$$= \sqrt{2}\iint\limits_{G_{xy}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \left[\begin{array}{l} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ 0 \le r \le 1, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, J = r \end{array}\right] = \sqrt{2}\iint\limits_{G^*} r^2 dr d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r^2 dr = \sqrt{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

5 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} y^2 z dxdy + xz dydz + x^2 y dxdz$, где Ω – внешняя сторона поверхности $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 2$.

Решение. Поверхность Ω представляет собой параболоид, заданный явно уравнением $z = x^2 + y^2$. Поэтому вектор нормали равен $\vec{n} = (2x, 2y, -1)$, так как сторона внешняя и угол $\gamma > \frac{\pi}{2}$.

Линия пересечения параболоида с плоскостью $z = 2$ есть окружность с центром в точке $O(0;0)$ радиуса $R = \sqrt{2}$:

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Тогда получим

$$\iint\limits_{\Omega} y^2 z dxdy + xz dydz + x^2 y dxdz =$$

$$= \iint\limits_{G} \left(xz \cdot 2x + x^2 y \cdot 2y + y^2 z \cdot (-1) \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G} \left(2x^2 \left(x^2 + y^2\right) + 2x^2 y^2 - y^2 \left(x^2 + y^2\right) \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G} \left(2x^4 + 2x^2 y^2 + 2x^2 y^2 - y^2 x^2 - y^4 \right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_{G} \left(2x^4 + 3x^2 y^2 - y^4 \right) dxdy.$$

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам:

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ 0 \le r \le \sqrt{2},$$

якобиан отображения равен $J = r$.

в) $\int\limits_{\Gamma} \sqrt{x^2 + 3y}dy + (x - y)dx$, где Γ – дуга линии $y = x^2$ от точки $A(0;0)$ до $B(1;1)$;

г) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dx + xydy$, где Γ – дуга эллипса $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

д) $\int\limits_{\Gamma} ydx - xdy$, где Γ – дуга астроиды $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

е) $\int\limits_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy$, где Γ – первая арка циклоиды $x = 3(t - \sin t)$, $y = 3(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

ж) вычислить $\int\limits_{\Gamma} (y+z)dx + (x+z)dy + (x+y)dz$, Γ: $x = t^2$, $y = t^4$, $z = t^6$, $0 \le t \le 1$;

и) вычислить $\int\limits_{\Gamma} zydx + zxdy + xydz$, Γ – дуга винтовой линии $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{3t}{2\pi}$ от точки пересечения с плоскостью $z = 0$ до точки пересечения с плоскостью $z = 3$.

3 Вычислить длину дуги кривых:

а) $x = t$, $y = \sqrt{2}\ln t$, $z = \frac{1}{t}$, $1 \le t \le 10$;

б) $x = 6\cos t$, $y = 6\sin t$, $z = 8t$, $0 \le t \le 2\pi$.

4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной замкнутым контуром, образованным указанными линиями:

а) первой аркой циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$;

б) лемнискатой Бернулли $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2\left(x^2 - y^2\right)$.

5 Найти массу материальной кривой с заданной плотностью:

а) $4y = x^4$, $0 \le x \le 1$, $\rho(x;y) = x^5 + 8xy$;

б) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 8\left(x^2 - y^2\right)$, $\rho(x;y) = x + y$.

6 Найти массу дуги кривой $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$, если линейная плотность $\rho(x, y, z) = x + z$.

7 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ вдоль указанной линии:

а) $\vec{F} = x^2\vec{i} + xy^2\vec{j}$, L – отрезок между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$;

б) $\vec{F} = (x^3 + y)\vec{i} + (x + y^3)\vec{j}$, L – ломаная ABC, где $A(1;1)$ и $B(3;1)$, $C(3;5)$;

в) $\vec{F} = x^2\vec{i} + \frac{1}{y^2}\vec{j}$, L – дуга линии $xy = 1$ от $A(1;1)$ и $B\left(4; \frac{1}{4}\right)$;

г) $\vec{F} = y\vec{i} + x\vec{j}$, L – дуга астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = b\sin^3 t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{4}$;

д) найти работу A переменной силы

$$F = (2 + xy^2)\vec{i} + (x^2 y - 3)\vec{j}$$

вдоль эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ от точки $B(-2,0)$ до точки $C(2,0)$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB} y^2 dl$, где

$$AB = \left\{(x; y) \middle| x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Решение. Подставляя вместо x и y их параметрические представления, имеем:

$$y^2 = a^2 \sin^2 t,$$

$$dl = \sqrt{(-a\sin t)^2 + (a\cos t)^2} = a\,dt.$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{AB} y^2 dl = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \sin^2 t\,dt = \frac{a^3}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t)\,dt = \frac{a^3}{2}\left(t - \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^3\pi}{4}.$$

3 Вычислить площадь поверхности Ω, заданной уравнением $z = x^2 + y^2$ и расположенной между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. По условию $z = x^2 + y^2$. Тогда

$$z'_x = 2x,\ z'_y = 2y.$$

Тогда получаем

$$S = \iint\limits_{\Omega} dS = \iint\limits_{G} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,dxdy = \iint\limits_{G} \sqrt{1 + 4(x^2 + y^2)}\,dxdy,$$

где G – проекция Ω на плоскость Oxy.

Для вычисления интеграла перейдем к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

Так как область G есть круг $x^2 + y^2 \le 1$, то $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Отсюда имеем

$$S = \iint\limits_{G^*} \sqrt{1 + 4r^2}\,r\,drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1 + 4r^2}\,dr =$$

$$= \frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\,d(1 + 4r^2) = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(1 + 4r^2)^3}\,\Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right).$$

4 Вычислить $\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\,dS$, где Ω – часть конической поверхности $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, заключенная между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

Решение. Поверхность Ω задана неявно уравнением $x^2 + y^2 - z^2 = 0$. Проекция Ω на плоскость $z = 0$ представляет собой круг $x^2 + y^2 \le 1$.

Так как $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$, то $F'_x = 2x$; $F'_y = 2y$; $F'_z = 2z$ и

$$dS = \frac{1}{2z}\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}\,dxdy = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,dxdy.$$

Получим

$$\iint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\,dS = \iint\limits_{G_{xy}} \sqrt{x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)}\,dxdy =$$

2 Вычислить интеграл $\iint\limits_{\Omega}(x-3y+2z)\,ds$, где

$$\Omega=\left\{(x;y;z)\,\middle|\,4x+3y+2z-4=0,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right\}.$$

Р е ш е н и е. Данная поверхность Ω представляет собой часть плоскости $4x+3y+2z-4=0$, расположенную в первом октанте (рисунок 2. 15). Запишем уравнение плоскости в виде $z=2-2x-\frac{3}{2}y$. Тогда $z_x'=-2$, $z_y'=-\frac{3}{2}$.

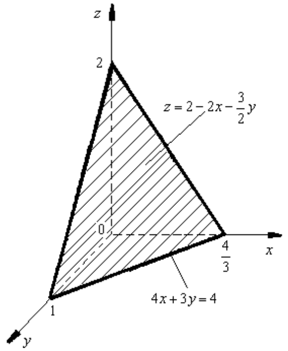

Рисунок 2. 15 – Поверхность интегрирования к типовому примеру 2

Имеем

$$\iint\limits_{\Omega}(x-3y+2z)\,dS=\iint\limits_{G}\left(x-3y+2\left(2-2x-\frac{3}{2}y\right)\right)\sqrt{1+4+\frac{9}{4}}\,dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\iint\limits_{G}(4-3x-6y)\,dxdy=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\frac{4}{3}(1-x)}(4-3x-6y)\,dy=\frac{\sqrt{29}}{2}\int\limits_0^1\left(4y-3xy-3y^2\right)\Big|_0^{\frac{4}{3}(1-x)}dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\int\limits_0^1\left(\frac{16}{3}(1-x)-4x(1-x)-\frac{16}{3}(1-x)^2\right)dx=$$

$$=\frac{\sqrt{29}}{2}\left(-\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^2}{2}-2x^2+4\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{16}{3}\cdot\frac{(1-x)^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{29}}{9}.$$

2 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x+y)\,dl$, где

$$AB=\left\{(x;y)\,\middle|\,x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ r=\sqrt{\sin 2\varphi},\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

Р е ш е н и е. Подставляя вместо x и y их представления в полярных координатах, имеем:

$$dl=\sqrt{\sin 2\varphi+\frac{\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}}\,d\varphi=\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}=\frac{d\varphi}{r}.$$

Тогда получим

$$\int\limits_{AB}(x+y)\,dl=\int\limits_0^{\pi/2}(r\sin\varphi+r\cos\varphi)\frac{d\varphi}{r}=\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\varphi+\cos\varphi)\,d\varphi=2.$$

3 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}y\,dl$, где

$$AB=\left\{(x;y)\,\middle|\,y^2=2x \text{ от точки } O(0;0) \text{ до точки } M(2;2)\right\}.$$

Р е ш е н и е. Имеем:

$$y=\sqrt{2x},\qquad y'=\frac{1}{\sqrt{2x}},\qquad dl=\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx.$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{AB}y\,dl=\int\limits_0^2\sqrt{2x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2x}}\,dx=\int\limits_0^2\sqrt{2x+1}\,dx=\frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^2=$$

$$=\frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

4 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}x\,dx+xy\,dy$, где

$$AB=\left\{(x;y)\,\middle|\,x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0\right\}.$$

Р е ш е н и е. Перейдем к параметрическому заданию окружности:

$$\begin{cases}x=r\cos t,\\ y=r\sin t,\end{cases}$$

где $r=1$ и $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Точке A соответствует значение параметра $t=0$, а точке B – значение $t=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $x'(t)=-\sin t$ и $y'(t)=\cos t$. Тогда

$$\int\limits_{AB} xdx+xydy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[-\cos t\cdot\sin t+\cos t\cdot\sin t\cdot\cos t\right]dt=$$

$$=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t dt+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt=\left.\frac{\cos^2 t}{2}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}-\left.\frac{\cos^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}.$$

5 Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x^2+y)dx+xydy$, где (рисунок 2. 1)

а) $AB=\left\{(x;y)\,\middle|\,y=x,\ 0\le x\le 1\right\}$,

б) $AB=\left\{(x;y)\,\middle|\,y=x^2,\ 0\le x\le 1\right\}$,

в) $AB=\left\{(x;y)\,\middle|\,\begin{array}{l}\text{ломаная, проходящая}\\ \text{через точки } \mathrm{A}(0;0),\ C(1;0),\ B(1;1)\end{array}\right\}$.

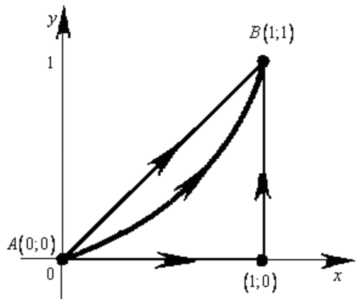

Рисунок 2. 1 – Различные кривые AB

Р е ш е н и е. а) имеем:

л) $\iint\limits_{\Omega}(x+z^2)dydz+(2x^2+y)dxdz$, где Ω – внешняя сторона части параболоида $y=x^2+z^2$, отсеченной плоскостью $y=2$ и расположенной над плоскостью Oxy;

м) $\iint\limits_{\Omega} xdydz+ydxdz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона цилиндра $x^2+y^2=4$ с основаниями $z=0$ и $z=H$.

П р и м е р ы о ф о р м л е н и я р е ш е н и я

1 Вычислить $\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dS$, где поверхность Ω – верхняя половина сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения верхней полусферы имеют вид

$$x=a\sin\theta\cos\varphi,\ y=a\sin\theta\sin\varphi,\ z=a\cos\theta,$$

где $0\le\theta\le\pi/2$, $0\le\varphi\le 2\pi$.

Частные производные по переменным θ и φ равны:

$$x'_\theta=a\cos\theta\cos\varphi,\ y'_\theta=a\cos\theta\sin\varphi,\ z'_\theta=-a\sin\theta;$$
$$x'_\varphi=-a\sin\theta\sin\varphi,\ y'_\varphi=a\sin\theta\cos\varphi,\ z'_\varphi=0.$$

Вычислим

$$E=a^2\cos^2\theta\cos^2\varphi+a^2\cos^2\theta\sin^2\varphi+a^2\sin^2\varphi=$$
$$=a^2\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)=a^2;$$
$$G=a^2\sin^2\theta\sin^2\varphi+a^2\sin^2\theta\cos^2\varphi=a^2\sin^2\theta;$$
$$F=-a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi+a^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi=0;$$
$$EG-F^2=a^2\cdot a^2\sin^2\theta=a^4\sin^2\theta.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dS=\iint\limits_{W}a^2\sin^2\theta\cdot\sqrt{a^4\sin^2\theta}\,d\varphi d\theta=\iint\limits_{W}a^4\sin^3\theta\,d\varphi d\theta=$$

$$=a^4\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta d\theta=-a^4\cdot 2\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^2\theta\right)d\left(\cos\theta\right)=$$

$$=-2a^4\pi\left.\left(\cos\theta-\frac{\cos^3\theta}{3}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=-2a^4\pi\left(-1+\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{3}a^4\pi.$$

а) $\iint\limits_{\Omega}(y+2z)dxdy$, Ω – верхняя часть плоскости $6x+3y+2z=6$, расположенная в первом октанте;

б) $\iint\limits_{\Omega} zdxdy$, где Ω – внешняя сторона эллипсоида $\dfrac{x^2}{4}+y^2+\dfrac{z^2}{9}=1$;

в) $\iint\limits_{\Omega}(x^2+z^2+4y^2)dxdz$, где Ω – внешняя сторона поверхности $y=\sqrt{x^2+z^2}$, отсеченной плоскостями $y=0$, $y=3$;

г) $\iint\limits_{\Omega} zdydz-4ydzdx+8x^2dxdy$, где Ω – часть поверхности $z=x^2+y^2$, отсекаемая плоскостью $z=1$ (нормаль внешняя),

д) $\iint\limits_{\Omega}(x+y)dydz+(y-x)dzdx+(z-2)dxdy$, где Ω – часть конуса $x^2+y^2=z^2$, $z\ge 0$, отсекаемая плоскостью $z=1$;

е) $\iint\limits_{\Omega} xdydz+zdxdy$, где Ω – внешняя сторона боковой поверхности цилиндра $y=\sqrt{4-x^2}$, ограниченной плоскостями $z=0$ и $z=2$;

ж) $\iint\limits_{\Omega} x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, где Ω – внешняя сторона полной поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ $0\le z\le 1$;

и) $\iint\limits_{\Omega}(4y^2+4x-5z^2)dydz$, где Ω – внутренняя сторона части поверхности $y^2=4x$, отсеченной плоскостями $x=4$, $z=0$, $z=3$;

к) $\iint\limits_{\Omega} x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$, где Ω – внешняя сторона на поверхности пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

$$\int\limits_{AB}(x^2+y)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x, \\ y'=1, \\ 0\le x\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1(x^2+x+x\cdot x\cdot 1)dx=$$

$$=\int\limits_0^1(2x^2+x)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{7}{6};$$

б) $$\int\limits_{AB}(x^2+y)dx+xydy=\begin{bmatrix} y=x^2, \\ y'=2x, \\ 0\le x\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1(x^2+x^2+x^2\cdot x\cdot 2x)dx=$$

$$=\int\limits_0^1(2x^2+2x^4)dx=\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}+\frac{2}{5}=\frac{16}{15};$$

в) используя свойство аддитивности криволинейного интеграла, имеем:

$$\int\limits_{AB}(x^2+y)dx+xydy=\int\limits_{AC}(x^2+y)dx+xydy+\int\limits_{CB}(x^2+y)dx+xydy=$$

$$=\begin{bmatrix} AC: y=0,\ 0\le x\le 1, \\ CB: x=1,\ 0\le y\le 1. \end{bmatrix}=\int\limits_0^1(x^2+0)dx+\int\limits_0^1(1+y)\cdot 0+1\cdot ydy=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1+\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}.$$

6 Найти массу материальной дуги линии $y=x^2+1$ между точками $A(0;1)$ и $B(1;2)$, если линейная плотность в каждой точке $M(x;y)$ пропорциональна абсциссе этой точки

Решение. Выражение для плотности имеет вид $\rho(x;y)=k\,x$, где k – коэффициент пропорциональности. Тогда находим

$$m=\int\limits_{AB}\rho(x;y)dl=k\int\limits_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{k}{8}\int\limits_0^1 x\sqrt{1+4x^2}d(1+4x^2)=$$

$$=\frac{k}{8}\frac{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1=\frac{k}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

7 Вычислить длину дуги линии $x=t$, $y=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2$, $z=\frac{1}{3}t^3$ при $0\le t\le 1$.

Решение. Имеем $x_t'=1$, $y_t'=\sqrt{2}t$, $z_t'=t^2$.

Тогда

$$dl=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2+z_t'^2}=\sqrt{1+2t^2+t^4}\,dt=\left(1+t^2\right)dt.$$

Значит, длина дуги равна

$$L=\int_{AB}dl=\int_0^1\left(1+t^2\right)dt=\left(t+\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{4}{3}.$$

8 Найти работу, производимую силой $\vec{F}=4x^6\,\vec{i}+xy\,\vec{j}$ вдоль дуги кривой $y=x^3$ от точки $A(0;0)$ и $B(1;1)$.

Решение. По условию $P(x;y)=4x^6$, $Q(x;y)=xy$. Тогда работа равна:

$$A=\int_{AB}4x^6dx+xydy=\int_0^1 4x^6dx+x\cdot x^3\cdot 3x^2dx=7\int_0^1 x^6=x^7\Big|_0^1=1.$$

9 Вычислить площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Решение. Параметрические уравнения эллипса имеют вид

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,\ 0\le t\le 2\pi.$$

Отсюда $dx=-a\sin t\,dt$, $dy=b\cos t\,dt$.

Тогда искомая площадь равна:

$$S=\frac{1}{2}\oint_L xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\cos^2 t+ab\sin^2 t\,dt=$$

$$=\frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt=\pi\,ab.$$

Тема 11-13 Поверхностные интегралы

1 Вычислить поверхностные интегралы 1-го рода по поверхностям:

а) $\iint_\Omega\left(z+2x+\frac{4}{3}y\right)dS$, где Ω – часть плоскости $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$, лежащая в первом октанте;

б) $\iint_\Omega\left(x^2+y^2\right)dS$, где Ω – сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$;

в) $\iint_\Omega\sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где Ω – боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{9}=0$ $(0\le z\le 3)$;

г) $\iint_\Omega x(y+z)dS$, где Ω – часть цилиндрической поверхности $x=\sqrt{4-y^2}$, отсеченной плоскостями $z=0$, $z=1$;

д) $\iint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2-1\right)dS$, где Ω – поверхность $2y=9-x^2-z^2$, отсеченная плоскостью $y=0$;

е) $\iint_\Omega\left(3x^2+3y^2+5z^2\right)dS$, где Ω – часть поверхности $z=\sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостью $z=1$;

ж) $\iint_\Omega\left(x^2+y^3+z^2\right)dS$, где Ω – часть сферы $y=\sqrt{1-x^2-z^2}$.

2 Найти площадь поверхности сферы $x^2+y^2+z^2=16$, заключенной внутри цилиндра $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

3 Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2+y^2=2x$, вырезанную из него сферой $x^2+y^2+z^2=4$.

4 Вычислить площадь части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2+y^2=2x$.

5 Вычислить поверхностные интегралы 2-го рода по поверхностям:

Решение. По условию $\rho(x,y,z)=\dfrac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Тогда масса равна

$$m=\iiint\limits_Q \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz\,.$$

Вычислим тройной интеграл. Уравнение сферической поверхности приведем к каноническому виду

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2\,.$$

Имеем сферу с центром в точке $(0;0;R)$ радиуса R. Проекция тела на плоскость $z=0$ – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=R^2$. Переходим к сферическим координатам. Из уравнения сферической поверхности находим пределы интегрирования:

$$0\le r\le 2R\cos\theta\,,\ 0\le\varphi\le 2\pi\,,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\,.$$

Тогда масса равна

$$m=\iiint\limits_Q \frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dxdydz=k\iiint\limits_{Q^*}\frac{r^2\sin\theta}{r}\,drd\varphi\,d\theta=$$

$$=k\iiint\limits_{Q^*} r\sin\theta drd\varphi\,d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta}r\sin\theta\,dr=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\frac{r^2}{2}\Big|_0^{2R\cos\theta}d\theta=\frac{k}{2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot 4R^2\cdot\cos^2\theta\,d\theta=$$

$$=-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d(\cos\theta)=-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi$$

$$=-2kR^2\int\limits_0^{2\pi}\left(0-\frac{1}{3}\right)d\varphi=\frac{2}{3}kR^2\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{4}{3}k\pi R^2\,.$$

Тема 4-5 Двойной интеграл

1 Вычислить двойной интеграл по указанному прямоугольнику:

а) $\iint\limits_G \dfrac{xdxdy}{y^2}$, $G=\{(x;y)|\ 1\le x\le 2, 4\le y\le 6\}$;

б) $\iint\limits_G (x^2+y^2)dxdy$, $G=\{(x;y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$.

2 Расставить пределы интегрирования в повторном интеграле, к которому сводится двойной интеграл $\iint\limits_G f(x;y)dxdy$ от функции $f(x;y)$, непрерывной в указанной области:

а) G ограничена линиями $y=x^2$, $y=4$;

б) G определена неравенствами $x^2+y^2\le 9$, $x+y\ge 3$.

3 Вычислить интегралы:

а) $\iint\limits_G (x-y)dxdy$, G ограничена линиями $y=2-x^2$, $y=2x-1$;

б) $\iint\limits_G (\cos 2x-\sin y)dxdy$, G ограничена линиями $x=0$, $y=0$, $4x+4y-\pi=0$;

в) $\iint\limits_G (x^2+2y)dxdy$, G ограничена линиями $y=x^2$, $y=4$;

г) $\iint\limits_G \dfrac{x^2}{y^2}dxdy$, G ограничена линиями $y=\dfrac{1}{x}$, $y=x$, $x=2$;

д) $\iint\limits_G (6x^2y+8xy^3)dxdy$, G ограничена линиями $x^2+y=2$, $y^3=x^2$;

е) $\iint\limits_G \dfrac{xdxdy}{(1+x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$, G ограничена линиями $x^2+y^2=1$, $x=0$, $y=0$ (первая четверть).

4 Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле, предварительно изобразив на рисунке область интегрирования:

а) $\int_0^4 dx \int_{\frac{x^2}{2}}^{2x-3} f(x,y)dy$; г) $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^{x} f(x,y)dy$;

б) $\int_{-2}^1 dx \int_{x-2}^{-x^2} f(x,y)dy$; д) $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

в) $\int_1^6 dx \int_{\frac{6}{x}}^{7-x} f(x,y)dy$; е) $\int_0^1 dx \int_{\frac{1}{2}(1-x)^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$.

Примеры оформления решения

1 Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле, если область G (рисунок 2. 2) ограничена линиями $y=x^2$, $x=a$, $a>0$, $y=0$.

Решение. Областью интегрирования является криволинейная трапеция, ограниченная сверху параболой $y=x^2$, снизу – осью Ox, справа – прямой $x=a$, $a>0$.

Если внутренний интеграл взять по y, то y изменяется от 0 до $y=x^2$, а x изменяется в пределах от 0 до a:

$$\iint_G f(x,y)ds = \int_0^a dx \int_0^{x_2} f(x,y)dy.$$

Если внутренний интеграл взять по x, то x изменяется от 0 до $x=\sqrt{y}$, а y изменяется в пределах от 0 до a^2:

$$\iint_G f(x,y)ds = \int_0^{a^2} dy \int_{\sqrt{y}}^{a} f(x,y)dx.$$

2 Представить двойной интеграл $\iint_G f(x,y)dxdy$ в виде повторного интеграла при разных порядках интегрирования по x и по y, если область G ограничена линиями $y=2x$, $x=0$, $y+x=3$ (рисунок 2. 3).

Решение. Областью интегрирования является треугольник с вершинами $O(0;0)$; $A(0;3)$; $B(1;2)$.

$$= \iiint_{Q^*} r^6 \cdot r^2 \sin\theta\, abc\, dr d\varphi d\theta = abc \iiint_{Q^*} r^8 \sin\theta\, dr d\varphi d\theta =$$

$$= abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^1 r^8 dr = abc \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot (-\cos\theta)\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{r^9}{9}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{abc}{9} \cdot 2\pi(1+1) = \frac{4\pi abc}{9}.$$

6 Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Решение. Тело Q ограничено снизу параболоидом вращения с осью симметрии Oz, вершиной в начале координат, сверху – плоскостью $z=2$. Проекция тела на плоскость Oxy – область, ограниченная окружностью

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрическим координатам. Так как $\frac{x^2+y^2}{2} \le z \le 2$, то $\frac{r^2}{2} \le z \le 2$. Очевидно, что $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$.

Тогда объем тела равен

$$V = \iiint_Q dxdydz = \iiint_{Q^*} r\, dr d\varphi dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 dr \int_{\frac{r^2}{2}}^{2} r dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 rz \Big|_{\frac{r^2}{2}}^{2} dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r\left(2 - \frac{r^2}{2}\right) dr =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(2r - \frac{r^3}{2}\right) dr = \int_0^{2\pi} \left(r^2 - \frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} (4-2) d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 4\pi.$$

7 Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию ее до начала координат.

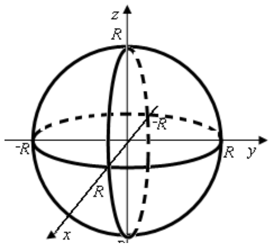

Рисунок 2. 13 – Область интегрирования для типового примера 4

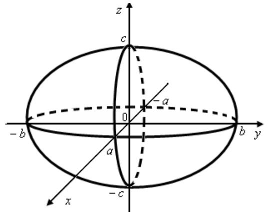

Рисунок 2. 14 – Область интегрирования для типового примера 5

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к сферическим координатам. Из вида области Q следует, что $0 \le r \le R$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$. В этом случае подынтегральная функция примет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi + r^2 \cos^2\theta =$$
$$= r^2 \sin^2\theta + r^2 \cos^2\theta = r^2 .$$

Тогда

$$\iiint\limits_Q \left(x^2 + y^2 + z^2\right) dxdydz = \int\limits_0^R dr \int\limits_0^\pi d\theta \int\limits_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin\theta \, d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^\pi \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int\limits_0^R r^4 dr \int\limits_0^\pi \sin\theta \, d\theta =$$

$$= 4\pi \int\limits_0^R r^4 dr = 4\pi \frac{r^5}{5}\Big|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

5 Вычислить $\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz$, где Q – эллипсоид (рисунок 2. 14) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1$.

Решение. Переходя к обобщенным сферическим координатам, получим уравнение эллипсоида $r^2 = 1$.

Тогда

$$\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz =$$

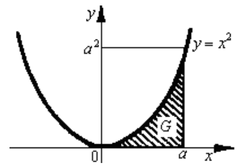

Рисунок 2. 2 – Область интегрирования для типового примера 1

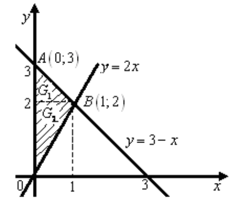

Рисунок 2. 3 – Область интегрирования для типового примера 2

Если внутренний интеграл взять по y, то область G рассмотрим как криволинейную трапецию, ограниченную слева прямой $x = 0$, справа – прямой $x = 1$; снизу – прямой $y = 2x$, сверху – прямой $y + x = 3$. Отсюда $0 \le x \le 1$, $2x \le y \le 3 - x$. Поэтому пределы расставятся следующим образом:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3-x} f(x,y)\,dy$$

Если внутренний интеграл будем брать по x, то область G разбивается прямой $y = 2$ на две непересекающиеся области:

$$G_1 = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le x \le \frac{y}{2},\ 0 \le y \le 2x \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le x \le 3 - x,\ 2 \le y \le 3 \right\}.$$

Используя свойство аддитивности интеграла, получим:

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{G_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{G_2} f(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dx .$$

3 Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_G x^2 y dxdy$ по области, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 2x^3$, $x + y = 3$.

Решение. Область интегрирования G состоит из двух непересекающихся областей G_1 и G_2 (рисунок 2. 4).

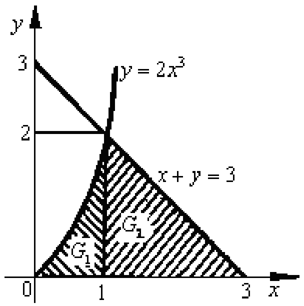

Рисунок 2. 4 – Область интегрирования
для типового примера 3

Рассмотрим различный порядок интегрирования. Сначала вычислим внешний интеграл по переменной x. В этом случае исходный интеграл сводится к вычислению двух интегралов по областям

$$G_1 = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 2x^3 \right\},$$

$$G_2 = \left\{ (x;y) \middle| 1 \le x \le 3,\, 0 \le y \le 3 - x \right\}.$$

Тогда

$$\iint_G x^2 y\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{2x^3} x^2 y\,dy + \int_1^3 dx \int_0^{3-x} x^2 y\,dy$$

Изменив порядок интегрирования, получим:

$$G = \left\{ (x;y) \middle| 0 \le y \le 2,\, \sqrt[3]{\frac{1}{2}y} \le x \le 3 - y \right\}.$$

Тогда

$$\iint_G x^2 y\,dxdy = \int_0^2 dy \int_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} x^2 y\,dx = \int_0^2 y\,dy \cdot \left(\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{\sqrt[3]{y/2}}^{3-y} =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^2 y\left((3-y)^3 - \frac{y}{2}\right)dy = \frac{1}{3}\int_0^2 y\left(27 - 27y + 9y^2 - y^3 - \frac{y}{2}\right)dy =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{27}{2}y^2 - \frac{1}{5}y^5 + \frac{9}{4}y^4 - \frac{275}{30}y^3\right)\Bigg|_0^2 = \frac{154}{45}.$$

4 Вычислить $\iint_G \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$, если G – прямоугольник

$$\iiint_Q (x+y+z)\,dxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z)\,dz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(y - yx^2 - xy^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \left(2 - 3x + x^3\right)dx =$$

$$= \frac{1}{6}\left(2x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8}.$$

3 Вычислить интеграл $\iiint_Q \left(x^2 + y^2\right)dxdydz$, где область Q ограничена поверхностями $z = x^2 + y^2$ и $z = 1$ (рисунок 2. 12).

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к цилиндрическим координатам. Область Q проектируется в круг $x^2 + y^2 \le 1$. Поэтому $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le r \le 1$. Постоянному значению r в пространстве $Oxyz$ соответствует цилиндр $x^2 + y^2 = r^2$. Рассматривая пересечение этого цилиндра с областью Q, получаем изменение координаты z от точек, лежащих на параболоиде, до значений тех точек, лежащих на плоскости $z = 1$, т. е. $r^2 \le z \le 1$.

Имеем:

$$\iiint_Q \left(x^2 + y^2\right)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{\rho^2}^1 r^2 \cdot r\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(r^3 z\right)\Big|_{\rho^2}^1 dr = \int_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi = \frac{1}{12}\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{6}.$$

4 Вычислить интеграл $\iiint_V \left(x^2 + y^2 + z^2\right)dxdydz$, где область Q есть шар $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ (рисунок 2. 13).

Примеры оформления решения

1 Вычислить $\iiint\limits_{Q}(x+y+z)dxdydz$, где

$$Q=\left\{\left(x;y;z\right)\middle|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\right\}.$$

Решение. Область интегрирования – прямоугольный параллелепипед. Поэтому:

$$\iiint\limits_{Q}(x+y+z)\,dxdydz=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{2}dy\int\limits_{0}^{3}(x+y+z)\,dz=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{2}\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\bigg|_{0}^{3}dy=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{0}^{2}\left(3x+3y+\frac{9}{2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left(3xy+\frac{3}{2}y^2+\frac{9}{2}y\right)\bigg|_{0}^{2}dx=\int\limits_{0}^{1}(6x+6+9)\,dx=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}(6x+15)\,dx=\left(3x^2+15x\right)\Big|_{0}^{1}=3+15=18.$$

2 Вычислить интеграл $\iiint\limits_{Q}(x+y+z)dxdydz$, область Q ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-1=0$.

Решение. Область Q проектируется на плоскость Oxy в область G, которая представляет собой треугольник (рисунок 2. 11): $G=\left\{\left(x;y\right)\middle|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\right\}$.

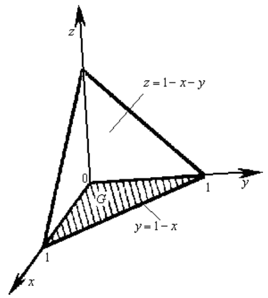

Рисунок 2. 11 – Область интегрирования для типового примера 2

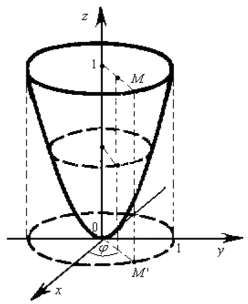

Рисунок 2. 12 – Область интегрирования для типового примера 3

Имеем

$$G=\left\{x\middle|\ 1\le x\le 2, 0\le y\le 1\right\}.$$

Решение. Относительно переменных $y=x$ и y интегралы $\int\frac{dx}{(x+y+1)^2}$ и $\int\frac{dy}{(x+y+1)^2}$ табличные, поэтому двойной интеграл сведем к следующему повторному:

$$\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{(x+y+1)^2}=\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{0}^{1}\frac{dy}{(x+y+1)^2}=\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{0}^{1}\frac{d(x+y+1)}{(x+y+1)^2}=$$

$$\int\limits_{1}^{2}\left(\left(-\frac{1}{x+y+1}\right)\bigg|_{0}^{1}\right)dx=\int\limits_{1}^{2}\left(-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$$

$$=\left(-\ln(x+2)+\ln(x+1)\right)\Big|_{1}^{2}=-\ln 4+\ln 3+\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3\cdot 3}{4\cdot 2}=\ln\frac{9}{8}.$$

5 Вычислить $\iint\limits_{G}\frac{xdxdy}{x^2+y^2}$, где G – область, ограниченная параболой $y=\frac{1}{2}x^2$ и прямой $y=x$.

Решение. Найдем точки пересечения параболы и прямой:

$$\begin{cases}y=\frac{1}{2}x^2\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}x^2\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2-2x=0\\ y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=0\,;x_2=2\\ y=x\end{cases}$$

Получаем точки: $O(0;0)$ и $A(2;2)$

Итак, снизу область G ограничена параболой $y=\frac{1}{2}x^2$, сверху – прямой $y=x$:

$$G=\left\{x\middle|\ 0\le x\le 2, \frac{1}{2}x^2\le y\le x\right\}.$$

Отсюда получаем:

$$\iint\limits_{G}\frac{xdxdy}{x^2+y^2}=\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\frac{xdy}{x^2+y^2}=\int\limits_{0}^{2}xdx\int\limits_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\frac{dy}{x^2+y^2}=$$

$$=\int\limits_{0}^{2}\left(\frac{x}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\bigg|_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\right)dx=\int\limits_{0}^{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\bigg|_{\frac{1}{2}x^2}^{x}\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{x}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx=\int_0^2\left(\frac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{\pi}{4}x\Big|_0^2-\int_0^2\operatorname{arctg}\frac{x}{2}dx=\left[\begin{matrix}u=\operatorname{arctg}\frac{x}{2},\ du=\frac{2dx}{x^2+4},\\ dv=dx\qquad v=x\end{matrix}\right]=$$

$$=\frac{\pi}{4}-\left(x\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{2xdx}{x^2+4}\right)=\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}1+\int_0^2\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}=$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}+\ln\left(x^2+4\right)\Big|_0^2=\ln 8-\ln 4=\ln\frac{8}{4}=\ln 2.$$

Тема 6,8 Замена переменных в двойном интеграле, приложения двойных интегралов

1 Вычислить $\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линией $x^2+y^2=4y$.

2 Вычислить $\iint\limits_G 2\pi\left(x^2-y^2\right)\sin\pi(x-y)^2\,dxdy$, где G – параллелограмм: $x+y=2$, $x+y=4$, $x-y=-1$, $x-y=2$.

3 Вычислить $\iint\limits_G\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, где G – область, ограниченная линией $\left(x^2+y^2\right)^2=4\left(x^2-y^2\right)$.

4 Вычислить $\iint\limits_G\sin\pi\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)dxdy$, где G – область, ограниченная линиями $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ и $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$.

5 Вычислить $\iint\limits_G\frac{dxdy}{(x+y)^3}$, где G – трапеция $ABCD$: $A(1;3)$, $B(2;6)$, $C(6;2)$, $D(3;1)$.

6 Найти площадь области G, ограниченной линиями

$$3x-3y-7=0,\ y^2+2y-3x=0.$$

и) $\iiint\limits_Q 8y^2ze^{-xyz}dxdydz$, Q: $x=0$, $x=2$, $y=-1$, $y=0$, $z=0$, $z=2$;

к) $\iiint\limits_Q\frac{dxdydz}{(4x+3y+z-2)^6}$, Q: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

л) $\iiint\limits_Q(1-2y)dxdydz$, Q: $z=y^2$, $z+2x=6$, $x=0$, $z=4$;

м) $\iiint\limits_Q x^2y^2dxdydz$, Q: $x^2+y^2\le 1$, $0\le z\le x^2+y^2$.

2 Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=4-y^2$, $z=y^2+2$, $x=-1$, $x=2$.

3 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=2z$, $z=2$, если плотность $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

4 Найти массу шара $x^2+y^2+z^2\le 2x$, если плотность

$$\rho(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

5 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностями $z=2y^2$, $z=3y^2$ $(y\ge 0)$, $z=4x$, $z=5x$, $z=3$, с плотностью $\rho(x,y,z)=y$.

6 Вычислить объем тела Q, ограниченного поверхностями $2z=y^2$, $2x+3y=12$, $x=0$, $z=0$.

7 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=10x$, $x^2+y^2=13x$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z=0$, $y\ge 0$.

8 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $z=\sqrt{64-x^2-y^2}$, $12z=x^2+y^2$.

9 Найти массу однородного тела Q, ограниченного поверхностями $x^2+y^2+z^2=16$, $x^2+y^2+z^2=8z$

10 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностью $9x^2+2y^2+18z^2=18$, если плотность

$$\rho(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)\sqrt{\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{9}+z^2}.$$

Отсюда $C'(y)=y$ и $C(y)=\frac{y^2}{2}$.

Поэтому

$$U(x;y)=6x^2y+\frac{4}{3}x^3+\frac{y^2}{2}.$$

Тогда данный интеграл равен

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)}\left(12xy+4x^2\right)dx+\left(6x^2+y\right)dy=U(1;1)-U(0;0)=6+\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{51}{6}.$$

Тема 9-10 Тройной интеграл

1 Вычислить следующие тройные интегралы по указанным пространственным областям:

а) $\iiint\limits_Q\left(5x+\frac{3}{2}z\right)dxdydz$, Q: $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=0$, $z=x^2+15y^2$;

б) $\iiint\limits_Q\left(x+y+z^2\right)dxdydz$, Q: $-1\le x\le 0$, $0\le y\le 1$, $2\le z\le 3$;

в) $\iiint\limits_Q\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, Q: $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

г) $\iiint\limits_Q(4x-y+z)dxdydz$, Q $z=2-x^2$, $x+y=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$;

д) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, Q: $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$, $z=0$, $y=x$, $y=2x$, $x=\frac{1}{2}$;

е) $\iiint\limits_Q ydxdydz$, Q: $4\le x^2+y^2+z^2\le 16$, $y\le\sqrt{3}x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$;

ж) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, Q: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $z\ge 0$;

7 Найти массу пластинки $y=x$, $y=x+3$, $x=0$, $x=1$, если поверхностная плотность равна сумме координат точки.

8 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y^2=10x+25,\ y^2=-6x+9.$$

9 Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x,\ x=2y,\ x+y=1,\ x+3y=1.$$

10 Вычислить площадь области, ограниченной кривой

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2x^3.$$

11 Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями:

а) $z=x^2+y^2$, $x-y=0$, $\sqrt{3}x-y=0$, $x^2+y^2=8$ ($x\ge 0$, $y\ge 0$);

б) $x^2+y^2=4x$, $2z=x^2+y^2$, $z=0$;

в) $z=x^2+y^2$, $x=0$, $y=0$, $x=2$, $y=3$;

г) $x^2+y^2=4$ отсекаемого плоскостями $z=0$, $z=3x$, $z\ge 0$.

12 Найти массу плоской пластинки G с плотностью $\rho(x;y)$ и ограниченной линиями:

а) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}\le 1$, $x\le 0$, $y\ge -\frac{3}{2}x$, $\rho(x,y)=xy^2$;

б) $x+y=1$, $x+y=2$, $2x-y=0$, $4x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^2$;

в) $x+y=1$, $x+y=2$, $3x-y=0$, $4x-y=0$, $\rho(x;y)=(x+y)^{-4}$.

13 Найти статические моменты относительно осей координат, центр тяжести и моменты инерции однородной пластинки, ограниченной линиями:

а) $x+y=4$, $x-3y=0$, $x+5y=16$;

б) $y=x^2+1$, $x-y+3=0$;

в) $xy=12$, $x-3y=0$, $4x-3y=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$;

г) $x^2+y^2=4$, $y=2x-x^2$, $x=0$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интеграл $\iint\limits_G y^3dxdy$ по области

$$G=\left\{(x;y)\middle|\ y\ge x^2, y\le 2x^2, xy\ge 1, xy\le 2\right\}.$$

Р е ш е н и е. Область G представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную графиками функций $y = x^2$, $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ (рисунок 2. 5, а).

Рассмотрим непрерывно дифференцируемое при $x \ge 0$ отображение вида:

$$u = \frac{y}{x^2},\ v = xy.$$

Образом области G является квадрат (рисунок 2. 5, б)

$$G^* = \left\{ (u;v) \middle|\ 1 \le u \le 2, 1 \le v \le 2 \right\}.$$

Данное отображение является взаимно однозначным и

$$x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}},\ y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}.$$

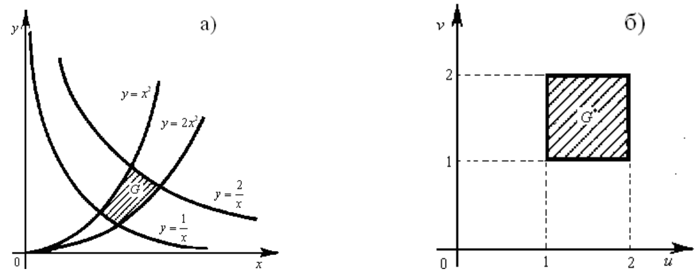

Рисунок 2. 5 – Области G (а) и G^* (б) для типового примера 1

Найдем якобиан отображения:

$$J = \frac{D(x;y)}{D(u;v)} == \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} u^{-\frac{4}{3}} v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} v^{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{3u}.$$

Тогда

$$\iint_G y^3 dxdy = \left[\begin{aligned} & x = u^{-\frac{1}{3}} v^{\frac{1}{3}}, y = u^{\frac{1}{3}} v^{\frac{2}{3}}, \\ & |J| = \frac{1}{3|u|} \end{aligned} \right] = \iint_{G^*} uv^2 \frac{1}{3|u|} dudv =$$

$$= \frac{1}{3} \iint_{G^*} v^2 dudv = \frac{1}{3} \int_1^2 du \int_1^2 v^2 dv = \frac{1}{3} u \Big|_1^2 \cdot \frac{v^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{1}{3} (2-1) \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{7}{9}.$$

$$\int_{(0;0)}^{(1;1)} \left(12xy + 4x^2 \right) dx + \left(6x^2 + y \right) dy,$$

предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение.

Р е ш е н и е. Функции

$$P(x;y) = 12xy + 4x^2,\ Q(x;y) = 6x^2 + y$$

непрерывны вместе со своими частными производными в любой односвязной области, содержащей точки $(0;0)$ $(1;1)$.

Поскольку

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12x,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 12x,$$

то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Следовательно, данный интеграл не зависит от пути интегрирования. Поэтому подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x;y)$:

$$dU = \left(12xy + 4x^2 \right) dx + \left(6x^2 + y \right) dy.$$

С другой стороны

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy.$$

Сравнивая два выражения для dU, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 12xy + 4x^2,\ \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 + y.$$

Из первого равенства, считая y постоянным, находим

$$U(x;y) = 6x^2 y + \frac{4}{3} x^3 + C(y).$$

Находим частную производную по переменной y

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2 + C'(y).$$

Сравнивая полученное выражение с имеющимся для $\frac{\partial U}{\partial y}$, получим

$$6x^2 + C'(y) = 6x^2 + y.$$

$$\Gamma=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2=4\right\}.$$

Решение. Вычислим интеграл с помощью формулы Грина. Имеем

$$P(x;y)=x-y,\qquad Q(x;y)=x+y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-1,\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=1.$$

Тогда

$$\oint\limits_{x^2+y^2=4}(x-y)dx+(x+y)dy=\iint\limits_{x^2+y^2\le 4}(1+1)dxdy=2\pi\cdot 2^2=8\pi.$$

2 Вычислить интеграл $\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx+xdy$.

Решение. Здесь $P=y$, $Q=x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$. Следовательно, интеграл не зависит от пути интегрирования и дифференциал

$$d(xy)=xdy+ydx.$$

Тогда

$$\int\limits_{(0;0)}^{(1;1)} ydx+xdy=xy\Big|_{(0;0)}^{(1;1)}=1-0=1.$$

3 Вычислить площадь, ограниченную астроидой

$$x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t,\ 0\le t\le 2\pi$$

Решение. Находим площадь:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(a\cos^3 t\cdot 3a\sin^2 t\cos t+a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t\sin t\right)dt=$$

$$=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\left(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t\right)dt=\frac{3a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t dt=$$

$$=\frac{3a^2}{8}\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2t dt=\frac{3a^2}{16}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos 4t)dt=\frac{3a^2}{16}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{3a^2\pi}{8}.$$

4 Вычислить криволинейный интеграл

2 Вычислить интеграл $\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy$, где

$$G=\left\{(x;y)\middle|x^2+y^2\le 1, x\ge 0,\ y\le 0\right\}.$$

Решение. Область G представляет собой часть круга радиуса 1, расположенного в первой четверти (рисунок 2. 6, а) Преобразуем двойной интеграл к полярным координатам. При этом область G преобразуется в прямоугольник (рисунок 2. 6, б):

$$G^*=\left\{(r;\varphi)\middle|0\le r\le 1;\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

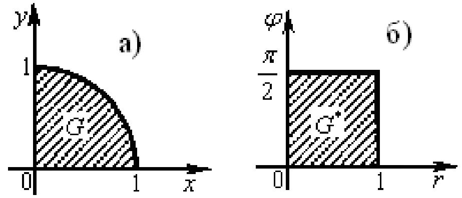

Рисунок 2. 6 – Области G (а) и G^* (б) для типового примера 2

Имеем:

$$\iint\limits_G e^{x^2+y^2}dxdy=\iint\limits_{G^*}e^{r^2\cos^2\varphi+r^2\sin\varphi}r\,drd\varphi=\iint\limits_{G^*}e^{r^2}r\,drd\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 e^{r^2}d(r^2)\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=\frac{1}{2}e_0^1\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e-1)\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}(e-1).$$

3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x=4y-y^2,\ x+y=6.$$

Решение. Найдем координаты точек пересечения данных линий. Для этого решим систему:

$$\begin{cases}x=4y-y^2,\\ x+y=6,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=4y-y^2,\\ 4y-y^2+y-6=0,\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=4y-y^2,\\ y^2-5y+6=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=4, x_2=3,\\ y_1=2, y_2=3.\end{cases}$$

Итак, имеем две точки пересечения $A(4;2)$ и $B(3;3)$.

Тогда площадь равна:

$$S=\iint\limits_G dxdy=\int\limits_2^3 dy\int\limits_{6-y}^{4y-y^2}dx=\int\limits_2^3\left(x\Big|_{6-y}^{4y-y^2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_2^3\left(-y^2+5y-6\right)dy=\left(-\frac{1}{3}y^3+\frac{5}{2}y^2-6y\right)\Bigg|_2^3=\frac{1}{6}.$$

4 Вычислить $\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy$, если область G ограничена окружностью $x^2+y^2=2ax$.

Решение. Преобразуем уравнение окружности:

$$x^2+y^2-2ax=0;\ (x-a)^2+y^2=a^2.$$

Область G представляет собой окружность с центром в точке $(a;0)$ и радиусом a (рисунок 2. 7).

Переходя к полярным координатам

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,\ -\pi/2\le\varphi\le\pi/2,$$

получаем уравнение окружности:

$$x^2+y^2=2ax\ \Rightarrow\ r^2=2ar\cos\varphi\ \Rightarrow\ r(r-2a\cos\varphi)=0.$$

Отсюда $r_1=0$; $r_2=2a\cos\varphi$, т. е.

$$0\le r\le 2a\cos\varphi.$$

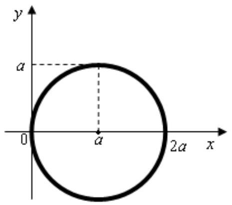

Рисунок 2. 7 – Область G для типового примера 5

Тогда

$$\iint\limits_G\left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint\limits_{G^*}r^2\cdot rdrd\varphi=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}r^3dr=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{r^4}{4}\Bigg|_0^{2a\cos\varphi}\right)d\varphi=$$

$$=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4a^4\cos^4\varphi d\varphi=4a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=4a^4\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$

Тема 7 Формула Грина

1 Проверить, зависят ли следующие криволинейные интегралы от пути интегрирования:

а) $\int\limits_\Gamma 2xe^{x^2+y^2}dx+3y^2e^{x^2+y^2}dy$;

б) $\int\limits_\Gamma 8x\sin\left(4x^2-5y^2\right)dx-10y\sin\left(4x^2-5y^2\right)dy$;

в) $\int\limits_\Gamma\left(xy^3+x^2-2y^2\right)dx+\left(y^5-3x^3y^2+x^4\right)dy$.

2 Применив формулу Грина, вычислить криволинейные интегралы:

а) $\oint\limits_\Gamma\left(1-x^2\right)ydx+x\left(1+y^2\right)dy$, $\Gamma=\left\{\ (x;y)\middle|\ x^2+y^2=9\right\}$;

б) $\oint\limits_\Gamma 2\left(x^2+y^2\right)dx+(x+y)^2dy$, Γ – треугольник с вершинами $A(1;1)$, $B(2;2)$, $C(1;3)$;

в) $\oint\limits_\Gamma(xy+x+y)dx+(xy+x-y)dy$, $\Gamma=\left\{\ (x;y)\middle|\ x^2+y^2=ax\right\}$;

г) $\oint\limits_\Gamma 2xdx-ydx$, где Γ – замкнутый контур, ограниченный дугой параболы $y=x^2$ $(0\le x\le1)$ и отрезком прямой $y=x$ между точками $O(0;0)$ и $B(1;1)$.

3 Вычислить криволинейный интеграл, предварительно определив функцию $U(x;y)$, соответствующим полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение:

а) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)}\left(3y^2+4y\right)dx+(6xy+4x-4y)dy$;

б) $\int\limits_{(-1;-1)}^{(1;1)}\left(4x^3-3y^2+5y\right)dx+(5x-6xy-4y)dy$.

Примеры оформления решения

1 Вычислить интеграл $\oint\limits_\Gamma(x-y)dx+(x+y)dy$, где

Тогда относительно системы координат Oxy уравнения катетов AC и BC будут $y = x + a$ и $y = a - x$. Согласно условию задачи в точке $(x; y)$ треугольника ABC плотность имеет вид $\rho(x; y) = ky$.

Масса равна:

$$m = \iint\limits_{ABC} ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = k\int\limits_0^a y\left(x\Big|_{y-a}^{a-y}\right)dy =$$

$$= k\int\limits_0^a y(a - y - y + a)dy = 2k\int\limits_0^a \left(ay - y^2\right)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^3}{3}.$$

Находим статические моменты:

$$S_x = \iint\limits_{ABC} y \cdot ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y^2 dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^2(a-y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^4}{6};$$

$$S_y = \iint\limits_{ABC} x \cdot ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y\,dy \int\limits_{y-a}^{a-y} x\,dx = 0.$$

Координаты центра тяжести:

$$x_c = 0, \; y_c = \frac{a}{2}.$$

Момент инерции относительно гипотенузы AB представляет собой I_x. Поэтому:

$$I_x = \iint\limits_{ABC} y^2\,ky\,dxdy = k\int\limits_0^a y^3 dy \int\limits_{y-a}^{a-y} dx = 2k\int\limits_0^a y^3(a-y)dy =$$

$$= 2k\left(\frac{ay^4}{4} - \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^a = \frac{ka^5}{10}.$$

$$= a^4\left(\frac{3}{2}\varphi + \sin 2\varphi + \frac{1}{8}\sin 4\varphi\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = a^4\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{3}{2}a^4\pi.$$

5 Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

Решение. Из уравнения конуса имеем

$$z_x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \; z_y' = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Проекцией поверхности на плоскость Oxy является круг, ограниченный окружностью $(x-1)^2 + y^2 = 1$ (рисунок 2. 8).

Площадь поверхности равна:

$$S = \iint\limits_G \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dxdy = \sqrt{2}\iint\limits_G dxdy =$$

$$= \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, J = r, \\ \dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 \le r \le 2\cos\varphi \end{bmatrix} = \sqrt{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} rdr = 2\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{2\cos\varphi}\right)d\varphi =$$

$$= 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = 4\sqrt{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 2\sqrt{2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\sqrt{2}.$$

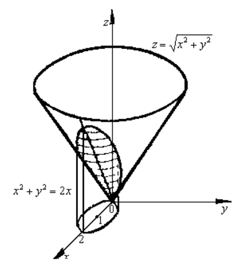

Рисунок 2. 8 – Рисунок для типового примера 6

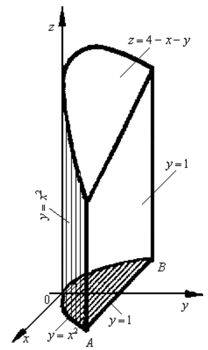

Рисунок 2. 9 – Рисунок для типового примера 7

6 Найти объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = x^2,\ x + y + z = 4,\ y = 1,\ z = 0.$$

Решение. Данное тело представляет собой вертикальный цилиндр, который сверху ограничен частью плоскости $z = 4 - x - y$, снизу – частью плоскости, заключенной между параболой $y = x^2$ и прямой $y = 1$ (рисунок 2. 9).

Объем равен:

$$V = \iint\limits_G (4 - x - y)dxdy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (4 - x - y)dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\left((4 - y)x - \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \right) dy = 2\int_0^1 (4 - y)\sqrt{y}\, dy =$$

$$= 8\int_0^1 y^{\frac{1}{2}} dy - 2\int_0^1 y^{\frac{3}{2}} dy = \frac{68}{15}.$$

7 Найти массу кругового кольца, если в каждой его точке поверхностная плотность обратно пропорциональна квадрату расстояния ее до центра кольца.

Решение. Обозначим радиусы окружностей, ограничивающих кольцо, через r_1 и r_2, $r_1 < r_2$. Поместим полярный радиус системы координат в центре кольца. Тогда уравнения окружностей примут вид $r = r_1$ и $r = r_2$. Поверхностная плотность в любой точке кольца равна $\rho = \dfrac{k}{r^2}$.

Масса кольца равна

$$m = \iint\limits_G \frac{k}{x^2 + y^2} dxdy = \begin{bmatrix} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, |J| = r, \\ 0 \le \varphi \le 2\pi, r_1 \le r \le r_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \frac{k}{r^2} r\, dr = k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = k\int_0^{2\pi} \left(\ln r \Big|_{r_1}^{r_2} \right) d\varphi =$$

$$= k \ln\frac{r_1}{r_2} \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi k \ln\frac{r_1}{r_2}.$$

8 Найти массу пластинки G, заданной неравенствами

$$1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 4,\ x \ge 0,\ y \ge \frac{3x}{2},$$

если поверхностная плотность $\rho(x, y) = \dfrac{9x}{y^3}$

Решение. Переходим к обобщенным полярным координатам

$$x = 2r\cos\varphi,\ y = 3r\sin\varphi.$$

Якобиан отображения равен $J = 6r$.

Из неравенства $1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 4$ получим $1 \le r^2 \le 4$, т. е. $1 \le r \le 2$.

Из уравнения прямой $y = \dfrac{3}{2}x$ имеем

$$3r\sin\varphi = 3r\cos\varphi \ \Rightarrow\ \operatorname{tg}\varphi = 1.$$

Отсюда $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. Поскольку $x \ge 0$, то очевидно, что $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Масса равна:

$$m = \iint\limits_G \frac{9x}{y^3} dxdy = \iint\limits_{G^*} \frac{9 \cdot 2r\cos\varphi}{27r^3\sin^3\varphi} \cdot 6rdrd\varphi =$$

$$= 4\iint\limits_{G^*} \frac{\cos\varphi}{r\sin^3\varphi} drd\varphi = 4\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi} d\varphi \int_1^2 \frac{dr}{r} =$$

$$= -\frac{2}{\sin^2\varphi}\Bigg|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \ln r \Big|_1^2 = (-2 + 4)\cdot(\ln 2 - \ln 1) = 2\ln 2.$$

9 Найти центр масс равнобедренного прямоугольного треугольника, если в каждой его точке поверхностная плотность пропорциональна расстоянию ее до гипотенузы. Найти момент инерции данного треугольника относительно его гипотенузы.

Решение. Пусть в прямоугольном равнобедренном треугольнике ABC гипотенуза AB (рисунок 2. 10).

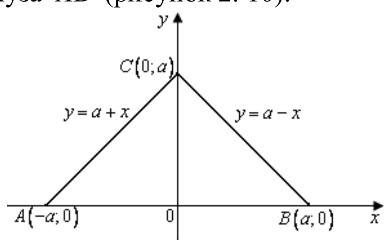

Рисунок 2. 10 – Рисунок для типового примера 10