**Лабораторная работа № 14**
**Производные и дифференциалы высших порядков**

*Необходимые понятия и теоремы:* производная $n$-го порядка, дифференциал $n$-го порядка, формула Лейбница, формулы производных $n$-го порядка для некоторых элементарных функций.

*Литература:* [1] с. 244 – 250, [2] с. 157 – 164.

**1** Для данной функции $y = f(x)$, заданной в естественной области определения, найти производную второго порядка. Записать $d^2y$.

| № | $f(x)$ | № | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| 1.1 | $y = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ | 1.11 | $y = (1+x^2) \cdot arctgx$ |
| 1.2 | $y = arctg(x + \sqrt{x^2+1})$ | 1.12 | $y = tg^2 x$ |
| 1.3 | $y = \arcsin \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ | 1.13 | $y = e^{\sin x}$ |
| 1.4 | $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ | 1.14 | $y = e^{\cos x}$ |
| 1.5 | $y = (x^2+x+1) \cdot e^{-x}$ | 1.15 | $y = \dfrac{1-\cos x}{\sin x}$ |
| 1.6 | $y = x \cdot (\cos \ln x + \sin \ln x)$ | 1.16 | $y = x \cdot \cos x^2$ |
| 1.7 | $y = x \cdot \sqrt[3]{(x-5)^2}$ | 1.17 | $y = (3-x^2) \cdot \ln^2 x$ |
| 1.8 | $y = arctg \dfrac{2+x^2}{2-x^2}$ | 1.18 | $y = \dfrac{\ln x}{x^3}$ |
| 1.9 | $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ | 1.19 | $y = (1-x-x^2) \cdot e^{(x-1)/2}$ |
| 1.10 | $y = x \cdot \sqrt{1+x^2}$ | 1.20 | $y = \dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$ |

**2** Проверить, удовлетворяет ли функция $y = f(x)$, заданная в естественной области определения, данному уравнению.

| № | $y = f(x)$, уравнение | № | $y = f(x)$, уравнение |
|---|---|---|---|
| 2.1 | $y = 1 + \cos(e^x) + \sin(e^x)$, $y'' - y' + e^{2x} \cdot y = 0$ | 2.11 | $y = e^{-3x}(9 + 2x)$, $y'' + 6y' + 9y = 0$ |
| 2.2 | $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^{10}$, $(1 + x^2)y'' + xy' - 100y = 0$ | 2.12 | $y = e^{3x}(\cos 3x + 2\sin 3x)$, $y'' - 6y' + 18y = 0$ |
| 2.3 | $y = e^{10\arcsin x}$, $(1 - x^2)y'' - xy' + 100y = 0$ | 2.13 | $y = x(\ln x - 1) + 1$, $y'' \cdot x \cdot \ln x - y' = 0$ |
| 2.4 | $y = \cos(10\arccos x)$, $(1 - x^2)y'' - xy' + 100y = 0$ | 2.14 | $y = e^x(x - 1) + x^2$, $xy'' - y' - x^2 e^x = 0$ |
| 2.5 | $y = 3e^x + 2e^{-x} - \frac{1}{x}$, $y'' - y = \frac{x^2 - 2}{x^3}$ | 2.15 | $y = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + \ln x + 2$, $x^2 y'' + xy' - 1 = 0$ |
| 2.6 | $y = (7\cos 3x + 2\sin 3x) \cdot e^{-x}$, $y'' + 2y' + 10y = 0$ | 2.16 | $y = \arcsin^2 x + 2\arcsin x$, $(1 - x^2)y'' - xy - 2 = 0$ |
| 2.7 | $y = 8e^{3x} + 3e^{-3x}$, $y'' - 9y = 0$ | 2.17 | $y = 4\ln x + \frac{1}{x} + 8$, $x^3 y'' + x^2 y' - 1 = 0$ |
| 2.8 | $y = 2e^{3x} + 7e^{-2x}$, $y'' - y' - 6y = 0$ | 2.18 | $y = (x + 3)\ln x - 2x$, $xy'' + y' - \ln x = 0$ |
| 2.9 | $y = x(\cos(\ln x) + \sin(\ln x))$, $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$ | 2.19 | $y = 2e^x(x - 1) + x^2/2$, $xy'' - y' - 2x^2 e^x = 0$ |
| 2.10 | $y = e^{(1+\sqrt{5})x} + 2e^{(1-\sqrt{5})x}$, $y'' - 2y' - 4y = 0$ | 2.20 | $y = x \cdot \ln^2 x - 2x\ln x + 2x$, $y'' \cdot x \cdot \ln x - 2y' = 0$ |

**3** Пусть $f(x)$ – трижды дифференцируемая функция на всей числовой прямой. Найти $y''$ и $y'''$ для сложной функции $f(\varphi(x))$, заданной на естественной области определения.

| № | y | № | y | № | y | № | y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.1 | $f(e^x)$ | 3.6 | $f\left(\frac{1}{x+1}\right)$ | 3.11 | $f(\sqrt{x})$ | 3.16 | $f(\ln(1-x))$ |
| 3.2 | $f(x^2)$ | 3.7 | $f(\sin x)$ | 3.12 | $f(\sqrt{x})$ | 3.17 | $f(\cos(1-x))$ |
| 3.3 | $f\left(\frac{1}{x}\right)$ | 3.8 | $f(\cos x)$ | 3.13 | $f\left(\frac{1}{x-1}\right)$ | 3.18 | $f(\sqrt{x^3})$ |
| 3.4 | $f(\ln x)$ | 3.9 | $f(e^{3x})$ | 3.14 | $f(\sin 2x)$ | 3.19 | $f(2^x)$ |
| 3.5 | $f(x^3)$ | 3.10 | $f(tgx)$ | 3.15 | $f((x+1)^2)$ | 3.20 | $f(ctgx)$ |

**4** Найти производную *n*-го порядка для функции, заданной на естественной области определения.

| № | $y = f(x)$ | № | $y = f(x)$ | № | $y = f(x)$ | № | $y = f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4.1 | $y = e^{-3x}$ | 4.6 | $y = \ln(1+x)$ | 4.11 | $y = \frac{1}{x+1}$ | 4.16 | $y = 2^{1-3x}$ |
| 4.2 | $y = \sin x$ | 4.7 | $y = \ln(ax+b)$ | 4.12 | $y = \frac{1}{x-1}$ | 4.17 | $y = \sin^2 x$ |
| 4.3 | $y = \cos x$ | 4.8 | $y = e^{ax}$ | 4.13 | $y = \frac{1}{x+a}$ | 4.18 | $y = \cos^2 x$ |
| 4.4 | $y = e^{5x}$ | 4.9 | $y = 2^x$ | 4.14 | $y = a^x$ | 4.19 | $y = \cos(\alpha x)$ |
| 4.5 | $y = e^{2x+1}$ | 4.10 | $y = \ln(x+a)$ | 4.15 | $y = 3^{2x+1}$ | 4.20 | $y = \sin(\alpha x)$ |

**5** Используя, формулу Лейбница найти производную указанного порядка $k$ функции $y = f(x)$, заданной на естественной области определения.

| № | $k$ | $y = f(x)$ | № | $k$ | $y = f(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5.1 | 25 | $y = x^3 \cdot \sin(2x+3)$ | 5.11 | 22 | $y = (x^2 - x - 7) \cdot \sin(1+2x)$ |
| 5.2 | 72 | $y = x^2 \cdot e^{-2x}$ | 5.12 | 99 | $y = (x+1)^2 \cdot e^{-2x}$ |
| 5.3 | 38 | $y = (1-x^2) \cdot \cos 3x$ | 5.13 | 77 | $y = \frac{x}{\sqrt{1-5x}}$ |
| 5.4 | 18 | $y = (x^3 - 1) \cdot \sin x$ | 5.14 | 20 | $y = \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x}}$ |
| 5.5 | 30 | $y = (x^2 + x + 1) \cdot e^x$ | 5.15 | 17 | $y = x^3 \cdot \ln(x+1)$ |
| 5.6 | 40 | $y = x^3 \cdot \ln(x+1)$ | 5.16 | 10 | $y = (e^x + x) \cdot x^{-1}$ |
| 5.7 | 35 | $y = (x^2 + 2x + 3) \cdot 2^{x-1}$ | 5.17 | 98 | $y = (x^2 + 7) \cdot \cos x$ |
| 5.8 | 27 | $y = (3-2x)^2 \cdot e^{2-3x}$ | 5.18 | 20 | $y = x^3 \cdot \sin 4x$ |
| 5.9 | 20 | $y = \ln(x-1)^{2x^2}$ | 5.19 | 6 | $y = \frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$ |
| 5.10 | 33 | $y = (2x-1) \cdot 2^{3x} \cdot 3^{2x}$ | 5.20 | 24 | $y = e^{\alpha \cdot x} \cdot (x^2 - 1)$ |

**6** Найти $y^{(n)}(x)$ для данной функции, заданной на естественной области определения.

| № | $y = f(x)$ | № | $y = f(x)$ |
|---|---|---|---|
| *1* | *2* | *3* | *4* |
| 6.1 | $y = \sin 3x \cdot \sin 5x$ | 6.11 | $y = \ln(x^2 - 3x + 2)$ |
| 6.2 | $y = \sin^4 x$ | 6.12 | $y = 2x \cdot \cos\left(\frac{x}{3}\right)$ |

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| 6.3 | $y=\sin^2 x$ | 6.13 | $y=2x\cdot\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)$ |
| 6.4 | $y=\cos^4 x$ | 6.14 | $y=\cos x\cdot\cos 3x$ |
| 6.5 | $y=\frac{x}{x^2-4x-12}$ | 6.15 | $y=\frac{1}{x\cdot(1-x)}$ |
| 6.6 | $y=\frac{1+x}{1-x}$ | 6.16 | $y=\sin^3 x$ |
| 6.7 | $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$ | 6.17 | $y=\frac{x}{\sqrt{1-5x}}$ |
| 6.8 | $y=x^2\cdot\sin x$ | 6.18 | $y=\frac{x^2}{\sqrt{1-2x}}$ |
| 6.9 | $y=\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$ | 6.19 | $y=\frac{x+5}{x^2-2x-3}$ |
| 6.10 | $y=\ln\frac{3+x}{3-x}$ | 6.20 | $y=\sin^2 x\cdot\sin 3x$ |

**7** Найти производную второго порядка $y''_{xx}$ от функции заданной параметрически.

| № | $x=x(t), y=y(t)$ |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 7.1 | $x=\sin t, y=\frac{1}{\cos t}, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ |
| 7.2 | $x=e^t\cdot\sin t, y=e^t\cdot\sin t, t\in\left(-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right)$ |
| 7.3 | $x=t+\sin t, y=2-\cos t, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ |
| 7.4 | $x=\sqrt{t}, y=\frac{1}{\sqrt{1-t}}, t>0$ |
| 7.5 | $x=tgt, y=\frac{1}{\sin 2t}, t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ |

| *1* | *2* |
|---|---|
| 7.6 | $x=\sqrt{t}, y=\sqrt[3]{t-1}, t>0$ |
| 7.7 | $x=\sqrt{t-1}, y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}, t>1$ |
| 7.8 | $x=\dfrac{1}{t}, y=\dfrac{1}{1+t^2}, t>0$ |
| 7.9 | $x=\sqrt{t-1}, y=\dfrac{t}{\sqrt{t-1}}, t>1$ |
| 7.10 | $x=\cos^2 t, y=tg^2 t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| 7.11 | $x=t-\sin t, y=2-\cos t, t\in R$ |
| 7.12 | $x=\sin t, y=\ln\cos t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| 7.13 | $x=\cos t, y=\ln\sin t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| 7.14 | $x=e^t, y=\arcsin t, t\in R$ |
| 7.15 | $x=2(t-\sin t), y=4(2+\cos t), t\in R$ |
| 7.16 | $x=\dfrac{1}{t^2}, y=\dfrac{1}{t^2+1}, t>0$ |
| 7.17 | $x=\cos t+t\sin t, y=\sin t-t\cos t, t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ |
| 7.18 | $x=\cos t, y=\sin^4\left(\dfrac{t}{2}\right), t\in(0;\pi)$ |
| 7.19 | $x=arctgt, y=\dfrac{t^2}{2}, t\in R$ |
| 7.20 | $x=\ln t, y=arctgt, t>0$ |

**8** Для функции $y = y(x)$, заданной неявно в окрестности точки $x_0$ и имеющий в этой окрестности вторую производную, найти $y''(x_0)$.

| № | $F(x, y) = 0$ | № | $F(x, y) = 0$ |
|---|---|---|---|
| 8.1 | $x^2 \sin y + y = \pi,$<br>$x_0 = 0$ | 8.11 | $x^2 + 2y^2 + 4x - 4y = 0,$<br>$x_0 = 0, y > 1$ |
| 8.2 | $xe^y + ye^x = 1,$<br>$x_0 = 0$ | 8.12 | $(1 - x)y = x^3 e^y,$<br>$x_0 = 0$ |
| 8.3 | $y^4 - 4x^4 - 6xy = 0,$<br>$x_0 = 1, y > 0$ | 8.13 | $xy + \ln y = 1,$<br>$x_0 = 0$ |
| 8.4 | $x^2 + y^2 - 2x + 6y = 0,$<br>$x_0 = 0, y > -3$ | 8.14 | $x^2 + xy + y^2 = 1,$<br>$x_0 = 0, y > 0$ |
| 8.5 | $x^3 + y^3 - x - y = 6,$<br>$x_0 = 1, y > 0$ | 8.15 | $x^2 + y^2 - 6x + 10y - 11 = 0,$<br>$x_0 = 0, y > 0$ |
| 8.6 | $x^2 + y^2 - 4e^x = 0,$<br>$x_0 = 0, y > 0$ | 8.16 | $e^y + xy = e,$<br>$x_0 = 0$ |
| 8.7 | $x^2 - 5y^2 + 4xy - 1 = 0,$<br>$x_0 = 1, y > 0$ | 8.17 | $e^{xy} + x^2 + y^3 = 2,$<br>$x_0 = 1$ |
| 8.8 | $x^4 - 2x^2 y^2 + y^3 = 0,$<br>$x_0 = 1$ | 8.18 | $e^{x-y} - x - y = 0,$<br>$x_0 = 1/2$ |
| 8.9 | $3y^2 x - x^3 + 2 = 0,$<br>$x_0 = -1, y > 0$ | 8.19 | $e^{2y} - 2\ln x - 1 = 0,$<br>$x_0 = 1$ |
| 8.10 | $x^2/4 + y^2/16 = 1,$<br>$x_0 = \sqrt{15}/2, y > 0$ | 8.20 | $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0,$<br>$x_0 = 1, y > 0$ |

**Решение типовых примеров**

**1.20** Для данной функции $y=\dfrac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$, заданной в естественной области определения, найти производную второго порядка. Записать $d^2y$.

*Решение.* Найдём сначала $y'$:

$$y'=\frac{(\ln(x-1))'\sqrt{x-1}-\ln(x-1)(\sqrt{x-1})'}{(\sqrt{x-1})^2}=$$

$$=\frac{\dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1}-\dfrac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{\ln(x-1)}{2\sqrt{x-1}}}{x-1}=\frac{2-\ln(x-1)}{2(x-1)^{3/2}}.$$

Теперь

$$y''=\left(\frac{2-\ln(x-1)}{2(x-1)^{3/2}}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(2-\ln(x-1))'(x-1)^{3/2}-(2-\ln(x-1))((x-1)^{3/2})'}{(x-1)^3}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{-\dfrac{(x-1)^{3/2}}{x-1}-(2-\ln(x-1))\cdot\dfrac{3}{2}\cdot(x-1)^{1/2}}{(x-1)^3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{2+(2-\ln(x-1))\cdot 3}{(x-1)^{5/2}}=$$

$$=\frac{3\ln(x-1)-8}{4(x-1)^{5/2}}.$$

$$d^2y=\frac{3\ln(x-1)-8}{4(x-1)^{5/2}}(dx)^2.$$

**2.20** Проверить, удовлетворяет ли данная функция, заданная в естественной области определения, данному уравнению:

$$y=x\cdot\ln^2 x-2x\ln x+2x,\; y''\cdot x\cdot\ln x-2y'=0.$$

*Решение.* Найдём $y'=\ln^2 x+\dfrac{x\cdot 2\ln x}{x}-2\ln x-2x\cdot\dfrac{1}{x}+2=\ln^2 x$. Теперь

$$y''=\frac{2\ln x}{x}.$$

Подставим $y'$ и $y''$ в данное уравнение:

$$\frac{2\ln x}{x}\cdot x\ln x-2\ln^2 x=0.$$

Получили верное равенство. Значит, данная функция удовлетворяет данному уравнению.

**3.20** Пусть $f(x)$ – трижды дифференцируемая функция на всей числовой прямой. Найти $y''$ и $y'''$ для сложной функции $f(ctgx)$, заданной на естественной области определения.

*Решение.* Если $y = f(ctgx)$, $f$ – дифференцируемая функция, то

$$y' = f'(ctgx)\cdot(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}\cdot f'(ctgx) = -\sin^{-2} x\cdot f'(ctgx).$$

Тогда $y'' = 2\sin^{-3} x\cdot\cos x\cdot f'(ctgx) + \sin^{-4} x\cdot f''(ctgx)$,

$$y''' = (-6\sin^{-4} x\cdot\cos^2 x + 2\sin^{-3} x\cdot(-\sin x))\cdot f'(ctgx) +$$

$$+2\sin^{-3} x\cdot\cos x\cdot f''(ctgx)\cdot\frac{-1}{\sin^2 x} + (-4\sin^{-5} x\cdot\cos x)\cdot f''(ctgx) +$$

$$+\sin^{-4} x\cdot f'''(ctgx)\cdot\frac{-1}{\sin^2 x} = -\frac{2}{\sin^2 x}(3ctg^2 x + 1)\cdot f'(ctgx) -$$

$$-6\cdot\frac{\cos x}{\sin^5 x}\cdot f''(ctgx) - \frac{f'''(ctgx)}{\sin^6 x}.$$

**4.20** Найти производную $n$-го порядка для функции $y = \sin(\alpha x)$, заданной на естественной области определения.

*Решение.* Для $y = \sin(\alpha x)$ найдём несколько производных:

$$y' = \alpha\cdot\cos(\alpha x),\ y'' = -\alpha^2\sin(\alpha x),\ y''' = -\alpha^3\cos(\alpha x),\ y^{IV} = \alpha^4\sin(\alpha x),\ \ldots$$

Заметим, что

$$y' = \alpha\cdot\cos(\alpha x) = \alpha\cdot\sin\left(\alpha x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = -\alpha^2\sin(\alpha x) = \alpha^2\cdot\sin\left(\alpha x + \frac{2\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\alpha^3\cos(\alpha x) = \alpha^3\cdot\sin\left(\alpha x + \frac{3\pi}{2}\right),$$

$$y^{IV} = \alpha^4\sin(\alpha x) = \alpha^4\cdot\sin\left(\alpha x + \frac{4\pi}{2}\right).$$

Теперь можно заметить, что $y^{(n)} = \alpha^n\cdot\sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$ (более строго это можно доказать, используя метод математической индукции).

**5.20** Используя, формулу Лейбница найти производную указанного порядка *k*=24 функции $y = e^{\alpha x} \cdot (x^2 - 1)$, заданной на естественной области определения.

*Решение* Воспользуемся формулой Лейбница:

$$(UV)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot U^{(k)} \cdot V^{(n-k)}, \text{ где } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пусть $U = x^2 - 1$, $V = e^{\alpha x}$. Тогда $U' = 2x$, $U'' = 2$. Для $k \geq 3$ $U^{(k)} = 0$.

$$V' = \alpha \cdot e^{\alpha x},\ V'' = \alpha^2 \cdot e^{\alpha x},\ \dots,\ V^{(k)} = \alpha^k \cdot e^{\alpha x}.$$

По формуле Лейбница

$$y^{(24)} = C_{24}^0 \cdot U \cdot V^{(24)} + C_{24}^1 \cdot U' \cdot V^{(23)} + C_{24}^2 \cdot U'' \cdot V^{(22)} =$$

$$= \frac{24!}{0!\cdot 24!} \cdot (x^2 - 1) \cdot \alpha^{24} \cdot e^{\alpha x} + \frac{24!}{0!\cdot 23!} \cdot 2x \cdot \alpha^{23} \cdot e^{\alpha x} + \frac{24!}{0!\cdot 22!} \cdot 2 \cdot \alpha^{22} \cdot e^{\alpha x} =$$

$$= (x^2 - 1) \cdot \alpha^{24} \cdot e^{\alpha x} + 48x \cdot \alpha^{23} \cdot e^{\alpha x} + 23 \cdot 24 \cdot \alpha^{22} \cdot e^{\alpha x} =$$

$$= \alpha^{22} \cdot e^{\alpha x}\ \ x^2 - 1 + 48x\alpha + 552\ \ = \alpha^{22} \cdot e^{\alpha x}(x^2 + 48x\alpha + 551).$$

**6.20** Найти $y^{(n)}(x)$ для данной функции $y = \sin^2 x \cdot \sin 3x$,заданной на естественной области определения.

*Решение*. Преобразуем данную функцию:

$$y = \sin^2 x \cdot \sin 3x = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)\sin 3x = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\sin 3x \cdot \cos 2x =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}(\sin 5x + \sin x) = \frac{1}{2}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 5x - \frac{1}{4}\sin x.$$

Используя формулу $(\sin \alpha x)^{(n)} = \alpha^n \cdot \sin\left(\alpha x + \frac{\pi n}{2}\right)$, получим

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} \cdot 3^n \cdot \sin\left(3x + \frac{\pi n}{2}\right) + \frac{1}{4} \cdot 5^n \cdot \sin\left(5x + \frac{\pi n}{2}\right) - \frac{1}{4} \cdot \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right).$$

**7.20** Найти производную второго порядка $y''_{xx}$ от функции заданной параметрически:

$$x = \ln t,\ y = arctgt,\ t > 0.$$

*Решение.* Равенства $x = \ln t, y = arctgt, t > 0$ задают параметрически функцию $y = y(x)$, так как при $t > 0$ функция $x(t) = \ln t$ монотонно возрастает. Согласно теореме о производной функции, заданной параметрически, $y(x)$ дифференцируема.

Найдём сначала $x'_t = \frac{1}{t}$, $y'_t = \frac{1}{1+t^2}$. Тогда $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t}{1+t^2}$.

Для нахождения $y''_{xx}$ найдём сначала

$$(y'_x)'_t = \left(\frac{t}{1+t^2}\right)' = \frac{1+t^2 - t \cdot 2 \cdot t}{(1+t^2)^2} = = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}.$$

Теперь $y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} : \frac{1}{t} = \frac{t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$.

*Замечание 1.* Для нахождения $y''_{xx}$ можно было воспользоваться формулой:

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - x''_{tt} \cdot y'_t}{x'_t{}^3}.$$

*Замечание 2.* В данном случаем из равенства $x = \ln t$ логично выразить явно $t = e^x$, тогда $y = arctg(e^x)$, и производные можно вычислить непосредственно.

**8.20** Для функции $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, заданной неявно в окрестности точки $\boldsymbol{x_0 = 1, y > 0}$ и имеющей в этой окрестности вторую производную, найти $y''(x_0)$.

*Решение.* Найдём сначала $y'(x_0)$. Продифференцируем обе части данного равенства но *x*, учитывая, что *y* есть функция от *x*. Получим:

$$2x + 2y + 2xy' + 2yy' - 4 + 2y' = 0.$$

Отсюда $y'(2x + 2y + 2) = 4 - 2x - 2y$, $y' = \frac{2 - x - y}{1 + x + y}$.

Подставив в данное в условии равенство $x_0 = 1$, найдём $y_0 = 1$.

Тогда $y'(x_0) = \frac{2-1-1}{3} = 0$.

Теперь $y'' = \left( \dfrac{2 - x - y}{1 + x + y} \right)'_x = \dfrac{(-1 - y')(1 + x + y) - (2 - x - y)(1 + y')}{(1 + x + y)^2}$.

Подставив сюда $x = 1,\ y = 1,\ y' = 0$, получим $y''(x_0) = \dfrac{-3 - 0}{9} = -\dfrac{1}{3}$.