k -й знаменатель равен $4k-1$. Следовательно, общий член ряда имеет вид $a_k=\left(\dfrac{k+1}{4k-1}\right)^k$.

3 Вычислить сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}$.

Р е ш е н и е. Поскольку

$$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right),$$

то

$$a_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right),\ a_2=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right),$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right),\ a_4=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right)\ \text{и т. д.}$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)=\frac{1}{2}.$$

Значит, ряд сходится и сумма ряда равна $\dfrac{1}{2}$.

4 Исследовать сходимость рядов:

а) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$;

б) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}aq^{k-1}$, $a\neq 0$.

Р е ш е н и е. а) для ряда

$$a-a+a-a+\ldots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a$$

составим частичные суммы:

$$S_1=a,\ S_2=0,\ \ldots,\ S_{2n-1}=a,\ S_{2n}=0,\ \ldots.$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\begin{bmatrix}\operatorname{tg}x=t;\\ x=\operatorname{arctg}t;\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{bmatrix}=\int\frac{t^2dt}{1+t^2}=\int\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=\int dt-\int\frac{1}{1+t^2}dt=$$

$$=t+\operatorname{arctg}t+C=[t=\operatorname{tg}x]=\operatorname{tg}x+\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)+C=\operatorname{tg}x+x+C;$$

е) имеем:

$$\int\sin 2x\cdot\cos 5x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 7x+\sin(-3x))dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\sin 7x\,dx-\frac{1}{2}\int\sin 3x\,dx=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C;$$

ж) имеем:

$$\int\sin 7x\sin 5x\,dx=\left[\sin 5x\sin 7x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos 12x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 12x)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2}-\frac{\sin 12x}{12}\right)+C=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{24}\sin 12x+C;$$

и) имеем:

$$\int\frac{e^{3x}dx}{e^{2x}+1}=\begin{bmatrix}t=e^x,\\ x=\ln t,\ dx=\dfrac{dt}{t}\end{bmatrix}=\int\frac{t^3\cdot\frac{dt}{t}}{t^2+1}=\int\frac{t^2dt}{t^2+1}=\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=t-\operatorname{arctg}t+C=\left[t=e^x\right]=e^x-\operatorname{arctg}\left(e^x\right)+C;$$

к) имеем:

$$\int\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^3x\,dx=\int\operatorname{ch}^2x\operatorname{sh}^2x\operatorname{sh}x\,dx=\int\operatorname{ch}^2x\left(\operatorname{ch}^2x-1\right)d(\operatorname{ch}x)=$$

$$=\int\operatorname{ch}^4x\,d(\operatorname{ch}x)-\int\operatorname{ch}^2x\,d(\operatorname{ch}x)=\frac{\operatorname{ch}^5x}{5}-\frac{\operatorname{ch}^3x}{5}+C.$$

Тема 6 Определенный интеграл и формула Ньютона-Лейбница

1 Вычислить по определению интегралы:

а) $\int_0^5 (1+x)dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$.

2 Определить знаки интегралов, не вычисляя их:

а) $\int_{-2}^1 \sqrt[3]{x}dx$; б) $\int_{-1}^1 x^3 e^x dx$.

3 Не вычисляя интегралов, выяснить, какой из интегралов больше:

а) $\int_0^1 e^{-x}\cos^2 x\,dx$ и $\int_0^1 e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ и $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

4 Найти среднее значение функции на данном отрезке:

а) x^3, $[0;1]$; б) $\cos x$, $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

5 Оценить интегралы:

а) $\int_{-1}^1 \sqrt{8+x^3}dx$; б) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{5+2\sin x}}$.

6 Доказать, что если функция $f(x)$ четная на $[-a;a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

7 Найти производные следующих функций:

а) $\int_x^0 \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}dt$; б) $\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \sin(t^2)dt$.

8 Используя формулу Ньютона-Лейбница, вычислить интегралы:

а) $\int_{-2}^2 x^3 dx$; г) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x\,dx$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \left(\frac{k}{k+4}\right)^{k^2}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k}{k+5}\right)^k \left(\frac{k+2}{k+3}\right)^{k^2}$.

П р и м е р ы   о ф о р м л е н и я   р е ш е н и я

1 Записать первые пять членов ряда, общий член которого задан формулой $a_k = \frac{k}{2^{k-1}(3k+1)}$.

Р е ш е н и е. Полагая в формуле общего члена $k = 1$, 2, 3, 4, 5, получим

$$a_1 = \frac{1}{2^{1-1}(3\cdot 1+1)} = \frac{1}{4},$$

$$a_2 = \frac{2}{2^{2-1}(3\cdot 2+1)} = \frac{2}{14},$$

$$a_3 = \frac{3}{2^{3-1}(3\cdot 3+1)} = \frac{3}{40},$$

$$a_4 = \frac{4}{2^{4-1}(3\cdot 4+1)} = \frac{4}{104},$$

$$a_5 = \frac{5}{2^{5-1}(3\cdot 5+1)} = \frac{5}{256}.$$

Ряд можно записать в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k-1}(3k+1)} = \frac{1}{4} + \frac{2}{14} + \frac{3}{40} + \frac{4}{104} + \frac{5}{256} + \ldots.$$

2 Найти общий член ряда

$$\frac{2}{3} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{4}{11}\right)^3 + \left(\frac{5}{15}\right)^4 + \ldots.$$

Р е ш е н и е. Показатель степени каждого члена совпадает с номером этого члена, поэтому показатель степени k-го члена равен k.

Числители дробей $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{11}$, $\frac{5}{15}$, … образуют арифметическую прогрессию с первым членом 2 и разностью 1. Поэтому k-й числитель равен $k+1$. Знаменатели образуют арифметическую прогрессию с первым членом 3 и разностью 4. Поэтому а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k+1}{3k+2}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5k-2}{5k+3}$.

5 С помощью интегрального признака исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k}}$; г) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln^2 k}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+9}$;

в) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\ln^3 k}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}k^2e^{-k^3}$.

6 С помощью признаков сравнения исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k+9}$; д) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\ln k}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2+6}$; е) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3k-1}$;

в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{5^k}{5^{2k}+7}$; ж) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\sqrt{k^2+1}}$;

г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k+1}{\sqrt{k^4+9}}$; и) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^3-3k^2+5}{2k^5+9k}$.

7 С помощью признака Д’аламбера исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k5^{2k-1}}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{1}{k2^{k+1}}$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{2k}{3^k(2k-1)}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k}{k^4}$.

8 С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k-1}{4k+5}\right)^k$; г) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5k+2}{3k+4}\right)^k$;

б) $\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2k^2+5k+2}{3k^2+k+3}\right)^k$; д) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3k^2+6k+8}{2k^2-k+6}\right)^k$;

б) $\int_1^2 e^{-x}dx$; д) $\int_2^5\frac{dx}{3x+1}$;

в) $\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^6}$; е) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$.

9 Вычислить интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_1^6\frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}$; б) $\int_{\ln 3}^{\ln 8}\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; в) $\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx$.

10 Вычислить интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int_1^e\ln^2 x\,dx$; б) $\int_0^1 x\arcsin x\,dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{xdx}{\cos^2 x}$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить определенный интеграл $\int_1^2 x^2dx$, рассматривая его как предел интегральных сумм.

Решение. Разделим отрезок интегрирования $[1;2]$ на n равных частей длины $\Delta x=\frac{1}{n}$. Точки деления

$$x_0=1,\ x_1=1+\frac{1}{n},\ x_2=1+\frac{2}{n},\ \ldots,\ x_{n-1}=1+\frac{n-1}{n},\ x_n=2.$$

В качестве точек ξ_k выберем, например, левые концы каждого частичного отрезка. Тогда

$$f(x_0)=1,\ f(x_1)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2,\ \ldots,\ f(x_{n-1})=\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2.$$

Следовательно,

$$S_n=\frac{1}{n}\left(1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{n-1}{n}\right)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{n^3}\left(n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(2n-1)^2\right)=\frac{1}{n^3}\left(\sum_{k=1}^{2n-1}k^2-\sum_{k=1}^{n-1}k^2\right)$$

.

Применяя формулу суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{1}{n^3}\left(\frac{(2n-1)2n(4n-1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right) = \frac{14n^2-9n+1}{6n^2}.$$

Тогда

$$\int_1^2 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{14n^2-9n+1}{6n^2} = \frac{7}{3}.$$

2 Оценить интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$.

Решение. При $0 \le x \le 1$ имеем $1 \le 1+x^4 \le 2$.
Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \le 1.$$

Отсюда $m = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $M = 1$, $b-a=1$.

Поэтому $\frac{1}{\sqrt{2}} \le I \le 1$.

3 Найти $I'(x)$, если $I(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2} dt$.

Решение. Используя теорему 6, получим

$$I'(x) = \left(\int_0^{x^2} e^{-t^2} dt\right)' = e^{-(x^2)^2} \cdot (x^2)' = 2xe^{-x^4}.$$

4 Вычислить интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$; в) $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$; г) $\int_{-1}^0 e^{-2x} dx$.

грал $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится.

6 Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$.

Решение. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$ сходится, а функция $g(x) = \operatorname{arctg} x$ ограничена и монотонна. В силу признака Абеля интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \operatorname{arctg} x dx}{x^p}$$

сходится.

Раздел 5 Теория рядов

Тема 1 Ряды с неотрицательными членами

1 Записать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

а) $a_k = \frac{k}{3^k(2k+1)}$; в) $a_k = \frac{3k+4}{4k-1}$;

б) $a_k = \frac{k!}{2^k(2k-1)!!}$; г) $a_k = \frac{(2k+1)!!}{(k+1)2^k}$.

2 Записать формулу общего члена для рядов:

а) $1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \ldots$; в) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots$;

б) $\frac{10}{7} + \frac{100}{9} + \frac{1000}{11} + \frac{10000}{13} + \ldots$; г) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \ldots$.

3 Найти суммы рядов:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k-3)(4k+1)}$; в) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$;

б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}}$; г) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{5^{k-1}}$.

4 Используя необходимое условие, исследовать сходимость рядов:

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$ абсолютно сходится. Следовательно, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x}$ сходится;

б) из неравенства

$$|\sin x| \ge \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

следует, что для любого $\eta > 1$ выполняется неравенство

$$\int\limits_1^{\eta} \frac{|\sin x| dx}{x} \ge \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int\limits_1^{\eta} \frac{\cos 2x dx}{x}.$$

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ расходится.

Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x}$ сходится, поскольку

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{x} = \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{d(\sin 2x)}{x} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2x}{x}\Big|_1^{\infty} + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{2}\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$$

и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^2} dx$ сходится ($\left|\frac{\sin 2x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится).

Значит, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin x| dx}{x}$ расходится.

5 Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^p}$.

Р е ш е н и е. Функция $f(x) = \sin x$ имеет ограниченную первообразную $F(x) = -\cos x$, а функция $g(x) = \frac{1}{x^p}$, $p > 0$, убывает при $x \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^p} = 0$. Согласно признаку Дирихле инте-

Р е ш е н и е. а) имеем:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = 1;$$

б) имеем:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

в) имеем:

$$\int\limits_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int\limits_1^6 (3+x)^{-1/2} d(3+x) = 2\sqrt{3+x}\Big|_1^6 = 2\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 2;$$

г) имеем:

$$\int\limits_{-1}^0 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^0 = -\frac{1}{2}\left(e^0 - e^2\right) = \frac{e^2-1}{2}.$$

5 Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt, \\ x = 0 \Rightarrow t = 0, \\ x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t) dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

6 Вычислить интеграл $\int\limits_1^e \ln x dx$.

Р е ш е н и е. Имеем

$$\int\limits_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x;\ du = \frac{1}{x}dx; \\ dv = dx;\ v = x \end{array}\right] = x\ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{1}{x} x dx = e - \int\limits_1^e dx =$$

$$= e - x\Big|_1^e = 1.$$

Тема 7 Геометрические приложения определенного интеграла

1 Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$, $y=0$.

2 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2=4x$ и прямой $x=4y$.

3 Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2+2x$ и прямой $y=x+2$.

4 Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=\dfrac{27}{x^2+9}$ и $y=\dfrac{x^2}{6}$.

5 Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t.$$

6 Найти площадь петли кривой $x=a\left(t^2+1\right)$, $y=b\left(t^3-3t\right)$.

7 Найти площадь одного лепестка кривой $r=a\sin 2\varphi$.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной двумя последовательными витками логарифмической спирали $r=e^{\varphi}$, начиная с $\varphi=0$.

9 Найти длину параболы $y=x^2$ от $x=0$ до $x=1$.

10 Найти длину одной арки циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi.$$

11 Найти длину петли кривой $x=t^2$, $y=t\left(\dfrac{1}{3}-t^2\right)$.

12 Найти длину кардиоиды $r=2(1-\cos\varphi)$.

13 Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг полярной оси кардиоиды $r=2a(1+\cos\varphi)$.

14 Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги цепной линии $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{ch}2x$, $0\le x\le 3$.

Р е ш е н и е. а) сравним интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\ln x}$ с расходящимся интегралом $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{x-1}$. Поскольку

$$\ln x=\ln\left(1+(x-1)\right)\sim x-1$$

при $x\to 1$, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln\left(1+(x-1)\right)}{x-1}=1;$$

Значит, интеграл $\int\limits_0^1\dfrac{dx}{\ln x}$ расходится;

б) сравним данный интеграл со сходящимся интегралом $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$.

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}}<\frac{1}{\sqrt{x^3}}=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},\ \forall x\in[1;+\infty)$$

то из сходимости интеграла $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^{\frac{3}{2}}}$ согласно признаку сравнения следует, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$ сходится.

4 Исследовать на сходимость интегралы

а) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{\sin x dx}{x}$, б) $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{|\sin x|dx}{x}$.

Р е ш е н и е. а) имеем

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin xdx}{x}=-\int_1^{+\infty}\frac{d(\cos x)}{x}=-\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^{\infty}+\int_1^{+\infty}\cos x d\left(\frac{1}{x}\right)=$$

$$=\cos 1-\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Поскольку $\left|\dfrac{\cos x}{x^2}\right|\le\dfrac{1}{x^2}$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ сходится, то интеграл

$$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-p}dx=\lim_{b\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_1^b=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, \text{ если } p>1,\\ +\infty, \text{ если } p<1.\end{cases}$$

Значит, интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p>1$ и расходится при $p\le 1$;

в) при $p=1$ имеем:

$$\int_0^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1\frac{dx}{x}=\lim_{\varepsilon\to0}\ln x\Big|_\varepsilon^1=\lim_{\varepsilon\to0}(\ln 1-\ln\varepsilon)=+\infty.$$

При $p\ne1$ имеем:

$$\int_0^1\frac{dx}{x^p}=\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 x^{-p}dx=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Bigg|_\varepsilon^1=\begin{cases}\dfrac{1}{1-p}, \text{ если } p<1,\\ +\infty, \text{ если } p>1.\end{cases}$$

Значит, интеграл $\int_0^1\frac{dx}{x^p}$ сходится при $p<1$ и расходится при $p\ge1$.

2 Вычислить интеграл $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx$, $n=0,1,2,\ldots$.

Решение. Проинтегрируем по частям:

$$I_n=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=\left[\begin{matrix}u=x^n; dv=e^{-x};\\ du=nx^{n-1}; v=-e^{-x}\end{matrix}\right]=-x^ne^{-x}\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}dx,$$

т. е. $I_n=n\cdot I_{n-1}$.

Поскольку

$$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

то, применяя последовательно рекуррентную формулу, получим

$$I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\ldots=n!I_0=n!.$$

3 Исследовать на сходимость интегралы

а) $\int_0^1\frac{dx}{\ln x}$; б) $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}$.

15 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x=\cos t$, $y=\sin 2t$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$, и осью Ox.

16 Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $2y^2=x^3$, $x=4$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить площадь фигуры, ограниченной аркой синусоиды $y=\sin x$ и прямой $y=0$ (рисунок 7. 1).

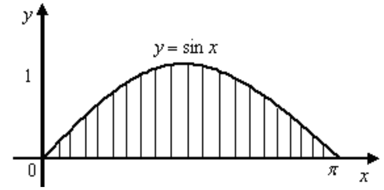

Рисунок 7. 1 – Фигура, ограниченная линиями $y=\sin x$, $y=0$

Решение. Находим:

$$S=\int_0^\pi\sin x dx=-\cos x\Big|_0^\pi=-(\cos\pi-\cos 0)=2.$$

2 Вычислить площадь эллипса $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, где $0\le t\le 2\pi$ (рисунок 7. 2).

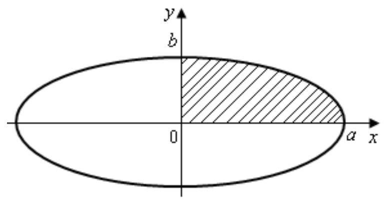

Рисунок 7. 2 – Эллипс

Решение. Оси координат совпадают с осями симметрии данного эллипса и поэтому делят его на четыре одинаковые части. Следовательно, $S=4S_1$, где S_1 – площадь части эллипса, расположенная в первом квадранте. Тогда

$$S = 4S_1 = 4\int_0^a y\,dx = \left[\begin{aligned} & x = a\cos t,\ y = b\sin t, \\ & dx = -a\sin t\,dt, \\ & x = 0 \ \Rightarrow\ t = \frac{\pi}{2}, \\ & x = a \ \Rightarrow\ t = 0. \end{aligned}\right] = -4ab\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^2 t\,dt =$$

$$= -2ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2t)\,dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab\,.$$

3 Вычислить площадь криволинейного сектора, ограниченного кардиоидой $r = a(1+\cos\varphi)$, где $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Решение. Получим:

$$S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos\varphi)^2\,d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int_0^{2\pi} 1d\varphi + 2\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi + + \int_0^{2\pi}\cos^2\varphi d\varphi\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\varphi\Big|_0^{2\pi} + 2\cos\varphi\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\sin 2\pi\right)\Bigg|_0^{2\pi}\right) = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

4 Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$, если $0 \le x \le 5$.

Решение. Имеем:

$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\,dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^5 = \frac{235}{27}\,.$$

5 Вычислить длину астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, если $0 \le t \le 2\pi$.

Решение. В силу симметричности астроиды относительно осей получим:

$$l = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt = \left[\begin{aligned} & x' = -3a\cos^2 t\sin t, \\ & y' = 3a\cos t\sin^2 t \end{aligned}\right] =$$

б) $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; г) $\displaystyle\int_{-8}^{8} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

5 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\operatorname{tg} x - x}$; д) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

б) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$; е) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x dx}{\cos x}$;

в) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$; ж) $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$;

г) $\displaystyle\int_0^{0,4} \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; и) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^3(\ln x)}{x\ln x}dx$.

6 Вычислить интеграл в смысле главного значения:

а) $\displaystyle v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$; б) $\displaystyle v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx$; в) $\displaystyle v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{13+x}{17+x^2}dx$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$; б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$; в) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

Решение. а) имеем:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_0^b = \lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2};$$

б) при $p = 1$ имеем:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \ln x\Big|_1^b = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = +\infty\,.$$

При $p \ne 1$ получим:

Следовательно, искомая работа равна

$$A=\int_0^{0,1}100x\,dx=50x^2\Big|_0^{0,1}=0,5\ \text{кДж}.$$

Тема 9 Несобственные интегралы

1 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; д) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}$;

б) $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-2x}\cos x\,dx$; е) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4}$;

в) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^6}$; ж) $\displaystyle\int_0^{+\infty}x\,e^{-x^2}\,dx$;

г) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin 2x\,dx$; и) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

2 Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{5x^4+2x^2+3}$; в) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}dx$;

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}dx$; г) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^{11}}}$.

3 Вычислить площадь бесконечной трапеции, ограниченной указанными линиями:

а) $y=x\,e^{-x}$, ($x\ge 0$), $y=0$;

б) $y=\dfrac{1}{x^2+9}$, $y=0$.

4 Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

а) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$; в) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$;

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t+9a^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt=6a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\,dt=6a.$$

6 Вычислить длину первого витка спирали Архимеда $r=a\varphi$.

Решение. Первый виток спирали образуется при изменении полярного угла $0\le\varphi\le 2\pi$. Поэтому

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=$$

$$=a\left(\pi\sqrt{4\pi^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{4\pi^2+1}\right)\right).$$

7 Вычислить площадь S поверхности, полученной вращением одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$, вокруг оси Ox.

Решение. Имеем:

$$S=2\pi\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)\sqrt{(a\sin t)^2+(a(1-\cos t))^2}\,dt=$$

$$=2\sqrt{2}\pi a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^{\frac{3}{2}}dt=\frac{64}{3}\pi a^2.$$

8 Вычислить объем тела, ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Решение. Пересечем эллипсоид плоскостью $x=h$. В сечении получим эллипс

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\dfrac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}=1,\\ x=h.\end{cases}$$

Площадь поперечного сечения равна $S(x)=\pi bc\left(1-\dfrac{h^2}{a^2}\right)$.

Тогда

$$V=\int_{-a}^{a}\pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh=\pi bc\left(x-\frac{h^2}{3a^2}\right)\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}\pi abc.$$

9 Вычислить объем тела, получающегося от вращения вокруг оси одной арки синусоиды $y = \sin x$.

Решение. Имеем

$$S = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi} dx - \int_0^{\pi} \cos 2xxdx \right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Тема 8 Физические приложения определенного интеграла

1 Какую работу затрачивает подъемный кран при извлечении железобетонной надолбы со дна реки глубиною в 5 м, если надолба имеет форму правильного тетраэдра с ребром 1м, плотность железобетона 2500 кг/м^3.

2 Найти работу, затраченную на выкачивание воды из сосуда, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a, радиус r.

3 Водопроводная труба имеет диаметр 6 см.; один ее конец соединен с баком, в котором уровень воды на 100 см выше верхнего края трубы, а другой закрыт заслонкой. Найти полное давление на заслонку.

4 Найти величину давления воды на вертикальную стенку в форме полукруга, диаметр которого 6 м и находится на поверхности воды (рисунок 8. 1).

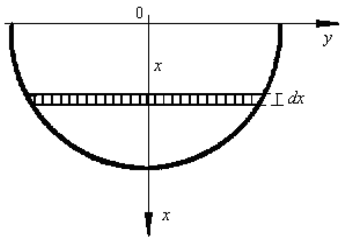

Рисунок 8. 1 – К задаче 4

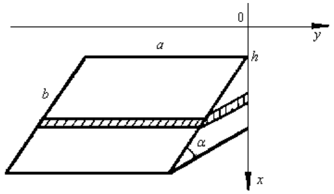

Рисунок 8. 2 – К задаче 6

5 Найти давление бензина, находящегося в цилиндрическом баке высотою $h = 3{,}5$ м и радиусом $r = 1{,}5$ м, на его стенки, если плотность бензина $\rho = 900$ кг/м^3.

6 Какое давление испытывает прямоугольная пластинка длиною a и шириною b, $a > b$, если она наклонена к горизонту жидкости под углом α и ее большая сторона находится на глубине h (рисунок 8. 2).

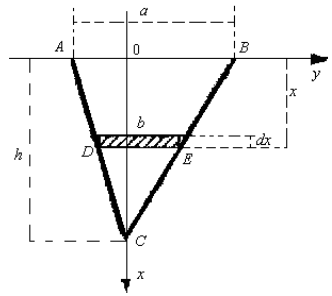

Рисунок 8. 4 – Геометрическая интерпретация примера 6

Из подобия треугольников CAB и CDE имеем

$$\frac{b}{a} = \frac{h - x}{h}.$$

Отсюда $b = \frac{a}{h}(h - x)$.

Следовательно, (для воды $\gamma = 1$).

$$dS = b\,dx = \frac{a}{h}(h - x)dx,$$

$$dP = x\,dS = \frac{ax}{h}(h - x)dx$$

Таким образом, сила давления воды на всю пластину равна

$$P = \int_0^h x\,dS = \frac{a}{h}\int_0^h x(h - x)dx = \frac{a}{h}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{ah^2}{6}.$$

7 Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10 см, если известно, что для удаления ее на 1см необходимо приложить силу в 1 кН.

Решение. Согласно закону Гука, сила F, растягивающая пружину пропорциональна ее растяжению

$$F = kx,$$

где k – коэффициент пропорциональности, x – растяжение пружины (в метрах).

Так как по условию при $x = 0{,}01$ м сила $F = 1$ кН, то из равенства

$$1 = 0{,}01k,$$

получаем

$$k = 100,\ F = 100x.$$

примера 5

Тогда

$$dm = 2\pi\, rh\gamma\, dr\,,\ 0 \le r \le R\,.$$

Из подобия треугольников OCD и OAB имеем

$$\frac{r}{R} = \frac{H-h}{H}\,.$$

Отсюда

$$h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right).$$

Следовательно,

$$dm = 2\pi\,\gamma\, H\left(1-\frac{r}{R}\right) r\, dr\,,$$

и элементарный момент инерции dI равен

$$dI = dm\, r^2 = 2\pi\,\gamma\, H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\, dr\,.$$

Таким образом, момент инерции всего конуса есть

$$I = \int_0^R dI = \int_0^R 2\pi\,\gamma\, H\left(1-\frac{r}{R}\right) r^3\, dr = 2\pi\,\gamma\, H\left(\frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5}\right) = \frac{1}{10}\pi\,\gamma\, H\, R^4\,,$$

и кинетическая энергия конуса равна

$$K = \frac{1}{20}\pi\,\gamma\, H\, R^4\,\omega^4\,.$$

6 Найти силу давления воды на вертикальную треугольную пластину с основанием a и высотой h, погруженную в воду вершиной вниз так, что основание находится на поверхности воды.

Решение. Согласно закону Паскаля сила давления P жидкости с удельным весом γ на площадку S при глубине погружения H равна

$$P = \gamma\, H\, S\,.$$

Введем систему координат (рисунок 8. 4) Oxy и рассмотрим элементарную прямоугольную площадку, находящуюся на глубине x и имеющую основание b и высоту dx.

7 Найти момент инерции относительно оси Oy площади эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

8 Найти статические моменты и моменты инерции дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти.

9 Найти координаты центра тяжести параболического сегмента, ограниченного линиями $y = 2x - x^2$, $y = 0$.

Примеры оформления решения

1 Найти статические моменты и моменты инерции относительно осей Ox и Oy дуги цепной линии $y = \operatorname{ch} x$ при $0 \le x \le 1$.

Решение. Имеем

$$y' = \operatorname{sh} x\,,\ \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+(\operatorname{sh} x)^2} = \operatorname{ch} x\,.$$

Тогда

$$M_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1+\operatorname{ch} 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sh} x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(2+\operatorname{sh} 2),$$

$$M_y = \int_0^1 x\operatorname{ch} x\, dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = \operatorname{ch} x\, dx, \\ du = dx, v = \operatorname{sh} x \end{bmatrix} = x\operatorname{sh} x\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \operatorname{sh} dx = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} x\Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 - \operatorname{ch} 1 + 1\,,$$

$$I_x = \int_0^1 \operatorname{ch}^3 x\, dx = \int_0^1 \left(1+\operatorname{sh}^2 x\right)\operatorname{ch} x\, dx = \left(\operatorname{sh} x + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 x\right)\Big|_0^1 = \operatorname{sh} 1 + \frac{1}{3}\operatorname{sh}^3 1\,,$$

$$I_y = \int_0^1 x^2 \operatorname{ch} x\, dx = \begin{bmatrix} u = x^2, dv = \operatorname{ch} x\, dx, \\ du = 2x dx, v = \operatorname{sh} x \end{bmatrix} = x^2 \operatorname{sh} x\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\operatorname{sh} x\, dx =$$

$$= \begin{bmatrix} u = x, dv = \operatorname{sh} x\, dx, \\ du = dx, v = \operatorname{ch} x \end{bmatrix} = \operatorname{sh} 1 - 2\left(x\operatorname{ch} x\Big|_0^1 - \int_0^1 \operatorname{ch} x\, dx\right) =$$

$$= \operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1 + {+2}\operatorname{sh} 1 = 3\operatorname{sh} 1 - 2\operatorname{ch} 1\,.$$

2 Найти координаты центра масс дуги окружности

$$x = a\cos t\,,\ y = a\sin t\,,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\,.$$

Решение. Масса дуги окружности в первой четверти есть

$$M = \frac{\pi a}{2}.$$

Имеем

$$x' = -a\sin t, \; y' = a\cos t,$$

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = a.$$

Тогда

$$M_x = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,dt = a^2 \sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2,$$

$$M_y = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = -a^2 \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a^2.$$

Следовательно,

$$x_C = \frac{M_y}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}, \qquad y_C = \frac{M_x}{M} = \frac{a^2}{\frac{\pi a}{2}} = \frac{2a}{\pi}.$$

3 Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ м/с. Требуется найти путь, пройденный телом за 5 секунд от начала движения.

Решение. Так как путь, пройденный телом со скоростью $v(t)$ за отрезок времени выражается интегралом $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$, то имеем

$$S = \int_0^5 \left(2t + 3t^2\right)dt = \left(t^2 + t^3\right)\Big|_0^5 = 150 \text{ (м)}.$$

4 Какую работу необходимо затратить, для того, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна работа, если тело удаляется в бесконечность?

Решение. Работа переменной силы $f(x)$, действующей вдоль оси Ox на отрезке $[a;b]$, выражается интегралом

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Согласно закону всемирного тяготения сила F, действующая на тело массы m, равна

$$F = k\frac{mM}{r^2},$$

где M – масса земли, r – расстояние массы m от центра земли, k – гравитационная постоянная. Так как на поверхности Земли, т.е. при $r = R$, имеем $F = mg$, то можно записать

$$mg = k\frac{mM}{R^2}.$$

Отсюда получаем $kM = gR^2$. Тогда $F = mg\frac{R^2}{r^2}$.

Следовательно, искомая работа равна:

$$A = \int_R^{R+h} F\,dr = \int_R^{R+h} mgR^2\frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R+h} = mgR\frac{h}{R+h}.$$

Отсюда при $h \to \infty$ имеем

$$\lim_{h\to\infty} A = mgR.$$

5 Вычислить кинетическую энергию однородного кругового конуса, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, если заданы радиус основания конуса R, высота H и плотность γ.

Решение. Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг некоторой оси с угловой скоростью ω, равна $\frac{1}{2}I\omega^2$, где I момент инерции тела относительно оси вращения. Пусть dm – элементарная масса полого цилиндра высоты h с внутренним радиусом r и толщиной стенок dr (рисунок 8. 3)

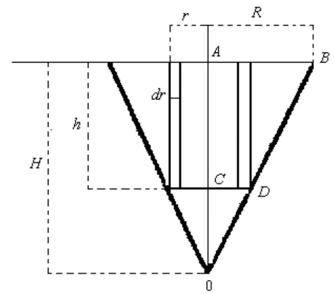

Рисунок 8. 3 – Геометрическая интерпретация