ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3.

Спектр линейного непрерывного оператора.

Необходимые понятия и теоремы**:** *обратный оператор, собственные значения оператора, собственные функции линейного непрерывного оператора, точки непрерывного спектра, остаточный спектр, теорема о спектре компактного оператора, спектр компактного самосопряжённого оператора в гильбертовом пространстве*.

Литература: [ ] стр.238-242; [ ] стр.92-93; [ ] стр.96—99; [ ] стр.127-131; [ ] стр.219-222.

1. Найти спектр и резольвенту интегрального оператора

$Ax(t)=\int_a^b K(t,s)x(s)ds$ в пространствах $L_2[a,b]$ и $C[a,b]$.

N	*a*	*b*	*K(t,s)*	*N*	*a*	*b*	*K(t,s)*
1.1	*-1*	*1*	$ts+t^2s^2$	*1.2*	*-1*	*1*	$1+ts$
1.3	*0*	$\pi/2$	$\sin t+t\cos s$	*1.4*	*0*	π	$\sin s+t\cos s$
1.5	$\pi/2$	$\pi/2$	$s\sin t+\cos s$	*1.6*	$-\pi$	π	$t\sin s+\cos t$
1.7	*-1*	*1*	ts^2+s	*1.8*	*0*	*1*	$t+s$
1.9	*0*	π	$\cos(t+s)$	*1.10*	*0*	$\pi/2$	$\cos(2t+4s)$
1.11	*-1*	*1*	ts^2+t^2s	*1.12*	*-1*	*1*	$\frac{1+\ t}{1+\ ^2}$
1.13	*-1*	*1*	$\sqrt[3]{t}+\sqrt{s}$	*1.14*	*-1*	*1*	$ts+t^4s^2$
1.15	*-2*	*2*	$t+t^2s$	*1.16*	*0*	*1*	$2t-4t^2s$
1.17	*0*	*1*	t^2s^2	*1.18*	*0*	*1*	e^{t+}
1.19	*–1*	*1*	$t+$	*1.20*	*0*	*2*	t^2s
1.21	*–1*	*2*	s^2t	*1.22*	*0*	*1*	e^{t-}
1.23	*0*	π	$\sin(t-\ )$	*1.24*	*0*	π	$\cos(t+\ )$
1.25	*0*	*1*	$t-$	*1.26*	*0*	*1*	$1+ts$
1.27	*–1*	*1*	$ts^2+\ ^2s$	*1.28*	*0*	$\frac{\pi}{2}$	$\sin t+\ \cos s$
1.29	*0*	*1*	$1-ts$	*1.30*	*–1*	*1*	$ts+\ ^2s^2$
1.31	*0*	*1*	$t-\ ^2s$	*1.32*	*0*	*1*	ts

2. Найти точечный непрерывный и остаточный спектр оператора $A \in \mathcal{L}(E,E)$.

	E	A		E	A
2.1	l_2	$Ax = 2(x(2),x(3),x(4),\dots)$	2.2	l_2	$Ax = (0,x(1),x(2),x(3),\dots)$
2.3	l_2	$Ax = \left(\frac{x(1)}{1},\frac{x(2)}{2},\frac{x(3)}{3},\dots\right)$	2.4	l_2	$Ax = (x(1),0,x(3),0,x(5),\dots)$
2.5	c_0	$Ax = (0,x(1),x(2),0,0,\dots)$	2.6	l_1	$Ax = (x(1),\dots,x(n),0,0,\dots)$
2.7	l_∞	$Ax = \left(0,\frac{x(1)}{1},\frac{x(2)}{2},\dots\right)$	2.8	c	$Ax = (x(1),x(2),0,0,\dots)$
2.9	l_4	$Ax = (2x(2),3x(3),0,0,\dots)$	2.10	l_2	$Ax = \left(\left(1+\frac{1}{1}\right)x(1),\dots,\left(1+\frac{1}{n}\right)x(n),\dots\right)$
2.11	c_0	$Ax = (0,x(1),0,0,\dots)$	2.12	l_∞	$Ax = (x(1),0,x(2),0,0,\dots)$
2.13	l_2	$Ax = (0,0,x(1),x(2),0,0,\dots)$	2.14	l_2	$Ax = (x(1),0,x(2),x(3),\dots)$
2.15	l_1	$Ax = (x(3),x(4),0,0,\dots)$	2.16	l_2	$Ax = (\lambda_1 x(1),\lambda_2 x(2),\dots)$ $\lambda = (\lambda_n)$, $\lvert\lambda_n\rvert \le M$

3. Найти собственные значения, точки непрерывного и точки остаточного спектра оператора *A* в пространстве *X*

а) X=C[0,1], Ax(t)=a(t)x(t);

б) X=L_2[0,1], Ax(t)=a(t)x(t)

N	*a(t)*	*N*	*a(t)*
3.1	$2\left\lvert t-\frac{1}{2}\right\rvert - 2\left\lvert t-\frac{1}{3}\right\rvert$	*3.2*	$4\left\lvert t-\frac{1}{4}\right\rvert - 4\left\lvert t-\frac{2}{3}\right\rvert$
3.3	$\lvert 3t-$ [illegible] $\rvert - \left\lvert 3t-\frac{1}{2}\right\rvert$	*3.4*	$\lvert 2t-$ [illegible] $\rvert -$ [illegible] $\lvert 2-$ [illegible] $t\rvert$
3.5	$\lvert 2t-$ [illegible] $\rvert - \left\lvert \frac{1}{3}-2t\right\rvert$	*3.6*	$\lvert 9t-2\rvert - 9\left\lvert t-\frac{1}{2}\right\rvert$
3.7	$8\left\lvert t-\frac{1}{2}\right\rvert -$ [illegible] $3t-2\rvert$	*3.8*	$\lvert 7t-$ [illegible] $\rvert -$ [illegible] $7t-$ [illegible]

в) X=l_2, (Ax)(k)=a(k)x(k)

N	a(t)
3.1	$a(3k)=\frac{k^2+k}{2k^2-}; \quad a(3k-\ )=\left(\frac{k}{k+}\right)^{k}; \quad a(3k-\ )=\frac{\ln(k+\ )}{k}$
3.2	$a(2k)=+\frac{1}{k}; \quad a(2k-\ )=-\frac{1}{k^2}$
3.3	$a(3k)=+\frac{1}{2^k}; \quad a(3k-\ )=\frac{1}{k}; \quad a(3k-\ )=\frac{2k+}{k}$
3.4	$a(2k)=-\frac{1}{2^k}; \quad a(4k-\ )=\frac{1-}{k}; \quad a(4k-\ )=-\frac{1}{3^k}$
3.5	$a(4k-)=\frac{3k^2+}{k^2}$
3.6	$a(3k)=\frac{9k-6}{6k}; \quad a(3k-\ )=\frac{1}{k^2}; \quad a(3k-\ )=\frac{1-k}{3k+}$
3.7	$a(5k)=\frac{1}{5}-\frac{2}{3^{5k}}; a(5k-\ )=(5k-\ )=\frac{1}{1+\ ^2}; 1-(5k-\ )=(5k-\ )$
3.8	$a(4k)=\left(\frac{k+}{k}\right); \quad a(4k-\ )=\frac{12k+}{8k+}; \quad a(4k-\ )=(4k-\ )=\frac{1}{4^k}$
3.9	$\left\|t-\frac{1}{2}\right\|-\left\|t-\frac{1}{3}\right\|$
3.10	$2\left\|t-\frac{1}{4}\right\|-\left\|t-\frac{2}{3}\right\|$
3.11	$\|2t-\ \|-\left\|2t-\frac{1}{2}\right\|$
3.12	$\|3t-\ \|-\ 2-t\|$
3.13	$\|4t-\ -\ 2-t\|$
3.14	$\|3t-2\|-3\left\|t-\frac{1}{2}\right\|$
3.15	$\left\|2t-\frac{1}{2}\right\|-\ 2t-\ \|$
3.16	$\|4t-\ \|-\ \|2t-$

г) X=C[0,1]

	A	N	A
3.1	$(Ax)(t)=tx(0)$	3.2	$(Ax)(t)=t(x(0)+\ (1))$
3.3	$(Ax)(t)\equiv 0$	3.4	$(Ax)(t)=t^2x(1)$
3.5	$(Ax)(t)=tx(t)$	3.6	$(Ax)(t)=x(t)$

3.7	$(Ax)(t) = \int_0^t x(\tau)\,d\tau$	*3.8*	$(Ax)(t) = x(1) + x(0)$
3.9	$(Ax)(t) =$ $tx(0) + {}^2x(1)$	*3.10*	$(Ax)(t) = t^2x(t)$
3.11	$(Ax)(t) =$ $2x(0) + tx(1/2)$	*3.12*	$(Ax)(t) = tx(0)$
3.13	$(Ax)(t) = (2t +)x(t)$	*3.14*	$(Ax)(t) = t^2(x(0) - x(1))$

4. Если следующие множества $M \subset \mathbb{C}$ могут быть спектром некоторого линейного ограниченного оператора, то привести пример такого оператора А, для некоторого $\sigma(A) = M$.

	M		M
4.1	$\{0,1,2\}$	*4.2*	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: -1 \le \lambda \le 1\}$
4.3	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lvert\lambda\rvert \le 2\}$	*4.4*	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = it, 0 \le t \le 1\}$
4.5	$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$	*4.6*	$\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$
4.7	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = t^2 + it, 0 \le t \le 1\}$	*4.8*	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lvert\lambda\rvert = 1\}$
4.9	$\{0\}$	*4.10*	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lvert I_m\lambda\rvert \le 1\}$
4.11	$\{0, i\}$	*4.12*	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: 1 \le \lvert\lambda\rvert \le 2\}$
4.13	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = it^2, 0 < t \le 1\}$	*4.14*	$\{0, 1, i\}$
4.15	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lambda = t + it, 0 \le t \le 1\}$	*4.16*	$\{\lambda \in \boldsymbol{C}: \lvert\lambda\rvert \le 1\}$