ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 18

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ

Пусть X и Y— банаховы пространства, F — отображение, определенное в окрестности U точки x из X, со значениями в Y.

Определение 1. Отображение $F : X \to Y$ называется **сильно дифференцируемым** (или **дифференцируемым в смысле Фреше)** в точке x, если существует такой линейный оператор $A_x : X \to Y$, что при всех $h \in X$, удовлетворяющих условию $x + h \in U$, выполняется асимптотическое равенство

$$F(x+h) - F(x) = A_x h + \alpha(x,h),$$

где $\| \alpha(x,h) \| = o(\| h \|)$ (т.е. $\| \alpha(x,h) \| / \| h \| \to 0, \| h \| \to 0$).

При этом оператор A_x называется **производной** (или **сильной производной, производной Фреше**) отображения F в точке x и обозначается $F'(x)$.

Значение $F'(x)h$ оператора $F'(x)$ на векторе h называется **дифференциалом** (или **сильным дифференциалом, дифференциалом Фреше**) отображения F в точке x при приращении h и обозначается $dF(x,h)$.

Укажем некоторые свойства производной.

1. Если $F(x) = \text{const}$, то $F'(x) = 0$.
2. Если B — линейный оператор из X в Y, то $B'(x) = B$ при любом x.
3. Если F,G - два отображения из X в Y, дифференцируемые в точке x, то для любых чисел k,l отображение $kF + lG$ тоже дифференцируемо в точке x и
$$(kF + lG)'(x) = kF'(x) + lG'(x).$$
4. (Производная композиции). Пусть отображение F, действующее из X в Y, дифференцируемо в точке x_0, а отображение G, действующее из Y в Z, дифференцируемо в точке $y_0 = F(x_0)$. Тогда отображение $H(x) = G(F(x))$ дифференцируемо в точке x_0 и
$$H'(x_0) = G'(y_0)F'(x_0)$$
(в правой части стоит произведение линейных операторов).
5. Пусть $X = \mathbf{R}^m$, $Y = \mathbf{R}^n$. Тогда любое отображение $y = F(x)$ можно записать в виде
$$y_1 = F_1(x_1, \dots ,x_m)$$

....

$$y_n = F_n(x_1, \ldots, x_m),$$

и линейный оператор $F'(x)$, действующий из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$, задается соответствующей матрицей Якоби, т.е. $F'(x) = \left(\dfrac{\partial F_i(x)}{\partial x_j}\right)_{i=1,\, j=1}^{n,m}$.

Замечание. В случае $X = Y = \mathbf{R}^1$ определение 1, формально говоря, отличается от обычного определения производной функции действительного переменного. Например, для функции $F(x) = x^2$ под производной в точке x в смысле определения 1 нужно понимать линейную функцию $h \mapsto 2xh$.

Определение 2. В обозначениях определения 1 **дифференциалом Гато** отображения F в точке x при приращении h (а также **слабым дифференциалом, первой вариацией**) называют предел

$$\delta F(x,h) = \lim_{s\to 0}\frac{F(x+sh)-F(x)}{s} = \frac{d}{ds}F(x+sh)\big|_{s=0},$$

если он существует при всех h из X.

Если $\delta F(x,h) = A_x h$, где A_x — ограниченный линейный оператор, то A_x называют **производной Гато** (а также **слабой производной**) отображения F в точке x и обозначают $F_c'(x)$.

Из существования $F_c'(x_0)$, вообще говоря, не следует сильная дифференцируемость F в точке x_0, но это так, если $F_c'(x)$ существует для x из некоторой окрестности точки x_0, и отображение $x \mapsto F_c'(x)$ непрерывно в самой этой точке. Если же отображение F имеет сильную производную, то оно имеет и слабую, причем эти производные совпадают.

Л и т е р а т у р а [2], глава X, **§ 1.**

II. З А Д А Ч И

1. Вычислите сильную производную отображения $F\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ в точке x_0 и соответствующий сильный дифференциал при приращении h.

	m	n	$F(x)$	x_0	h
1.1	3	1	$(x_1 + x_2^2 + x_3^2)$	(1,1,1)	(1,2,3)
1.2	1	3	$(\cos \pi x, \sin \pi x, x)$	3	1
1.3	2	3	$(x_1^3, e^{2x_2}, x_1 x_3)$	(0,1,1)	(1,3,2)
1.4	3	3	$(x_1 \sin x_2, x_2 \sin x_1, \ln x_3)$	(0,2,1)	(3,2,1)
1.5	3	2	$(\sqrt{4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2}, x_1 x_2 x_3)$	(1,1,1)	(2,1,0)
1.6	2	2	$(e^{x_1+x_2}, x_1^2 + x_2^2)$	(2,2)	(1,2)
1.7	3	3	$(x_1 + x_2 + x_3, e^{2x_1}, \sin x_3)$	$(0,1,\pi)$	(-3,2,1)
1.8	2	3	$(x_1 x_2, 1/(x_1^2+x_2^2), \cos x_2)$	$(0,1,\pi/2)$	(-1,2,2)
1.9	3	2	$(\mathrm{arctg}\, x_1 x_2, x_1 x_2 x_3)$	(1,1)	(-1,-1)
1.10	2	2	$(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}, x_1 / x_2)$	(-1,10	(3,-2)

1.11	3	3	$(x_1 + x_2, ln(x_2 + x_3), \sin(2x_1x_3))$	(-1,2,1)	(-1,1,0)
1.12	2	3	$(x_1 - x_2, \sin(x_1 + x_2), lnx_2)$	(1,2)	(-1,-2)
1.13	3	2	$(x_1 - x_2 + x_3, \cos(3x_1x_3))$	(1,2,-1)	(-1,2,1)

2. Вычислите производную Фреше нелинейного функционала $f : H \to \mathbf{R}$ в точке x_0, если H — вещественное гильбертово пространство.

	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7
H	l_2	$L_2[0,1]$	l_2	$L_2[0,2]$	$L_2[-1,1]$	l_2	$L_2(\mathbf{R}_+)$
$f(x)$	$\sin\|\|x\|\|^2$	$e^{\|\|x\|\|^2}$	$\|\|x\|\|^4$	$\|\|x\|\|^2 + \|\|x\|\|^4$	$\|\|x\|\|^3$	$\cos\|\|x\|\|^4$	$\|\|x\|\|^{1/2}$
x_0	(1,0,0, ...)	t	(0,1,0,...)	$\sin t$	t^2	(0,0,...)	e^{-t}
	2.8	2.9	2.10	2.11	2.12	2.13	2.14
H	l_2	$L_2[-1,1]$	l_2	$L_2(\mathbf{R}_+)$	l_2	$L_2[1,2]$	$L_2(\mathbf{R})$
$f(x)$	$\|\|x\|\|^{1/3}$	$\sin 2\|\|x\|\|$	$\|\|x\|\|^{3/2}$	$\mathrm{ch}\|\|x\|\|$	$ln\|\|x\|\|$	$\mathrm{sh}\|\|x\|\|^2$	$\|\|x\|\|$
x_0	(0,1,0,...)	1	(-1,0,0,...)	$\|t\|$	(2,-2,0,...)	t^2	$e^{-\|t\|}$

Решение задачи 2.14. В нашем случае

$$f(x) = (\int_R x^2(t)dt)^{1/2}.$$

Рассмотрим функционал

$$g(x) = \int_R x^2(t)dt$$

и вычислим сначала его производную Фреше в точке x из $L_2(\mathbf{R})$. Имеем

$$g(x+h) - g(x) = \int_R (x(t)+h(t))^2\,dt - \int_R x^2(t)dt = 2\int_R x(t)h(t)dt + \|h\|^2 .$$

В силу определения 1 отсюда следует, что

$$g'(x)(h) = 2\int_R x(t)h(t)dt.$$

Пусть теперь $x \neq 0$. Заметим, что

$$f(x) = F(g(x)),$$

где $F(y) = y^{1/2}$. По свойству 4

$$f'(x) = F'(y)g'(x),$$

где $y = g(x)$. Следовательно,

$$f'(x)(h) = \frac{1}{\sqrt{\int_R x^2(t)dt}} \int_R x(t)h(t)dt.$$

Поскольку

$$\int_R x_0^2(t)dt = \int_R e^{-2|t|}dt = 1,$$

Окончательно имеем

$$f'(x_0)(h) = \int_R e^{-2|t|} h(t)dt.$$

3. Найдите производную Фреше отображения $F : C[0,1] \to C[0,1]$ в точке x_0.

	$F(x)$	x_0.
3.1	$\int_0^1 tx^2(s)ds$	t^2
3.2	$t\sin x(t)$	$t\cos t$
3.3	$t\cos x(t)$	$\sin t$
3.4	$t^2x(t) + shx(t)$	$ln2$
3.5	$x(t) - e^{tx(t)}$	1
3.6	$t^3x(t) + \int_0^1 x^2(s)\sin t ds$	$-t$
3.7	$t^3\int_0^1 x^3(s)ds$	t^2
3.8	$2x(t) + \mathrm{ch}^2x(t)$	e^t
3.9	$t\int_0^1 x(s)ds + x^2(t)$	-1
3.10	$tx(0) - x^3(t)$	$\|t\|$
3.11	$x(t)\sin t + x^4(t)$	$cost$
3.12	$t\int_0^1 e^{x(s)}ds$	$-t^2$
3.13	$x(t) - \int_0^1 x^2(s)ds$	1
3.14	$t^2e^{x(t)}$	t

Решение задачи 3.14. Пусть $G(x)(t) = e^{x(t)}$, $A(y)(t) = t^2y(t)$. Тогда $F(x) = G(A(x))$. По свойству 4

$$F'(x) = A'(y)G'(x),$$

где $y = G(x)$. Далее, $A'(y) = A$ в силу свойства 2. Найдем $G'(x)$. При любом h из $C[0,1]$

$$G(x + h) - G(x) = e^{x - h} - e^x = e^x(e^h - 1) = e^x(h + h^2/2! + h^3/3! + ...) =$$
$$e^xh + e^x(h^2/2! + h^3/3! + ...).$$

Поскольку

$$||e^x(h^2/2! + h^3/3! + ...)|| \le ||e^x||(||h||^2/2! + ||h||^3/3! + ...)= o(||h||),$$

то $G'(x)h = e^xh$. Окончательно имеем

$$(F'(x)h)(t) = t^2e^th(t), \quad (F'(x_0)h)(t) = t^2e^th(t).$$

Таким образом, $F'(x_0)$ есть оператор умножения на t^2e^t . Другое решение этой задачи можно получить, вычислив производную Гато в точке x и доказав ее непрерывную зависимость от x.

4. Вычислите сильный дифференциал отображения $F : X \to Y$.

	X	Y	$F(x)$
4.1	l_1	**R**	x_1^3
4.2	l_2	**R**	x_2^3
4.3	l_2	**R**	$x_1^2 + 2x$
4.4	l_2	**R**	$\sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$
4.5	l_2	***R***	$x_2^2 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n / n$
4.6	l_2	***R***	$x_1^2 - x_2^2$
4.7	c	c	$(x_1^2, x_2^2, \dots)$
4.8	c	c	$(x_1^3, x_2, x_3, \dots)$
4.9	c	c	$(x_1, x_2^4, x_3, \dots)$
4.10	c	c	$(x_1, x_1x_2, 0, \dots)$
4.11	c	c	$(x_2^2/2, x_3^2/3, \dots)$
4.12	c	c	$(0, x_1^3, x_2^3, \dots)$
4.13	l_2	l_2	$(x_1x_3, x_2, x_3, \dots)$
4.14	l_2	l_2	$(x_1^3 + x_1, x_2^3 + x_2, \dots)$

Решение задачи 4.14. Если $G(x) = (x_1^3, x_2^3, \dots)$, то $F(x) = G(x) + I(x)$, где I — единичный оператор в l_2. Поэтому (свойства 2 и 3) $F'(x) = G'(x) + I$. Найдем $G'(x)$.

$$G(x + h) - G(x) = (3x_1^2h_1 + 3x_1h_1^2 + h_1^3, 3x_2^2h_2 + 3x_2h_2^2 + h_2^3, \dots) =$$
$$3(x_1^2h_1, x_2^2h_2, \dots) + 3(x_1h_1^2, x_2h_2^2, \dots) + (h_1^3, h_2^3, \dots).$$

Покажем, что нормы второго и третьего слагаемых есть $o(||h||)$. Для этого мы воспользуемся легко проверяемым неравенством

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} a_n} \le \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n} \quad (a_n \ge 0).$$

Имеем

$$\| (x_1h_1^2, x_2h_2^2, \dots) \| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 h_n^4} \le \sum_{n=1}^{\infty} | x_n | h_n^2 \le (\sup_{n\ge1} | x_n |) \| h \|^2 = o(\| h \|).$$

Аналогично,

$$\| (h_1^3, h_2^3, \dots) \| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} h_n^6} \le \sum_{n=1}^{\infty} | h_n |^3 \le (\sup_{n\ge1} | h_n |) \| h \|^2 = o(\| h \|).$$

Значит,

$$G'(x)h = 3(x_1^2h_1, x_2^2h_2, \dots).$$

Следовательно,

$$dF(x,h) = F'(x)h = 3(x_1^2h_1, x_2^2h_2, \dots) + (h_1, h_2, \dots) = ((3x_1^2 + 1)h_1, (3x_2^2 + 1)h_2, \dots).$$

Другими словами, производная $F'(x)$ есть диагональный оператор (т.е. оператор вида $Ax = (k_1x_1, k_2x_2, \dots)$),ассоциированный с последовательностью $k_n = 3x_n^2 + 1$.

5. Будет ли функционал f в пространстве X дифференцируем по Фреше в точке 0?

	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7

X	c	l_1	c_0	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$C[0,1]$	$C^{(1)}[0,1]$
$f(x)$	$\|x_1\|$	$\|\|x\|\|$	$\|x_1\|^3$	$\|x(0)\|$	$\|\|x\|\|$	$\|\|x+1\|\|$	$\|\|x\|\|$
	5.8	5.9	5.10	5.11	5.12	5.13	5.14
X	$C[-1,1]$	c	l_1	$C[-1,1]$	$C^{(1)}[0,1]$	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$
$f(x)$	$\int_{-1}^{1}\|x(s)\|ds$	$\|\|x\|\|$	$\|\|x\|\|$	$\|x(1)\|$	$\|x'(0)\|$	$\|\int_0^1 x(s)ds\|$	$\|\|x\|\|$

Решение задачи 5.14. Покажем. что в точке $x = 0$ функционал не дифференцируем даже в смысле Гато. Действительно,

$$\frac{f(0+sh)-f(0)}{s} = \frac{|s|}{s}\sqrt{\int_0^1 x^2(t)dt}.$$

Поскольку $\lim\limits_{s\to\pm 0}\frac{|s|}{s} = \pm 1,$ то $\delta f(0,h)$ (а тем более $df(0,h)$) не существует (при $h \neq 0$).

Варианты заданий см. в лабораторной работе 13 (задачи 1 - 5).

III. Д О П О Л Н И Т Е Л Ь Н Ы Е З А Д А Ч И

31. Пусть функции $f(t,u)$ и $f_u'(t,u)$ непрерывны на множестве $[a,b]\times\mathbf{R}.$ Вычислите дифференциал Фреше отображения $F(x)(t) = f(t, x(t))$, действующего в пространстве $C[a,b]$.

32. Пусть функции $f(t,s,u)$ и $f_u'(t,s,u)$ непрерывны на множестве $[a,b]\times[a,b]\times\mathbf{R}.$ Найдите производную Фреше отображения

$$F(x)(t) = x(t) - \int_a^b f(t,s,x(s))ds,$$

действующего в пространстве $C[a,b]$.

33. Найдите производную Фреше функционала

$$f(x) = \int_a^b \Phi(t, x(t)x'(t))dt,$$

определенного в пространстве $C_0^{(1)}[a,b]$ непрерывно дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$, равных нулю на концах отрезка, если $\Phi \in C^{(2)}(\mathbf{R}^3)$.

34. Пусть отображение $F : X \to Y$ непрерывно дифференцируемо по Фреше на отрезке $[x_1, x_2] \subset X$. Докажите **формулу конечных приращений**

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_0^1 F'(x_1 + \theta(x_2 - x_1))(x_2 - x_1)d\theta.$$

35. Докажите, что если отображение $F : X \to Y$ непрерывно дифференцируемо по Фреше на отрезке $[x_1, x_2] \subset X$, то оно удовлетворяет **условию Липшица**:

$$||F(x_2) - F(x_1)|| \leq L||x_2 - x_1||,$$

где $L = sup\{||F'(x)||: x\in [x_1, x_2]\}$.

36. Докажите, что если отображение $F : X \to Y$ непрерывно дифференцируемо на выпуклом множестве $D \subset X$ и $F'(x) = 0$ при всех x из D, то F постоянна на D.

37. Рассмотрим оператор $F{:}C^{(2)}[0,1]\to C[0,1]$,

$$F(x)(t) = x''(t) + \sin x(t).$$

Вычислите $dF(x_0,h)$ и $d^2F(x_0,h)$, где $x_0(t) = t$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Антоневич А.Б., Радыно Я.В. Функциональный анализ и интегральные уравнения. - Минск, 1984.
2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. элементы теории функций и функционального анализа. - М. 1983.
3. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. - М.
4. Кириллов А.А., Гвишиани А.Д. Теоремы и задачи функционального анализа. - М., 1979.
5. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Функциональный анализ. - М.
6. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 2. - М., 1984.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. - М., 1974.
8. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. - М., 1974.
9. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований в двух томах. Том 1. - М., 1969.
10. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. - М., 1986.