122

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БС

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

и контрольные задания по курсу
"Теория функций комплексного переменного"
для студентов 4 курса заочного факультета
специальности "Математика"

Гомель 1986

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

и контрольные задания по курсу
"Теория функций комплексного переменного"
для студентов 4 курса заочного факультета
специальности "Математика"

Гомель 1986

Рекомендовано к печати редакционно-издательским советом математического факультета Гомельского государственного университета

Составитель: А.Р.Миротин

ВВЕДЕНИЕ

Теория функций комплексной переменной (теория аналитических функций) в настоящее время - один из важнейших разделов математики. Ее идеи и методы проникли во все разделы анализа, а также дифференциальных уравнений (обыкновенных и в частных производных), теория вероятностей, вычислительной математики и др. ТФКП широко используется в гидро- и аэродинамике, теории упругости, электротехнике и других разделах физики и техники. В связи с этим изучение ТФКП является необходимым элементом математического образования.

Начальные идеи ТФКП возникли в второй половине ХУШ века в основном в работах Леонарда Эйлера. Как самостоятельная дисциплина эта теория сформировалась в XIX веке благодаря трудам Огюстена Коши, Бернгарда Римана и Карла Вейерштрасса.

Университетский курс ТФКП - прямое продолжение курса математического анализа. Многие определения и теоремы ТФКП формально схожи с соответствующими предложениями матанализа, изучавшимися на младших курсах. В связи с этим стоит отметить, что в ряде случаев за ними скрыто совершенно иное содержание (ср., например, определение производной и геометрический смысл производной для функций комплексного и вещественного переменных). Кроме того, органической частью ТФКП является изучение многозначных функций, проистекающие из самой природы предмета (см. определение функции $\operatorname{Arg} z$).

Процесс изучения ТФКП (как и других математических дисциплин) на заочном факультете состоит из следующих этапов:

1) самостоятельная работа над учебниками и учебными пособиями;
2) посещение и проработка установочных и обзорных лекций;
3) работа на практических занятиях;
4) выполнение контрольной работы;
5) сдача зачетов и экзаменов.

С целью облегчения усвоения материала и подготовки к экзамену в этом пособии приводится программа по ТФКП, причем каждый вопрос снабжен ссылкой на наиболее доступные для студента-заочника учебники.

Изучение математики (в этом числе и ТФКП) невозможно без решения задач. Рекомендуется решать задачи из соответствующих задачников [6] и [7] (см. список литературы).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

I. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. - М.: 1977.

2. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. - М.: 1966.

3. Лаврентьев М.А. и Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.: 1973.

4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. - М.: 1967. - Т. I,2.

5. Хапланов М.Г. Теория функций комплексного переменного. - М.: 1965.

6. Евграфов М.А. и др. Сборник задач по теории аналитических функций. - М.: 1972.

7. Волковыский Л.И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. - М.: 1975.

Дополнительная литература

I. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. - М.: 1972.

2. Гончаров В.Л. Теория функций комплексного переменного. - М.: 1955.

3. Гурвич А., Курант Р. Теория функций. - М.: 1968.

4. Картан А. Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных. - М.: 1963.

5. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: 1974.

6. Смирнов В.И. Курс высшей математики. - М.: 1974. - Т.3. - Ч. 2.

7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. - М.: 1969, 1976.- Ч.I.

ПРОГРАММА

I. Понятие аналитической функции действительной переменной. Переход к комплексной переменной. Предмет теории аналитических функций и роль этой теории в математике и ее приложениях.	[2] Введение
2. Комплексные числа и их геометрическое представление на плоскости и на сфере. Бесконечно удаленная точка. Теория пределов и геометрия комплексной плоскости.	[I] Гл. I, § I,2, 3,4.
3. Функции комплексной переменной. Непрерывность, равномерная непрерывность.	[I] . Гл. П, §I; [2] . Гл.П, § I-4.
4. Производная. Уравнения Даламбера-Эйлера - Коши-Римана.	[2] . Гл.П, §5-7; [I] . Гл.П, §4 п.I-
5. Геометрический смысл дифференцируемости. Конформные отображения. Угол с вершиной в бесконечно удаленной точке.	[2] . Гл.П, §8-II.
6. Аналитическая функция. Вещественная и мнимая части аналитической функции как сопряженные гармонические функции. Гидромеханическое истолкование аналитической функции.	[2] . Гл.П, §I3,I4
7. Элементарные функции. Линейная и дробно-линейная функции. Основные свойства дробно-линейной функции.	[2] . Гл.Ш, §4-9; [I] . Гл.Ш, §I п.I-I0
8. Показательная функция и логарифм. Степень с произвольным комплексным показателем. Функция Жуковского. Тригонометрические и обратные тригонометрические функции.	2 . Гл.Ш, §I-3, I0-2I; [I] . Гл.Ш, §3
9. Интеграл от функции комплексной переменной.	[2] . Гл.У, §I-3; [I] . Гл.IУ, §I, п.I-2

10. Интегральная теорема Коши. Выражение определенного интеграла через первообразную функцию. Интеграл в многосвязной области.	[2] . Гл.У, §4-10.
11. Интеграл и интегральная формула Коши.	[1] . Гл.IУ, §3, п.1,2.
12. Интеграл типа Коши. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции.	[1] . Гл.IУ, §3, п.3,4,7.
13. Обращение интегральной теоремы Коши.	[1] . Гл.IУ,§3, п.5; [2] . Гл.УI, §5.
14. Ряды с комплесными членами. Абсолютно сходящиеся ряды. Степенные ряды. Круг сходимости и радиус сходимости.	[1] . Гл.I, §5; [1] . Гл.П, §3
15. Теорема о равномерно сходящихся рядах аналитических функций.	[1] . Гл.П, §2; [1] . Гл.У, §1.
16. Разложение аналитической функции в степенный ряд. Неравенство Коши для коэффициентов. Единственность разложения в степенной ряд. Теорема Лиувилля.	[1] . Гл.У, §2, п.1-3, 8,9; [2] . Гл.УI, §2; [2] . Гл.IX, §6.
17. Действия над степенными рядами: арифметические действия, ряд степенных рядов, подстановка ряда в ряд. Метод неопределенных коэффициентов.	[2] . Гл.УI, §11-13.
18. Теорема единственности для аналитических функций. Нули аналитических функций. Порядок нуля.	[3] . Гл.I, §5, п.20. [2] . Гл.УI, §8-10.
19. Приближения аналитических функций полиномами. Теорема Рунге.	[4] , т.I, гл.4, §2, п.2.3 (до следствия)

20. Ряд Лорана	[2] . Гл.УП, §I,2
2I.Изолированные особые точки однозначного характера. Теорема Ю.В.Сохоцкого. Изучение функций в окрестности бесконечно удаленной точки.	[2] . Гл.УП, §3,4,6
22. Вычеты. Основная теорема о вычетах.	[2] .Гл.УШ, §I,3
23. Применение теории вычетов к вычислению интегралов и к разложению мереморфных функций на простейшие дроби.	[3] . Гл.У, §2, п.73, 74; Гл.У,§I, п.7I
24. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше.	[2]. Гл.УШ, §2
25. Локальное обращение аналитической функции. Принцип открытости и принцип области.	[2] . Гл.Х, §I,3,4,5
26. Принцип максимума модуля.	[I] . Гл.У, §2, п.5.
27. Аналитические продолжение. Общее понятие римановой поверхности.	[2] . Гл.IX, §I-4, §6.
28. Принцип симметрии.	[2] . Гл.IX, §5; [3] . Гл.П, §3, п.36.
29. Особые точки многозначного характера.	[2] . Гл.IX, §9.
30. Единственность конформного отображения. Лемма Шварца. Понятие о теореме существования конформного отображения.	[2] . Гл.Х, §2,6
3I. Понятие о соответствии границ при конформном отображении.	[2] . Гл.Х, §7.

причем по формуле (3)

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i(\arg i + 2\pi k) = i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Окончательно имеем

$$i^{-i} = e^{-i \cdot i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)} = e^{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Пример 3. Выяснить, существует ли такая аналитическая функция f, что $\operatorname{Im} f(z) = e^y \cos x$. Если существует, то найти эту функцию.

Решение. Для того чтобы данная функция v была в области D мнимой частью некоторой аналитической функции, необходимо и достаточно, чтобы v была гармонической в D, т.е. удовлетворяла уравнению Лапласа

$$\Delta v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Имеем $v = e^y \cos x$,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^y \sin x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^y \cos x, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -e^y \cos x, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = e^y \cos x.$$

Следовательно, $\Delta v = 0$ во всей плоскости $\mathbb{C}$ и v является мнимой частью некоторой аналитической в $\mathbb{C}$ функции f. Действительную часть u функции f будем искать по формуле

$$u(x,y) = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial v}{\partial y} dx - \frac{\partial v}{\partial x} dy + C, \qquad (4)$$

где интеграл берется по любому пути L, лежащему в D, с началом в произвольной фиксированной точке $z_0 = x_0 + i y_0 \in D$ и концом в точке $z = x + iy \in D$, а C - произвольная действительная постоянная.

В частности, если D содержит двухзвенную ломаную L с началом в z_0 и концом в точке z, состоящую из горизонтального отрезка, соединяющего точки $x_0 + i y_0$ и $x + i y_0$, и вертикального отрезка, соединяющего точки $x + i y_0$ и $x + iy$ (сделайте чертеж!), то формула (4) принимает вид

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial v(x,y_0)}{\partial y}\,dx - \int_{y_0}^{y} \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\,dy + C. \qquad (5)$$

В нашем случае найдем u по формуле (5), положив в ней $x_0 = y_0 = 0$. Получим

$$u(x,y) = \int_0^x \cos x\,dx + \int_0^y e^y \sin x\,dy + C = \sin x\, e^y + C.$$

Следовательно,

$$f(z) = u(x,y) + i v(x,y) = e^y \sin x + C + i e^y \cos x,$$

где C - произвольная действительная постоянная (заметим, что f можно представить в виде $f(z) = e^y(\sin x + i\cos x) + C = i e^{y-ix} + C = i e^{-iz} + C$).

Пример 4. Найти аналитическую функцию f, такую, что $Re\, f(z) = x^2 - y^2 + x$, $f(0) = i$ (если она существует).

Решение. Так же, как и в примере 3, убеждаемся, что функция $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ является гармонической в $\mathbb{C}$ и, следовательно, искомая аналитическая функция $f = u + iv$ существует. Мнимую часть v функции f можно найти по формуле

$$v(x,y) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C, \qquad (6)$$

где C - произвольная действительная постоянная. В частности, если область D удовлетворяет тому же условию, что и в примере 3, то

$$v(x,y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u(x,y_0)}{\partial y}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\,dy + C. \qquad (7)$$

Найдем v по формуле (7), полагая $x_0 = y_0 = 0$:

$$v(x,y) = \int_0^x 0\,dx + \int_0^y (2x+1)\,dy + C = 2xy + y + C.$$

Следовательно,

$$f(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + C)$$

(можно заметить, что $f(z) = (x^2 - y^2 + 2xy\,i) + (x + iy) + i = z^2 + z + i$).

Дробно-линейные функции имеют вид

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{8}$$

где $ad - bc \neq 0$. При решении задач полезно учесть следующие факты.

I. Дробно-линейная функция $w = f(z)$ однозначно определяется своими значениями в трех точках:

$$w_1 = f(z_1), \quad w_2 = f(z_2), \quad w_3 = f(z_3).$$

По этим значениям искомую функцию w можно определить из следующего уравнения:

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \tag{9}$$

Эта формула верна и в том случае, когда некоторые из z_j и w_j равны ∞, если воспользоваться следующим правилом: разность, в которой встречается знак ∞, нужно заменить на I.

2. Круговое свойство. При дробно-линейном отображении каждая "окружность в широком смысле слова" γ (т.е. прямая или окружность) переходит также в "окружность в широком смысле слова". При этом если $-\frac{d}{c} \in \gamma$, то образом γ будет прямая, в противном случае - окружность.

3. Если при дробно-линейном отображении окружность в широком смысле γ отображается на окружность в широком смысле γ', то область D, для которой γ является границей, отображается на одну из двух областей, для которых γ' является границей.

<u>Пример 5.</u> Найти дробно-линейную функцию, переводящую три точки $0, 1, \infty$ соответственно в точки $-1, 0, 1$. Во что переходит при этом отображении единичный круг ?

Решение. Введем обозначения $z_1 = 0, \ z_2 = 1, \ z_3 = \infty$ и соответственно $w_1 = -1, \ w_2 = 0, \ w_3 = 1$. Воспользовавшись формулой (9), имеем

$$\frac{w+1}{w} : \frac{1+1}{1} = \frac{z}{z-1} : \frac{1}{1}.$$

Из этого уравнения находим w

$$\frac{w+1}{w} = \frac{2z}{z-1} \iff 1 + \frac{1}{w} = \frac{2z}{z-1} \iff \frac{1}{w} = \frac{z+1}{z-1} \iff w = \frac{z-1}{z+1}.$$

Итак, $w = \frac{z-1}{z+1}$. Найдем образ круга $D = \{|z|<1\}$. Для этого найдем сначала образ единичной окружности $\gamma = \{|z| = 1\}$, ограничивающей круг D. В соответствии с круговым свойством γ отображается на окружность в широком смысле γ'. Поскольку точка $-\frac{d}{c} = -1 \in \gamma$, то γ' – прямая. Для определения этой прямой достаточно найти две ее точки. С этой целью возьмем две точки $1, i \in \gamma$ и вычислим их образы при отображении w: по условию задачи $w(1) = 0$. Далее, $w(i) = \frac{i-1}{i+1} = i$. Таким образом, γ' есть прямая, проходящая через точки 0 и i, то есть мнимая ось. Сформулированное выше свойство 3 дробно-линейного отображения показывает, что образом круга D будет одна из полуплоскостей, ограниченных мнимой осью. Для определения этой полуплоскости достаточно найти одну ее точку. Поскольку $0 \in D$, то $w(0) = -1$ принадлежит этой полуплоскости.

Итак, образ круга D при нашем отображении есть левая полуплоскость $\{\operatorname{Im} z<0\}$.

Пример 6. Вычислить $\int_C \bar{z}\, dz$, где C – нижняя половина единичной окружности $\{|z| = 1\}$, проходимая в положительном направлении.

Решение. Если путь C задается уравнением $z = z(t)$ $(\alpha \le t \le \beta)$, то интеграл от функции f по пути C вычисляется по формуле

$$\int_C f(z)\, dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))\, z'(t)\, dt. \qquad (10)$$

В нашем случае уравнение пути C есть $z = e^{i\varphi}$, $\pi \le \varphi \le 2\pi$.

По формуле (10) получаем

$$\int_C \bar{z}\, dz = \int_\pi^{2\pi} e^{-i\varphi}\, i\, e^{i\varphi} d\varphi = i \int_\pi^{2\pi} d\varphi = \pi i.$$

Пример 7. Разложить функцию $z\, e^{3z}$ в ряд

Тейлора по степеням $z-i$ и определить круг сходимости полученного ряда.

Решение. Произведем замену переменной

$$t = z-i, \quad z = t+i.$$

Тогда

$$ze^{3z} = (t+i)e^{3t+3i} = e^{3i}(te^{3t} + ie^{3t}). \qquad (11)$$

Воспользуемся тем, что ряд Тейлора функции e^z имеет вид

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \qquad (12)$$

и сходится во всей плоскости (т.е. в "круге" $|z| < \infty$).

Из формулы (12) получаем

$$e^{3t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n t^n}{n!} \quad (|t| < \infty),$$

$$te^{3t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} t^n}{(n-1)!} \quad (|t|<\infty),$$

$$ie^{3t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i3^n t^n}{n!} = i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i3^n t^n}{n!} \quad (|t|<\infty).$$

Следовательно,

$$te^{3t} + ie^{3t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}t^n}{(n-1)!} + i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i3^n t^n}{n!} =$$

$$= i + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{i3^n}{n!}\right)t^n = i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}\left(1 + \frac{3i}{n}\right)t^n$$

Подставляя это разложение в формулу (11) и учитывая, что $t = z - i$, окончательно имеем

$$ze^{3z} = e^{3i} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{3i} \frac{3^{n-1}}{(n-1)!}\left(1 + \frac{3i}{n}\right)(z-i)^n, \quad (|z|<\infty).$$

Во многих примерах для разложения дробно-рациональных функций в ряд Тейлора бывает полезна формула $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$.

Пример 8. Найти особые точки функции

$$w = \frac{\cos z}{(z^2+4)^2},$$

выяснить их характер и исследовать поведение функции на бесконечности.

Решение. Поскольку числитель и знаменатель данной дроби аналитичны во всей комплексной плоскости, то особые точки функции w могут появиться только за счет обращения знаменателя в нуль. Из уравнения $z^2+4=0$ находим $z=\pm 2i$.

Поскольку при $z \to 2i$ предел числителя

$$\lim_{z\to 2i} \cos z = \lim_{z\to 2i} \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-2}+e^{2}}{2} \neq 0,$$

а предел знаменателя равен 0, то $\lim_{z\to 2i} w = \infty$. Так как наша функция однозначная и аналитическая в проколотой окрестности $\{0<|z-2i|<1\}$ точки $2i$, то $2i$ - полюс функции w. Для определения порядка этого полюса воспользуемся тем, что порядок полюса z_0 функции w совпадает с порядком нуля z_0 функции $\frac{1}{w}$.

Имеем $\dfrac{1}{w} = \dfrac{(z^2+4)^2}{\cos z} = (z-2i)^2 \cdot \dfrac{(z+2i)^2}{\cos z}$.

Поскольку функция $\dfrac{(z+2i)^2}{\cos z}$ аналитична в окрестности точки $2i$ и не равна в точке $2i$ нулю, то порядок нуля в точке $2i$ для функции $1/w$ совпадает с порядком нуля в точке $2i$ для функции $(z-2i)^2$, т.е. равен двум. Итак, $2i$ - полюс второго порядка для функции w. Аналогично показывается, что $-2i$ - тоже полюс второго порядка.

Исследуем точку $z=\infty$. Так как в области $2<|z|<\infty$ функция w однозначная и аналитическая, то ∞ - либо устранимая особая точка, либо полюс, либо существенная особая точка. Рассмотрим вопрос о существовании предела $\lim_{z\to\infty} w$. Пусть $z\to\infty$ вдоль вещественной оси. Тогда

$$\lim_{z\to\infty} w = \lim_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x^2+4} = 0$$

(z - вещественное)

(в этом легко убедиться, если заметить, что $|\cos x| \leq 1$).

С другой стороны, если $z \to \infty$ вдоль мнимой оси, то

$$\lim_{z \to \infty} w = \lim_{y \to \infty} \frac{\cos(iy)}{4-y^2} = \lim_{y \to \infty} \frac{e^{-y}+e^{y}}{2(4-y^2)} = \infty$$

(z - чисто мнимое).
(В этом легко убедиться с помощью правила Лопиталя).

Таким образом, функция w не имеет предела в точке ∞. Следовательно ∞ - существенно особая точка.

<u>Пример. 9.</u> Найти вычеты функции $w = \frac{1}{z^3 - z^5}$ относительно всех изолированных особых точек, выяснив предварительно их характер, и относительно бесконечно удаленной точки, если она не является предельной для других особых точек.

Так же, как и в примере 8, особыми точками данной функции могут быть лишь те, в которых знаменатель равен нулю, и точка ∞. Имеем

$$z^3 - z^5 = z^3(1-z)(1+z)$$

Отсюда $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ - все точки, в которых знаменатель равен нулю. Так как числитель рассматриваемой дроби $\neq 0$, то в этих точках функция w имеет бесконечные пределы. Итак, z_1, z_2, z_3 - полюсы функции w. Для определения их порядка рассмотрим функцию

$$\frac{1}{w} = z^3(1-z)(1+z).$$

В точке $z_1 = 0$ функция $1/w$ имеет нуль третьего порядка, в точках $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ - нули первого порядка. Следовательно, $z_1 = 0$ - полюс первого порядка, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$ - простые полюса функции w. Воспользуемся тем, что в случае, когда a - полюс функции w порядка n, вычет в этой точке можно вычислить по формуле

$$\operatorname*{Res}_{z=a} w(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left(w(z)\,(z-a)^n \right). \qquad (13)$$

Если $n = 1$ и $w(z) = \varphi(z) / \psi(z)$, где φ и ψ - аналитические в окрестности точки a функции, причем $\psi'(a) \neq 0$, то из (13) следует, что

$$\operatorname*{Res}_{z=a} w(z) = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)} . \qquad (14)$$

Таким образом, для нашей функции имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^3-z^5} = \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \left(\frac{1}{z^3-z^5}\cdot z^2\right)'' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)'' =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{z\to 0}\left(\frac{2z}{(1-z^2)^2}\right)' = \frac{1}{2} \lim_{z\to 0} \frac{2(1+3z^2)}{(1-z^2)^2} = 1.$$

Далее, по формуле (14)

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{z^3-z^5} = \frac{1}{3z^2-5z^4}\Big|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

Аналогично находим, что $\operatorname*{Res}_{z=-1} \frac{1}{z^3-z^5} = -\frac{1}{2}$.

Наконец рассмотрим точку $z=\infty$. Поскольку $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{z^3-z^5} = 0$, то $z=\infty$ - устранимая особая точка. Для вычисления вычета в этой точке проще всего воспользоваться тем фактом (который непосредственно вытекает из интегральной теоремы Коши), что сумма всех вычетов функции (включая и вычет в ∞) равна 0.

Имеем

$$\operatorname*{Res}_{z=0} w + \operatorname*{Res}_{z=1} w + \operatorname*{Res}_{z=-1} w + \operatorname*{Res}_{z=\infty} w = 0.$$

Отсюда

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} w = 0.$$

Пример 10. Найти вычеты функции

$$w(z) = \frac{e^{2\pi i z}-1}{(z+1)^3}$$

относительно всех изолированных особых точек и относительно точки ∞.

Решение. Как и в примерах 8 и 9, единственными особыми точками данной функции могут быть лишь нули знаменателя и точка $z=\infty$.

Знаменатель обращается в нуль лишь в точке $z=-1$. В отличие от предыдущих примеров при $z=-1$ равен нулю и числитель. Для выяснения характера особенности данной функции в точке $z=-1$ разложим ее в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z=-1$ (т.е. в кольце $0<|z+1|<R$). Для этого разложим числитель в ряд Тейлора по степеням $z+1$ (см.пример 7).

Совершив замену $z+1=t$, $z=t-1$, имеем с учетом формулы (I2)

$$e^{2\pi i z}=e^{2\pi i(t-1)}=e^{-2\pi i}\,e^{2\pi i t}=$$

$$=e^{2\pi i t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i t)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2\pi i)^n}{n!}(z+1)^n.$$

Следовательно,

$$e^{2\pi i z}-1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2\pi i)^n}{n!}(z+1)^n=2\pi i(z+1)-2\pi^2(z+1)^2-\frac{4}{3}\pi i^3(z+1)^3+$$
$$+\frac{2}{3}\pi^4(z+1)^4+\dots,$$

причем ряд сходится при всех $z\in\mathbb{C}$.

Таким образом, в кольце $0<|z+1|<\infty$

$$w(z)=\frac{e^{2\pi i z}-1}{(z+1)^3}=\frac{2\pi i}{(z+1)^2}-\frac{2\pi^2}{z+1}-\frac{4}{3}\pi i^3+\frac{2}{3}\pi^4(z+1)+\dots.$$

Мы получили искомый ряд Лорана. Из вида главной части $\frac{2\pi i}{(z+1)^2}-\frac{2\pi^2}{z+1}$ этого ряда выводим, что $z=-1$ - полюс второго порядка. Однако в данном случае нет необходимости в использовании формулы (I3), так как $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$ равен коэффициенту C_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в разложении в ряд Лорана функции f в окрестности точки a. Следовательно,

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} w(z)=-2\pi^2.$$

Действуя как в примере 8, получаем, что

$$\lim_{\substack{z\to\infty\\(z\text{ вещественное})}} w(z)=0,\qquad \lim_{\substack{y\to-\infty\\(z=iy\text{ - чисто мнимое})}} w(z)=\infty.$$

Таким образом, ∞ - существенно особая точка. Так как $\operatorname*{Res}_{z=-1} w(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} w(z)=0$, то

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} w(z) = 2\pi^2.$$

При вычислении несобственных интегралов в действительной области часто оказывается полезной теория вычетов. Приведем три формулы в этом направлении [2, гл.УШ, п.3].

Если $P(z)/Q(z)$ - дробно-рациональная функция, причем степень многочлена Q по крайней мере на две единицы больше степени числителя P, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_j} \frac{P(z)}{Q(z)}, \tag{15}$$

где a_j $(j = 1, 2, \dots n)$ - все полюсы функции P/Q, лежащие в верхней полуплоскости $\{Im z > 0\}$.

Пусть φ - аналитическая функция в верхней полуплоскости $\{Im z \geq 0\}$, за исключением конечного числа полюсов a_j $(j = 1, 2, \dots, n)$, не лежащих на действительной оси. Пусть, далее, функция φ принимает на действительной оси действительные значения и $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ Im z>0}} \varphi(z) = 0$.

Тогда

$$\int_0^{\infty} \varphi(x)\cos\alpha x\,dx = \pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_j}(e^{\alpha i z}\varphi(z)), \tag{16}$$

если φ - четная функция, и

$$\int_0^{\infty} \varphi(x)\sin\alpha x\,dx = \pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=a_j}(e^{\alpha i z}\varphi(z)), \tag{17}$$

если φ - нечетная функция $(\alpha > 0)$.

Пример II. Вычислить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}.$$

Решение. Легко видеть, что к этому интегралу применима формула (I5). Полюсы подынтегральной функции есть корни уравнения

$$z^2+4z+13=0.$$

Отсюда $a_1 = -2-3i$, $a_2 = -2+3i$.

Заметим, что в верхней полуплоскости лежит только полюс $a_2 = -2+3i$ и что это полюс второго порядка (см.примеры 8 и 9).

По формуле (I3) находим

$1.\ \sqrt[3]{1}.\quad 2.\ \sqrt[3]{i}.\quad 3.\ \sqrt[4]{-1}.\quad 4.\ \sqrt[6]{-8}.\quad 5.\ \sqrt[8]{1}.\quad 6.\ \sqrt{1-i}.$

$7.\ \sqrt{3+4i}.\quad 8.\ \sqrt[3]{-2+2i}.\quad 9.\ \sqrt[5]{-4+3i}.\quad 10.\ \sqrt[4]{i}.$

Найти все значения указанных степеней (задачи II-20). Ответ записать в тригонометрической или алгебраической форме.

$11.\ (-2)^{\sqrt{2}}.\quad 12.\ 2^{i}.\quad 13.\ i^{i}.\quad 14.\ \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}.\quad 15.\ (3-4i)^{1-i}.$

$16.\ (-3+4i)^{1+i}.\quad 17.\ (1+i)^{i}.\quad 18.\ (1-i)^{i-1}.\quad 19.\ (-1)^{i}.\quad 20.\ (1+i)^{1-i}.$

В задачах 2I-30 найти аналитическую функцию f по заданной действительной или мнимой части (и условию нормировки), либо доказать, что такой функции не существует.

2I. $\operatorname{Re} f(z) = e^{x}\sin y.$ 22. $\operatorname{Im} f(z) = e^{-2y}\cos x.$ 23. $\operatorname{Im} f(z) = x^3 - 3xy^2.$ 24. $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2y - y^3;\ f(0)=0.$ 25. $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{x^2 - x + y^2}{x^2+y^2},\ f(1)=0.$ 26. $\operatorname{Im} f(z) = -e^{-2y}\cos 2x + x.$

27. $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2 + xy.$ 28. $\operatorname{Im} f(z) = y + xy^2;\ f(0) = 1.$ 29. $\operatorname{Re} f(z) = 2x^2 - y^2 + x.$ 30. $\operatorname{Re} f(z) = \ln(2x^2 + y^2).$

В задачах 3I-40 найти дробно-линейную функцию f, переводящую три точки z_1, z_2, z_3 соответственно в точки w_1, w_2, w_3 (символически будем это записывать так: $f:\{z_1; z_2; z_3\} \to \{w_1; w_2; w_3\}$) и вычислить, во что переходит при этом отображении область D.

31. $f: \{-1; i; 1+i\} \to \{0; 2i; 1-i\},\quad D = \{\operatorname{Re} z > \frac{1}{4}\}.$

32. $f: \{-1; i; 1+i\} \to \{i; \infty; 1\},\quad D = \{\operatorname{Re} z > 0\}.$

33. $f: \{-1; \infty; i\} \to \{i; 1; 1+i\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > -1\}$.

34. $f: \{-1; \infty; i\} \to \{\infty; i; 1\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > -1\}$.

35. $f: \{-1; \infty; i\} \to \{0; \infty; 1\}$, $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

36. $f: \{1; i; 0\} \to \{1; i; -1\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.

37. $f: \{\frac{1}{2}; 2; \frac{5}{4} + \frac{3}{4}i\} \to \{\frac{1}{2}; 2; \infty\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > \frac{5}{4}\}$.

38. $f: \{-1; 0; 1\} \to \{1; i; -1\}$, $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

39. $f: \{0; 2; -2i\} \to \{0; 1; \infty\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.

40. $f: \{1; 0; i\} \to \{0; 1; \infty\}$, $D = \{\operatorname{Re} z > 0\}$.

В задачах 41-50 нужно вычислить интеграл по данному контуру C (контур всегда обходится в положительном направлении).

41. $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\, dz$, C - граница треугольника с вершинами в точках $0;\ 1;\ 1+2i$.

42. $\int_C (\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z)\, dz$, C - отрезок с началом в точке 0 и концом в точке $1+2i$.

43. $\int_C (z - |z|)\, dz$, C состоит из правой половины единичной окружности $\{|z| = 1\}$ и вертикального диаметра.

44. $\int_C (\bar{z}/z)\, dz$, C состоит из верхних половин окружностей $\{|z| = 1\}$, $\{|z| = 2\}$ и соединяющих их отрезков вещественной оси.

45. $\int_C (\bar{z}/z)\, dz$, C - граница квадрата с вершинами $1;\ i;\ -1;\ -i$.

46. $\int_C (z/\bar{z})\, dz$, C - граница квадрата с вершинами $\pm 1;\ \pm i$.

47. $\int\limits_C \bar{z}\,dz$, C – астроида $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ $(0\le t\le 2\pi)$.

48. $\int\limits_C \bar{z}\,dz$, C состоит из одной арки синусоиды $y=\sin x$ $(0\le x\le \pi)$ и замыкающего ее отрезка вещественной оси.

49. $\int\limits_C \operatorname{Re} z\,dz$, C - верхняя половина единичной окружности $\{|z|=1\}$.

50. $\int\limits_C \operatorname{Im} z\,dz$, C - верхняя половина единичной окружности $\{|z|=1\}$.

В задачах 51-60 требуется разложить указанную функцию в ряд Тейлора по степеням $z-a$, где a -заданное число, и определить круг сходимости полученного ряда.

51. $\frac{1}{z+1}$, $a=i$ 52. $\frac{2}{z-1}$, $a=i$ 53. $\frac{1}{z^2+4}$, $a=0$

54. $\frac{z}{z+2}$, $a=1$ 55. e^{z+3}, $a=-1$ 56. e^{2z}, $a=i$.

57. $\frac{1}{z+4}$, $a=-1$ 58. $\sin z\cos z$, $a=0$

59. e^{z}, $a=-1$ 60. $\cos 2z$, $a=0$

Найти вычеты указанных функций (задачи 61-70) относительно всех изолированных особых точек, выяснив предварительно их характер, и относительно бесконечно удаленной точки (если она не является предельной для других особых точек).

61. $\dfrac{z^2+z-1}{z^3-z}$ 62. $\dfrac{\sin\pi z}{(z-1)^3}$. 63 $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

64. $\operatorname{tg} z$. 65. $\dfrac{\cos z}{(z-1)^2}$. 66. $\dfrac{\sin z}{(z-\pi)^2}$.

67. $\dfrac{\cos\pi z}{(z-\frac{1}{2})^2}$. 68. $\dfrac{z}{e^z-1}$. 69 $\dfrac{\sin\pi z}{(z-\frac{1}{2})^2}$.

70. $\dfrac{z^2}{e^z-1}$.

В задачах 71-80 требуется вычислить указанные интегралы с помощью вычетов

71. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$.

72. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$.

73. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9} dx$.

74. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$.

75. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

76. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{x^2+9} dx$.

77. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx$.

78. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2+4}$.

79. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$

80. $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+4)^2}$.

В задачах 81-90 требуется найти число корней данных уравнений в областях, указанных в скобках.

81. $z^9+2z^6+z^2-8z-2=0$ $(\{|z|<1\})$.
82. $2z^5-z^3+3z^2-z+8=0$ $(\{|z|<1\})$.
83. $z^3-3z+1=0$ $(\{|z|<1\})$.
84. $2z^4-5z+2=0$ $(\{|z|<1\})$.
85. $z^8-4z^5+z^2-1=0$ $(\{|z|<1\})$.
86. $z^3-12z+2=0$ $(\{|z|<2\})$.
87. $z^4-9z+1=0$ $(\{|z|<2\})$.
88. $z^4-8z+10=0$ $(\{|z|<3\})$.
89. $z^7-5z^4+z^2-2=0$ $(\{|z|<1\})$.
90. $z^4-5z+1=0$ $(\{|z|<2\})$.

СОДЕРЖАНИЕ

Методические указания и контрольные задания по курсу
"Теория функций комплексного переменного"
для студентов 4 курса заочного факультета
специальности "Математика"

Адольф Рувимович Миротин

Редактор Е.Ф.Зайцева

Подписано к печати 15.10.86. Формат 60х84 I/I6.
Бумага писчая №I. Печать офсетная. Усл.п.л. I,49.
Уч.изд.л. I,3. Тираж 200. Заказ 320 . Бесплатно.

Отпечатано на ротапринте ГГУ, г.Гомель, ул.Советская, I04