I.Ответьте на вопросы (за все задание 18 баллов, за каждое по 2 балла)

1. Комплексное число $z = 1 - i\sqrt{3}$. Тогда $\arg z$ $\underline{-\dfrac{\pi}{3}}$.

2. Комплексное число $z = \sqrt{3} - i$. Тогда $|z|$. $\underline{2}$.

3. В алгебраической форме комплексное число $\dfrac{1-i}{1+i}$ имеет вид $\underline{-i}$.

4. В показательной форме комплексное число $(-i)^2$ представимо в виде $\underline{2e^{-i\frac{\pi}{2}}}$.

5. Аргумент комплексного числа $(1+i)^{16}$ равен $\underline{0}$.

6. Модуль комплексного числа $(1+i)^8$ равен $\underline{16}$.

7. Значение корня $w_k = \sqrt[4]{1-i},\ k = 0,1,2,3,\quad -\dfrac{\pi}{2} < \arg w_k < 0$ равно $\underline{\sqrt[8]{2}e^{-i\frac{\pi}{16}}}$.

8. Расстояние между точками $z_1 = 2 + i$ и $z_2 = 1 + 2i$ равно $\underline{\sqrt{2}}$.

9.Решением уравнения $|z| + z = 2 + i$ является $\underline{\dfrac{3}{4} + i}$.

II. Решите следующие задачи (за все задание 18 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Функция $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$, тогда $\operatorname{Re} f(z)$ равна $\underline{\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}}$.

2. Если $z = x + iy$, то $|e^z|$ равен $\underline{e^x}$.

3. Значениями $Ln\, i$ являются $\underline{i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right),\quad k \in Z}$.

4. Значениями i^i являются $\underline{e^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\quad k \in Z.}$

5. Все значения $Arcth\, 2$ образуют множество $\underline{i\left(\dfrac{\pi}{4} + k\pi\right),\quad k \in Z}$.

6. Решением уравнения $\sin z = 2$ является множество $\underline{\left(\dfrac{1}{2} + 2k\right)\cdot\pi - i\ln(\pm\sqrt{3})}$.

III. Выберите правильный вариант ответа (за все задание 12 баллов, за каждое по 3 балла)

1. Какая функция является аналитической в C?: $\underline{(C)}$.

   (A) $z + \bar{z}$ (B) $z + |z|$ (C) $z^2 + 2z$ (D) $\operatorname{Re} z \ \operatorname{Im} z$

2. Какая функция является гармонической в C?: $\underline{(C)}$.

   (A) $x^2 + y^2$ (B) $x^2 + 2y^2$ (C) xy (D) $x^2 - 2y$

3. Значение $\cos(iz)$ равно: $\underline{(A)}$

   (A) $ch\, z$ (B) $sh\, z$ (C) $i\sin z$ (D) $i\cos z$

4. Функция $f = u + iv,\ f(0) = 0$ является аналитической в C, $v = xy$. Тогда f: $\underline{(D)}$.

   (A) z^2 (B) z^3 (C) $2z^2$ (D) $z^2/2$

IV. Решить задачи (за все задание 20 баллов, за каждое по 5 баллов)

1. С помощью формулы Коши $f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\dfrac{f(z)dz}{z-z_0}$ вычислить интеграл $\int\limits_{|z|=1/2}\dfrac{dz}{z(z^2+1)}$

Здесь $f(z)=\dfrac{1}{z^2+1},\;\; z_0=0 \quad\Rightarrow \int\limits_{|z|=1/2}\dfrac{dz}{z(z^2+1)}=2\pi i f(0)=2\pi i$

2. Функцию $\dfrac{1}{z+2}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности $z_0=1$

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{3+z-1}=\frac{1}{3}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^{n+1}}$$

3. Функцию $\dfrac{1}{z(z-1)}$ разложить в ряд Лорана в кольце $K=\{z: 0<|z|<1\}$

При $|z|<1$ $\dfrac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{z(z-1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}z^{n-1}$

4. Вычислить $\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{z+1}{z\ (z-1)}$

Так как $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{z(z-1)}{z+1} \quad\Rightarrow\quad z=0$ -- полюс 1-го порядка,

$\varphi(z)=z+1,\quad \psi(z)=z(z-1)\Rightarrow \operatorname*{Res}\limits_{z=0}\dfrac{z+1}{z\ (z-1)}=\dfrac{\varphi(0)}{\psi'(0)}=-1$

V. Решить задачи (за все задание 24 баллов, за каждое по 6 баллов)

С помощью теории вычетов вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{|z|=1}\dfrac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$, б) $\int\limits_{|z|=1}\sin\dfrac{1}{z}dz$ в) $\int\limits_0^{2\pi}\dfrac{dz}{4+\cos x}$ г) $\int\limits_0^{\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$

а) $$\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}=2\pi i\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}=2\pi i\left[\frac{e^z}{(z^2-9)}\right]^{(1)}_{z=0}=-\frac{2\pi i}{9}$$

б) $\sin\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{2!z^3}+\ldots \Rightarrow \operatorname*{Res}\limits_{z=0}\sin\dfrac{1}{z}=1 \quad\Rightarrow \int\limits_{|z|=1}\sin\dfrac{1}{z}dz=2\pi i\operatorname*{Res}\limits_{z=0}\sin\dfrac{1}{z}=2\pi i$

в) $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dz}{4+\cos x} = \left[z = e^{ix}\right] = \oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{4+\frac{z+z^{-1}}{2}} = \frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+8z+1} = \frac{2}{i}\cdot 2\pi i\cdot \operatorname{Res}_{z=-4+\sqrt{15}}\frac{1}{z^2+8z+1} =$

$$= 4\pi\left[\frac{1}{2z+8}\right]_{z=-4+\sqrt{15}} = \frac{2\pi\sqrt{15}}{15}$$

г) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i\operatorname{Res}_{z=i}\frac{1}{(z^2+1)^2} = \pi i\left[(z-i)^2\frac{1}{(z^2+1)^2}\right]^{(1)}_{z=i} = \frac{\pi}{4}$

VI. Решить задачи (за все задание 8 баллов, за каждое по 4 баллов)

1. С помощью вычетов разложить на простые дроби $\dfrac{z-3}{z^3-z}$

$$\frac{z-3}{z^3-z} = \frac{z-3}{z(z-1)(z+1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z+1},$$

$A = \operatorname{Res}_{z=0}\dfrac{z-3}{z^3-z} = 3,\qquad B = \operatorname{Res}_{z=1}\dfrac{z-3}{z^3-z} = -1,\qquad C = \operatorname{Res}_{z=-1}\dfrac{z-3}{z^3-z} = -2$

2. С помощью теоремы Руше определить число корней уравнения $z^4 - 3z + 1 = 0$ в круге $|z| < 1.$

Полагаем $\psi(z) = -3z,\ \varphi(z) = z^4 + 1$. Тогда при $|z| = 1, |\psi(z)| = 3 > 2 = |z|^4 + 1 \geq |\varphi(z)|$. Так как число нулей $\psi(z)$ в круге $|z| < 1$ равно 1, то по теореме Руше наше уравнение имеет один корень. Ответ: 1.