Лабораторная работа № 8
Замечательные пределы. Вычисление пределов.

Необходимые понятия и теоремы: первый и второй замечательные пределы, предел и арифметические операции, пределы монотонной функции, предел композиции, критерии Коши существования предела.

Литература: [1] с. 170 – 180; [2] с. 56 – 66; [6] с. 98 – 102, 128–137.

1 Используя свойства пределов и известные пределы, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

№	A		B		C	
	a	$f(x)$	a	$f(x)$	a	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
1.1	0	$\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	4	$\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$	0	$\dfrac{x^2}{\lvert x\rvert}$
1.2	1	$\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$	16	$\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$	1	$\dfrac{\lvert x-1\rvert^3}{x^2-1}$
1.3	$+\infty$	$\dfrac{x^2+1}{2x^2+x+1}$	8	$\dfrac{\sqrt{2x+9}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$	–2	$\dfrac{\lvert x+2\rvert}{\lvert x-1\rvert}$
1.4	–1	$\dfrac{x^3+1}{x+1}$	2	$\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$	0	$x\sin\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$
1.5	1	$2+x^{5}$	1	$\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{\sqrt{x}-1}$	0	$\lvert x\rvert\sin\dfrac{1}{x}$
1.6	2	$\dfrac{x^2-4}{x-2}$	1	$\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$	1	$\lvert x-1\rvert\cdot\cos\dfrac{1}{\lvert x-1\rvert}$
1.7	1	$\dfrac{x+x^2+x^3-3}{x-1}$	0	$\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$	0	$x\cdot sign x$
1.8	3	$\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$	–8	$\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$	1	$\lvert x-1\rvert\cdot sign(x-1)$
1.9	1	$\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$	1	$\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$	–3	$\lvert x+3\rvert\cdot sign(\sin x)$
1.10	–1	$\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x-6}$	1	$\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{\sqrt[6]{x}-1}$	$+\infty$	$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

1	2	3	4	5	6	7
1.11	–1	$\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$	–2	$\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$	$+\infty$	$\sqrt{(x+1)(x+2)}-x$
1.12	1	$\dfrac{x^5-1}{x^3-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{4x}-2}$	1	$x\lvert x\rvert-\dfrac{1}{\lvert x\rvert}$
1.13	0	$\dfrac{(1+x)(1-2x)-1}{x}$	0	$\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$	$+\infty$	$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
1.14	1	$\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}$	1	$\dfrac{\sqrt{x^2}-1}{\sqrt{x}-4}$	$+\infty$	$\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$
1.15	1	$\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$	16	$\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$	$+\infty$	$\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}$
1.16	–1	$\dfrac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{x-1}$	$+\infty$	$\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x}$
1.17	–1	$\dfrac{x^5+1}{x+1}$	4	$\dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$	$+\infty$	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x}$
1.18	1	$\dfrac{x^3+2x-3}{x-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{4x^2}-2}{\sqrt{x}-1}$	–1	$\dfrac{\sqrt{1-3x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-1}$
1.19	–1	$\dfrac{x^2-1}{2x^2+x-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{x^3}-1}{x^2-1}$	–16	$\dfrac{\sqrt[4]{-x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-4}$
1.20	1	$\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$	1	$\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1}$	1	$\dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{\lvert x\rvert}-1}$

2 Используя свойства пределов и первый замечательный предел, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

№	A		B	
	a	$f(x)$	a	$f(x)$
1	2	3	4	5
2.1	0	$\dfrac{\sin 5x}{x}$	1	$\dfrac{\sin x-\sin 1}{x-1}$
2.2	0	$\dfrac{\sin^2 2x}{\sin^2 3x}$	0	$\dfrac{1-\cos 4x}{\sin 3x}$

1	*2*	*3*	*4*	*5*
2.3	0	$\dfrac{1-\cos 2x}{2x^2}$	1	$\dfrac{\sin \pi x}{x-1}$
2.4	0	$\dfrac{\sin^2 3x}{\sin^2 5x}$	1	$\dfrac{\sin x - \sin 1}{x-1}$
2.5	0	$\dfrac{1-\cos x^2}{\sin^4 (x/2)}$	0	$\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$
2.6	π	$\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$	1	$\dfrac{x-1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}}$
2.7	0	$\dfrac{1-\cos 5x}{x\sin 7x}$	1	$\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x-1)}$
2.8	1	$\dfrac{\sin 2\pi x}{\sin(x-1)}$	0	$\dfrac{tgx - \sin x}{x^3}$
2.9	0	$\dfrac{1-\cos x^2}{x^4}$	1	$\dfrac{\sin^2 (x-1)}{\sin^2 \pi x}$
2.10	0	$\dfrac{1-\cos x^2}{\sin^2 2x}$	0	$\dfrac{tg\ \ x - \sin x}{x^3}$
2.11	0	$\dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$	1	$\dfrac{\sin \pi x^2}{\sin \pi x^3}$
2.12	0	$\dfrac{\arcsin x}{x\dfrac{\cos x - \cos 2}{x-2}}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$
2.13	2	$\dfrac{\cos x - \cos 2}{x-2}$	0	$\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$
2.14	0	$\dfrac{\sin x^2}{1-\cos 2x}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\sin(x-\dfrac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$
2.15	0	$\dfrac{\sin^2 2x}{\sin 2x^2}$	2	$\dfrac{\sin x - \sin 2}{x-2}$
2.16	π	$\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}}{x-\pi}$	0	$\dfrac{\sin^2 4x}{1-\cos x}$

1	2	3	4	5
2.17	1	$\dfrac{(x-1)^2}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$	0	$\dfrac{\arcsin^2 x}{x^2}$
2.18	0	$\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$	0	$\dfrac{x}{\sin 3x}$
2.19	0	$\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{1-\cos 2x}$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\cos x}{x-\dfrac{\pi}{2}}$
2.20	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\sin^2(x-\dfrac{\pi}{6})}{1-2\sin x}$	–1	$\dfrac{\sin \pi x}{\sin(x+1)}$

3 Используя свойства пределов, второй замечательный предел и равенства $\lim\limits_{x\to a}\ln g(x)=\ln(\lim\limits_{x\to a} g(x))$, $\lim\limits_{x\to a} e^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

№	A		B	
	a	$f(x)$	a	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*
3.1	0	$1+2x\ ^{\frac{1}{x}}$	∞	$\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$
3.2	0	$\left(1+\dfrac{x}{7}\right)^{\frac{5}{x}}$	∞	$\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$
3.3	∞	$\left(1+\dfrac{1}{4x+1}\right)^{8x}$	0	$\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$
3.4	∞	$\left(1+\dfrac{2}{x-6}\right)^{4x-1}$	1	$\left(\dfrac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$
3.5	∞	$\left(1+\dfrac{7}{x-6}\right)^{x-1}$	∞	$\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}$
3.6	∞	$\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$	0	$\left(\dfrac{2-x}{2+x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$
3.7	0	$\sqrt[x]{1-2x}$	0	$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

1	*2*	*3*	*4*	*5*
3.8	∞	$\left(\frac{x-14}{x-10}\right)^{x-2}$	0	$\sqrt[x^2]{\cos x}$
3.9	0	$\left(\frac{x+4}{x}\right)^{\frac{3}{x}}$	0	$(1-x)^{\frac{1}{\sin x}}$
3.10	0	$\sqrt[x]{1-4x}$	0	$(1+\sqrt{x})^{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}$
3.11	0	$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$	∞	$\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$
3.12	0	$\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{5}{x}}$	0	$1+x^2\ ^{\operatorname{ctg}^2 x}$
3.13	∞	$\left(1+\frac{6}{3x+4}\right)^{2x}$	0	$\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$
3.14	∞	$\left(1-\frac{1}{4x+3}\right)^{x+4}$	2	$\left(\frac{\sin x}{\sin 2}\right)^{\frac{1}{x-2}}$
3.15	∞	$\left(1+\frac{1}{5x+1}\right)^{x-1}$	0	$x+e^x\ ^{\frac{1}{x}}$
3.16	∞	$\left(\frac{x}{x+3}\right)^{x+2}$	0	$\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$
3.17	0	$\sqrt[2x]{1+3x}$	0	$\cos x\ ^{\frac{1}{1-\cos 2x}}$
3.18	∞	$\left(\frac{3x+1}{3x-1}\right)^{x+4}$	0	$\sin x+\cos x\ ^{\frac{1}{x}}$
3.19	∞	$\left(\frac{2x-1}{1-2x}\right)^{3x}$	0	$1+3x^2\ \frac{1}{\sin^2 x}$
3.20	0	$\sqrt[3x]{1+2x}$	0	$\cos x-\sin x\ ^{\frac{1}{x}}$

4 Используя свойства пределов, известные пределы, предел $\lim\limits_{x\to\varphi_0}\cos x=\cos\varphi_0$, вычислить $\lim\limits_{x\to a} f(x)$:

№	A		B	
	a	$f(x)$	a	$f(x)$
1	*2*	*3*	*4*	*5*
4.1	0	$\frac{2^x-1}{x}$	1	$\frac{\ln x}{x-1}$
4.2	∞	$\frac{\ln\ 2+e^{3x}}{\ln(3+e^{2x})}$	1	$1-x\ \log_x 2$
4.3	$+\infty$	$\frac{\ln\ x^2-x+1}{\ln\ x^{10}+x+1}$	1	$1+\sin\pi x\ ^{\operatorname{ctg}\pi x}$
4.4	0	$\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	0	$x\log_{1-x}2$
4.5	$\frac{\pi}{2}$	$\sin x\ ^{\operatorname{tg}x}$	2	$\frac{2^x-4}{x-2}$
4.6	0	$\frac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x^2}$	0	$\frac{\sin(\sin x)}{\sin 5x}$
4.7	e	$\frac{\ln\ln x}{x-e}$	π	$\frac{\ln\frac{x}{\pi}}{x-\pi}$
4.8	1	$\frac{\lg\frac{x+1}{2}}{x-1}$	∞	$x\ln\frac{2x+1}{2x}$
4.9	0	$\frac{\ln\cos 2x}{\ln\cos 3x}$	2	$\frac{x^x-4}{x-2}$
4.10	0	$\frac{shx}{x}$	$\frac{\pi}{2}$	$1-\cos x\ ^{\operatorname{tg}^2 x}$
4.11	0	$\frac{\ln(1+x)}{x}$	∞	$x\ln\frac{x+1}{x}$
4.12	2	$\frac{\ln x-\ln 2}{x-2}$	$+\infty$	$\frac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$

1	2	3	4	5
4.13	0	$\left(\dfrac{1+tgx}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$(\mathrm{tg}\ x)^{\mathrm{tg}\ 2x}$
4.14	0	$\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$	1	$\dfrac{x^x-1}{x-1}$
4.15	0	$\left[tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\mathrm{ctg}\, x}$	0	$\dfrac{e^{2x}-1}{x^2}$
4.16	3	$\dfrac{2^x-8}{\sin\ \pi x}$	e	$\dfrac{\ln\frac{x}{e}}{x-e}$
4.17	0	$(x+e^{2x})^{\frac{1}{x}}$	2	$\dfrac{\ln\frac{x}{2}}{x-2}$
4.18	7	$\dfrac{\ln x-\ln 7}{x-7}$	0	$\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$
4.19	$+\infty$	$\dfrac{x^4}{2^x}$	2	$\dfrac{\log_2\frac{x}{2}}{x-2}$
4.20	1	$(1-\sin\pi x)^{\mathrm{ctg}\, x}$	2	$\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}$

Решение типовых примеров

1.20 Используя свойства пределов и известные пределы, вычислить

A) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{1}{x-1}\right)$; B) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1}$; C) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{|x|}-1}$.

Решение.

A) Приведя к общему знаменателю выражение, стоящее под знаком предела, получим

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{1-x^2}+\frac{1}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1-x\quad 1+x}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}\ 1+x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}1+\lim\limits_{x\to 1}x}=\frac{1}{2}.$$

B) Положим $x = t^{12}$. Тогда, учитывая, что при $x \to 1$ $t \to 1$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^4-t^3}{t^{24}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^3\ \ t-1}{t-1\ \ t^{23}+t^{22}+...+t+1}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 1}t^3}{\lim\limits_{x\to 1}\ 1+t+...+t^{22}+t^{23}}=\frac{1}{24}.$$

C) Домножая числитель и знаменатель функции на сопряженные выражения, будем иметь:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x}-2}{\sqrt{|x|}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{1+3x}-2)(\sqrt{1+3x}+2)}{(\sqrt{1+3x}+2)}\cdot\frac{\sqrt{|x|}+1}{(\sqrt{|x|}-1)(\sqrt{|x|}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{|x|}+1}{\sqrt{1+3x}+2}\cdot\frac{3(x-1)}{|x|-1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{|x|}+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(\sqrt{1+3x}+2)}\cdot 3=\frac{3}{2}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что при $x \to 1$ $|x| = x$, и равенствами: $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{|x|}=1$; $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{1+3x}=2$, которые доказываются, например, по определению. Можно опереться на равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}$, которое также следует из определения предела.

2.20 Используя свойства пределов и первый замечательный предел, вычислить

$$\textbf{A)}\ \lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin x};\quad \text{B)}\ \lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin(x+1)}.$$

Решение.

A) Сделаем замену $x-\dfrac{\pi}{6}=t$. Тогда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{1-2\sin x}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{1-2\sin\left(t+\frac{\pi}{6}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{1-2\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t-\cos t}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{\dfrac{1-\cos t}{\sin t}-\sqrt{3}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\sin t}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{t}{2}}{\sin t}-\sqrt{3}}=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\sin t}{\lim\limits_{t\to 0}\left[2\cdot\dfrac{\sin^2\frac{t}{2}}{\frac{t^2}{2}}\cdot\dfrac{t}{2}\cdot\dfrac{t}{\sin t}\right]-\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{t\to 0}\sin t}{2\cdot 1\cdot 0\cdot 1-\sqrt{3}}=\frac{0}{-\sqrt{3}}=0.$$

Это следует из того, что $\lim\limits_{t\to a}\sin t=\sin a$. Действительно,

$$\left|\sin t-\sin a\right|=2\cdot\left|\sin\frac{t-a}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{t+a}{2}\right|\le 2\cdot\left|\sin\frac{t-a}{2}\right|\le\left|t-a\right|.$$

Поэтому для $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ такое, что из неравенства

$$\left|t-a\right|<\delta\Rightarrow\left|\sin t-\sin a\right|\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon\text{, т.е. }\lim_{t\to a}\sin t=\sin a.$$

В) Сделаем замену $x+1=t$. Тогда

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi x}{\sin(x+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(\pi t-\pi)}{\sin t}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\ -1\ \cdot\frac{\sin\pi t}{\pi t}\cdot\pi=$$

$$=-\pi\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}=-\pi,$$

так как из первого замечательного предела следует, что

$$\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin t}=1,\ \lim_{t\to 0}\frac{\sin\pi t}{\pi t}=1.$$

3.20 Используя свойства пределов, второй замечательный предел и равенства $\lim\limits_{x\to a}\ln g(x)=\ln(\lim\limits_{x\to a}g(x))$, $\quad\lim\limits_{x\to a}e^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$, вычислить

А) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3x]{1+2x}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\ \cos x-\sin x\ ^{\frac{1}{x}}$.

Решение.

А) Преобразовывая функцию, будем иметь:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3x]{1+2x}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{3x}}=\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot\frac{2x}{3x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2}{3}}=\left|\,2x=t\,\right|=\lim_{t\to 0}\left[(1+t)^{\frac{1}{t}}\right]^{\frac{2}{3}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}e^{\frac{2}{3}\ln(1+t)^{1/t}}=e^{\frac{2}{3}\ln\left[\lim\limits_{t\to 0}(1+t)^{1/t}\right]}=e^{\frac{2}{3}}.$$

B) Произведя преобразования, получим

$$\lim_{x\to 0}(\cos x-\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left(1-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}{x}}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x+2\sin x^2\frac{x}{2}}{x}\right)\cdot\ln\left[\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-\sin x-2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]}=e^{-\ln e}=\frac{1}{e}.$$

Здесь воспользовались равенством из условия, свойствами предела и вторым замечательным пределом.

4.20 Используя свойства пределов, известные пределы, предел $\lim\limits_{x\to\varphi_0}\cos x=\cos\varphi_0$, вычислить:

$$\text{А) }\lim_{x\to 1}(1-\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x};\ \textbf{B) }\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{\sin\pi x}.$$

Решение.

А) Преобразовывая функцию, будем иметь:

$$\lim_{x\to 1}(1-\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}=\lim_{x\to 1}(1-\sin\pi x)^{\frac{1}{-\sin\pi x}\cdot(-\cos\pi x)}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x\cdot\ln\left[\lim\limits_{x\to 1}(1-\sin\pi x)^{-\frac{1}{\sin\pi x}}\right]}=e^{1\cdot\ln e}=e.$$

Мы воспользовались тем, что $\lim\limits_{x\to 1}\cos\pi x=\cos(-\pi)=-1$ и равенствами из предыдущей задачи.

B). Преобразовав функцию, получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{\sin\pi x}=\lim_{x\to 2}\left(\frac{2^x-4}{x-2}\cdot\frac{x-2}{\sin\pi x}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin\pi x}.$$

Найдем первый из пределов произведения:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2^x-4}{x-2}=4\lim_{x\to 2}\frac{2^{x-2}-1}{x-2}=4\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}=$$

$$=\left[\!\!\left[\begin{array}{l}2^t-1=u\\ t=\log_2(1+u)\end{array}\right]\!\!\right]=4\lim_{u\to 0}\frac{u}{\log_2(1+u)}=4\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}\cdot\ln 2=$$

$$=4\ln 2\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\left[\!\!\left[\begin{array}{l}(1+u)^{\frac{1}{u}}=v\\ u\to 0\Rightarrow v\to e\end{array}\right]\!\!\right]=4\ln 2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{v\to e}\ln v}=4\ln 2.$$

Вычислим второй предел:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\sin\pi x}=\quad x-2=t\quad=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\sin(\pi t+2\pi)}=\frac{1}{\pi}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\pi t}{\sin\pi t}=\frac{1}{\pi}.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-4}{\sin\pi x}=\dfrac{4}{\pi}\ln 2$.