Задания к практическим занятиям

Раздел 1 **Числовые множества**

Тема 1 Множества

1 Какие элементы множества

$$A = \{-40; -32{,}4; -8; -\frac{1}{9}; 0; \frac{5}{7}; 6; 12; 19\frac{2}{9}; 30\}$$

являются натуральными числами, целыми числами, дробными, рациональными числами, отрицательными числами, неотрицательными числами?

2 Составьте подмножества множества

$$B = \{-24; -23\frac{1}{3}; -22; -9; 0; \frac{1}{5}; 2; 5; 9; 10; 12; 24\},$$

элементами которых являются □ , □ , нечетные, четные числа, отрицательные числа, числа кратные 4.

3 Какие из следующих утверждений □ $\subset$ □ , □ $\subset$ □ , □ $\subset$ □ , □ $\subset$ □ справедливы?

4 Укажите пустые множества среди:

а) множество целых корней уравнения $x^2 - 16 = 0$;

б) множество целых корней уравнения $x^2 + 16 = 0$;

в) множество натуральных чисел, меньших 1.

5 Найдите пересечение, объединение, разность множеств из упражнения 1 и 2.

6 Найдите пересечение, объединение, разность множеств

$$A = \left\{ \frac{1}{3^n} \middle| \; n \in □ \right\} \text{ и } B = \left\{ \frac{1}{10^n} \middle| \; n \in □ \right\}.$$

7 Доказать, что $\sqrt{3}$ – иррациональное число.

8 Докажите, что любую периодическую десятичную дробь, не имеющую цифры 9 в периоде, можно получить как результат деления двух натуральных чисел.

9 Доказать, что $0{,}6(9) = 0{,}7(0)$.

Теорема (необходимое условие сходимости числового ряда) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то предел общего члена равен нулю: $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Выражение вида $a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$, представляющее собой числовой ряд, называется n*-м остатком* ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и обозначается $r_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k}$ или $r_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$.

Для сходящегося ряда можно записать равенство

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = S_n + r_n.$$

Для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ необходимо и достаточно, чтобы любой его остаток r_n сходился.

Очевидно, что если числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, т. е. $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

Следовательно, отбрасывание любого конечного числа членов не влияет на сходимость ряда.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k \ge 0 \;\; \forall\, k \in □$, называется *рядом с неотрицательными членами*.

Для рядов с неотрицательными членами справедливы следующие свойства:

– перестановка, отбрасывание или добавление конечного числа членов ряда не влияет на его сходимость (расходимость);

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и их суммы равны S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)=S_a+S_b .$$

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)$ называется *суммой рядов* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha\cdot a_k$ также сходится и

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha\cdot a_k=\alpha\cdot S .$$

Ряд $\alpha\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется *произведением ряда* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *на число* α ;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ сходится, то и ряд, полученный группировкой его членов без изменения порядка их расположения, также сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд.

Теорема (критерий Коши сходимости ряда) *Для того чтобы ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *сходился, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\varepsilon>0$ *существовало такое число* $N(\varepsilon)$, *что для всех* $k>N(\varepsilon)$ *и всех* $\forall\, p\in\mathbb{N}$ *имело место неравенство:*

$$\left|a_{k+1}+a_{k+2}+\ldots+a_{k+p}\right|<\varepsilon .$$

Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ с неотрицательными членами сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность частичных сумм (S_n) этого ряда была ограничена.

Теорема (интегральный признак Коши) Если неотрицательная интегрируемая функция $f(x)$ *на промежутке* $[1;+\infty)$ *монотонно убывает, и члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *имеют вид*

4 Сформулируйте признак Дирихле.

5 Сформулируйте признак Абеля.

6 Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости последовательности.

7 Следует ли из равномерной сходимости ряда поточечная? Верно ли обратное?

8 Сформулируйте признаки Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

9 Перечислите свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

10 По каким формулам вычисляется радиус сходимости степенного ряда?

11 Перечислите свойства сходящихся степенных рядов.

12 Какой степенной ряд называется рядом Тейлора для функции $y=f(x)$? Как из него получить ряд Маклорена?

Доказательство теорем

1 Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости ряда.

2 Сформулируйте и докажите интегральный признак сходимости рядов с неотрицательными членами.

3 Сформулируйте и докажите признак сравнения сходимости рядов с неотрицательными членами.

4 Сформулируйте и докажите признак Д'аламбера сходимости рядов с неотрицательными членами.

5 Сформулируйте и докажите признак Коши сходимости рядов с неотрицательными членами.

6 Сформулируйте и докажите признак Лейбница.

7 Сформулируйте и докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

8 Сформулируйте и докажите теорему Абеля о радиусе сходимости степенного ряда.

9 Сформулируйте и докажите теорему Тейлора о разложении функции в ряд Тейлора.

Вопросы и задачи на понимание

1 Приведите примеры двух расходящихся рядов, для которых их сумма является: а) сходящимся рядом, б) расходящимся рядом.

2 Доказать, если ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2$ и $\sum_{k=1}^{\infty}b_k^2$ – сходятся, то сходятся и ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k+b_k)^2$.

ряду $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(x_0-x_1\right)^k$ оставляются только члены, гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число n_0 таких членов ряда определяется из соответствующей оценки либо остатка $R_n\left(x_0\right)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n\left(x_0\right)$ ряда Тейлора, так как в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

Приближенное вычисление интегралов. Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов.

Интегрирование дифференциальных уравнений. Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решения не удается найти в элементарных функциях.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Какое выражение называется числовым рядом?

2 Что называется суммой ряда?

3 Какое выражение называется остатком ряда?

4 Какие ряды называются рядами с неотрицательными членами?

5 Какой ряд называется знакочередующимся?

6 Какой ряд называется абсолютно сходящимся?

7 Какой ряд называется условно сходящимся?

8 Какая функциональная последовательность называется ограниченной?

9 Какая функциональная последовательность называется поточечно сходящейся на множестве X ?

10 Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности.

11 Дайте определение функционального ряда, его области сходимости.

12 Сформулируйте определения поточечной и равномерной сходимости функционального ряда.

13 Какой ряд называется степенным?

14 Что называется радиусом сходимости, интервалом сходимости, областью сходимости степенного ряда?

Формулировки теорем и формулы

1 Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.

2 Перечислите свойства абсолютно сходящихся рядов.

3 Какими свойствами обладают условно сходящиеся ряды?

$a_k=f(k)$, *то ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и несобственный интеграл* $\int_1^{\infty} f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно, причем в случае сходимости имеет место неравенство:*

$$\int_1^{\infty} f(x)dx \le \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \int_1^{\infty} f(x)dx + a_1 .$$

Теорема (признак сравнения) Пусть для членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *справедливо неравенство* $0 \le a_k \le b_k$ $\forall k \ge n_0 \in \mathbb{N}$ *. Тогда:*

1) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится,*

2) если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *расходится.*

Следствие (предельный признак сравнения) Пусть для членов рядов $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *(*$a_k>0$*) и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *(*$b_k>0$*) существует конечный предел:*

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=A,\ A\ne 0.$$

Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Для исследования на сходимость рядов с помощью признаков сравнения используются ряды:

– ряд из элементов геометрической прогрессии: $\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$, $(a\ne 0)$, сходящийся при $|q|<1$ и расходящийся при $|q|\ge 1$;

– обобщенный гармонический ряд: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$, сходящийся при $p>1$ и расходящийся при $p\le 1$.

Теорема (признак Д’аламбера) Пусть для ряда

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *($a_k > 0$) существует предел* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L$. *Тогда при* $L < 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $L > 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $L = 1$.

Теорема (признак Коши) Пусть для ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *($a_k > 0$) существует предел* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$. *Тогда при* $L < 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, а при* $L > 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Вопрос о сходимости ряда остается открытым, если $L = 1$.

Из существования предела $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ следует, что существует и предел $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$. Обратное утверждение не всегда имеет место, т. е. признак Коши «сильнее» признака Д'аламбера.

Тема 2 Знакопеременные ряды

2.1 Знакочередующиеся ряды, признак Лейбница
2.2 Абсолютно и условно сходящиеся ряды
2.3 Признаки Дирихле и Абеля

Знакочередующимся называется ряд, все члены которого поочередно меняют знак:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{k-1} a_k + \ldots,$$

где a_k, $k = 1,2,\ldots$, – числа одного знака.

Теорема (признак Лейбница) Пусть члены знакочередующегося ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k$ *удовлетворяют условиям:*

1) $a_k \ge a_{k+1}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *;*
2) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad x \in (-1;1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{a(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} x^k, \quad x \in (-1;1).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

называется *биномиальным*, так как при $\alpha = n \in \mathbb{N}$ все коэффициенты данного ряда, начиная с номера $n+1$, обращаются в нуль, и степенной ряд преобразуется в бином Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{n!} x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Ряды Тейлора и Маклорена используются при вычислении приближенных значений функций, интегралов, решении дифференциальных уравнений.

Приближенное вычисление значений функций. Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точке x_0 с заданной точностью поступают следующим образом. Функцию $f(x)$ раскладывают в ряд по степеням $x - x_1$ в интервале сходимости, содержащем точку x_0. Точка x_1 – это точка, в которой значения функции и ее производных вычисляются точно. Переменной x придается значение x_0. В полученном числовом

$(x_0-R;x_0+R)$, то говорят, что функция $f(x)$ *разложима в ряд Тейлора в окрестности точки* x_0.

Частичные суммы ряда Тейлора

$$S_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

представляют собой многочлены Тейлора для $f(x)$ в точке x_0.

Теорема (Тейлора) Пусть

1) функция $f(x)$ имеет в окрестности $U(R;x_0)$ точки x_0 производные любого порядка;

2) $\forall x\in U(R;x_0)$ выполняется условие $\left|f^{(k)}(x)\right|\le M\frac{k!}{R^n}$, $k=0,1,2,\ldots$.

Тогда функция $f(x)$ разлагается на множестве $U(R;x_0)$ единственным образом:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots.$$

Следствие 1 Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы остаток в формуле Тейлора стремился к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad \forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Следствие 2 Если для любых $x\in(x_0-R;x_0+R)$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой M, то ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ сходится к функции $f(x)$ в интервале $|x-x_0|<R$.

При $x_0=0$ формула Тейлора имеет вид:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$

и называется формулой *Маклорена*.

Основные разложения в ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^k}{k!}+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!},\ x\in\mathbb{R},$$

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ сходится, а его сумма S не превосходит первого члена, т. е. $S\le a_1$.

Ряд, удовлетворяющий условиям теоремы 1 называется *рядом Лейбница*.

Остаток $r_n=(-1)^n(a_{n+1}-a_{n+2}+\ldots)$ ряда Лейбница удовлетворяет неравенству $|r_n|\le a_{n+1}$.

Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются *знакопеременными*.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ сходится.

Если ряд абсолютно сходится, то он сходится. Обратное утверждение в общем случае не имеет места.

Абсолютно сходящиеся ряды обладают *свойствами*:

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ абсолютно сходится и $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=S$, $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|=\sigma$, то $|S|\le\sigma$;

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ абсолютно сходятся, то при любых α и β ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(\alpha a_k+\beta b_k)$ абсолютно сходится;

– если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ абсолютно сходится, то ряд, составленный из тех же членов, но взятых в другом порядке, также абсолютно сходится и его сумма равна сумме исходного ряда;

– если ряды $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ абсолютно сходятся, то ряд, составленный из всевозможных попарных произведений a_kb_m членов этих рядов, расположенных в любом порядке, также абсолютно сходится.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *условно сходящимся.*

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ обозначим через a_1^+, a_2^+, …, a_k^+,… и a_1^-, a_2^-, …, a_k^-, … соответственно его неотрицательные и отрицательные члены, взятые в том же порядке, в котором они расположены в ряде $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Рассмотрим ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$, члены которых неотрицательны.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ условно сходится, то оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ расходятся.

Теорема (Римана) Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ условно сходится, то, каково бы ни было действительное число s, можно так переставить его члены, что сумма получившегося ряда будет равна s.

Для исследования сходимости знакопеременных рядов часто используются признаки Дирихле и Абеля.

Теорема (признак Дирихле) Пусть

1) последовательность (a_k) монотонна и $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$,

2) последовательность сумм (B_n), $B_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$, ограничена.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Теорема (признак Абеля) Пусть

1) последовательность (a_k) ограничена и монотонна,

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

резке $[x_0; x]$, принадлежащем интервалу сходимости:

Тема 5 Ряд Тейлора

5.1 Разложение функций в степенные ряды
5.2 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена
5.3 Приложения степенных рядов

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k =$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \ldots$$

и называется *рядом Маклорена.*

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$ может быть как равным нулю, так и отличным от него, причем в последнем случае сумма $S(x)$ ряда Тейлора может не совпадать с $f(x)$. Важно определить, когда в формуле

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

допустим знак равенства, т. е. когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен. Если $S(x) = f(x)$ на расходящимся. Если ряд хотя бы в одной точке $x_1 = R$ или $x_2 = -R$ сходится, то эти точки вместе с интервалом сходимости образуют *область сходимости*.

Если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится только в точке $x = 0$, то $R = 0$; если же он сходится для всех $x \in \mathbb{R}$, то $R = \infty$.

Пусть для коэффициентов ряда $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ существует предел $\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|} \neq 0$. Тогда радиус сходимости находится по формуле Коши-Адамара: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$.

Аналогично, если существует предел $\lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L$, то $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left| \dfrac{a_k}{a_k + 1} \right|$.

Для степенного ряда общего вида $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ существует $R \in \mathbb{R}$, $R \geq 0$, такое, что данный ряд абсолютно сходится при $|x - x_0| < R$ и расходится при $|x - x_0| > R$. Здесь число $R \geq 0$ называют *радиусом сходимости*, а интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$ – *интервалом сходимости* степенного ряда.

Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ обладает свойствами:

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то его сумма непрерывна на интервале сходимости $(-R; R)$;

– операции почленного дифференцирования и интегрирования на любом промежутке $[x_0; x] \subset (-R; R)$ степенного ряда не изменяют его радиуса сходимости;

– если радиус сходимости степенного ряда отличен от нуля, то степенной ряд можно почленно дифференцировать на интервале сходимости;

– степенной ряд можно почленно интегрировать на любом от-

Тема 3 Функциональные ряды

Пусть на множестве X задана последовательность функций

$$\left(f_n(x)\right) = \left(f_1(x); f_2(x); f_3(x); \ldots\right),$$

принимающих числовые значения в точках $x \in X$.

Последовательность $\left(f_n(x)\right)$ называется *ограниченной*, если существует такое число $M > 0$, что $\forall n \in \mathbb{N}$ во всех точках $x \in X$ выполняется неравенство $|f_n(x)| \leq M$:

$$\left(f_n(x)\right) - \textit{ограничена} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} \text{ и } \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq M.$$

Последовательность $\left(f_n(x)\right)$ называется *поточечно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если при любом фиксированном $x \in X$ числовая последовательность $\left(f_n(x)\right)$ сходится к $f(x)$, т. е. $\forall x \in X \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$:

$$\forall\ x \in X\ \ \forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall\ n > N(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Поточечная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \to f(x)$, $n \to \infty$.

Функциональная последовательность $\left(f_n(x)\right)$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ на множестве X, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех $n > N(\varepsilon)$ и всех точек $x \in X$ имеет место неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ N(\varepsilon):\ \forall\ n > N(\varepsilon)$ и $\forall\ x \in X \Rightarrow \left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$.

Равномерная сходимость функциональной последовательности обозначается $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $n \to \infty$.

Для того чтобы последовательность функций $\left(f_n(x)\right)$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_X \left|f_n(x) - f(x)\right| = 0$.

Обозначим $r_n = \sup\limits_X \left|f_n(x) - f(x)\right|$.

Тогда последовательность $(r_n) = \left(\sup\limits_X \left|f_n(x) - f(x)\right|\right)$ является числовой последовательностью.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости последовательности). Для того чтобы последовательность функций $\left(f_n(x)\right)$ равномерно сходилась на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что для всех точек $x \in X$, всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p \in \mathbb{N}$ выполнялось неравенство $\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$:

$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ N(\varepsilon): \forall\ x \in X, \forall\ n > N(\varepsilon)\ \forall\ p \in \mathbb{N}\ \ \left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$.

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x)$, …, $u_n(x)$, … – последовательность функций, определенных на некотором множестве X.

Ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_k(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x),$$

членами которого являются функции $u_k(x)$, называется *функциональным*.

Каждому значению $x_0 \in X$ соответствует числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$. Этот числовой ряд может быть сходящимся или расходящимся. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x_0)$ сходится, то x_0 называется *точкой*

При $x_0 = 0$ имеем *степенной ряд по степеням* x*:*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Поскольку заменой $x - x_0 = \xi$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ можно свести к ряду $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \xi^k$, то не ограничивая общности можно рассматривать только ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$.

Степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ всегда сходится в точке $x = 0$. При $x \neq 0$ степенной ряд может как сходиться, так и расходиться.

Теорема (Абеля) Если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в интервале $-\left|x_0\right| < x < \left|x_0\right|$ и сходится равномерно на отрезке $-q \le x \le q$, где $0 < q < \left|x_0\right|$. Если в точке $x_1 \neq 0$ степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ расходится, то он расходится во всех точках x, таких, что $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля вытекает, что если степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ сходится хотя бы в одной точке $x \neq 0$, то всегда существует число $R > 0$, такое, что степенной ряд сходится (абсолютно) для всех $x \in (-R; R)$ и расходится для всех $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$.

Число $R \ge 0$ называется *радиусом* сходимости степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, если степенной ряд сходится в каждой точке интервала $(-R; R)$ и расходится при $|x| > R$. Интервал $(-R; R)$ называется *интервалом сходимости*.

При $x = \pm R$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ может быть как сходящимся, так и

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_k(x)\quad \forall x_0\in X;$$

– *(интегрируемость)* если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ с непрерывными членами равномерно сходится на отрезке $[a;b]$, то его можно почленно интегрировать на любом отрезке $[x_0;x]\subset[a;b]$ и справедливо равенство:

$$\int_{x_0}^{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\right)dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_k(t)\,dt;$$

причем ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{x_0}^{x}u_k(t)dt$ сходится равномерно на $[a;b]$;

– *(дифференцируемость)* если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ с непрерывно дифференцируемыми на отрезке $[a;b]$ членами сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x)$ сходится равномерно на этом отрезке, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ сходится равномерно на $[a;b]$ и справедливо равенство:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}u_k'(x).$$

Тема 4 Степенные ряды

4.1 Определение степенного ряда, теорема Абеля
4.2 Радиус, интервал и область сходимости степенного ряда
4.3 Свойства сходящихся степенных рядов

Ряд вида:

$$a_0+a_1(x-x_0)+\ldots+a_k(x-x_0)^k+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,$$

называется *степенным рядом* по степеням $(x-x_0)$. Здесь a_k, x_0 – заданные действительные числа, x – переменная. Числа a_k называются *коэффициентами* степенного ряда.

сходимости функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$. Множество всех точек сходимости функционального ряда называется его *областью сходимости*. Обозначим ее через D. Очевидно, что $D\subseteq X$. Если множество D пусто, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ расходится в каждой точке множества X.

Для ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ конечная сумма $\sum_{k=1}^{n}u_k(x)$ называется n-*й частичной суммой* и обозначается $S_n(x)$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_{n+k}(x)$ называется n-*м остатком* и обозначается $r_n(x)$.

Поточечная сходимость функциональных рядов. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ называется *сходящимся поточечно* к функции $S(x)$ на множестве X, если последовательность его частичных сумм $(S_n(x))$ сходится к $S(x)$ на X, т. е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)=S(x)\ \Leftrightarrow\ \forall x\in X\ \lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x).$$

Функция $S(x)$ называется *суммой* ряда.

Очевидно, что для поточечно сходящегося на множестве X ряда $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ его остаток $r_n(x)$ удовлетворяет соотношению:

$$\forall x\in X\ \lim_{n\to\infty}r_n(x)=0.$$

Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ называется *абсолютно сходящимся* на множестве $D_1\subset X$, если в каждой точке этого множества сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty}|u_k(x)|$.

Так как из абсолютной сходимости ряда в точке следует его сходимость, то $D_1\subset D$, где D – область сходимости функционального ряда.

Для определения области абсолютной сходимости функционального ряда используются признаки Коши и Д'аламбера, для которых в рассматриваемом случае предел L, вообще говоря, будет функцией переменной x.

Равномерная сходимость функциональных рядов. Функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ называется *равномерно сходящимся* на множестве X к функции $S(x)$, если последовательность частичных сумм $(S_n(x))$ сходится равномерно к $S(x)$ на X:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \rightrightarrows S(x) \;\Leftrightarrow\; S_n(x) \rightrightarrows S(x) \;\; \forall\, x \in X .$$

Для равномерно сходящегося ряда остаток удовлетворяет соотношению: $r_n(x) \rightrightarrows 0 \;\forall\, x \in X$.

Различие определений *поточечной* и *равномерной* сходимостей функционального ряда состоит лишь в том, что в первом случае номер $N(\varepsilon)$ зависит от ε и $x \in X$, т. е. $N = N(\varepsilon; x)$, а во втором – только от ε, т. е. $N = N(\varepsilon)$. *Поточечн*ая сходимость называется также *неравномерной*.

Теорема (критерий Коши равномерной сходимости ряда) Для того чтобы ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ равномерно сходился на множестве X к функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер $N(\varepsilon)$, что всех $n > N(\varepsilon)$, всех $p \in \mathbf{N}$ и всех точек $x \in X$ выполнялось неравенство $\left|u_{n+1}(x) + .. + u_{n+p}(x)\right| < \varepsilon$.

Теорема (признак Вейерштрасса) Пусть

1) члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ удовлетворяют неравенствам:

$$\left|u_k(x)\right| \le a_k \quad \forall k \in \mathbb{N}, \; \forall x \in X .$$

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_n \ge 0$, сходится.

Тогда функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится равномерно на множестве X.

Числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, члены которого удовлетворяют неравенствам $\left|u_k(x)\right| \le a_k \;\; \forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$, называется *мажорантным* рядом или *мажорантой* для функционального ряда $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$, а сам функциональный ряд в этом случае называется *мажорируемым* на множестве X.

Теорема (признак Дирихле) Пусть

1) последовательность функций $(a_n(x))$ равномерно сходится к нулю на множестве X;

2) $(a_n(x))$ в каждой точке $x \in X$ монотонна;

3) последовательность частичных сумм $(B_n(x))$, $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$, ограничена на X.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ равномерно сходится на X.

Теорема (признак Абеля). Пусть

1) последовательность функций $(a_n(x))$ ограничена на множестве X и в каждой точке $x \in X$ монотонна;

2) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k(x)$ равномерно сходится на X.

Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ равномерно сходится на X.

Равномерно сходящиеся функциональные ряды обладают *свойствами*:

– *(непрерывность)* если на множестве X функциональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ с непрерывными членами сходится равномерно, то его сумма непрерывна на X и возможен предельный переход: