Практическое занятие 5 **Ряды Тейлора и Маклорена**

5.1 Разложение функций в степенные ряды
5.2 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена
5.3 Приложения степенных рядов

5.1 Разложение функций в степенные ряды

Пусть функция $f(x)$ имеет в окрестности точки x_0 производные любого порядка. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$= f(x_0)+f'(x_0)+(x-x_0)+\frac{f'(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$ в точке x_0.

Если $x_0=0$, то ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$

и называется *рядом Маклорена*.

Радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ может быть как равным нулю, так и отличным от него, причем в последнем случае сумма $S(x)$ ряда Тейлора может не совпадать с $f(x)$. Важно определить, когда в формуле

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

допустим знак равенства, т. е. когда ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$, для которой он составлен. Если $S(x)=f(x)$ на $(x_0-R;x_0+R)$, то говорят, что функция $f(x)$ *разложима в ряд Тейлора в окрестности точки* x_0.

Частичные суммы ряда Тейлора

$$S_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n =$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

представляют собой многочлены Тейлора для $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 1 (Тейлора) Пусть

1) функция $f(x)$ имеет в окрестности $U(R;x_0)$ точки x_0 производные любого порядка;

2) $\forall\, x\in U(R;x_0)$ выполняется условие

$$\left|f^{(k)}(x)\right|\le M\frac{k!}{R^n},\ k=0,1,2,\ldots .$$

Тогда функция $f(x)$ разлагается на множестве $U(R;x_0)$ единственным образом:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\ldots .$$

Следствие 1 Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ разлагалась в ряд Тейлора в окрестности этой точки, необходимо и достаточно, чтобы остаток в формуле Тейлора стремился к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0\quad \forall x\in(x_0-R;x_0+R).$$

Следствие 2 Если для любых $x\in(x_0-R;x_0+R)$ все производные функции $f(x)$ ограничены одной и той же константой M, то ряд Тейлора $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ сходится к функции $f(x)$ в интервале $|x-x_0|<R$.

5.2 Разложение элементарных функций в ряд Маклорена

При $x_0=0$ формула Тейлора имеет вид:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f'(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\ldots$$

и называется формулой *Маклорена*.

Основные разложения в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \ldots, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \ x \in \mathbf{R},$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \ x \in (-1;1),$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{a(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \ x \in (-1;1).$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

называется *биномиальным*, так как при $\alpha = n \in \mathbf{N}$ все коэффициенты данного ряда, начиная с номера $n+1$, обращаются в нуль, и степенной ряд преобразуется в бином Ньютона

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{n!} x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

5.3 Приложения степенных рядов

Ряды Тейлора и Маклорена используются при вычислении приближенных значений функций, интегралов, решении дифференциальных уравнений.

П р и б л и ж е н н о е в ы ч и с л е н и е з н а ч е н и й ф у н к ц и й. Для нахождения приближенного значения функции $f(x)$ в точке x_0 с заданной точностью поступают следующим образом. Функцию $f(x)$ раскладывают в ряд по степеням $x - x_1$ в интервале сходимости, содержащим точку x_0. Точка x_1 – это точка, в которой значения функции и ее производных вычисляются точно. Переменной x придается значение x_0. В полученном числовом ряду $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x_0 - x_1)^n$ оставляются только члены, гарантирующие заданную точность вычислений. Минимальное число n_0 таких членов ряда определяется из соответствующей оценки либо остатка $R_n(x_0)$ формулы Тейлора, либо остатка $r_n(x_0)$ ряда Тейлора, так как в случае сходимости степенного ряда функции $f(x)$ они равны между собой.

П р и б л и ж е н н о е в ы ч и с л е н и е и н т е г р а л о в. Многие определенные интегралы, не выражающиеся в элементарных функциях, могут быть вычислены с помощью рядов.

И н т е г р и р о в а н и е д и ф ф е р е н ц и а л ь н ы х у р а в н е н и й. Степенные ряды могут применяться также для решения дифференциальных уравнений, например, в случае, если их решения не удается найти в элементарных функциях.

Вопросы для самоконтроля

1 Какой степенной ряд называется рядом Тейлора для функции $y = f(x)$? Как из него получить ряд Маклорена?

2 Сформулируйте теорему Тейлора о разложении функции в ряд Тейлора.

3 Приведите разложения основных элементарных функций в ряд Маклорена.

Решение типовых примеров

1 Разложить функцию $f(x) = 2^x$ в степенной ряд.

Решение. Найдем значение функции и ее производных в точке $x=0$:

$$f(x)=2^x, \qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=2^x\ln 2, \qquad f'(0)=\ln 2,$$
$$f''(x)=2^x\ln^2 2, \qquad f''(0)=\ln^2 2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$f^{(n)}(x)=2^x\ln^n 2, \qquad f^{(n)}(0)=\ln^n 2.$$

Так как $0<\ln 2<1$, то при фиксированном x имеет место неравенство

$$\left|f^{(n)}(x)\right|<2^x$$

при любом n. Следовательно, функция может быть представлена в виде суммы ряда Тейлора

$$2^x=1+x\cdot\ln 2+\frac{x^2\cdot\ln^2 2}{2!}+\frac{x^3\cdot\ln^3 2}{3!}+\dots.$$

2 Разложить функцию $f(x)=\sin^2 x$ в степенной ряд.

Решение. Функцию $f(x)=\sin^2 x$ можно записать в виде

$$f(x)=\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x).$$

Заменим $\cos 2x$ его разложением в ряд Маклорена

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\dots=$$
$$=1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\dots.$$

Подставляя, получим

$$\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)=\frac{1}{2}\left(1-\left(1-\frac{4x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\dots\right)\right)=$$
$$=\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\dots.$$

3 Разложить функцию $f(x)=e^{-x^2}$ в степенной ряд.

Решение. В разложении

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+\dots$$

заменим x на $\left(-x^2\right)$. Получим

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+\dots,\ \forall\ x\in\mathbf{R}.$$

4 Разложить функцию $f(x)=\ln x$ в степенной ряд по степеням $(x-1)$.

Решение. В разложении $\forall x\in(-1;1)$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$$

заменим x на $(x-1)$. Получим $\forall x\in(0;2)$

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\dots.$$

5 Разложить функцию $f(x)=\dfrac{1}{x}$ в степенной ряд по степеням $(x-2)$.

Решение. Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}.$$

Правую часть можно рассматривать как сумму бесконечно убывающей прогрессии с первым членом $a_1=\dfrac{1}{2}$ и и знаменателем $q=-\dfrac{x-2}{2}$.

Отсюда получаем

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\dots,$$

Тогда

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{x-2}{4}+\frac{(x-2)^2}{8}-\frac{(x-2)^3}{16}+\ldots .$$

Поскольку ряд сходится при $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, то разложение имеет место для всех x, удовлетворяющих неравенству $0<x<4$.

6 Разложить по целым неотрицательным степеням переменной x до члена с x^3 функцию

$$f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}.$$

Решение. Используем разложение $\forall x\in(-1;1)$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{a(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots$$

для разложения функций

$$f_1(x)=\left(1+x^3-2x\right)^{\frac{1}{2}} \text{ и } f_2(x)=\left(1+x^2-3x\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Для первой функции имеем

$$f_1(x)=\left(1+\left(x^3-2x\right)\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(x^3-2x\right)+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left(x^3-2x\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}\left(x^3-2x\right)^3+o\left(\left(x^3-2x\right)^3\right)=$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right),$$

так как $o\left(x^3-2x\right)=o\left(x^3\right)$.

Для второй функции аналогично получим

$$f_2(x)=\left(1+\left(x^2-3x\right)\right)^{\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}\left(x^2-3x\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(x^2-3x\right)^2+$$

$$+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(x^2-3x\right)^3+o\left(x^3\right)=$$

$$=1-\frac{1}{3}x^2-x+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)=1-x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right).$$

Тогда

$$f(x)=f_1(x)-f_2(x)=$$

$$=1-x+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2+o\left(x^3\right)-\left(1-x-\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{6}x^2+x^3+o\left(x^3\right)$$

(воспользовались тем, что $o\left(x^3\right)-o\left(x^3\right)=o\left(x^3\right)$).

7 Вычислить с точностью $\varepsilon=0{,}01$ число e.

Решение. Так как

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^n}{k!}+R_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\xi<x,\ \forall x\in\mathbf{R},$$

то из оценки

$$\left|R_n(1)\right|=\frac{e^\xi}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}\le 0{,}01$$

следует, что $n\ge 5$, т. е. $n_0=5$. Полагая $x_0=1$, $x_1=0$, получим

$$e\approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}\approx 2+0{,}500+0{,}167+0{,}042+0{,}008=2{,}717.$$

8 Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}$.

Решение. Заменим e^x и $\sin x$ их разложением в ряд Маклорена

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^x-2-2x-x^2}{x-\sin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)-2-2x-x^2}{x-\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^4}{4!}\ldots+}{\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\ldots}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3!}+\frac{2x}{4!}\ldots+}{\frac{1}{3!}-\frac{x^2}{5!}+\ldots}=2.$$

9 Вычислить $\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Имеем $\forall x \in \mathbf{R}$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$$

Тогда

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{1/3} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}.$$

Отсюда

$$|r_n| \le \frac{1}{(n+1)!(2n+3)3^{2n+3}} \le 0{,}001 \Rightarrow n \ge 1 \Rightarrow n_0 = 1$$

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} \approx 0{,}3333 - 0{,}0123 = 0{,}3210.$$

Окончательно получаем

$$\int_0^{1/3} e^{-x^2} dx \approx 0{,}321$$

с точностью $\varepsilon = 0{,}001$.

10 Найти решение уравнения

$$yy' = \sin y,$$

удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Решение. Уравнение $yy' = \sin y$ допускает разделение переменных:

$$\frac{ydy}{\sin y} = dx.$$

Однако интеграл от левой части уравнения не выражается в элементарных функциях. В окрестности $x_0 = 0$ уравнение удовлетворяет условиям теоремы о существовании и единственности решения задачи Коши. Будем искать его в виде ряда Маклорена

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Так как $y(0) = \frac{\pi}{2}$ и $y' = \frac{\sin y}{y}$, то $y'(0) = \frac{2}{\pi}$. Дифференцируя по x обе части равенства $y' = \frac{\sin y}{y}$, находим

$$y'' = \frac{(y' \cos y)y - y' \sin y}{y^2} = \frac{y'(y \cos y - \sin y)}{y^2}.$$

Откуда

$$y''(0) = \frac{-y'(0)\sin(\pi/2)}{(\pi/2)^2} = -\left(\frac{2}{\pi}\right)^3.$$

Дифференцируя обе части найденного равенства для y'', находим $y'''(0)$. Продолжая этот процесс, можно получить любое число членов разложения в ряд Маклорена искомого решения $y = y(x)$:

$$y = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} x - \frac{2^2}{\pi^3} x^2 + \ldots.$$

Задания для аудиторной работы

1 Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $f(x) = 4^x$;
б) $f(x) = \sqrt{1-x}$;
в) $f(x) = \ln(2+x)$;
г) $f(x) = \mathrm{sh}^2 x$;
д) $f(x) = \mathrm{tg}\, x$;
е) $f(x) = (1+x)e^{-x^2}$.

2 Вычислить с точностью 0,0001 значение функций:

а) $\sqrt{24}$;
б) $\cos 18^\circ$;
в) $\mathrm{arctg}\, 0{,}9$;
г) $\ln 3$;
д) $\sqrt[3]{e}$;
е) $\sqrt[4]{17}$.

3 Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{e^x-1-x}$.

4 С точность до 0,0001 вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\dfrac{\sin x}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+x^4}dx$;

б) $\int\limits_0^1\cos^3 xdx$; г) $\int\limits_0^{0,1}\dfrac{e^x-1}{x}dx$.

5 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным условиям:

а) $y'x+y+2=0$, $y(1)=2$;

б) $y'(x-3)+y=0$, $y(-6)=-6$;

в) $y'-y=e^x$, $y(0)=1$;

г) $y''=2x-\operatorname{sh} x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

Задания для домашней работы

1 Разложить в ряд Маклорена функции:

а) $f(x)=\cos^2 x$; г) $f(x)=\operatorname{ch}^2 x$;

б) $f(x)=\sqrt[5]{1+x^2}$; д) $f(x)=\operatorname{ctg} x$;

в) $f(x)=\ln(1+x^4)$; е) $f(x)=\dfrac{\sin x^3}{x^2}$.

2 Вычислить с точностью 0,0001 значение функций:

а) $\sqrt{83}$; г) $\ln 1{,}9$;

б) $\sqrt[4]{e}$; д) $\operatorname{arctg} 0{,}95$;

в) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; е) $\sin 10^\circ$;

3 Найти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-2\operatorname{tg} x}{\ln\left(1+x^3\right)}$.

4 С точность до 0,0001 вычислить определенные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{1}{5}}\dfrac{\cos x}{x}dx$; в) $\int\limits_0^{\frac{1}{8}}\sqrt{1-x^2}dx$;

б) $\int\limits_0^1\sin x^3 dx$; г) $\int\limits_0^{\frac{1}{6}}\dfrac{dx}{\sqrt[5]{1+x^2}}$.

5 Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего указанным условиям:

а) $y'+y=x$, $y(0)=0$;

б) $y'\sin x-y\cos x=\sin x-x\cos x$, $y(0)=0$;

в) $y''+xy=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$;

г) $y''=x^2-\cos x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.