$

так как $\varphi(+\infty) = 0$.

Отсюда следует, что $\sigma' = \delta$.

Таким образом, производная в обычном смысле может не совпадать с производной в смысле обобщенных функций.

3. Операция сдвига аргумента для обобщенных функций. Пусть $f(x)$ есть локально интегрируемая на $\mathbf{R}$ функция. Для нее определена операция сдвига аргумента T_h по правилу

$$T_h f(x) = f(x-h).$$

Если $\varphi \in \mathbf{D}$, то

$$(T_h f,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-h)\varphi(x)dx = \begin{bmatrix} t = x-h, \\ dx = dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x+h)dx = (f, T_{-h}\varphi).$$

Хотя значение обобщенной функции f в точке не определено, но для нее можно формально ввести операцию сдвига аргумента по аналогии с полученной формулой:

$$(T_h f,\varphi) = (f, T_{-h}\varphi). \qquad (7)$$

При этом при любом $h \in \mathbf{R}$ формула (7) определяет $T_h f$ как линейный и непрерывный функционал в пространстве $\mathbf{D}$ т. е. $T_h f \in \mathbf{D'}$. Для функции Дирака $\delta(x)$ сдвиг $T_h\delta = \delta(x-h)$ и $\forall\ \varphi \in \mathbf{D}$ есть

$$(\delta(x-h),\varphi) = (\delta,\varphi(x+h)) = \varphi(h).$$

Вопросы для самоконтроля

1. Какие функции называются финитными?
2. Дайте определение пространства основных функций.
3. Что называется обобщенной функцией? Приведите примеры обобщенных функций.
4. Что называется слабой сходимостью функционалов?
5. Перечислите основные операции над обобщенными функциями?

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.:Наука, 1985.

2. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ: Учебное пособие: В 6 ч. – Мн.: БГУ, 2003.

3. Зорич В.А Математический анализ. Ч.1, Ч.2. – М.: Наука, 1981, 1984.

4. Кудрявцев. Л.Д. Курс математического анализа. Т.1, Т.2, Т.3. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988, 1989.

5. Математический анализ в вопросах и задачах: учебн. Пособие для вузов. – Под ред. Бутузова. – М.: Высш. шк., 1984..

6. Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1, Т.2. – М.: Наука, 1990, 1991.

7. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа: Учеб. пособ. для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.