МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР
ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

в курсах

"Дифференциальные уравнения", "Теоретическая механика", "Дополнительные главы естествознания" для студентов специальности 01.01. -"математика"

Разработка

Гомель 1991

МИНИСТЕРСТВО НАРОДНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР
ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМ.Ф.СКОРИНЫ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

в курсах
"Дифференциальные уравнения", "Теоретическая механика", "Дополнительные главы естествознания" для студентов специальности 01.01. - "математика"

Разработка

Гомель 1991

Автор-составитель П.П.Вересович

Рекомендовано к печати методическим советом математического факультета Гомельского государственного университета им.Ф.Скорины.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе жизнедеятельности человек познает закономерности окружающего его мира. Наблюдая часто повторяющиеся процессы, подмечает закономерности их протекания и, таким образом, устанавливает законы, которым подчиняются различные явления материального мира. Жизненные потребности вынуждают человека уже целенаправленно воссоздавать условия, при которых повторяется то или иное явление, обрабатывать результаты наблюдаемых процессов с целью познания закономерностей их протекания для последующего практического использования. Появляется множество законов, полученных экспериментальным (опытным) путем. Таковыми является большинство биологических закономерностей, многие законы физики, техники и других областей человеческих знаний.

Экспериментальные законы верно отражают характер изучаемого явления. На их основании можно строить практическую деятельность и даже предсказывать то или иное явление. Однако возможности прогнозирования с использованием опытных законов ограничены. Мы можем утверждать, что данный, изученный экспериментально, процесс будет протекать таким-то образом при таких-то условиях. И в то же время при условиях, отличных от условий опыта, предсказать течение процесса мы не можем. Иными словами, экспериментальные или опытные законы чаще отвечают на вопрос "как ?" и реже на вопрос "почему ?" По этой причине необходимо знание закономерностей, охватывающих обширный класс родственных явлений из различных областей знания, отвечающих на вопрос "почему ?"

Большую роль в установлении таких законов играют математические методы и приемы исследования. При применении этих методов каждому исследуемому процессу, явлению и т.д. ставят в соответствие подходящий математический объект (число, переменную, функцию и т.п.), а связи между элементами реального явления записывают с помощью математических отношений и соответствий. Таким образом получают математическое описание исследуемого явления или, как говорят, его математическую модель. Понятно, что в такой модели возможно учесть только основные решающие факторы, определяющие именно те черты или особенности описываемой системы, которые нас в данное время интересуют. Попытка учесть все многообразие свойств описываемого явления приводит к необходимости решения очень сложных задач, что практически неосуществимо. По этой причине при составлении модели исследователь сознательно идет на огрубление, упрощение изучаемого явления, идеализирует его.

При математическом описании сложных процессов могут быть различные подходы, разные точки зрения, может быть использован разный математический аппарат. При этом получают, как правило, существенно отличающиеся математические модели. Вопрос о том, насколько точно математическая модель описывает реальный ход событий, решается сравнением результатов, полученных при исследовании математической модели и экспериментальным путем.

Исследование модели проводится математическими средствами и позволяет установить зависимость течения моделируемого процесса от изменения того или иного фактора (если он учтен в модели), предсказать развитие событий в будущем. При этом не требуется, как правило, существенное изменение математической модели и, следовательно, в отличие от опытных закономерностей, для получения необходимого результата затрачивается меньше сил и средств.

Наиболее часто математической моделью реально протекающих процессов являются дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений. Исследование свойств решений этих уравнений позволяет предсказать то или иное явление и ответить на вопрос: почему процесс протекает именно таким образом ?!

Исследование поведения решений дифференциальных уравнений проводится различными математическими методами, а появление быстродействующих ЭВМ позволило проводить и численный анализ свойств решений.

Дифференциальные уравнения являются объектами изучения в курсах дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, теоретической механики и т.д. Обычно все эти курсы читаются в разное время и различными преподавателями. При этом предполагается, что студент сам найдет идеи, объединяющие различные дисциплины в единое целое. Задача эта, как показывает практика, оказывается непосильной для среднего студента. Более того, перед ним обычно она даже не возникает.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы:
а) на примерах построения достаточно простых математических моделей познакомить студента с основными принципами их построения и исследования;
б) способствовать формированию единого взгляда на различные теоретические дисциплины, т.к. в процессе построения и исследования моделей используются, как правило, сведения из различных курсов учебного плана (математический анализ, дифференциальные уравнения, теорети-

ческая механика и т.д.)
в) показать возможность применения математических методов в различных областях естествознания (механика, физика, химия, биология и т.д.).

Эта задача частично решается в [1], [7]. В то же время в этих книгах не нашли своего отражения задачи, использующие такие важные понятия, как первый интеграл, производная в силу системы и т.д. Настоящая работа в определенной степени заполняет этот пробел.

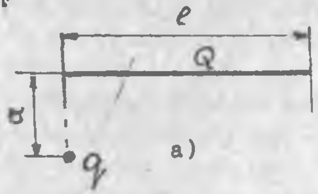
При составлении сборника использованы задачи из [1 - 7], большинство из которых переработаны и дополнены.

Данное издание может быть использовано при проведении лабораторных занятий по курсу "Дополнительные главы естествознания"

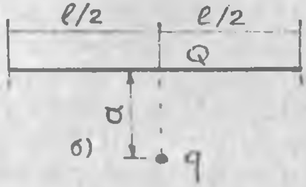
1. Скорость роста популяции бактерий в момент времени t равна $10^4 - 2\cdot10^3 t$ (t - время в часах). В начальный момент численность популяции равна 10^6 особей. Найти: а) численность популяции спустя 5 часов; б) значение t, при котором популяция имеет максимальную численность.

2. Точечный заряд q находится на продолжении оси тонкого стержня длиной ℓ на расстоянии a от его левого конца. Определить: а) силу взаимодействия стержня и точечного заряда, если на стержне равномерно распределен заряд Q; б) чему равна сила взаимодействия, если стержень имеет бесконечную длину?

3. На тонком стержне длиной ℓ равномерно распределен заряд Q. Определить силу взаимодействия стержня и точечного заряда q, взаимное расположение которых показано на рис. а) и б).



а)



б)

4. Материальная точка массой m расположена на расстоянии a от тонкого однородного бесконечного стержня линейной плотностью ρ С какой силой стержень притягивает точку ?

5. Скорость распада радия пропорциональна его наличному количеству. Известно, что по истечении 1600 лет остается половина первоначального запаса радия. Найти, какой процент радия окажется распавшимся по истечении 800 лет ?

6. Определить форму равновесия нерастяжимой нити с закрепленными концами, на которую действует нагрузка так, что на каждую единицу длины горизонтальной проекции нагрузка одинакова (цепи цепного моста). Весом самой нити пренебречь.

7. Ракета с начальной массой m_0 кг взлетает с земной поверхности в вертикальном направлении. Газы выбрасываются постоянными долями a кг/с с постоянной скоростью b м/с относительно ракеты, где $a > 0$, $b > 0$. Пренебрегая действием внешних сил, найти:

а) закон движения ракеты; б) скорость ракеты в зависимости от времени; в) теоретический предел времени полета. Как изменяется закон движения и скорость ракеты, если учесть постоянную силу сопротивления движению ? При какой силе сопротивления полет невозможен ?

8. Ракета с начальной массой m_0 запускается вертикально вверх с начальной скоростью v_0 . Масса ракеты уменьшается с постоянной скоростью и в момент времени t составляет $m = m_0 - kt$, где k - постоянный коэффициент. Предполагается, что убывающая масса движется назад с постоянной скоростью $в$ относительно ракеты. Найти высоту подъема ракеты в любое время t , учитывая лишь силу тяжести mg . До какой высоты теоретически может подняться ракета ?

9. Цилиндрический сосуд с радиусом основания R и высотой h наполовину заполнен водой. Какую форму примет поверхность воды, если сосуд вращать вокруг продольной оси с постоянной угловой скоростью ω_0?

10. Кирпичная стена толщиной 30 см имеет температуру на внутренней поверхности 20°C, а на наружной 0°C. Найти зависимость температуры внутри стены от расстояния до ее наружного края и количество теплоты, которое отдает наружу 1 м^2 стены в течение суток.

11. Вкладчик внес на свой счет в банке некоторую сумму A . Исходя из расчета 10% годовых найти время (в годах), через которое первоначальный вклад удвоится. Какая сумма должна быть внесена в банк, чтобы через 50 лет на счету находился 1 млн. руб?

12. Тело окружено средой с постоянной температурой 20°C. За 20 мин температура тела в результате охлаждения понизилась от 100° до 60°C. За какое время с начала охлаждения тела его температура снизится до 30°C. Каким образом данная математическая модель может быт использована, например, в криминалистике?

13. Известно, что 2 л воды в электросамоваре остывают от 40°C до 30°C за 20 мин. Найти время, через которое закипит вода в самоваре, если он включен в сеть с напряжением 220 В, а сопротивление его нагревательного элемента 50 Ом. В самовар налили воду комнатной температуры 20°C.

I4. Составить математическую модель распределения температуры внутри изоляции трубопровода тепловой магистрали диаметром 20 см, если температура трубы $160^{\circ}C$, температура внешней стороны изоляции $30^{\circ}C$, толщина слоя изоляции - I0 см, а коэффициент теплопроводности k = 0,00017. Найти количество теплоты, отдаваемой I м трубы в течение суток. Как изменится количество отдаваемой теплоты, если коэффициент теплопроводности уменьшить в 2 раза?

I5. Количество света, поглощаемого при прохождении через тонкий слой воды, пропорционально количеству падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя толщиной 3 м поглощается I0% первоначального количества света, то какая часть этого количества дойдет до глубины I5 м?

I6. Пуля, пробив доску толщиной h, изменила свою скорость от v_1 до v_2. Считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости, найти: а) закон изменения скорости при движении пули внутри доски; б) время движения пули внутри доски.

I7. Скорость тела возрастает обратно пропорционально пройденному пути. В начальный момент движения тело находилось на расстоянии S_0 метров от начала отсчета пути и имело скорость v_0 м/с. Найти: а) закон движения тела; б) пройденный путь и скорость через 3 с после начала движения.

I8. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна C, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского). Как изменяется скорость ракеты в зависимости от изменения параметров m и C ?

I9. Скорость роста популяции есть разность между рождаемостью и смертностью ее представителей. Считая, что рождаемость пропорциональна количеству особей, а смертность - квадрату этого количества, составить математическую модель роста популяции. При какой численности скорость роста популяции максимальна ? Найти предельную численность популяции.

20. Ускорение теплохода, имеющего начальную скорость v_0, прямо пропорционально силе упора винтов и обратно пропорционально водоизмещению m. Сила упора винтов $F = b - kv$, где v - скорость, b и k - константы. Найти силу упора винтов в момент времени t, если при $t = 0$ $F = F_0 = b - kv_0$.

21. Сопротивление воздуха при спуске парашютиста пропорционально квадрату его скорости v (с коэффициентом k). Определить скорость спуска в зависимости от времени и найти максимальную скорость спуска, учитывая, что при $t = 0$, $v_0 = v(0) = 0$.

22. Капля воды с начальной массой m_0 г и равномерно испаряющаяся со скоростью m_1 г/с движется по инерции с начальной скоростью v_0 см/с. Сопротивление среды пропорционально скорости движения капли и ее радиусу. В начальный момент движения ($t = 0$, $v = v_0$) оно равно F_0 дин. Определить закон изменения скорости в зависимости от времени. Чему равно теоретическое время полета капли ?

23. На шкив радиуса R натянут ремень, нагруженный силами F_0 и F_1, так, что $\angle AOB = \alpha$. Благодаря трению между шкивом и ремнем довольно малая сила F_0 может уравновешиваться большей силой F_1. Найти наибольшую силу F_1, которая может быть уравновешена силой F_0, если коэффициент трения равен f.

24. Составить математическую модель роста дерева, учитывая, что растение в процессе роста сохраняет геометрическое подобие. Свободную энергию растение получает путем фотосинтеза. Она расходуется на процесс фотосинтеза, на рост дерева и на подъем питательных веществ из почвы. За большие промежутки времени растение получает постоянное количество света на единицу поверхности и может использовать необходимые вещества из неограниченного запаса. Ответьте на вопрос: "Отчего деревья не растут до неба ?"

25. Определить уравнение кривой (кривая депрессии), по которой располагается уровень грунтовых вод вблизи круглого колодца, простирающегося до водонепроницаемого слоя, если уровень воды в колодце поддерживается на постоянном уровне искуственным путем.

26. Летчик ведет самолет в направлении к городу N , расположенному на одной параллели западнее взлетной площадки. Найти уравнение траектории полета самолета, если его скорость v км/ч и ветер дует с юга со скоростью a км/ч . Взлетная площадка находится на расстоянии b км от города N . Рассмотреть случаи: а) $a < v$; в) $a = v$; с) $a > v$. Какой вид примет уравнение траектории при юго-западном ветре ?

27. Капля с начальной массой M г, свободно падая в воздухе, равномерно испаряется и ежесекундно теряет m г. Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли (коэффициент пропорциональности $k \neq m$). Найти закон изменения скорости капли, если в начальный момент скорость капли равна нулю.

28. Найти закон изменения давления крови в аорте во время работы сердца человека.

29. Тело массы m падает под действием силы тяжести в среде, сопротивление которой пропорционально квадрату скорости падения. Определить закон движения тела и предельную скорость движения.

30. Найти уравнение геометрического места точек, которое заведомо содержит все точки максимума и минимума решений уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Тот же вопрос для точек перегиба, если функция $f(x, y)$ дифференцируема.

31. Доказать, что каждая интегральная линия уравнения $y' = x^2 - y^2$ имеет по крайней мере одну точку перегиба и хотя бы один раз пересекается с прямой $y = x$

32. Начертить схему поведения на всей плоскости интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2} - y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2} - x}.$$

(Перейти к полярным координатам).

33. Начертить схему поведения на всей плоскости интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} + x^2 + y^2 - 1.$$

Показать, что оно имеет фокус в начале координат и предельный цикл $x^2 + y^2 = 1$.

(Сравнить наклон интегральных линий этого уравнения с наклоном в той же точке интегральных линий уравнения $y' = -x/y$)

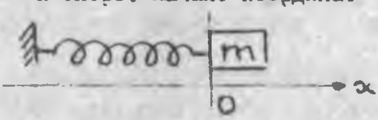
34. Начертить схему поведения во всей плоскости интегральных линий уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x^2}{y - x} + (y - x)^2 + (x - 1)^2 + \frac{2}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{3}.$$

Доказать, что оно имеет две особые точки: седло (0,0) и фокус (I,I). (Сравните наклон интегральной линии этого уравнения с наклоном в той же точке интегральной линии уравнения $y' = (y - x^2)/(y - x)$, которое легко интегрируется в квадратурах).

35. Частица массы m может двигаться вдоль оси x . На частицу действует сила $F_x = -k(x - a)$, где a и k - константы, причем $k > 0$. I. Найти закон движения частицы. 2. Установить, какое движение будет совершать частица, если ее толкнуть. 3. Записать полную механическую энергию частицы. 4. Найти скорость изменения механической энергии.

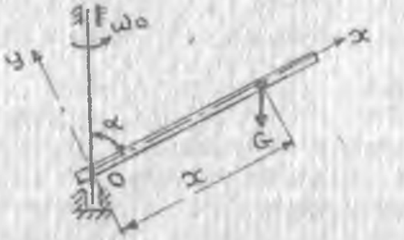
36. Тело массы m прикреплено посредством пружины жесткости k к опоре. Начало координат $x = 0$ отвечает положению равновесия тела. Определить: а) закон движения тела при отсутствии сопротивления движению; б) потенциальную и кинетическую энергии тела, считая известной зависимость $x(t)$; в) скорость изменения полной энергии.



37. Частица массы m движется в положительном направлении оси x в поле, в котором ее потенциальная энергия задается законом $U(x) = kx$, где $k > 0$ - постоянная. Скорость частицы в точке $x = 0$ равна v_0 . Найти зависимость: а) кинетической энергии T частицы от координаты x ; б) скорости v частицы от координаты x .

38. Частица массы m совершает гармоническое колебание вдоль оси x около точки $x=0$ с частотой ω_0. В начальный момент времени $t=0$ ее координата x и скорость $\dot{x}$ равны соответственно: а) $x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=0$; б) $x(0)=x_0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0$; в) $x(0)=0,\ \dot{x}(0)=\dot{x}_0$. I) Определить для этих трех случаев механическую энергию частицы, амплитуду колебаний координаты x_A и амплитуду скорости $\dot{x}_A$; для случаев а) и б) написать зависимость от времени кинетической и потенциальной энергий, а также построить их графики.

39. Трубка наклонена к вертикальной оси под углом α и вращается вокруг нее с постоянной угловой скоростью ω_0. В трубке катится без трения шарик. Найти закон движения шарика вдоль оси трубки, если в начальный момент он находится на оси вращения и имеет скорость, направленную в положительном направлении оси трубки (задача Ампера). Как изменится закон движения шарика, если учесть силу трения (коэффициент трения f)?



40. Тело массы m подвесили к нижнему концу невесомой вертикальной пружины с жесткостью k. Ось x направлена вертикально вниз, точка $x=0$ соответствует положению нижнего конца недеформированной пружины. Вся система находится в однородном поле тяжести. а) Записать потенциальную энергию системы $U(x)$, положив $U(0)=0$; полную механическую энергию E; уравнение движения. б) Определить частоту колебаний груза. в) Выяснить, почему наличие силы тяжести не сказывается на частоте колебаний; в чем роль силы тяжести?

41. Материальная гибкая нить соскальзывает с гладкого стола. Стол расположен горизонтально. Длина нити ℓ. В начальный момент со стола свисал конец нити длиной a. Пренебрегая трением, найти время соскальзывания всей нити.

42. Один конец стержня нагрет до 100°C. На расстоянии единицы длины от этого конца температура равна 95°C. Найти температуру в точке, удаленной от конца стержня на 10 единиц.

43. Найти закон движения математического маятника длиной ℓ при малых отклонениях без учета диссипативных сил. В качестве координат взять: а) угол φ отклонения маятника от вертикали; б) криволинейную абсциссу S с началом отсчета в точке A ; в) декартову систему координат xOy с началом в точке O .

44. Составить математическую модель движения маятника, если возвращающая сила обратно пропорциональна квадрату времени. Начертите график колебательного процесса. Сравните с графиком колебательного процесса в случае постоянной возвращающей силы (см. предыдущую задачу).

45. Составить модель "малых" колебаний физического маятника массой m , если его момент инерции относительно оси вращения равен J , а расстояние от оси вращения до центра тяжести равно ℓ .

46. Найти частоты ω_0 "малых" колебаний следующих физических маятников: а) однородного тонкого стержня массы m и длины ℓ ; б) однородного диска массы m и радиуса R .

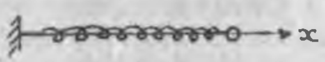
47. Найти частоту "малых" колебаний "часового" маятника (однородный диск массы m и радиуса R насажен на невесомый стержень). Расстояние от центра диска до оси вращения маятника равно ℓ . Если часы спешат (отстают), куда нужно переместить диск ?

48. Построить модель малых колебаний математического маятника в вязкой среде, сопротивление которой пропорционально первой степени скорости движения. 1) Начертите (схематично) графики процесса при различных соотношениях между параметрами уравнения. 2) Докажите, что механическая энергия системы рассеивается (убывает). Можно ли использовать интеграл энергии для исследования устойчивости нулевого решения ?

49. Смоделировать процесс движения маятника, колеблющегося под действием возвращающей силы, обратно пропорциональной квадрату времени, и диссипативной силы, обратно пропорциональной времени. Постройте (схематично) график закона движения. Результат сравните с результатом предыдущей задачи.

50. Полная энергия некоторой системы с одной степенью свободы имеет вид $E = a\dot{x}^2 + b x^2$, где x – координата, $\dot{x}$ – скорость системы, $a > 0$, $b > 0$ – положительные постоянные. Известно, что E сохраняется. а) Вывести уравнение движения этой системы. б) Установить, какое движение она совершает. в) Определить, какая сила F_x действует на систему?

51. Тело массы m, прикрепленное к пружине жесткостью k, может скользить по горизонтальному стержню. Координата x тела отсчитывается от его положения равновесия. Стержень покрыт жидкой смазкой, в результате на тело действует сила "жидкого" трения, пропорциональная его скорости.



Написать уравнение движения тела. Определить: собственную частоту и период колебаний системы; декремент затухания колебаний; скорость рассеивания полной механической энергии тела.

52. Рассмотрите качественно движение тела из предыдущей задачи, предполагая, что между телом и стержнем действует сила сухого трения: $F_{x\,тр} = -f m g \dot{x}/|\dot{x}|$, f – коэффициент трения.

53. Уравнение движения системы имеет вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0 x = f_0 \cos\omega t .$$

Чему равен период колебаний T, если: а) отсутствуют вынуждающая сила и сила трения; б) отсутствует только вынуждающая сила; в) система совершает установившееся вынужденное колебание ?

54. Известно, что в вязкой среде на шарик радиуса R действует сила $F = -6\pi\eta R v$, где v – скорость шарика, η – вязкость среды. Найти закон движения шарика массы m, прикрепленного к пружине жест-костью k в вязкой среде. Координату x центра шарика отсчитывать от положения равновесия. Определить частоту свободных затухающих колебаний шарика. При какой вязкости среды движения шарика станет апериодическим?

55. В обычных системах с трением и силой притяжения к началу координат, пропорциональной расстоянию, закон движения определяется уравнением $m\ddot{x}+b\dot{x}+kx=0$, где $b>0$, $k>0$ – константы. Разберите подробно случай $b<0$ – колебания с отрицательным трением, которое осуществляется в целом ряде физических схем при подаче энергии извне. Что можно сказать в этом случае о полной энергии системы?

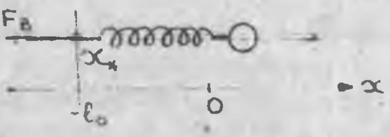
56. Качка корабля описывается дифференциальным уравнением

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+k^2x=a\sin\omega t+b\cos\omega t,$$

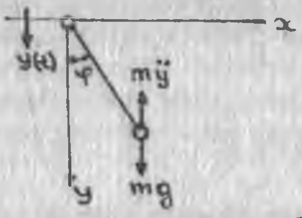
где a, b, h, k и ω – постоянные, $h<k$; $x=x(t)$ – наклон корабля в момент времени t. Исследовать наличие установившегося режима и найти в этом режиме наибольшее отклонение корабля от положения равновесия.

57. Конденсатор емкостью C разряжается через цепь с сопротивлением R и коэффициентом самоиндукции L. Закон изменения напряжения на обкладках конденсатора $u=u(t)$ определяется задачей Коши $\ddot{u}+p\dot{u}+qu=0$, $u(t_0)=u_0$, $\dot{u}(t_0)=-I_0/2$; $p=R/L$, $q=1/LC$, I_0 – сила тока в цепи при $t=t_0$. Указать случаи: а) когда $u(t)\to 0$ при $t\to\infty$ без колебаний; б) когда $u(t)$ совершает периодические колебания; в) когда $u(t)\to 0$ при $t\to\infty$, совершая колебания.

58. Тело массы m, прикрепленное к пружине с жесткостью k, может скользить по горизонтальному стержню. При движении тела на него со стороны стержня действует сила трения, пропорциональная скорости тела $F_{тр.}=-\beta\dot{x}$. Если тело покоится в точке $x=0$, а пружина не деформирована, то ее левый конец имеет координату $x_*=-l_0$. Левый конец пружины под действием внешней силы $F_в$ совершает колебания $x_*=-l_0+a\cos\omega t$. Написать уравнение движения тела. Привести его к стандартной форме уравнения вынужденных колебаний и определить приведенную амплитуду F_0 вынуждающей силы.



59. Составить модель малых колебаний математического маятника,



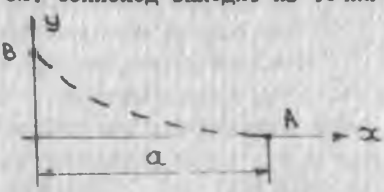
точка подвеса которого колеблется по гармоническому закону $y = a\cos\omega t$, где a и ω - константы (уравнение Матье).

59а. Найти уравнение малых колебаний математического маятника, если его длина непрерывно увеличивается с постоянной скоростью.

60. Определить закон движения материальной точки, запускаемой в направлении, радиальном к поверхности Земли, и находящейся лишь под воздействием силы притяжения Земли. Как изменяется скорость точки в зависимости от пройденного расстояния ? При какой начальной (стартовой) скорости возможен отрыв точки от поверхности Земли ?

61. На основании закона всемирного тяготения определить начальную скорость, которую необходимо сообщить материальному телу для достижения Луны. Расстояние от Земли до Луны $a = 384\,395$ км; радиус Земли $R = 6377$ км; ускорение силы тяжести Земли $g = 9{,}81$ м/с^2; ускорение силы тяжести Луны $g_* = 1/6\ g$; масса Земли $M = 81{,}53\ m$, где m - масса Луны. Влиянием других планет, сопротивлением атмосферы и вращением Земли и Луны пренебречь.

62. Теплоход выходит из точки O и с постоянной скоростью v



плывет по направлению оси Oy. Одновременно $(t = 0)$ из точки A выходит вдогонку катер, скорость которого в k раз превышает скорость теплохода. Найти уравнение траектории движения катера и минимальное время, необходимое для достижения теплохода. Исследовать зависимость времени погони от значения коэффициента k.

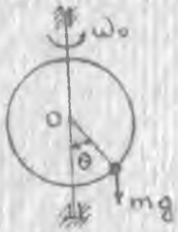
63. Определить форму, которую принимает под влиянием собственного веса гибкая тяжелая нить, подвешенная за концы.

64. Самолет на лыжах приземляется на горизонтальное поле. Вертикальная составляющая скорости в момент приземления отсутствует. Коэффициент трения лыж самолета о снег $f = 0{,}08$. Сила сопротивления воздуха движению самолета пропорциональна квадрату скорости. При скорости, равной 1м/с, горизонтальная составляющая силы сопротивления $R_x = 0{,}09$ кН, а вертикальная составляющая направлена вверх и равна $R_y = 0{,}07$ кН. Сила тяжести самолета 2000 кН. Найти длину и время пробега самолета до остановки.

65. Составить математическую модель прямолинейного движения точки, отталкиваемой вблизи начала координат обратно пропорционально кубу расстояния и притягиваемой вдали от начала координат обратно пропорционально квадрату расстояния. Провести качественное исследование полученного уравнения.

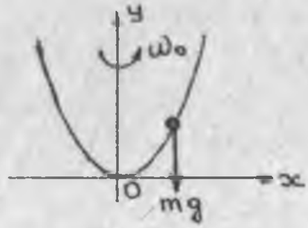
66. Закон движения материальной точки определяется уравнением $\ddot{x} = \mp \alpha/x^2 + \beta/x^3$, а ее полная энергия задается равенством $E = 1/2\, m\dot{x} \pm \alpha/x + \beta/2x^2$. Найти скорость изменения энергии.

67. Материальная точка массой m движется по окружности радиуса R, вращающейся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω_0. Смоделировать процесс движения точки. Провести качественное исследование полученного уравнения.



68. Движение тяжелой точки по окружности, вращающейся вокруг вертикальной оси (см. предыдущую задачу), описывается дифференциальным уравнением $J\ddot{\theta} = m\omega_0^2 R^2 (\cos\theta - \lambda)\sin\theta$, где $\lambda = g/\omega_0^2 R$, J - момент инерции системы относительно горизонтальной оси. Исходя из закона сохранения энергии системы найти первый интеграл уравнения.

69. Составить математическую модель движения тяжелой точки по параболе, определяемой уравнением $x^2 = 2pz$ и вращающейся с постоянной угловой скоростью ω_0. Для получения уравнения примените два способа: а) ввести силы инерции и написать второй закон



Ньютона для движений в плоскости xOz ; б) воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода. Провести качественное исследование полученного уравнения.

70. Доказать, что полная энергия материальной точки

$$E = \frac{1}{2} m\left[\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\dot{x}^2 + \lambda x^2\right]$$

, закон движения которой определяется уравнением

$$m\left(1+\frac{x^2}{p^2}\right)\ddot{x} + m\frac{\dot{x}^2}{p^2}x + m\lambda x = 0,$$

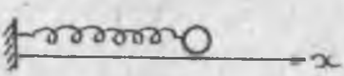
сохраняется.

71. Поведение колебательного контура, с сегнетовой солью в конденсаторе, описывается уравнением

$$L_0\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C(q)} = 0,$$

где $C(q)$ - емкость, зависящая от заряда, L_0 - индуктивность. Исходя из закона сохранения энергии системы, найти первый интеграл указанного уравнения.

72. Составить математическую модель движения материальной точки массой m , закрепленной на нелинейной пружине, упругая сила которой описывается нелинейной функцией



$$F = k_1 x + k_2 x^2.$$

Сохраняется ли полная механическая энергия такой системы ? Как изменится уравнение движения, если учесть сопротивление среды, коэффициент вязкости которой равен η ? Что можно сказать о полной энергии системы в этом случае ?

73. Составить уравнение движения материальной точки, находящейся под действием потенциальной нелинейной силы $(F = k_1 x + k_2 x^3)$ в среде без сопротивления (уравнение Дюффинга). Показать, что полная механическая энергия сохраняется. Провести качественное исследование полученного уравнения движения.

74. Составить уравнение движения математического маятника в двух случаях: а) в среде без сопротивления; б) в вязкой среде с силой сопротивления, пропорциональной первой степени скорости. Показать, что в случае а) полная энергия системы сохраняется. Можно ли использовать интеграл энергии для исследования устойчивости равновесия системы в случае б) ?

75. Составить математическую модель движения материальной точки, находящейся под действием потенциальной нелинейной силы $(F = \nu x^m,\ m \geq 2)$ и силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости. При каких условиях полная энергия системы рассеивается ? Используя полную механическую энергию системы, провести исследование устойчивости равновесия системы.

76. Уравнение возмущенного движения центробежного регулятора имеет вид

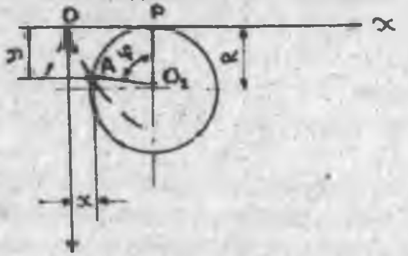
$$2ml^2\mu^2\ddot{x} - ml^2\mu\omega^2\sin 2(\alpha+\mu x) = -2mgl\mu\sin(\alpha+\mu x) -$$

$- cx - \nu\dot{x}$. Полная энергия системы определяется равенством

$$E = ml^2(\mu^2\dot{x}^2 - \omega^2\sin^2(\alpha+\mu x)) + 2mgl[\cos\alpha - \cos(\alpha+\mu x)] + \frac{1}{2}cx^2 + \nu x.$$

Доказать, что полная энергия сохраняется, т.е. функция E является интегралом уравнения возмущенного движения центробежного регулятора.

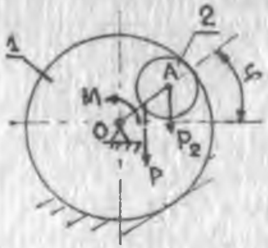
77. Циклоидальным наз. маятник, который может быть схематизирован в виде материальной точки, движущейся по дуге циклоиды $x = R\varphi - R\sin\varphi$, $y = R(1-\cos\varphi)$.



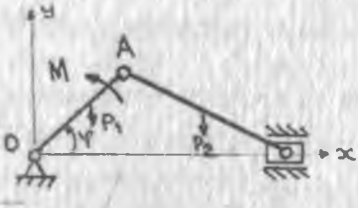
Используя уравнения Лагранжа второго рода, найти закон движения материальной точки A. Показать, что колебания циклоидального маятника обладают свойством изохронности, т.е. его период колебаний не зависит от начальных условий движения.

78. На рисунке изображена планетарная передача. Зубчатое колесо 2 находится во внутреннем зацеплении с зубчатым неподвижным колесом I. Колесо 2 приводится в движение посредством кривошипа OA, к

которому приложен вращающий момент M. Вес кривошипа равен P, P_2 - вес колеса 2, r_2 - радиус колеса 2, R_1 - радиус неподвижного колеса I. Считая колесо 2 однородным круглым диском, а кривошип OA - тонким однородным стержнем, найти уравнение движения кривошипа. При каких условиях кривошип вращается равномерно?



79. Кривошипно-шатунный механизм OAB приводится в движение кривошипом OA, к которому приложен вращающий момент M. Найти закон изменения момента M, при котором осуществляется равномерное вращение кривошипа; P_1 - вес кривошипа OA, P_2 - вес шатуна AB, r - длина кривошипа, ℓ - длина шатуна. Кривошип и шатун считать тонкими однородными стержнями, а ползун B - точечной массой. Силами сопротивления движению пренебречь.



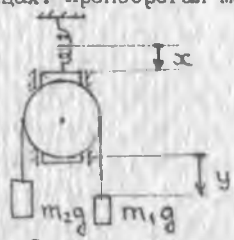
80. Пусть $x(t)$ - численность вида - хищника, а $y(t)$ - численность вида-жертвы в момент времени t. Взаимное влияние популяций на скорость их роста описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = -x + y$. Определить численность популяций в момент времени t. Когда наступит вымирание вида жертвы? Считать начальную численность популяций $x(0) = y(0) = A$.

81. Составить математическую модель кооперации двух видов популяций, если численность популяции каждого вида возрастает пропорционально численности популяции другого вида (коэффициенты пропорциональности α и β) и убывает пропорционально собственной численности (коэффициенты пропорциональности γ и δ). Найти численность популяций в момент времени t, положив $\alpha = 4$, $\beta = 1$, $\gamma = \delta = 2$, если начальные популяции состояли из 100 и 300 особей. Провести исследование изменения численности популяций в зависимости от значений параметров α, β, γ и δ, считая, что в начальный момент численность популяций одинакова.

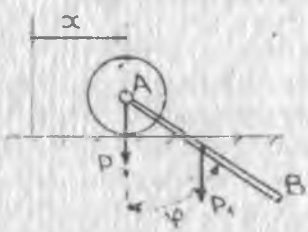
82. Вещество A (одна грамм-молекула) превращается постепенно в промежуточное вещество B, которое, в свою очередь, превращается в вещество C. Найти количество веществ B и C в любой момент времени t. При решении задачи следует учесть, что скорость превращения вещества A пропорциональна наличному количеству, скорость образования вещества C пропорциональна количеству промежуточного вещества B. Скорость накопления промежуточного вещества есть разность скоростей превращения вещества A и образования вещества C.

Убедиться, что суммарное количество веществ является величиной постоянной (не зависит от времени t).

83. Через блок перекинута нить с двумя грузами массой m_1 и m_2 на концах. Пренебрегая массой нити и блока найти движение системы, считая, что блок подвешен на вертикальной пружине с жесткостью k. Движение начинается из состояния покоя. Определить частоту колебаний блока. При каких условиях на m_1 и m_2 колебания отсутствуют.



84. Составить математическую модель движения и найти закон "малых" колебаний системы, состоящей из сплошного однородного цилиндра весом P и шарнирно прикрепленного к его оси стержня AB длиной ℓ и весом P_1. Цилиндр находится на шероховатой горизонтальной плоскости, вдоль которой может катиться без скольжения. В начальный момент стержень AB отклонен на угол φ_0 и отпущен без начальной скорости. Как изменится модель движения системы, если колебания не считать малыми? Провести исследование закона изменения полной энергии системы в случае "малых" колебаний.



85. Получить первый интеграл для системы $\dot{x} = y$, $m\dot{y} + \beta x = 0$, равносильной уравнению $m\ddot{x} + \beta x = 0$ свободных колебаний материальной точки без трения, исходя из закона сохранения полной энергии точки.

86. Доказать устойчивость нулевого решения системы $\dot{x} = y$, $m\dot{y} = -ay - bx$ $(a>0,\ b>0)$ при помощи изучения производной по времени от полной энергии, равной

$$E = \frac{1}{2}\left(m\dot{x}^2 + bx^2\right).$$

87. Колония бактерий увеличивается пропорционально ее численности, но выделяемый бактериями яд истребляет их пропорционально массе яда и числу бактерий. Полагая, что скорость выработки яда пропорциональна численности колонии, составить модель процесса. При какой численности колонии скорость ее увеличения максимальна ?

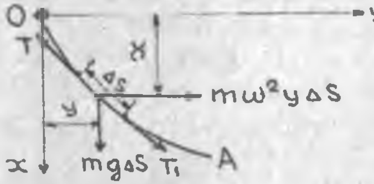
88. Построить математическую модель системы "хищник-жертва" исходя из следующих посылок: ресурсы питания вида, который является жертвой, не ограничены и в отсутствии хищника скорость его прироста пропорциональна наличному количеству. Но наличие хищника уменьшает скорость прироста на величину, пропорциональную количеству встреч между представителями разных видов. Убыль хищника пропорциональна его численности, а что касается прибыли, то для многих популяций хищников она пропорциональна количеству встреч с представителями вида, который является жертвой. Свойства решений полученной системы исследовать на фазовой плоскости (модель Вольтерра).

89. Построить математическую модель сосуществования двух популяций, конкурирующих за одну и ту же пищу, запасы которой ограничены (модель Вольтерра). При составлении модели предположить, что: I) естественный прирост, при неограниченных запасах пищи, каждой популяции пропорционален ее численности; 2) количество пищи, необходимое представителям обеих популяций в единицу времени, есть некоторая функция, зависящая от численности каждой популяции, стремящаяся к нулю при исчезающей численности обеих популяций и неограниченно возрастающая при неограничечном росте хотя бы одной популяции; 3) убыль каждой популяции пропорциональна ее численности и скорости убывания пищи. Провести исследование полученной модели.

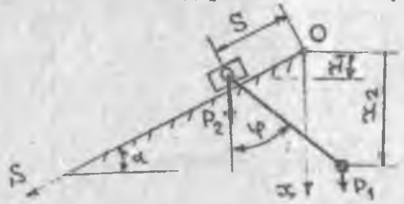
90. Найти закон движения Земли вокруг Солнца, основываясь на законе всемирного тяготения, не учитывая влияние других планет. Определить уравнение траектории.

91. Составить математическую модель движения космического корабля массой m в гравитационном поле двух фиксированных притягивающих центров, массы которых M_1 и M_2 много больше массы m. Расстояние между притягивающими центрами равно L. Взаимным движением притягивающих масс пренебречь.

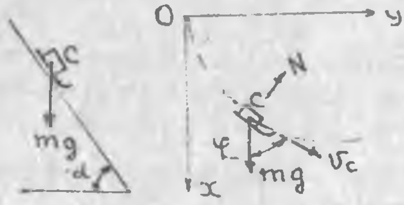
92. Найти критическое значение угловой скорости ω вращения тяжелой гибкой нити вокруг вертикальной оси Ox, при котором нить сохраняет прямолинейную форму.



93. Груз A весом P_2 движется по гладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. К грузу прикреплен математический маятник весом P_1. Длина нити маятника равна ℓ. Выбрать обобщенные координаты и записать в этих координатах уравнения движения системы.



94. Составить математическую модель и определить уравнения движения саней вдоль наклонной плоскости, пренебрегая трением и считая, что сани не могут перемещаться направлении, перпендикулярном полозьям. Обобщенные координат – x, y и угол φ. Учесть, что вектор скорости центра мас параллелен полозьям.

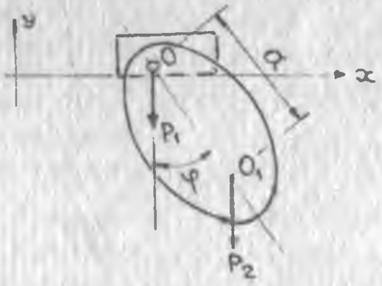


95. Движение проводника в электрическом поле описывается системой дифференциальных уравнений $\dot{x} = y$, $\dot{y} = \dfrac{k(x^2 - ax + \lambda)}{m(a-x)}$.
Энергия системы определяется формулой

$$E = \frac{my^2}{2} - \frac{1}{2}kx^2 + k\lambda \ln(a-x).$$

Доказать, что энергия системы не меняется во времени.

96. Физический маятник весом P_2 колеблется около горизонтальной оси Oz, перпендикулярной к плоскости рисунка. Ось Oz проходит через центр тяжести ползуна, вес которого P_1. Ползун движется по гладкой горизонтальной плоскости. Момент инерции маятника относительно оси z равен J_z, центр тяжести O_1 маятника находится на расстоянии $OO_1 = a$ от оси Oz. Составить модель движения системы. Найти скорость изменения полной энергии этой системы.



97. Полная энергия сферического маятника определяется равенством $E = \frac{1}{2}(\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}\sin\varphi) - mgl\cos\varphi$, а дифференциальные уравнения его движения имеют вид

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l}\sin\varphi + \dot{\psi}\sin\varphi\cos\varphi,$$

$$\ddot{\psi} = -2\dot{\varphi}\dot{\psi}\,\mathrm{ctg}\,\varphi.$$

Найти скорость изменения полной энергии маятника.

98. Движение материальной точки в пространстве описывается системой дифференциальных уравнений

$m(z\ddot{x} - x\ddot{z}) = zF_x - xF_z$, $m(y\ddot{z} - z\ddot{y}) = yF_z - zF_y$,

$m(x\ddot{y} - y\ddot{x}) = xF_y - yF_x$, где F_x, F_y, F_z – проекции на оси координат равнодействующей всех сил, приложенных к материальной точке. Доказать, что при движении точки под действием центральной силы секторная скорость $(\frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$, $\vec{r} = xe_1 + ye_2 + ze_3$, $\vec{v} = \dot{x}e_1 + \dot{y}e_2 + \dot{z}e_3$ сохраняется (закон Кеплера).

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич Л.А., Черенкова Л.П. Практикум по дифференциальным уравнениям. - Минск: Вышэйшая школа, 1990. - 318с.

2. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981. - 567с.

3. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. - М.: Наука, 1975. - Т.2 - 608с.

4. Гильдерман Ю.И. Лекции по высшей математике для биологов. - Новосибирск: Наука. Сибирское отделение, 1974. - 408с.

5. Моисеев Н.Н. Асимптотические методы нелинейной механики. - М.: Наука, 1969. - 379с.

6. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1970. - 279с.

7. Пономарев К.К. Составление дифференциальных уравнений. - Минск: Вышэйшая школа, 1973. - 560с.

Моделирование задач естествознания
в курсах "Дифференциальные уравнения", "Теоретическая механика", "Дополнительные главы естествознания"
для студентов специальности OI.OI-"математика"
Автор-составитель Вересович Петр Павлович

Редактор Е.Ф.Зайцева
Подписано в печать10.07.9I. Формат 60x84 I/16. Бумага писчая № I. Печать офсетная. Усл.п.л. I, 5.
Уч.-изд.л. I,2. Тираж 200 экз. Заказ 100 Цена 21 р. 44 к.
Отпечатано на ротапринте ГГУ им. Ф.Скорины. г.Гомель, ул.Советская, I04.

Моделирование задач естествознания
в курсах "Дифференциальные уравнения", "Теоретическая механика", "Дополнительные главы естествознания"
для студентов специальности СI.0I-"математика"
Автор-составитель Вересович Петр Павлович

Редактор Е.Ф.Зайцева
Подписано в печатьI0.07.9I. Формат 60х84 I/I6. Бумага писчая № I. Печать офсетная. Усл.п.л. I, 5.
Уч.-изд.л. I,2. Тираж 200 экз. Заказ 100 Цена 21 р. 44 к.
Отпечатано на ротапринте ГГУ им. Ф.Скорины. г.Гомель, ул.Советская, I04.