ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Компактные множества в метрических пространствах

Н е о б х о д и м ы е п о н я т и я и т е о р е м ы: *открытое покрытие множества, подпокрытие, сходящаяся последовательность, последовательность Коши,* ε *-- сеть множества, ограниченные, вполне ограниченные, компактные, предкомпактные множества, равномерно ограниченные множества в пространстве C[a,b], теорема Хаусдорфа, теорема Арцела-Асколи, критерий предкомпактности в пространстве* l_p *(p>0) .*

Литература:[1] стр.124-130, [2] стр. 47-54, [7] стр.72-76, 220-221; [8] стр. 68-74; [9] стр.98-115; [11] стр.70-77; [15] стр. 81-88.

1.Выяснить, является ли множество *M* предкомпактным, компактным в пространстве *C[0,1]?*

N	***M***	***N***	***M***
1.1	$\{a\,sin(t+b) \mid a > \ ,b > \ )$	***1.2***	$\{x \mid \lvert x(t)\rvert \le \ int$
1.3	$\{at^2 \mid 1 \le a \le \ 0, \lvert a\rvert \le \ 0$	***1.4***	$\{x(t) \in \ ^2[0,1] \mid x(t) \le \ ,$ $\lvert x' \ t)\rvert \le \ \}$
1.5	$\{at^2 \mid 0 \le a \le \ ,0 < a <$	***1.6***	$\{x \in \ ^2[0,1] \mid x(t) \le \ ' \ t) \le$ $\le \ ' \ t) \le \ \}$
1.7	$\{e^{t+} \mid a \in$	***1.8***	$\{x \in \ ^2[0,1] \mid x(t) \le \ ,$ $\lvert \ x' \ \rvert(t) \le \ \}$
1.9	$\left\{\dfrac{2t+a}{t+b} \mid b > 1, 1 \le a \le 2\right\}$	***1.10***	$\{x \in \ ^2[0,1] \mid x' \ t) \le$ $\le \ ' \ t) \le \ \}$
1.11	$\{arctg(at+b) \mid \lvert a \le \ ,b >$	***1.12***	$\{x \in \ ^2[0,1] \mid x(0) \le \ ,$ $x' \ t) \le \ \}$

1.13	$\{\sin at \mid a \le$	***1.14***	$\{x \in C^2[0,1] \mid x(0) \le$, $\lvert x(t_1) - x(t_2)\rvert \le \lvert t_1 - t_2\rvert\}$
1.15	$\left\{\dfrac{\sin at}{at} \mid 0 < a < +\infty\right\}$	***1.16***	$\{x \in C^2[0,1] \mid \lvert x(t)\rvert \le \frac{1}{t}$, $\lvert x(t_1) - x(t_2)\rvert \le \lvert t_1 - t_2\rvert\}$
1.17	$\{\sin(t+a) \mid a \in$	***1.18***	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \mid \lvert x(t)\rvert \le$, $\lvert x'(t)\rvert \le \}$
1.19	$\{ae^{t+b} \mid 1 \le a \le 2, b \in$	***1.20***	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \mid \lvert x(t)\rvert \le$ $\lvert x'(t)\rvert \le$ $\lvert x''(t)\rvert \le \}$
1.21	$\{bt^{\alpha} \mid 0 < \alpha \le$ $, 0 \le b \le 2$	***2.22***	$\{x \in C[0,1] \mid \lvert x(0)\rvert \le$, $\lvert x(t_2) - x(t_1)\rvert \le \lvert t_2 - t_1\rvert\}$
2.23	$\{\cos at \mid - \le a \le$	***2.24***	$\{x \in C^{(1)}[0,1] \mid \lvert x(t)\rvert \le$, $\lvert x(t_2) - x(t_1)\rvert \le \lvert t_2 - t_1\rvert\}$
2.25	$\{x(t) \mid \lvert x(t)\rvert \le \cos t$	***2.26***	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \mid \lvert x(0)\rvert \le$, $\lvert x'(t)\rvert \le \}$
2.27	$\{a\sin(t+b) \mid 0 \le a,b \le$	***2.28***	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \mid \lvert x(0)\rvert \le$, $\lvert x'(t)\rvert \le \}$
2.29	$\left\{\dfrac{t+a}{t+b} \mid 1 \le a,b \le 2\right\}$	***2.30***	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \mid x(0) =$, $\lvert x'(0)\rvert \le$, $\lvert x''(t)\rvert \le \}$
2.31	$\{t^n \mid n \in$	***2.32***	$\{x \in C^{(2)}[0,1] \mid x(0) =$, $\lvert x'(0)\rvert \le$, $\lvert x''(t)\rvert \le \}$

2. Является ли множество M предкомпактным в пространстве l_p? В случае положительного ответа построить для множества конечную ε-сеть, при $\varepsilon = 0.1$. Если M не является предкомпактным, указать последовательность $x_n \in M$, не содержащую подпоследовательности Коши.

N	P	M
2.1	**2**	$\{x \mid \lvert x(k)\rvert < \frac{1}{k}, k \in N$
2.2	**1**	$\{x \mid \lvert x(k)\rvert < \frac{1}{k^{a}}, \frac{3}{2} \le a \le \frac{5}{2}$
2.3	**1**	$\{x \mid \lvert x(2k)\rvert < \frac{1}{2^{k}}, \lvert x(2k+\ )\rvert < \frac{1}{3^{2k}} \lvert x(1)\rvert =$
2.4	**3**	$\{x \mid \lvert x(k)\rvert = \frac{k}{1+ak^{2}}, k \in N, 1 \le a <$
2.5	**2**	$\{x \mid \lvert x(k)\rvert = \frac{1}{2a^{ak}}, k \in N, \frac{1}{2} < a <$
2.6	**4**	$\{x \mid \left\lvert \frac{x(2k+\ )}{x(2k)} \right\rvert \le \frac{1}{2^{k}}, k \in N, \lvert x(1)\rvert <$
2.7	1	$\left\{ \{x(1), x(2), x(3), \dots\} \mid \frac{1}{k^{2}} < \lvert x(k)\rvert < \frac{2}{k^{2}}, k \in N \right\}$
2.8	2	$\left\{ \{x(1), x(2), x(3), \dots\} \mid \lvert x(k)\rvert \le \frac{1}{2^{k}}, k \in N \right\}$
2.9	2	$\left\{ \{x(1), x(2), x(3), \dots\} \mid \frac{1}{2^{k}} \le \lvert x(k)\rvert \le \frac{1}{2^{k+1}}, k \in N \right\}$
2.10	3	$\left\{ \{x(1), x(2), x(3), \dots\} \mid x(k) = \frac{k}{1+ak^{2}}, 1 \le a \le 2, k \in N \right\}$
2.11	4	$\left\{ \{x(1), x(2), x(3), \dots\} \mid x(1) = 1, x(k) > 0, x(k+1) < \frac{1}{2} x(k), k \in N \right\}$
2.12	1	$\left\{ \{x(1), x(2), x(3), \dots\} \mid x(1) = 1, x(k) > 0, x(k+1) < \frac{1}{4} x(k), k \in N \right\}$
2.13	1	$\left\{ \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \mid x_{2k} = 0, 0 < x_{2k+1} \le \frac{1}{2^{k}}, k \in N \right\}$
2.14	2	$\left\{ \{x_1, x_2, x_3, \dots\} \mid \lvert x_{2k}\rvert \le \frac{1}{k}, x_{2k+1} = 0, k \in N \right\}$

2.15	4	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_k = \frac{1}{2^{ak}}, \frac{1}{4} \le a \le 1, k \in N \right\}$
2.16	3	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_k = \frac{a}{k^{2/3}}, 1 \le a \le 5, k \in N \right\}$
2.17	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_k = \frac{\sin \alpha k}{(\sqrt{2})^k}, 1 \le \alpha \le 2, k \in N \right\}$
2.18	1	$\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_1 = \alpha, x_2 = x_3 = \ldots = 0, 1 \le \alpha \le 10 \}$
2.19	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_{2k} = 0, x_{2k+1} = \frac{1}{1+\alpha k}, 1 \le \alpha \le 2, k \in N \right\}$
2.20	2	$\left\{ (x_1, x_2, x_3, \ldots) : x_1 = 1, x_k > 0, x_{k+1} \le \frac{1}{2} x_k, k \in N \right\}$
2.21	**2**	$\{ x \mid x(k) = \frac{\sin aK}{k}, k \in N, a \ge 1 \}$
2.22	**2**	$\{ x \mid x(k) > 0, x(k+1) < \frac{1}{2} x(k), k \in N \}$
2.23	**2**	$\{ x \mid \sum_{k=1}^{\infty} \lvert x(k) \rvert 2^k < +\infty \}$