Практическое занятие 2 **Восстановление оригинала по изображению**

2.1 Обратное преобразование Лапласа и теоремы разложения
2.2 Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье

2.1 Теоремы разложения

Для восстановления оригинала $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$ в простейших случаях используется таблица изображений. Дополнительное применение свойств изображений позволяет существенно расширить возможности восстановления оригинала по заданному изображению.

Теорема 1 (Римана-Меллина) Пусть функция $f(t)$ оригинал с показателем роста s_0, а $F(p)$ – ее изображение. Тогда в любой точке t непрерывности оригинала $f(t)$ справедлива формула Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp,$$

где интегрирование производится вдоль любой прямой $\operatorname{Re}p=u$, $u>s_0$, *и интеграл понимается в смысле главного значения.*

Формула Римана-Меллина

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty}F(p)e^{pt}dp$$

является обратной к формуле $F(p)=\int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ и называется *обратным преобразованием Лапласа.*

В точке t_0, являющейся точкой разрыва 1-го рода функции $f(t)$, правая часть формулы Римана-Меллина равна

$$\frac{1}{2}\left(f(t_0-0)+f(t_0+0)\right).$$

Непосредственное применение формулы обращения для восстановления оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ затруднительно. Для нахождения оригинала обычно пользуются теоремами разложения.

Теорема 2 (1-я теорема разложения) Если функция $F(p)$ в окрестности точки $p=\infty$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}=\frac{c_0}{p}+\frac{c_1}{p^2}+\frac{c_2}{p^3}+\ldots,$$

то функция $f(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\frac{t^k}{k!}=c_0+c_1t+c_2\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots$, $t\ge 0$, *является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$:*

$$F(p)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{p^{k+1}}\doteq\sum_{k=0}^{\infty}c_k\cdot\frac{t^k}{k!}=f(t).$$

Вторую теорему разложения можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3 (2-я теорема разложения) Если $F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$ *– рациональная правильная несократимая дробь,* p_1, p_2, …, p_n *– простые или кратные нули знаменателя $Q(p)$, то оригинал $f(t)$, соответствующий изображению $F(p)$, определяется формулой*

$$F(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}\doteq\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\left[\frac{P(p)}{Q(p)}\right]\cdot e^{p_kt}=f(t).$$

В частности, если знаменатель p_1, p_2, …, p_n – простые полюса, то функция

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{P(p_k)}{Q'(p_k)}\cdot e^{p_kt}$$

является оригиналом, имеющим изображение $F(p)$.

Теорема 4 Пусть $F(p)$ – функция комплексной переменной p, обладающая свойствами:

1) функция $F(p)$, первоначально заданная в полуплоскости $\operatorname{Re}p=u>s_0$ *и удовлетворяющая в ней условиям:*

а) $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p = u > s_0$,

б) в области $\operatorname{Re} p \geq u > s_0$ функция $F(p)$ стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно относительно $\arg(p - s_0)$;

в) для всех $\operatorname{Re} p = u$, $u > s_0$, сходится несобственный интеграл $\int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty} |F(p)| dp$;

г) может быть аналитически продолжена на всю комплексную плоскость C_p;

2) аналитическое продолжение функции $F(p)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} p \leq s_0$ удовлетворяет условиям леммы Жордана.

Тогда имеет место следующее соотношение:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{u-i\infty}^{u+i\infty} F(p) e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p) \cdot e^{p_k t},$$

где $t > 0$ и $p = p_k$ – особые точки (полюсы, существенно особые точки) функции, являющейся аналитическим продолжением $F(p)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} p \leq s_0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

2.3 Связь преобразования Лапласа с преобразованием Фурье

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом с показателем роста s_0 и имеет конечное число экстремумов. Тогда для нее можно записать интеграл Фурье. При этом имеет место формула:

$$\frac{f(t+0) + f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

где $\Phi(\omega) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$.

Учитывая, что в интеграле Лапласа параметр $p = u + i\omega$, $\operatorname{Re} p = u$, и для сходимости интеграла выбирается $u > s_0$, то можно записать:

$$F(p) = F(u + i\omega) = \int\limits_{0}^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ut} e^{-i\omega t} dt.$$

Сравнивая полученный интеграл Лапласа с преобразованием Фурье, видно, что изображение $F(u + i\omega) = F(p)$ есть прямое преобразование Фурье для функции $g(t) = f(t) \cdot e^{-ut}$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему Римана-Меллина.
2 Что называется обратным преобразованием Лапласа?
3 В чем суть первой теоремы разложения?
4 Сформулируйте вторую теорему разложения.
5 Как связаны между собой преобразование Лапласа и преобразование Фурье?

Решение типовых примеров

1 Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{2p^2}{(p^2+1)^2}$.

Решение. Найдем оригинал непосредственно с помощью свойств преобразования Лапласа и таблицы изображений. Поскольку

$$\frac{2p^2}{(p^2+1)^2} = 2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1},$$

$$\frac{1}{p^2+1} \doteq \sin t, \qquad \frac{p}{p^2+1} \doteq \cos t,$$

то на основании формулы Дюамеля имеем

$$2p \cdot \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{p}{p^2+1} \doteq 2\int\limits_{0}^{t} \cos\tau \cdot \cos(t-\tau) d\tau + 0 = t\cos t + \sin t.$$

2 Найти оригинал по изображению $F(p) = \dfrac{1}{p(p^2+4)}$.

Решение. Из таблицы изображений имеем $\frac{2}{p^2+4} \doteq \sin 2t$.

Используя свойства линейности и интегрирования оригинала, находим:

$$F(p)=\frac{1}{p(p^2+4)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{p^2+4} \doteq \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2\tau d\tau =$$

$$=-\frac{1}{4}\cos 2\tau \Big|_0^t = \frac{1}{4}(1-\cos 2t).$$

3 Найти оригинал по изображению $F(p)=\frac{p}{p^2+1}$.

Решение. Функция $F(p)=\frac{p}{p^2+1}$ является аналитической в точке $p=\infty$. Разложение ее в ряд Лорана в окрестности точки $p=\infty$ имеет вид:

$$F(p)=\frac{p}{p^2+1}=\frac{p}{p^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)}=\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{p^2}\right)}=\left[\left|\frac{1}{p^2}\right|<1 \Rightarrow |p|>1\right]=$$

$$=\frac{1}{p}\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\ldots\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^3}+\frac{1}{p^5}-\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^{2n+1}}.$$

Следовательно, по 1-й теореме разложения при $t>0$ имеем

$$f(t)=1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}-\ldots=\cos t.$$

4 Найти оригинал, соответствующий изображению

$$F(p)=\frac{-5}{p(p-1)(p^2+4p+5)}.$$

Решение. Представим $F(p)$ в виде суммы элементарных дробей:

$$\frac{-5}{p(p-1)(p^2+4p+5)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p-1}+\frac{Cp+D}{p^2+4p+5}$$

Находим коэффициенты:

$$A=1;\ B=-\frac{1}{2};\ C=-\frac{1}{2};\ D=\frac{3}{2}.$$

Тогда по 2-й теореме разложения найдем оригинал:

$$\frac{-5}{p(p-1)(p^2+4p+5)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+3}{p^2+4p+5}=$$

$$=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p-1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{p+2}{(p+2)^2+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(p+2)^2+1}\doteq$$

$$\doteq 1-\frac{1}{2}e^t-\frac{1}{2}e^{-2t}\cos t-\frac{1}{2}e^{-2t}\sin t.$$

5 Найти оригинал по изображению $F(p)=\frac{p-1}{(p+1)(p^2+4)}$.

Решение. Функция $F(p)$ правильная рациональная несократимая дробь, для которой точки $p_1=-1$, $p_2=-2i$, $p_3=2i$ являются простыми полюсами. Так как

– для $p_1=-1$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_1=-1}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_1=-1}=-\frac{2}{5},$$

– для $p_2=-2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_2=-2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_2=-2i}=\frac{-1-2i}{-8-4i}=\frac{1+2i}{8+4i}=\frac{4+3i}{20};$$

– для $p_3=2i$

$$\left.\frac{P(p)}{Q'(p)}\right|_{p_3=2i}=\left.\frac{p-1}{3p^2+2p+4}\right|_{p_3=2i}=\frac{-1+2i}{-8+4i}=\frac{1-2i}{8-4i}=\frac{4-3i}{20},$$

то по 2-й теореме разложения получим:

$$f(t)=\frac{-2}{5}e^{-t}+\frac{4+3i}{20}e^{-2it}+\frac{4-3i}{20}e^{2it}=$$

$$=\frac{-2}{5}e^{-t}-\frac{2}{5}\cos 2t+\frac{3}{10}\sin 2t.$$

6 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{p}{(p^2-1)^2}$.

Решение. Функция $F(p)$ в точках $p_1=1$ и $p_2=-1$ имеет полюсы 2-го порядка

Следовательно, по второй теореме разложения находим:

$$F(p)=\frac{p}{(p^2-1)^2}\doteq\frac{1}{1!}\lim_{p\to1}\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{pt}p}{(p+1)^2}+\frac{1}{1!}\lim_{p\to-1}\frac{d}{dp}\cdot\frac{e^{pt}p}{(p-1)^2}=$$

$$=\lim_{p\to1}\frac{(te^{pt}p+e^{pt})(p+1)^2-e^{pt}p\cdot2(p+1)}{(p+1)^4}+$$

$$+\lim_{p\to-1}\frac{(te^{pt}p+e^{pt})(p-1)^2-e^{pt}p\cdot2(p-1)}{(p-1)^4}=$$

$$=\frac{1}{16}\left[(te^t+e^t)4-4e^t\right]+\frac{1}{16}\left[(-te^{-t}+e^{-t})4-4e^{-t}\right]=$$

$$=\frac{1}{4}te^t-\frac{1}{4}te^{-t}=\frac{1}{2}t\frac{e^t-e^{-t}}{2}=\frac{1}{2}t\,\mathrm{sh}\,t.$$

7 Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

Решение. Аналитическим продолжением функции $F(p)$ в левую полуплоскость $\operatorname{Re}p\le s_0$ является функция $\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$, удовлетворяющая условиям леммы Жордана и имеющая две особые точки – полюсы первого порядка $p_1=-i\omega$ и $p_2=i\omega$. Поэтому при $\operatorname{Re}p=u\ge0$ и $t>0$ по теореме 4 имеем:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{u-i\infty}^{u+i\infty}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}e^{pt}dp=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{p=p_k}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\,e^{p_kt}=$$

$$=\frac{\omega e^{i\omega t}}{2i\omega}-\frac{\omega e^{-i\omega t}}{2i\omega}=\sin\omega t.$$

Задания для аудиторной работы

Найти оригиналы по изображению:

1 $\dfrac{2e^{-p}}{p^3}+\dfrac{e^{-2p}}{p-1}$.

2 $\dfrac{p}{(p+1)^2}$.

3 $\dfrac{1}{(p-1)^2(p+2)}$.

4 $\dfrac{3p^2}{(p^3-1)^2}$.

5 $\dfrac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$.

6 $e^{-\frac{1}{p}}-1$.

7 $\dfrac{2p^3+p^2+2p+2}{p^5+2p^4+2p^3}$.

8 $\dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+4)}$.

9 $\dfrac{1}{p^2+2p-3}$.

10 $\dfrac{2p}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

11 $\dfrac{p+1}{p^2+4p+5}$.

12 $\dfrac{1}{p^2+4p+5}$.

13 $\dfrac{1}{p+2p+p^3}$.

14 $\dfrac{e^{-p}}{p^2-2p+5}+\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+9}$.

15 $\dfrac{e^{-2p}+2e^{-3p}+3e^{-4p}}{p^2+1}$.

16 $\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$.

17 $\sin\dfrac{1}{p}$.

18 $\dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

19 $\dfrac{p}{(p^3+1)^2}$.

20 $\dfrac{p}{p^2+2p+2}$.

21 $\dfrac{2}{p^2+3p+2}$.

22 $\dfrac{3p}{(p^2+9)(p^2+1)}$.

Задания для домашней работы

Найти оригиналы по изображению:

1 $\frac{e^{-2p}}{p^2}+\frac{e^{-3p}}{p+3}$.

2 $\frac{1}{p^2+2p+2}$.

3 $\frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

4 $\frac{e^{-p}}{p^2-1}+\frac{pe^{-2p}}{p^2-4}$.

5 $\frac{1}{7-p+p^2}$.

6 $\frac{1}{p^2(p^2+1)^2}$.

7 $\frac{1}{p}e^{-\frac{1}{p}}$.

8 $\frac{p^2+2}{(p^2+4)^2}$.

9 $\frac{3}{p^2+4p-5}$.

10 $\frac{6}{(p^2+4)(p^2+9)}$.

11 $\frac{p}{p^2+8p+17}$.

12 $\frac{1}{p^2+4p+3}$.

13 $\frac{p}{(p^2+1)^2}$.

14 $\frac{e^{-p}}{p(p-1)}$.

15 $\frac{e^{-p}}{p^2}+\frac{2e^{-2p}}{p^3}+\frac{6e^{-3p}}{p^4}$.

16 $\frac{1}{p^2(p^2+1)}$.

17 $\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$.

18 $\frac{p\lambda}{(p^2+\lambda^2)^2}$.

19 $\frac{p^2+2p-1}{p^3+3p^2+3p+1}$.

20 $\frac{p-2}{p^2+6p+10}$.

21 $\frac{5}{p^2-3p+2}$.

22 $\frac{2p+1}{(p-1)p^2}$.