ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4.

Линейные непрерывные функционалы

Необходимые понятия и теоремы**:** *функционал, линейный функционал, непрерывный, ограниченный функционал, эквивалентность непрерывности и ограниченности в банаховых пространствах, норма ограниченного линейного функционала, сопряжённое пространство, теорема Рисса об ограниченном линейном функционале в гильбертовом пространстве, теоремы об общем виде линейных ограниченных функционалов в пространствах* R^n, C_0, l_1, $lp(p>1)$, $L_p(t,\mu)$, $(p>1)$, $L_1(t,\mu)$, $C[a,b]$, *функции ограниченной вариации и их свойства.*

Литература: [ ] стр.210-230; [ ] стр.93-95; [ ] стр.118-123; [ ] стр.174-192; [ ] стр.140-155; [ ] стр.176-186; [ ] стр.65-79.

1. Используя теоремы об общем виде линейного ограниченного функционала в указанных банаховых пространствах, выяснить, задаёт ли заданная формула линейный ограниченный функционал, и в случае положительного ответа найти его норму.

N	X	f(x)
1.1	c_0	$3x(20)+8x(3)-3x(1000)$
1.2	c_0	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{2^n}$
1.3	c_0	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k k!}{k^k} x(k)$
1.4	c_0	$x(3)-x(1)+\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\sqrt{k}} x(k)$
1.5	c_0	$x(5)-2x(1)+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k} x(k)$
1.6	c_0	$\sum_{k=1}^{\infty} e^k \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)} x(k)$
1.7	c_0	$x(10)-3x(5)+\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln k} x(2^k)$
1.8	c_0	$x(5)-2x(7)-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)(k+2)}} x(k)$

1.9	c_0	$\sum_{k=1}^{\infty} e^{k}\left(\frac{x(3k)}{2^{3k}}\right)$
1.10	c_0	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k}k}{(k+1)!}x(2k)$
1.11	c_0	$x(3)-x(1)+\sum_{k=1}^{\infty} k^{2}e^{-\sqrt{k}}x(3k)$
1.12	c_0	$x(5)-2x(1)+\sum_{k=1}^{50} \frac{ln\, k}{k}x(k)$
1.13	c_0	$x(1)-\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^{k(k-1)}x(k)$
1.14	c_0	$x(10)-3x(5)+\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k^{2}\, ln\, k}\right)x(k^{2})$
1.15	c_0	$x(5)-2x(7)-\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}x(k)$
1.16	$l_p(p>1)$	$\frac{1}{10}x(10)-\frac{2}{99}x(99)+\frac{3}{100}x(100)-\frac{4}{201}x(201)$
1.17	l_1	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{(2k)!}-2x(1)$
1.18	l_2	$\sum_{k=1}^{100} ek!\, x(3k)-3x(3)$
1.19	l_3	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(8k)}{k}-2x(5)+x(6)$
1.20	$l_{7/4}$	$x(100)-x(1)+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{k!\, e^{k}}$
1.21	l_3	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{2k}-2x(1)$
1.22	l_4	$\sum_{k=1}^{100} k!\, x(3k)-3x(3)$
1.23	l_3	$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(8k)}{k^{2}}-\frac{1}{2}x(5)+x(6)$
1.24	$l_{5/4}$	$x(100)-x(1)+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{k!}$
1.25	$l_{\sqrt{10}}\ l_{\sqrt{10}}$	$\sum_{k=2}^{\infty} x(k^{2})-3x(3)$
1.26	$l_{7/3}$	$\sum_{k=1}^{\infty} sign(100-k)x(k)$
1.27	l_1	$\sum_{k=}^{\infty} \quad k^{2})-3x(3)+x(9)$
1.28	l_2	$\sum_{k=1}^{10} sin^{2}\, kx(k)-3x(1)$

1.29	$L_{7/4}[0,1]$	$\int_0^{1/2} \sqrt{t}x(t^2)dt$
1.30	$L_{3/2}[-1,1]$	$\int_{-1}^{-1/2} tx(t^3)dt - 5\int_0^1 x(\sqrt{t})dt$
1.31	$L_{9/2}[-1,1]$	$\int_0^1 t^4 x(t^3)dt$
1.32	$L_1[3,9]$	$\int_5^6 \sin \pi s x(\sqrt{s})ds$
1.33	$L_9[0,2]$	$\int_0^1 \sqrt{t}x(t^2 dt$
1.34	$L_{6/5}[-1,1]$	$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{s}x(\sqrt[3]{s})ds$
1.35	$L_1[0,1]$	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{s}} x(s^2)ds$
1.36	$L_2[-1,1]$	$\int_0^{1/2} t^{2/3} x(t^3)dt$
1.37	$L_{5/4}[0,1]$	$\int_0^{1/2} \sqrt{t}x(t^3)dt$
1.38	$L_3[-1,1]$	$\int_{-1}^{-1/2} tx(t^3)dt - 2\int_0^1 x(\sqrt{t})dt$
1.39	$L_1[3,9]$	$\int_5^6 \sin \pi s x(s)ds$
1.40	$L_7[0,2]$	$\int_0^1 \sqrt{t}x(t^2)dt$
1.41	$L_{9/5}[-1,1]$	$\int_0^{1/2} \sqrt[3]{s}x(\sqrt[11]{s})ds$
1.42	$L_1[0,1]$	$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{s}} x(s^2)ds$
1.43	$C[0,1]$	$\int_0^{2/3} x(\sqrt{t})dt - x(\frac{1}{2}) + 2x(\frac{2}{3})$
1.44	$C[0,4]$	$x(1) - \int_0^2 x(t^2)dt$
1.45	$C[-1,3]$	$-3x(0) + \int_{-1}^2 tx(t)dt + \frac{1}{2}x(2)$
1.46	$C[0,5]$	$\int_1^4 (t^2 - 2t - 1)x(t)dt - 2x(2) + x(\frac{9}{2})$

1.47	*C[-3,3]*	$x(0)-3\int_{-2}^{2}(t+1)x(t)dt$
1.48	*C[0,3]*	$\int_{0}^{e} \ln t x(t)dt-3x(1)+x(2)$
1.49	*C[-2,2]*	$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t x(t)dt+2x(-1)-4x(\frac{3}{2})$
1.50	*C[0,1]*	$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x(\frac{k}{n})+\int_{1/2}^{1} x(\sqrt{t})dt-2\int_{0}^{1} tx(t)dt$
1.51	*C[-9,12]*	$x(10)-x(11)-\int_{0}^{1} x(s^2)ds$
1.52	*C[-5,3]*	$3x(-2)-\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{t}}x(t^2)dt-x(0)$
1.53	*C[-2,5]*	$2x(\frac{1}{2})-x(3)+\int_{-}^{1} t\vert x(t^3)dt$
1.54	*C[0,4]*	$x(1)-\int_{0}^{2} x(t^2)dt$
1.55	*C[-1,3]*	$-3x(0)+\int_{-1}^{2} tx(t)dt+\frac{1}{2}x(2)$
1.56	*C[-3,3]*	$x(0)-3\int_{-2}^{2}(t+1)x(t^{1/3})dt$
1.57	*C[0,3]*	$\int_{0}^{2} \ln t x(t)dt-3x(1)+x(2)$
1.58	*C[0,1]*	$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x(\frac{k}{n})+\int_{1/2}^{1} x(\sqrt{t})dt$
1.59	*C[-9,12]*	$x(10)-x(1)-\int_{0}^{1} x(s^2)ds$
1.60	*C[0,1]*	$3x(-2)-2x(0)+\int_{0}^{1/3} sx(s^2)ds$
1.61	*C[-1,1]*	$-x\left(-\frac{1}{2}\right)+4x\left(\frac{1}{3}\right)-\int_{0}^{1} x(\sqrt{t})dt$
1.62	*C[-5,2]*	$2x(-4)-2x(0)+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt[5]{t}}x(t^2)dt$
1.63	*C[-2,2]*	$x(1)-2x(\frac{3}{2})-\int_{-1}^{1} x(t^3)dt$
1.64	*C[-2,1]*	$-3x(1)+2x(-2)-\int_{-2}^{1} x\left(\frac{s^3}{8}\right)ds$

1. Используя теорему об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве, выяснить, задаёт ли данная формула линейный непрерывный функционал в гильбертовом пространстве, и, если задаёт, найти его норму.

а) $H=l_2$

N	*f(x)*	*N*	*f(x)*
2.1	$x(2)-\sum\limits_{k+1}^{10}x(2k-1)$	*2.2*	$\sum\limits_{k+1}^{\infty}x(k^2)$
2.3	$x(1)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x(k)}{2^k}$	*2.4*	$\sum\limits_{k=1}^{100}x(k^3)-\sum\limits_{k=1}^{10}kx(k)+x(12)$
2.5	$x(5)-2x(1)+\sum\limits_{k+1}^{10}\bar{k}x(k)$	*2.6*	$3x(2)-3x(3)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x(k)}{3^k}$
2.7	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x(2k)}{3^k}-x(2)$	*2.8*	$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x(k)}{k}-2\sum\limits_{k=2}^{30}x(k)$
2.9	$x(3)-x(1)+\sqrt{2}x(4)+\sqrt{3}$	*2.10*	$\sum\limits_{k=1}^{1}x(k^2)-x(51)$

б) H=L$_2$[-1,1]

N	*f(x)*	*N*	*f(x)*
2.1	$\int\limits_0^1 tx(t)dt$	*2.2*	$\int\limits_{-1/2}^{1/2}\frac{1}{t}x(\sqrt{\lvert t\rvert})dt$
2.3	$\int\limits_{-1}^{1}t^3x(t^3)dt$	*2.4*	$\int\limits_0^1 x(t)dt-\int\limits_{-1/2}^{1/2}t^4x(t^3)dt$
2.5	$\int\limits_{-1}^{0}\frac{1}{\sqrt[3]{t}}x(t)dt$	*2.6*	$\int\limits_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{t}}x(t)dt-\int\limits_{-1}^{1}tx(\sqrt[3]{t})dt$
2.7	$\int\limits_0^1 tx(t)dt-\int\limits_{-1}^{0}tx(\sqrt[3]{t})dt$	*2.8*	$\int\limits_{-1}^{1}(t+t^2)x(\sqrt{\lvert t\rvert}dt$
2.9	$\int\limits_0^1 t^2x(t)dt-\int\limits_{-1}^{1}tx(t^2)dt$	*2.10*	$\int\limits_{-1}^{0}t^4x(t^2)dt+\int\limits_{1/2}^{1}tx(\sqrt{t})dt$

3. Пусть $X \in Ban$ Задает ли данная формула линейный ограниченный функционал $f : X \to$? В случае положительного ответа, найти его норму .

	X	K	f
3.1	c	C	$f(x) = \lim_{n\to} x(n)$
3.2	l_∞	R	$f(x) = x(1) + x(3)$
3.3	l_2	R	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k}$
3.4	c_0	C	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (i)^k \frac{x(k)}{k^2}$
3.5	l_1	R	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{k^2+1}$
3.6	c	R	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} x(k)$
3.7	l_3	C	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(2k)}{k}$
3.8	c_0	R	$f(x) = 4x(10) - x(2) + x(100)$
3.9	l_∞	R	$f(x) = x(1) - x(2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{2^k}$
3.10	l_2	R	$f(x) = x(1) - x(0)$
3.11	l_1	C	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} ix(4k+1)$
3.12	l_4	C	$f(x) = x(1) + \frac{1}{2} x(2)$
3.13	c	R	$f(x) = x(1) + \lim_{n\to} x(n)$
3.14	l_2	C	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x(k)}{2^k}$
3.15	$L_2[0,1]$	R	$f(x) = \int_0^1 t^{-1/3} x(t)dt$
3.16	$L_1[0,2]$	C	$f(x) = i\int_0^1 t^2 x(\sqrt{t})dt$
3.17	$C[0,1]$	R	$f(x) = x(0) - x(1)$
3.18	$C[0,1]$	R	$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 x(t^n)dt$
3.19	$L_1[2,4]$	C	$f(x) = \int_2^4 tx(t^2)dt$

3.20	$L_2[-1,1]$	R	$f(x) = \int_{-}^{1} t^2 x(\sqrt{t})dt$
3.21	$L_1[0,1]$	R	$f(x) = \int_{-}^{1} t^4 x(t^2)dt$
3.22	$L_6[0,2]$	R	$f(x) = \int_0^2 t^2 x(t^3)dt$
3.23	$C^{(1)}[0,1]$	C	$f(x) = x(0) + x'(0)$
3.24	$C^{(1)}[0,2]$	R	$f(x) = \int_0^1 x(t)dt + \int_1^2 x'(t)dt$
3.25	$C^{(1)}[-1,1]$	C	$f(x) = x'(0)$
3.26	$C^{(2)}[0,1]$	C	$f(x) = ix(0) + x''(1)$
3.27	$L_2[0,1]$	R	$f(x) = \int_0^1 t^{-1/4} x(t)dt$
3.28	$L_2[0,1]$	C	$f(x) = i\int_0^1 t^{-3/2} x(\sqrt{t})dt$