Министерство образования Республики Беларусь

Белорусский государственный университет
Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
Гродненский государственный университет имени Янки Купалы
Балтийский федеральный университет им. И. Канта (Калининград, Россия).

ЭЛЕКТРОННЫЙ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО
Часть 1

В.Г. Кротов, Е.А. Ровба, Е.А. Сетько,
К.А. Смотрицкий, А.П. Старовойтов, В.Н.Худенко

ЭУМК предназначен для информационно-методического обеспечения преподавания дисциплины «Теория функций комплексного переменного» по всем специальностям в высших учебных заведениях Республики Беларусь.

Дата сборки: 27 февраля 2016 г.

Общая информация

Методические указания

Запуск ЭУМК

ЭУМК поставляется на компакт-диске. Стандартный комплект включает:

- данный файл в формате `pdf`, находящийся в корневом каталоге диска;
- дистрибутив свободно распространяемого программного средства Adobe Reader для чтения файлов в формате `pdf`.

ЭУМК не предъявляет никаких специальных требований к системе. Для работы достаточно компьютера с установленной на нём любой современной операционной системой и программой просмотра файлов формата `pdf`. Для семейства операционных систем MS Windows рекомендуется программа Adobe Reader версии не ниже 9 или Foxit Reader версии не ниже 4.0.

Инсталляция программы Adobe Reader осуществляется стандартным образом. Запустите файл `setup.exe` дистрибутива и следуйте интсрукциям.

УМК можно запустить непосредственно с компакт-диска или скопировать все файлы в каталог на жёстком диске. Для запуска учебника обычно достаточно дважды щёлкнуть левой кнопкой мыши, указав на `pdf`-файл учебника. В случае необходимости можно открыть учебник программным средством, отличным от установленного по умолчанию. Для этого следует выделить файл учебника левой кнопкой мыши и нажать на правую кнопку. В выпавшем контекстном меню можно выбрать требуемое программное средство, например, Adobe Reader.

Принцип построения и структура

ЭУМК состоит из следующих структурных частей:

- методических указаний, содержащих различную методическую и справочную информацию;
- теоретической части с лекционными материалами по курсу;
- практической части с заданиями для практических занятий.

В левой части экрана расположена панель навигации, содержащая систему вложенных закладок на структурные элементы учебника. Окно с текстом учебника снабжено дополнительными кнопками навигации. Все учебные материалы связаны между собой гиперссылками.

Замечания по навигации

Работа с данным электронным учебником возможна в нескольких направлениях:

1) изучение (повторение) всего материала целиком или некоторых тем по отдельности,

2) повторение основных понятий и определений.

Вне зависимости от цели при работе с гиперссылками следует придерживаться следующих правил.

1) При возвращении на предыдущее место в электронном учебнике следует использовать кнопки навигации, расположенные в верхней части страницы.

2) Кнопка «Перейти к основному тексту» в предметном указателе и списке определений позволяет перейти в тому месту в учебнике, где вводится соответствующее понятие. Аналогичным образом используется кнопка «Вернуться к условию» в решениях и указаниях, а также ответах к задачам.

Рекомендации для преподавателя

Лекции

Несомненным достоинством данного ЭУМК является возможность его использования на лекциях в качестве презентационного материала. Для этого необходимо перейти к странице, которая будет использоваться в качестве начальной в презентации к данной лекции и включить полноэкранный режим с помощью специальной кнопки, комбинации клавиш `Ctrl+L` либо клавиши `F11`. Далее по страницам перемещаются, используя гиперссылки и встроенные в страницы средства навигации.

Целесообразно выдавать данный ЭУМК студентам до начала чтения курса. Можно рекомендовать студентам распечатать лекционные материалы на одной стороне листов бумаги, переплести и использовать полученный альбом в качестве конспекта лекций. При этом чистые стороны листов используются для записи пояснений и дополнений лектора к представленному материалу. Это избавляет студентов от необходимости переписывать содержание презентаций и, в то же время, позволяет зафиксировать комментарии и дополнения лектора.

Эффективное использование ЭУМК для изучения теоретического материала предполагает организацию самостоятельной работы студентов перед лекциями. Следует требовать, чтобы перед лекцией студенты ознакомились с соответствующими статьями ЭУМК.

Организация практических занятий

Для организации практических занятий целесообразно использовать систему задач и упражнений, включённую в ЭУМК.

Задачи и упражнения структурированы по разделам курса. Большинство из них снабжены ответами, а некоторые — решениями или указаниями.

Рекомендации для студента

Изучение теоретического материала

Перед лекцией изучите материалы ЭУМК, связанные с темой следующей лекции. Будьте готовы к тому, что преподаватель не будет повторять на лекциях материалы, включённые в настоящий ЭУМК. Зафиксируйте вопросы, которые у Вас возникли с тем, чтобы задать их преподавателю. Если лектор до начала чтения курса лекций выдал вам лекционные материалы, распечатайте их на одной стороне листов бумаги, переплетите и используйте полученный альбом в качестве конспекта лекций. При этом чистые стороны листов можно использовать для записи пояснений и дополнений лектора к представленному материалу. Это избавит Вас от необходимости переписывать содержание презентаций и, в то же время, позволит зафиксировать комментарии и дополнения лектора.

Практические занятия

Получите у преподавателя номера задач. Большинство задач снабжены гиперссыками на ответы, некоторая часть — на решения или указания. Прежде, чем смотреть решение, указание или ответ, постарайтесь решить задачу самостоятельно.

Типовые программы курсов

Указатель по направлениям и специальностям

1–31 03 01 Математика (по направлениям):

- 1–31 03 01–01 Математика (научно-производственная деятельность),
- 1–31 03 01–02 Математика (научно-педагогическая деятельность),
- 1–31 03 01–03 Математика (экономическая деятельность).

1–31 03 02 Механика и математическое моделирование.

Список учебных программ

Теория функции комплексного переменного. Регистрационный номер: ТД-G.488/тип. Составители: В.Г. Кротов , И.Л. Васильев, Э.И. Зверович.

Рекомендуемая литература

[1] Сидоров Ю.В., Федорюк М.Ф., Шабунин М.И. Лекции по ТФКП. М.: Наука, 1989.

[2] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.I. М.: Наука, 1976.

[3] Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.

[4] Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Т.6. Мн.: Вышэйшая школа, 2008.

[5] Александров И.А., Соболев В.В. Аналитические функции комплексного переменного. М.: Высшая школа, 1984.

[6] Волковыский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1970.

[7] Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т.1,2. М.: Наука, 1968.

[8] Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1968.

[9] Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1974.

[10] Сборник задач по теории аналитических функций / Под. ред. М.А. Евграфова. М.: Наука, 1972.

[11] Полиа Г., Сёге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т.1,2. М.: Наука, 1978.

[12] Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М.: Наука, 1968.

Часть I

Теория

Глава 1

Введение в комплексный анализ

1.1. Множество комплексных чисел

1.1.1. Операции с комплексными числами

Всюду ниже множество действительных чисел обозначается общепринятым символом $\mathbb{R}$.

Определение 1.1. *Множество комплексных чисел* (*комплексная плоскость*) $\mathbb{C}$ определяется как множество

$$\{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

всех упорядоченных пар действительных чисел, на котором определены отношение равенства и две операции — сложения и умножения.

Равенство. Две пары $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.
Сложение. Суммой элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Умножение. Произведением элементов $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$ и $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$ называется

$$z_1 \cdot z_2 := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Как и в случае действительных чисел мы чаще будем опускать знак операции умножения (точку) и писать просто z_1z_2 вместо $z_1 \cdot z_2$.

Первый элемент пары $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ будем называть *действительной частью* z, а второй — *мнимой частью* z (основания для этого у нас скоро появятся). Для них используются следующие стандартные обозначения

$$x := \operatorname{Re} z, \quad y := \operatorname{Im} z.$$

Как множество комплексная плоскость $\mathbb{C}$ совпадает с обычной плоскостью $\mathbb{R}^2$. Отношение равенства и операция сложения тоже определяются точно так же, как и для $\mathbb{R}^2$. Специфика множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ начинает проявляться тогда, когда мы вводим умножение — напомним, что в $\mathbb{R}^2$ умножение вообще не вводится.

1.1.2. Поле комплексных чисел

Непосредственной проверкой легко убедиться (мы рекомендуем выполнить это самостоятельно), что сложение комплексных чисел обладает следующими свойствами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность сложения),

2) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность сложения),

3) $z + (0,0) = z$ для любого $z \in \mathbb{C}$ (элемент $(0,0)$ является нейтральным элементом для сложения),

4) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ существует противоположный элемент $-z = (-x, -y) \in \mathbb{C}$ со свойством $z + (-z) = (0,0)$.

Свойства 1)–4) означают, что $\mathbb{C}$ является коммутативной группой относительно введенной операции сложения.

Умножение комплексных чисел обладает такими свойствами:

5) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ для любых $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (коммутативность умножения),

6) $z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3$ для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ (ассоциативность умножения),

7) $z \cdot (1,0) = z$ для любого $z \in \mathbb{C}$ (элемент $(1,0)$ является нейтральным элементом для умножения),

8) для любого $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, $z \neq (0,0)$, в $\mathbb{C}$ существует обратный элемент

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

со свойством $z \cdot z^{-1} = (1,0)$.

Свойства 5)–8) означают, что $\mathbb{C}$ является коммутативной группой относительно введенной операции умножения.

Кроме того, операции сложения и умножения связаны дистрибутивным законом

9) для любых $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ выполнено равенство $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Свойства 1)–9) говорят нам о том, что множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ с определенными операциями сложения и умножения является полем, которое называется *полем комплексных чисел* и обозначается тем же символом $\mathbb{C}$.

1.1.3. Алгебраическая форма записи

Множество действительных чисел $\mathbb{R}$ естественным образом вкладывается в $\mathbb{C}$. Это делается с помощью взаимно-однозначного отображения

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}.$$

Мы будем ниже систематически использовать это отождествление действительных чисел, как комплексных, и часто вместо $(x, 0)$ будем писать просто x. Таким образом, пара $(0, 0)$ отождествляется нами с действительным числом 0, а пара $(1, 0)$ — с 1. Скоро мы увидим выгоду от этого.

Рассмотрим еще одно специальное комплексное число $i = (0, 1)$, которое в дальнейшем будет называться *мнимой единицей*. По определению умножения комплексных чисел легко убедиться (сделайте это самостоятельно), что

$$i^2 = -1.$$

Используя мнимую единицу и наше соглашение об обозначениях для действительных чисел, мы приходим к так называемой *алгебраической (декартовой) форме* записи комплексных чисел

$$x + iy := (x, y). \tag{1.1}$$

В самом деле,

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy.$$

Если $\operatorname{Re} z = 0$, то комплексное число z называется мнимым или, для большей выразительности, *чисто мнимым*. Кроме того, комплексное число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряженным* числом для $z = x + iy$.

1.1.4. Тригонометрическая форма записи

Используя полярные координаты на плоскости $\mathbb{R}^2$, можно получить другое представление для комплексных чисел. Действительно, для $z = (x, y) \neq 0$ рассмотрим полярные координаты

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \tag{1.2}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{1.3}$$

а φ — угол (между векторами (x, y) и $(1, 0)$), определяемый системой уравнений

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

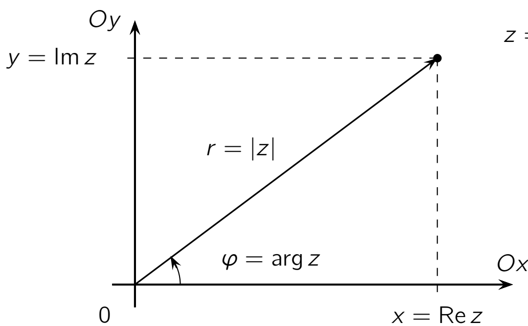
Число (1.3) называется *модулем* комплексного числа z и обозначается $|z|$. Оно определяется по комплексному числу z вполне однозначно.

Угол φ в (1.2) называется *аргументом* комплексного числа $z \neq 0$ и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Он определен не однозначно, а лишь с точностью до слагаемого вида $2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$ — любое целое число. Однако множество $\operatorname{Arg} z$ содержит единственное число, принадлежащее промежутку $(-\pi, \pi]$, которое называется *главным значением аргумента* и обозначается $\arg z$. Таким образом, мы можем записать, что

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}. \tag{1.4}$$

В терминах координат (1.2) можно записать *тригонометрическую форму* комплексного числа

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{1.5}$$



$$z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Рис. 1.1

1.2. Расширенная комплексная плоскость

1.2.1. Топология плоскости

На комплексной плоскости имеется естественное (евклидово) расстояние, определяемое с помощью модуля комплексного числа

$$|z_1 - z_0| = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (x_1 - x_0)^2}, \quad z_k = x_k + iy_k \quad (k = 0, 1).$$

Оно порождает открытые

$$B(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \tag{1.6}$$

и замкнутые

$$\overline{B}(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leqslant r\} \tag{1.7}$$

круги с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$.

Введем еще обозначения для «проколотых» открытого

$$B^\circ(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\} \tag{1.8}$$

и замкнутого

$$\overline{B}^\circ(z_0, r) := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| \leqslant r\} \tag{1.9}$$

кругов с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ радиуса $r > 0$, а также

$$C_r(z_0) := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z_0| = r\} \tag{1.10}$$

для окружности радиуса $r > 0$ с центром в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ (границы кругов $B(z_0, r)$ и $\overline{B}(z_0, r)$).

Евклидова метрика порождает естественную топологию на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ следующим образом.

Определение 1.2. Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *открытым*, если для любой точки $z \in A$ существует открытый круг $B(z, r)$ положительного радиуса $r > 0$ с центром в этой точке, содержащийся в A.

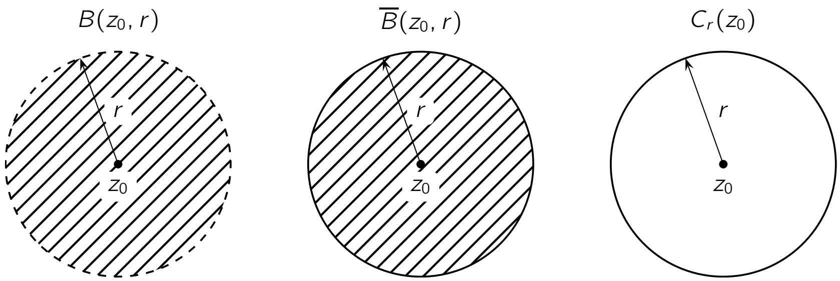


Рис. 1.2

Теорема 1.1. *Семейство открытых множеств в* $\mathbb{C}$ *обладает следующими свойствами*
1) *множества* $\mathbb{C}$ *и* $\varnothing$ *открыты,*
2) *для любого семейства открытых множеств* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *их объединение* $\bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ *открыто,*
3) *любое пересечение* $\bigcap\limits_{k=1}^{n} G_k$ *конечного числа открытых множеств* G_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ *открыто.*

Определение 1.3. *Окрестностью точки* $z \in \mathbb{C}$ называется любое открытое множество, содержащее эту точку. Если $G \subset X$ — окрестность точки $x \in X$, то $G^\circ = G \setminus \{x\}$ называется *проколотой* окрестностью этой точки.

Ясно, что открытое множество является окрестностью любой своей точки.

Определение 1.4. Точка $z \in \mathbb{C}$ называется *предельной* для множества $A \subset \mathbb{C}$, если в любой проколотой окрестности x есть точки из A.

Другими словами, это означает, что в любой окрестности точки z есть точки из A, отличные от z. Подчеркнем, что здесь не требуется принадлежности точки z множеству A. Множество всех предельных точек для A обозначается A'.

Точка $z \in \mathbb{C}$ является предельной для множества $A \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность попарно различных точек $\{z_n\} \subset A$, что

$$\lim_{n\to\infty} |z - z_n| = 0,$$

а также тогда и только тогда, когда в любой окрестности точки z бесконечно много точек из A.

Точки множества, не являющиеся предельными для него, называются *изолированными* точками множества.

Определение 1.5. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Теорема 1.2 (принцип двойственности). *Множество $A \subset \mathbb{C}$ замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $A^c = \mathbb{C} \setminus A$ открыто.*

Определение 1.6. *Замыканием* множества A называется множество $\overline{A} = A \cup A'$.

Определение 1.7. *Границей* множества A в метрическом пространстве называется множество

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}. \tag{1.11}$$

Точки, принадлежащие границе множества, называются *граничными* точками для него.

Точка x является граничной тогда и только тогда, когда в любой окрестности этой точки есть точки из A и из A^c.

Определение 1.8. Непустое множество в $\mathbb{C}$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором круге.

1.2.2. Компактность

Семейство множеств $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ называется *открытым покрытием* множества A, если все множества G_α, $\alpha \in I$, открыты и

$$A \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha.$$

Другими словами, это означает, что каждая точка z множества A принадлежит по крайней мере одному из множеств G_α.

Определение 1.9. Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *компактным* или *компактом*, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие.

Теорема 1.3. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.*

1.2.3. Связность

Определение 1.10. Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *связным*, если не существует таких двух открытых множеств $G_1 \subset \mathbb{C}$ и $G_2 \subset \mathbb{C}$, что

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad A \cap G_1 \neq \varnothing, \quad A \cap G_2 \neq \varnothing, \quad A \subset G_1 \cup G_2.$$

Другими словами, связность означает, что множество нельзя разбить на непустые части, содержащиеся в непересекающихся открытых множествах.

1.2.4. Стереографическая проекция

Потребности теории функций комплексного переменного обуславливают необходимость расширения комплексной плоскости $\mathbb{C}$, получающегося из последней добавлением нового элемента — бесконечно удаленной точки $z = \infty$. Для наглядного представления расширенной комплексной плоскости Риман предложил использовать способ, который сейчас будет описан.

Рассмотрим трехмерное евклидово пространство

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, \omega) : x, y, \omega \in \mathbb{R}\}$$

и будем отождествлять комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с подмножеством в $\mathbb{R}^3$ с помощью взаимно-однозначного отображения

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy \leftrightarrow (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3.$$

Введем так называемую *сферу Римана*

$$S = \left\{(x, y, \omega) : x^2 + y^2 + \left(w - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

Пусть $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Соединим «северный полюс» сферы Римана — точку $P(0, 0, 1)$ — с точкой z отрезком

$$\Gamma_z = \{(tx, ty, 1 - t) : t \in [0, 1]\}.$$

Если $z \neq 0$, то этот отрезок имеет единственную общую точку с S и соответствующее значение равно $t = (x^2 + y^2 + 1)^{-1}$. Непосредственная проверка показывает, что эта точка есть

$$z' = \left(\frac{x}{|z|^2 + 1}, \frac{y}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2}{|z|^2 + 1}\right).$$

Будем называет ее *стереографической проекцией* z. Стереографической проекцией точки $z = 0$ является «южный полюс» сферы Римана $(0, 0, 0)$.

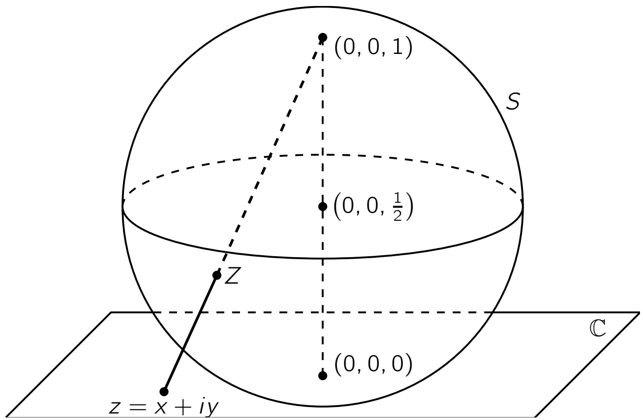


Рис. 1.3

Таким образом, $S\setminus\{(0,0,1)\}$ взаимно-однозначно отображается на комплексную плоскость $\mathbb{C}$. «Северный полюс» сферы Римана $(0,0,1)$ оказался при этом незадействованным. Мы сопоставим точке $(0,0,1)$ новое «идеальное» комплексное число $z=\infty$ и образуем расширенную комплексную плоскость

$$\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}.$$

Конечно, мы лишены возможности использовать «новое» комплексное число $z=\infty$ в алгебраических операциях. Но иногда, впрочем, некоторым операциям с $z=\infty$ можно приписать смысл

$$a+\infty=\infty+a=\infty,\qquad a\cdot\infty=\frac{a}{0}=\infty\cdot a=\infty,\qquad \frac{a}{\infty}=0,\qquad \frac{\infty}{a}=\infty,\qquad a\in\mathbb{C},$$

но операции $0\cdot\infty$ и $\infty\pm\infty$ лишены смысла.

Итак, функция

$$F(z)=\begin{cases}\left\{\frac{\operatorname{Re} z}{|z|^2+1},\frac{\operatorname{Im} z}{|z|^2+1},\frac{|z|^2}{|z|^2+1}\right\}, & z\in\mathbb{C},\\ (0,0,0), & z=\infty\end{cases}\tag{1.12}$$

осуществляет взаимно-однозначное отображение расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}$ на сферу Римана S.

В качестве базы окрестностей точки $z_0 = \infty$ удобно взять семейство

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > r\}, \quad r > 0.$$

Тем самым мы дополняем топологию плоскости $\mathbb{C}$ до топологии на $\widehat{\mathbb{C}}$.

Отметим, что комплексная плоскость $\mathbb{C}$ некомпактна (она неограничена), в то же время образ $\widehat{\mathbb{C}}$ при отображении (1.12) (сфера Римана) компактен. Поэтому процесс отождествления $\widehat{\mathbb{C}}$ и сферы Римана с помощью (1.12) называют часто компактификацией $\mathbb{C}$.

1.2.5. Сферическая метрика

Наряду с евклидовой метрикой в $\mathbb{C}$ будем рассматривать еще *сферическую метрику* в $\widehat{\mathbb{C}}$, определяя ее равенством

$$d_S(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}, & z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}, & z_1 \in \mathbb{C},\ z_2 = \infty. \end{cases}$$

Другими словами, сферическое расстояние — это евклидово расстояние в $\mathbb{R}^3$ между стереографическими проекциями. Нетрудно показать, что это — действительно метрика на S.

Использование сферической метрики приводит к другому подходу к определению топологии на $\widehat{\mathbb{C}}$ — она дает возможность определить базу окрестностей точки на S как множество пересечений S и евклидовых шаров с центрами в этой точке.

Итак, на расширенной комплексной плоскости имеется две топологии и естественно их сравнить. Ответ является совершенно естественным — они совпадают.

1.3. Предел и непрерывность

1.3.1. Функции комплексного переменного

Нашим основным объектом изучения будут функции вида $f : D \to \mathbb{C}$, отображающие подмножества $D \subset \mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}$. Под этим мы понимаем (как это обычно делается в математике), что любому числу $z \in D$ поставлено в соответствие единственное комплексное число $f(z) \in \mathbb{C}$.

В теории функций комплексного переменного часто приходится использовать расширенное понятие функции: если каждому $z \in D$ поставлено в соответствие некоторой множество комплексных чисел, то будем говорить о *многозначной* функции, заданной на D.

Термин «функция» всегда будет использоваться в обычном понимании (как в первом абзаце). Иногда, впрочем, чтобы подчеркнуть, что мы имеем дело именно с такой (обычной) трактовкой понятия функции, мы будем говорить об *однозначной* функции.

В теории функций комплексного переменного вместо термина «взаимно однозначная» функция обычно используется «*однолистная*» функция. Мы также придерживаемся этой традиции.

1.3.2. Непрерывность

Мы будем рассматривать функции вида $f : D \to \mathbb{C}$ (или $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$), где $D \subset \mathbb{C}$ или $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$. При этом понятия предела и непрерывности таких функций мы всегда будем понимать в смысле топологий, введенных выше. Приведем их в явном виде.

Определение 1.11. Число $w_0 \in \mathbb{C}$ называется *пределом функции* $f : D \to \mathbb{C}$ в предельной точке z_0 множества $D \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Точка $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ является пределом функции $f : D \to \mathbb{C}$:

1) в предельной точке z_0 множества $D \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > A,$$

2) в бесконечно удаленной точке неограниченного множества $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, если

$$\forall A > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall z \in D \quad |z| > \Delta \Longrightarrow |f(z)| > A.$$

Во всех случаях это факт мы записываем, как обычно, так:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Функция $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$, $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, называется *непрерывной* в предельной точке $z_0 \in D$ множества D, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Мы говорим, что функция $f : D \to \widehat{\mathbb{C}}$ *непрерывна на множестве* $D \subset \mathbb{C}$, если она непрерывна в каждой точке этого множества. Класс всех таких функций обозначаем символом $C(D)$.

Теорема 1.4 (критерий непрерывности). *Следующие условия равносильны:*
i) *функция* $f : D \to \mathbb{C}$ *непрерывна на множестве* $D \subset \mathbb{C}$,
ii) *для любого открытого множества* $V \subset \mathbb{C}$ *его прообраз* $f^{-1}(V)$ *открыт относительно* D.

Теорема 1.5. *Если* $D \subset \mathbb{C}$ *и* $f \in C(D)$, *то для любого компакта* $K \subset D$ *его образ* $f(K)$ *компактен.*

Теорема 1.6. *Если* $D \subset \mathbb{C}$ *и* $f \in C(D)$, *то для любого связного множества* $A \subset D$ *его образ* $f(A)$ *связен.*

1.3.3. Равномерная непрерывность

Определение 1.12. Пусть $D \subset \mathbb{C}$. Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *равномерно непрерывной* на D, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z', z'' \in D \quad |z' - z''| < \delta \Longrightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon. \tag{1.13}$$

Конечно, из равномерной непрерывности функции на множестве вытекает ее непрерывность на этом множестве.

Теорема 1.7 (Кантора). *Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компакт и $f \in C(K)$. Тогда f равномерно непрерывна на K.*

Теорема 1.8 (Арцела–Асколи). *Пусть $K \subset \mathbb{C}$ — компактное множество и S — некоторое бесконечное множество непрерывных функций $f : K \to \mathbb{C}$.*

Для того, чтобы S содержало равномерно сходящуюся на K последовательность, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

1) *равномерной ограниченности*

$$\sup_{f \in S} \sup_{z \in K} |f(z)| < \infty,$$

2) *равностепенной непрерывности*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z_1, z_2 \in K \quad \forall\, f \in S \quad |z_1 - z_2| \Longrightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon.$$

1.4. Кривые и области

1.4.1. Кривые и контуры

Определение 1.13. Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *кривой*, если существует непрерывная функция $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, для которой

$$\Gamma = \gamma([\alpha, \beta]).$$

Отображение γ называется *параметризацией* кривой.

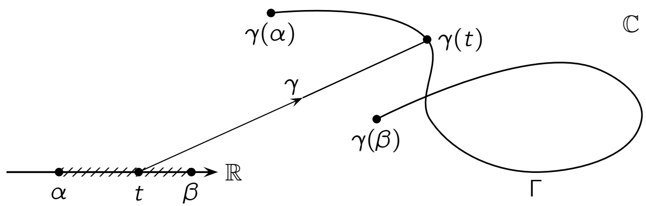


Рис. 1.4

Точки $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\beta)$ называются *концами* кривой Γ. В этом случае также говорят, что кривая Γ соединяет точки $\gamma(\alpha)$ и $\gamma(\beta)$.

Для каждого $t \in [\alpha, \beta]$ его образ $\gamma(t) \in \Gamma$ можно записать в виде

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t). \tag{1.14}$$

Возникающие таким образом функции $x, y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ называются координатными функциями параметризации кривой Γ.

Определение 1.14. Кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *жордановой*, если она имеет взаимно-однозначную параметризацию.

Для жорданой кривой точки «самопересечения» (как на рис. 1.4 невозможны).

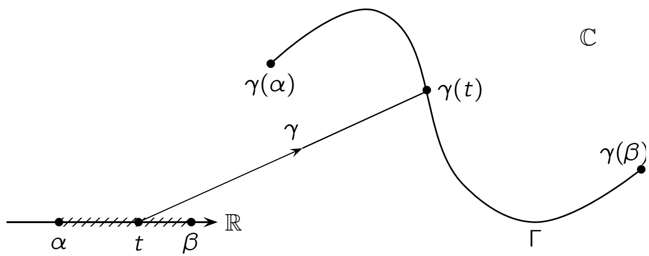


Рис. 1.5

Параметризация жордановой кривой определяется неоднозначно. Действительно, легко видеть, что если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — параметризация кривой Γ, то для любой строго монотонной непрерывной функции $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \leftrightarrow [\alpha, \beta]$ композиция $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией Γ.

Класс всех параметризаций кривой Γ обозначается $\mathcal{P}(\Gamma)$. Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ — параметризация жордановой кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}$, то любую непрерывную строго монотонную функцию $\varphi : [\alpha_1, \beta_1] \to [\alpha, \beta]$ будем называть *заменой параметра*.

Таким образом, предыдущее утверждение можно переформулировать так: если γ параметризация жордановой кривой и φ — замена параметра, то $\gamma \circ \varphi$ также является параметризацией. Справедливо и обратное.

Теорема 1.9. *Для любых двух параметризаций $\gamma_k : [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbb{C}$ $(k = 1, 2)$ жордановой кривой Γ существует замена параметра φ, для которой $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$.*

Доказательство. Замена параметра, о которой говорится в формулировке, определяется как $\varphi = \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$. Непрерывность γ_1^{-1}, а, следовательно, и φ гарантируется следующей леммой. $\square$

Лемма 1.1. *Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — жорданова кривая и $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — ее параметризация, то $\gamma^{-1} \in C(\Gamma)$.*

Доказательство. В самом деле, пусть $z_n \in \Gamma$, $z_n \to z_0 \in \Gamma$, но $\left|\gamma^{-1}(z_n) - \gamma^{-1}(z_0)\right| \geqslant \delta > 0$. По свойству Больцано–Вейерштрасса из ограниченной последовательности $t_n = \gamma^{-1}(z_n)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $t_{n_j} \to t_0$. $z_{n_j} \to \gamma(t_0) = z_0$ в силу непрерывности γ. В то же время $\left|t_{n_j} - t_0\right| \geqslant \delta > 0$ — противоречие. $\square$

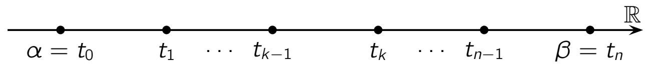


Рис. 1.6

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — жорданова кривая и $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ — ее параметризация, то для любого разбиения

$$\Pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta \tag{1.15}$$

ее области определения положим

$$l(\Pi) := \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \,. \tag{1.16}$$

Геометрический смысл $l(\Pi)$ — длина ломаной, вписанной в кривую Γ в точках $\gamma(t_k)$, $k = 0, \ldots, n$ (см. рис. 1.7).

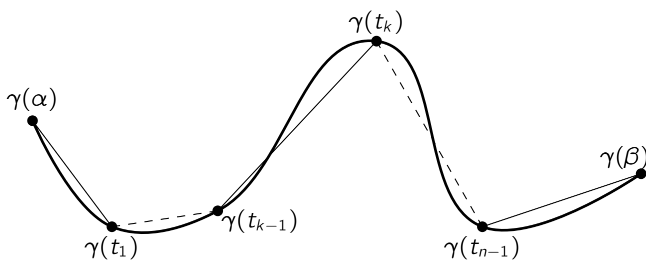


Рис. 1.7

Определение 1.15. Если множество $\{l(\Pi)\}$ ограничено, то жорданова кривая Γ называется *спрямляемой*. В таком случае *длиной кривой* называется число

$$l_\Gamma := \sup_{\Pi} l(\Pi). \tag{1.17}$$

Можно доказать, что длина кривой не зависит от выбора ее параметризации. Кроме того, справедливо равенство

$$l_\Gamma = \lim_{\lambda\to 0} l(\Pi).$$

Задать *ориентацию* жордановой кривой — это значит задать порядок во множестве ее концов. Жорданова кривая с заданной ориентацией называется *ориентированной*.

Все параметризации ориентированной жордановой кривой разбиваются тогда на два класса — сохраняющие и меняющие ориентацию. Две параметризации одного класса связаны возрастающей заменой параметра.

В самом деле, в силу леммы 1.1 функция $\varphi = \gamma_1^{-1}\circ\gamma_2$ непрерывна и взаимно однозначна (как композиция непрерывных и взаимно-однозначных отображений), поэтому φ строго монотонна и является заменой параметра.

Определение 1.16. Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *контуром* (*замкнутой жордановой кривой*) в $\mathbb{C}$, если существует непрерывная взаимнооднозначная функция $\gamma : C \to \mathbb{C}$, для которой $\gamma(C) = \Gamma$ (здесь $C = \{\zeta\in\mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ — единичная окружность).

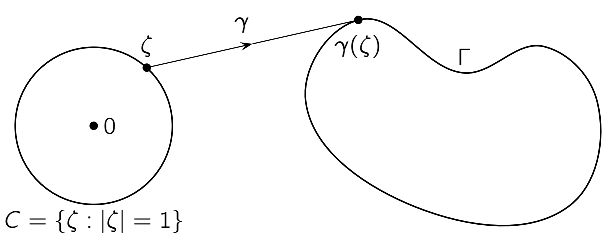


Рис. 1.8

Если γ — функция из определения 1.16 и $\eta(t) = \cos t + i\sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, то композиция $\gamma\circ\eta : [0, 2\pi) \to \Gamma$ называется *параметризацией* контура Γ. Функция γ^{-1} является непрерывной (это доказывается как в лемме 1.1).

Длина контура определяется точно так же, как и для жордановой кривой в определении 1.15.

Жорданова кривая (или контур) называется

— *гладкой*, если некоторая ее параметризация γ имеет непрерывно-дифференцируемые координатные функции (1.14).

— *кусочно-гладкой*, если она является объединением конечного числа гладких жордановых кривых с последовательно соединенными началами и концами.

Гладкая (кусочно-гладкая) жорданова кривая Γ является спрямляемой и ее длина вычисляется по формуле

$$l_\Gamma = \int_\alpha^\beta \left([x'(t)]^2 + [y'(t)]^2\right)^{1/2} dt, \tag{1.18}$$

где

$$\gamma(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

— любая (кусочно) непрерывно-дифференцируемая параметризация. Это же утверждение справедливо и для контура.

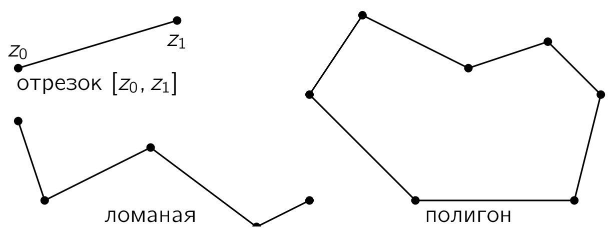


Рис. 1.9

Отрезок в $\mathbb{C}$ с началом в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ и концом в точке $z_1 \in \mathbb{C}$ определяется как множество

$$[z_0, z_1] = \{(1-t)z_0 + tz_1 : t \in [0, 1]\}.$$

Ломаной называется жорданова кривая, являющаяся объединением конечного числа отрезков с последовательно соединенными началами и концами. Ясно, что ломаная является кусочно-гладкой жордановой кривой.

Полигон — контур, являющийся объединением конечного числа отрезков с последовательно соединенными концам и началами, причем конец последнего совпадает с началом первого.

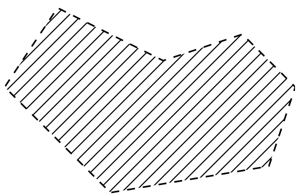


Рис. 1.10

Условимся в дальнейшем *многоугольником* называть любое открытое ограниченное множество в $\mathbb{C}$, границей которого является полигон.

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, то *ориентацию* его можно задать «порядком прохождения» трех его точек

$$z_1 \to z_2 \to z_3 \to z_1 \quad \text{или} \quad z_1 \to z_3 \to z_2 \to z_1.$$

Все параметризации контура тогда разбиваются на два класса — *сохраняющие ориентацию* и *меняющие ориентацию*.

Задание ориентации не зависит от выбора точек z_1, z_2, z_3 в том смысле, что если параметризация «проходит» какие-то три точки z_1', z_2', z_3' в определенном порядке, то любая параметризация того же класса проходит их в том же порядке.

Одну из ориентаций можно назвать положительной, а другую — отрицательной.

Принято в качестве *положительной* выбирать ту, для которой при обходе контура с помощью параметризации, сохраняющей эту ориентацию, область, ограниченная контуром, остается слева (обход совершается «против часовой стрелки»). Положительно и отрицательно ориентированный контур Γ будем обозначать соответственно Γ^+ и Γ^-.

Это определение знака ориентации контура не является, конечно, вполне строгим, но оно интуитивно ясно в случае, когда контур является гладким или кусочно-гладким (например, для полигона).

1.4.2. Области

Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *линейно связным*, если для любых двух его точек существует кривая, соединяющая эти точки, лежащая в A.

Легко показать (сделайте это самостоятельно), что линейно связное множество является связным (см. определение 1.10).

Определение 1.17. Непустое открытое связное множество в $\mathbb{C}$ называется *областью*.

Область называется *жордановой*, если ее границей является контур.

Мы будем всегда считать (если не оговорено противное), что граница жордановой области ориентируется положительно (см. предыдущий раздел) и будем обозначать ее тогда $(\partial D)^+$.

Для областей понятия связности и линейной связности совпадают. Это показывает следующее утверждение.

Лемма 1.2. *Любая область линейно связна. Более того, любые две точки области можно соединить ломаной, лежащей в области.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ — фиксированная точка. Обозначим D_1 множество точек из D, которые можно соединить с z_0 ломаной, содержащейся в D. Тогда D_1 содержит некоторый шар $B(z_0, r)$. Это же верно и для любой другой точки из D_1. Таким образом, D_1 открыто.

Множество $D_2 = D \setminus D_1$ также открыто, так как если $z \in D_2$ и шар $B(z, r)$ содержится в D, то ни одна точка $B(z, r)$ не входит в D_1.

Итак, множества D_1, D_2 открыты, $D = D_1 \cup D_2$ и $D_1 \neq \varnothing$. Так как D связно, то $D_2 = \varnothing$ и $D = D_1$. $\square$

1.4.3. Многосвязные области

Несмотря на то, что область — связное множество, ее граница может не быть связной. Примером может служить кольцо (см. например, область слева на рис. 1.11).

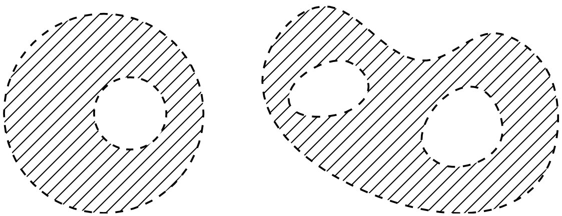


Рис. 1.11

Компонентой связности границы области называют любое связное подмножество границы, не являющееся собственным подмножеством другого связного подмножества границы. Область называется *односвязной*, если ее граница является связным множеством, в противном случае область называется *многосвязной*.

Порядком связности области называется число компонент связности ее границы. Область называется m-связной, если ее порядок связности конечен и равен m, если же порядок связности бесконечен, то область называется бесконечносвязной.

На рис. 1.11) слева — двусвязная область, а справа — трехсвязная.

Теорема 1.10 (Жордан). *Контур (замкнутая жорданова кривая) разбивает комплексную плоскость на две односвязные области, для которых она является общей границей.*

Глава 2

Дифференцируемость

2.1. Комплексное дифференцирование

2.1.1. Производная и дифференцируемость

Определение 2.1. Пусть функция f задана в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Если существует предел

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{2.1}$$

то он называется *производной* функции f в точке z_0.

Если ввести обозначения

$$h = z - z_0, \quad \alpha(h) = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0),$$

то условие существования производной легко переписать в виде

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + \alpha(h),$$

где $\alpha(h) = o(|h|)$ при $|h| \to 0$.

Определение 2.2. Функция f заданная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *дифференцируемой* в этой точке, если существует такое комплексное число $D \in \mathbb{C}$, что

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = Dh + o(|h|), \quad |h| \to 0. \tag{2.2}$$

Таким образом, замечание перед последним определением говорит нам о том, что существование производной функции f в точке z_0 равносильно ее дифференцируемости в этой точке. При этом число D в определении 2.2 совпадает с $f'(z_0)$.

2.1.2. Правила дифференцирования

Как и раньше дифференцированием мы будем называть процесс вычисления производной. Этот процесс подчиняется таким же правилам, как и в случае функций действительного переменного.

Теорема 2.1 (правила дифференцирования). *Справедливы следующие утверждения.*
1. *Если* $f(z) \equiv c$, *то* $f'(z) = 0$ *для любого* $z \in \mathbb{C}$.
2. *Если функции* f *и* g *дифференцируемы в точке* z, *то*
а) *для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *их линейная комбинация* $\alpha f + \beta g$ *дифференцируема в точке* z *и*

$$\big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)' = \alpha f'(z) + \beta g'(z),$$

б) *их произведение* $f \cdot g$ *дифференцируемо в точке* z *и*

$$\big(f(z)g(z)\big)' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z),$$

в) *при условии* $g(z) \neq 0$ *их частное* f/g *дифференцируемо в точке* z *и*

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}.$$

3. *Если функция* f *дифференцируема в точке* z, *а функция* g *дифференцируема в точке* $f(z)$, *причем область значений функции* f *содержится в области определения функции* g, *то их композиция* $F = g \circ f$ *дифференцируема в точке* z *и*

$$F'(z) = g'(f(z)) \cdot f'(z).$$

4. *Если однолистная функция* f *дифференцируема в точке* z, *причем* $f'(z) \neq 0$, *то обратная функция* f^{-1} *дифференцируема в точке* $w = f(z)$ *и*

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Доказательства всех утверждений этой теоремы ничем не отличается от доказательств соответствующих свойств операции дифференцирования для функций действительного переменного.

2.1.3. Условия Коши–Римана

Все это мы уже видели в курсе математического анализа и пока комплексный случай ничего нового нам не показал. Однако, мы уже сейчас убедимся, что дифференцируемость сейчас является существенно более сильным свойством, налагающим дополнительные ограничения на функцию. Для этого запишем значения функции f в алгебраической записи (1.1)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy. \tag{2.3}$$

Эта запись будет систематически использоваться ниже на протяжении всей книги.

Теорема 2.2. *Для того, чтобы функция f была дифференцируема в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы действительная $u = \operatorname{Re} f$ и мнимая $v = \operatorname{Im} f$ части были дифференцируемы (как функции из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}$) и выполнялись равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.4}$$

При этом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) =$$
$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть функция f дифференцируема точке z_0. Считаем, что в условии дифференцируемости (2.2) $D = A + iB$, $h = t + is$, то есть

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = (A + iB)(t + is) + o(|h|) =$$

$$= (At - Bs) + i(Bt + As) + o(|h|)$$

и отделим в нем действительную и мнимую части, получая соотношения

$$\begin{cases} u(x_0+t, y_0+s) - u(x_0, y_0) = At - Bs + o(\sqrt{t^2+s^2}), \\ v(x_0+t, y_0+s) - v(x_0, y_0) = Bt + As + o(\sqrt{t^2+s^2}). \end{cases}$$

Отсюда следует дифференцируемость функций u и v, а также равенства

$$A = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$

и

$$B = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Поэтому все соотношения в утверждении нашей теоремы справедливы.

Обратно можно вернуться по этой же дорожке. □

Равенства (2.4) называют обычно *уравнениями Коши–Римана*. Необходимость их выполнения для существования производной делает теорию дифференцирования комплексных функций существенно отличной от соответствующей действительной теории функций из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^2$.

2.2. Аналитические функции и конформные отображения

2.2.1. Геометрический смысл аргумента производной

Если $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — гладкая жорданова кривая и $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$ — ее гладкая параметризация, то, исходя из уравнения

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)}$$

уравнение касательной к Γ в точке $z_0 = \gamma(t_0)$ можно записать в виде

$$z = z_0 + t\big(\cos\arg\gamma'(t_0) + i\sin\arg\gamma'(t_0)\big), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, $\arg\gamma'(t_0)$ — *угловой коэффициент касательной*.

Пусть задана функция $f \in C(G)$ ($G \subset \mathbb{C}$ — область), которая дифференцируема в точке $z_0 \in G$, причем $f'(z_0) \neq 0$. Проведем через z_0 гладкую жорданову кривую Γ и пусть $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $z_0 = \gamma(t_0)$. Тогда ее образ $f(\Gamma)$ — кривая с параметризацией $\widetilde{\gamma} = f \circ \gamma$.

В силу правила дифференцирования композиции справедливо равенство

$$\arg\widetilde{\gamma}'(t_0) = \arg\big(f'(z_0)\cdot\gamma'(t_0)\big) = \arg f'(z_0) + \arg\gamma'(t_0) \tag{2.6}$$

или

$$\arg\widetilde{\gamma}'(t_0) - \arg\gamma'(t_0) = \arg f'(z_0).$$

Возьмем теперь две гладкие жордановы кривые Γ_1 и Γ_2, проходящие через точку z_0 с параметризациями γ_1 и γ_2 (можно считать, что $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$). Под действием функции f они отобразятся в кривые $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$ с параметризациями $\widetilde{\gamma}_1 = f \circ \gamma_1$ и $\widetilde{\gamma}_2 = f \circ \gamma_2$ соответственно. Вычисляя угловые коэффициенты касательных к этим кривым в точке z_0 с помощью равенства (2.6) находим, что

$$\arg\widetilde{\gamma}_1{}'(t_0) - \arg\widetilde{\gamma}_2{}'(t_0) = \arg\gamma_1'(t_0) - \arg\gamma_2'(t_0).$$

Это означает, что угол между касательными в точке z_0 к образам $f(\Gamma_1)$ и $f(\Gamma_2)$ кривых Γ_1 и Γ_2 равен углу между прообразами (как по величине, так и по направлению отсчета).

Таким образом, мы приходим к пониманию геометрического смысла аргумента производной функции $\arg f'(z_0)$ — это угол, на который поворачиваются касательные к кривым в точке z_0 после отображения с помощью функции непрерывной функции f, имеющей в точке z_0 отличную от нуля производную.

2.2.2. Геометрический смысл модуля производной

Геометрический смысл модуля производной легко усмотреть из равенства

$$|f'(z_0)| = \lim_{z \to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|}.$$

Если модуль $|z - z_0|$ мал, то

$$|f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| \cdot |z - z_0|.$$

Таким образом, модуль производной $|f'(z_0)|$ — это предельный коэффициент растяжения, показывающий насколько изменяется расстояние между образами точек z и z_0 (для малых $|z - z_0|$) при отображении f.

2.2.3. Понятие аналитической функции

Определение 2.3. Функция f, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется *аналитической* в этой точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0.

Функция f называется аналитической в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$, если функция $f(1/z)$ аналитична в точке 0.

Функция называется аналитической в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

Для термина «аналитическая функция» используются также синонимы «*голоморфная*» функция, «*регулярная*» функция. Функция, аналитическая во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, называется *целой*.

Условимся называть углом между гладкими кривыми в точке их пересечения угол между касательными к к ним в этой точке.

Определение 2.4. Непрерывное отображение $f \in C(G)$ области $G \subset \mathbb{C}$ называется *конформным* в точке $z_0 \in G$, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через эту точку.

Из геометрического смысла аргумента производной следует, что отображение с помощью аналитической функции в некоторой области функции является конформным во всех точках области, где ее производная отлична от нуля.

2.3. Дробно-линейные отображения

2.3.1. Простейшие свойства

Определение 2.5. *Дробно-линейными* называются отображения вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.7}$$

Условие $\Delta \neq 0$ обеспечивает нам невырожденность дробно-линейной функции. Именно, вычисляя производную этой функции, мы видим, что

$$f'(z) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cz+d)^2}. \tag{2.8}$$

Поэтому, если $\Delta = 0$, то наша функция является тождественной постоянной. Кроме того, указанное условие необходимо для конформности дробно-линейного отображения.

Случай $c = 0$ особенно прост — тогда наша функция является линейной и легко проследить, что происходит при отображении с ее помощью. Перепишем ее в виде

$$f(z) = Az + B, \quad \text{где } A = \frac{a}{d}, \ B = \frac{b}{d}.$$

Условие $\Delta \neq 0$ влечет за собой $A \neq 0$, следовательно, линейная функция f осуществляет конформное отображение всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. При этом отображении касательные ко всем гладким кривым поворачиваются на один и тот же угол $\arg A$, а коэффициент растяжения во всех точках равен $|A|$. Очевидно также, что при линейном отображении прямые и окружности переходят в прямые и окружности.

Далее рассмотрим случай $c \neq 0$. Тогда из равенства

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)}$$

вытекает, что дробно-линейное отображение является композицией двух линейных функций и функции $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Кроме того, легко видеть, что дробно-линейная функция взаимно однозначно отображает проколотую комплексную плоскость $\mathbb{C}\setminus\left\{-\frac{d}{c}\right\}$ на $\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{c}{a}\right\}$. Обратное отображение для дробно-линейной функции задается равенством

$$f^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}, \quad w \neq \frac{c}{a}$$

и также является невырожденным дробно-линейным отображением.

Дробно-линейное отображение является конформным во всех точках комплексной плоскости $\mathbb{C}$, кроме $-d/c$. Это вытекает из его аналитичности и того, что производная (см. (2.8)) отлична от нуля в этих точках.

Можно рассматривать дробно-линейные отображения расширенной комплексной плоскости. Функция (2.7) определена всюду в $\widehat{\mathbb{C}}$, кроме точек $-d/c$ и ∞ при $c \neq 0$ и кроме точки ∞ при $c = 0$. Для этого доопределим ее следующими равенствами:

— если $c \neq 0$, то положим

$$f\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad f(\infty) = \frac{a}{c},$$

— если $c = 0$, то положим

$$f(\infty) = \infty.$$

При таком определении дробно-линейное отображение является гомеоморфизмом (т.е. взаимно однозначным отображением, обратное к которому также непрерывно) расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ на себя. Это утверждение легко устанавливается непосредственной проверкой.

2.3.2. Групповое свойство

Рассмотрим теперь композицию двух невырожденных функций

$$f_k(z) = \frac{a_k z + b_k}{c_k z + d_k}, \quad k = 1, 2.$$

Тогда после элементарных преобразований получаем снова дробно-линейное отображение

$$f_2(f_1(z)) = \frac{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + b_2}{a_2 \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} + d_2} = \frac{(a_1 a_2 + c_1 b_2) z + (b_1 a_2 + c_1 d_2)}{(a_1 c_2 + c_1 d_2) z + (b_1 c_2 + d_1 d_2)},$$

которое невырождено, так как его определитель

$$(a_1 a_2 + c_1 b_2)(b_1 c_2 + d_1 d_2) - (b_1 a_2 + d_1 b_2)(a_1 c_2 + c_1 d_2) = \\ = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2) \neq 0$$

отличен от нуля.

Таким образом, мы показали, что множество всех невырожденных дробно-линейных функций образует группу с групповой операцией — композицией отображений.

2.3.3. Круговое свойство

$\widehat{\mathbb{C}}$-*окружностью* (или *обобщенной окружностью*, или окружностью в расширенной комплексной плоскости) будем называть любую окружность или прямую на $\mathbb{C}$.

Такая трактовка прямых в $\mathbb{C}$ объясняется тем, что при стереографической проекции окружностям и прямым в $\mathbb{C}$ соответствуют окружности на сфере Римана (убедитесь в этом самостоятельно).

Теорема 2.3 (круговое свойство). *При дробно-линейных отображениях образами $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностей являются $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности.*

Доказательство. Рассмотрим общее уравнение прямой или окружности

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0.$$

Если $A = 0$, $B^2 + C^2 \neq 0$, то это — уравнение прямой. Если же $A \neq 0$, $B^2 + C^2 - AD > 0$, то это — уравнение окружности. С помощью замены

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

перейдем к уравнению

$$Az\overline{z} + \overline{E}z + E\overline{z} + D = 0, \quad E = A + iB.$$

Заменяя здесь $z = 1/w$, получим уравнение такого же вида

$$Dw\overline{w} + Ew + \overline{E}\overline{w} + A = 0.$$

Это означает, что функция $w = 1/z$ обладает свойством, сформулированным в нашей теореме.

Кроме того, линейная функция также обладает, очевидно, таким же свойством. Следовательно, оно имеет место и для любой дробно-линейной функции, как композиции линейных функций и функции $w = 1/z$.

□

2.3.4. Свойство симметрии

Определение 2.6. Две точки называются *симметричными относительно прямой*, если они лежат на одном и том же перпендикуляре к этой прямой на равном расстоянии от нее.

Две точки называются *симметричными относительно окружности*, если они лежат на одном луче с началом в центре окружности и произведение расстояний от этих точек до центра окружности равно квадрату ее радиуса.

Центр окружности будем считать симметричным бесконечно удаленной точке ∞.

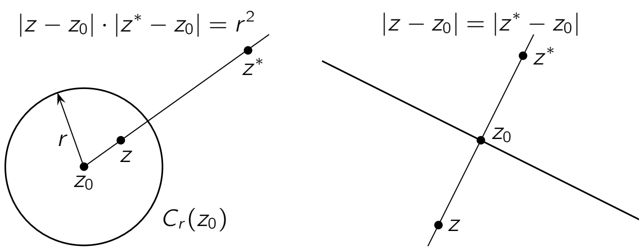


Рис. 2.1

В дальнейшем мы часто будем обозначать z^* точку, симметричную точке z относительно некоторой окружности или прямой, ясной из контекста.

Пример 2.1. Пара z и $\overline{z}$ симметрична относительно оси $\operatorname{Im} z = 0$. Пара z и $R^2/\overline{z}$, симметрична относительно окружности $C_R(0)$.

Отсюда следует, что отображение

$$z \mapsto e^{2i\theta}(\overline{z} - \overline{z_0}) + z_0 \tag{2.9}$$

дает точку, симметричную точке z относительно прямой $z = z_0 + te^{i\theta}$, $t \in \mathbb{R}$. Аналогично

$$z \mapsto z_0 + \frac{R^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} \tag{2.10}$$

дает точку, симметричную точке z относительно окружности $C_R(z_0)$. Будем называть их *преобразованиями симметрии относительно прямой* и *окружности* соответственно.

Преобразование симметрии относительно прямой часто называют *зеркальным отражением*, а преобразование симметрии относительно окружности — *инверсией*.

Очевидно, что композиция двух преобразований симметрии относительно прямых или окружностей ((2.9) или (2.10)) является невырожденным дробно-линейным преобразованием. Для доказательства обратного утверждения нам понадобится некоторая подготовка.

Лемма 2.1. *Пусть Γ — $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность. Тогда для симметрии двух точек $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ относительно Γ необходимо и достаточно, чтобы любая $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, содержащая эти точки, была ортогональна Γ.*

Доказательство. Необходимость. Пусть точки z и z^* симметричны относительно Γ и $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность $\widetilde{\Gamma}$ содержит эти точки.

Если Γ или $\widetilde{\Gamma}$ является прямой, то ортогональность Γ и $\widetilde{\Gamma}$ очевидна, поэтому считаем, что и Γ, и $\widetilde{\Gamma}$ являются окружностями.

Пусть Γ — окружность с центром в точке z_0 радиуса R и z лежит между z_0 и z^*. С одной стороны условие симметричности означает, что $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$. С другой стороны, если провести через z_0 касательную к окружности $\widetilde{\Gamma}$ и секущую (луч из точки z_0, содержащий z и z^*), то квадрат длины этой касательной равен произведению $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0|$ длин отрезков секущей. Отсюда длина касательной равна R и является радиусом окружности Γ и ортогональна радиусу окружности $\widetilde{\Gamma}$, проведенному в точку касания. Следовательно, Γ и $\widetilde{\Gamma}$ ортогональны.

Достаточность очевидна в случае, когда Γ — прямая. Пусть Γ — окружность с центром в точке z_0 радиуса R.

Если $\widetilde{\Gamma}$ — прямая, содержащая точки z и z^*, то по условию $\widetilde{\Gamma}$ ортогональна Γ и все три точки z_0, z и z^* принадлежат $\widetilde{\Gamma}$.

Если $\widetilde{\Gamma}$ — окружность, содержащая точки z и z^*, то произведение $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0|$ равно квадрату касательной к $\widetilde{\Gamma}$, выходящей из точки z_0 и равной радиусу R. Поэтому точки z и z^* симметричны относительно z и z^*. $\square$

Теорема 2.4. *При дробно-линейном отображении любая пара точек, симметричных относительно $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности, преобразуется в пару точек, симметричных относительно ее образа.*

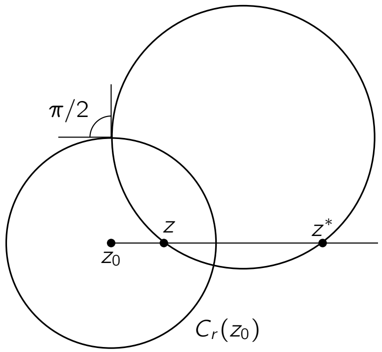


Рис. 2.2

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть f — наше дробно-линейное отображение и точки z и z^* симметричны относительно окружности или прямой Γ и пусть $\widetilde{\Gamma}$ — $\widehat{\mathbb{C}}$-окружность, содержащая z и z^*. По лемме 2.1 $\widetilde{\Gamma}$ ортогональна Γ и по теореме 2.3 ее образ $f(\widetilde{\Gamma})$ является $\widehat{\mathbb{C}}$-окружностью. Так как f осуществляет конформное отображение, то $f(\widetilde{\Gamma})$ ортогональна $f(\Gamma)$. При этом любая окружность или прямая, содержащая $f(z)$ и $f(z^*)$, может быть представлена в таком виде. Снова применяя лемму 2.1, получаем симметричность точек $f(z)$ и $f(z^*)$ относительно $f(\Gamma)$. $\square$

2.3.5. Свойство трех точек

Дробно-линейная функция вполне определяется тремя параметрами — можно разделить числитель и знаменатель дроби в (2.7) на одно и то же число, отличное от нуля. Поэтому естественно ожидать, что дробно-линейное отображение вполне определяется заданием его значений в трех точках. Это действительно так.

Теорема 2.5 (о трех точках). *Для любых трех различных точек $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ и любых трех различных чисел $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ существует единственное дробно-линейное отображение f, удовлетворяющее условию*

$$f(z_k) = w_k, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.11}$$

Доказательство. Будем считать, что все z_k и w_k принадлежат $\mathbb{C}$ (являются собственными числами).

Дробно-линейная функция

$$f_1(z) = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}$$

переводит точки z_1, z_2 и z_3 в 0, ∞ и 1 соответственно. Аналогично функция

$$f_2(z) = \frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1}$$

переводит точки w_1, w_2 и w_3 в 0, ∞ и 1 соответственно. Поэтому $f_2^{-1} \circ f_1$ удовлетворяет условию (2.11).

В случае, когда одно из z_k или (и) одно из w_k равны ∞, доказательство предлагается провести самостоятельно.

Единственность. Если дробно-линейное отображение f удовлетворяет условию (2.11), то композиция (также дробно-линейное отображение) $g = f_2 \circ f \circ f_1^{-1}$ оставляет точки 0, ∞ и 1 неподвижными. Поэтому из условия $g(\infty) = \infty$ вытекает, что $g(z) = Az + B$. Так как $g(0) = 0$, то $A = 0$, а из $g(1) = 1$ следует $B = 1$. Следовательно, $g(z) = z$ и $f = f_2^{-1} \circ f_1$, т.е. f определяется однозначно. □

Следствие 2.1. *Для двух любых $\mathbb{C}$-окружностей существует дробно-линейная функция, отображающая одну окружность на другую.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это вытекает из теоремы о трех точках и кругового свойства. □

2.3.6. Примеры дробно-линейных отображений

Рассмотрим дробно-линейные отображения некоторых наиболее просто устроенных областей: расширенной комплексной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, комплексной плоскости $\mathbb{C}$, единичного круга

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \tag{2.12}$$

и верхней полуплоскости

$$H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}. \tag{2.13}$$

Дробно-линейным автоморфизмом области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ будем называть любое дробно-линейное отображение области D на себя.

Ясно, что множество всех дробно-линейных автоморфизмов области является группой, которая является подгруппой группы всех дробно-линейных отображений.

Группы дробно-линейные автоморфизмов первых двух основных областей описываются очевидным образом:

— для расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ совпадает с группой всех дробно-линейных отображений,

— для плоскости $\mathbb{C}$ совпадает с группой всех линейных отображений, т.е. функций вида $az + b$.

Рассмотрим далее отображения полуплоскости H и круга U. В следующем примере описываются дробно-линейные автоморфизмы единичного круга с заданным прообразом нуля.

Пример 2.2. Формула

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{2.14}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает единичный круг U на себя так, что заданная точка z_0 переходит в центр этого круга.

Р е ш е н и е. Пусть функция

$$f(z) = \lambda\frac{z - a}{z - b} \tag{2.15}$$

отображает U на U, причем $f(z_0) = 0$. Тогда ясно, что $a = z_0$.

Отметим, что

$$f(\partial U) = \partial U. \tag{2.16}$$

В самом деле, пусть $|z| = 1$, тогда неравенство $|f(z)| < 1$ невозможно (f отображает U на U). Поэтому, если предположить, что $|f(z)| > 1$, то в некоторой точке отрезка $[z_0, z] \subset U$ непрерывная функция $|f|$ обязана принимать значение 1, что также невозможно. Итак, $f(\partial U) \subset \partial U$ и в силу кругового свойства выполнено (2.16).

Рассмотрим теперь точку $1/\overline{z_0}$, симметричную z_0 относительно $\partial U = C_1(0)$. В силу (2.16) и свойства симметрии ее образ — точка симметричная началу координат, т.е. $f(1/\overline{z_0}) = \infty$. Отсюда $b = 1/\overline{z_0}$ и

$$f(z) = \lambda_1 \frac{z - z_0}{1 - z\overline{z_0}}.$$

с некоторым другим λ_1. В силу (2.16) $|f(1)| = 1$, поэтому $|\lambda_1| = 1$.

Докажем теперь, что любое отображение вида (2.14) отображает U на себя так, что z_0 переходит в точку 0. Отметим, что если $|z| = 1$, то $z\overline{z} = 1$ и

$$|f(z)| = \left| \frac{z - z_0}{z\overline{z} - z\overline{z_0}} \right| = \frac{|z - z_0|}{|z| \cdot |z - \overline{z_0}|} = 1.$$

Поэтому $f(\partial U) \subset \partial U$ и в силу кругового свойства выполнено (2.16). Отсюда следует, что при $|z| < 1$ будет $|f(z)| < 1$ (если это не так, то $|f(z)| > 1$ в некоторой точке $z \in U$ и, т.к. $f(z_0) = 0$, то непрерывная функция $|f(z)|$ должна принимать в U и значение 1, а это противоречит равенству (2.16). Точно так же доказывается, что $|f(z)| > 1$ при $|z| > 1$. Следовательно, $f(U) = U$. □

Неединственность в примере 2.2 объясняется тем, что переход в (2.18) от одного θ к другому равносилен повороту круга, поэтому условия на отображение не нарушаются.

Пример 2.3. Формула

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{где} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0, \tag{2.17}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает верхнюю полуплоскость H на себя.

Р е ш е н и е. То, что отображение с указанными свойствами должно иметь вид (2.17), можно вывести из теоремы 2.5. То, что отображение вида (2.17) обладает этими свойствами, доказывается подобно рассуждениям из примера 2.2. Читателю предлагается проделать это самостоятельно. □

Пример 2.4. Формула

$$f(z) = e^{i\theta}\frac{z - z_0}{z - \overline{z_0}}, \quad \theta \in \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

дает общий вид дробно-линейного отображения, которое отображает верхнюю полуплоскость H на единичный круг U так, что заданная точка z_0 переходит в центр этого круга.

Р е ш е н и е. Пусть функция (2.15) отображает H на единичный круг U так, что $f(z_0) = 0$. Тогда $a = z_0$.

Заметим, что сейчас

$$f(\partial H) = \partial U. \tag{2.19}$$

Пусть $x \in \mathbb{R} = \partial H$, тогда неравенство $|f(x)| < 1$ невозможно, т.к. $f(H) = U$. Если предположить, что $|f(x)| > 1$, то на отрезке, соединяющем точки x и z_0 непрерывная функция $|f|$ обязана принимать значение 1, что также невозможно. Итак, $f(\partial H) \subset \partial U$ и в силу кругового свойства выполнено (2.19).

В силу свойства симметрии $f(\overline{z_0}) = \infty$, отсюда $b = \overline{z_0}$. Чтобы найти λ, возьмем $x \in \mathbb{R}$. Тогда числа $x - z_0$ и $x - \overline{z_0}$ являются взаимно сопряженными и имеют одинаковые модули, поэтому

$$|f(x)| = \left|\lambda\frac{x - z_0}{x - \overline{z_0}}\right| = |\lambda|.$$

Это означает, что образ действительной оси — окружность радиуса $|\lambda|$, поэтому $|\lambda| = 1$ и $\lambda = e^{i\theta}$ при некотором $\theta \in \mathbb{R}$. □

2.4. Экспоненциальная функция

Определение 2.7. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

где $z = x + iy$.

В частности, при $x = 0$ мы получаем *формулу Эйлера*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \tag{2.20}$$

которая приводит к *экспоненциальной форме* записи комплексных чисел

$$z = |z|e^{i \operatorname{Arg} z}. \tag{2.21}$$

Запишем действительную и мнимую части для e^z

$$\begin{cases} u(x, y) = e^x \cos y, \\ v(x, y) = e^x \sin y. \end{cases}$$

Они имеют частные производные любого порядка. Находя их частные производные первого порядка

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y,$$

видим, условия Коши – Римана (2.4) выполнены, поэтому по теореме 2.2 функция $f(z) = e^z$ является аналитической во всей комплексной плоскости, то есть целой (см. раздел 2.2.3). Кроме того, из соотношений (2.5) следует, что

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x e^{iy}) = e^{iy} e^x = e^z.$$

Так как очевидно, что $|e^{iy}| = 1$ для любого $y \in \mathbb{R}$, то $|e^z| = e^x \neq 0$. Следовательно, экспоненциальная функция осуществляет конформное отображение в любой точке $z \in \mathbb{C}$.

Важнейшее свойство экспоненциальной функции

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}, \tag{2.22}$$

известное нам для действительных значений $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$, остается справедливым и для любых комплексных $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. В самом деле,

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) = \\ = e^{x_1+x_2}[\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)] = e^{z_1+z_2}.$$

Если $k \in \mathbb{Z}$, то

$$e^{z+2\pi ik} = e^x[\cos(y + 2\pi ik) + i \sin(y + 2\pi ik)] = e^z,$$

поэтому $w = 2\pi ik$ является периодом экспоненциальной функции. Обратно, если w — период, то есть $e^{z+w} = e^z$ для любого z, то при $z = 0$ получаем $e^w = 1$, отсюда $w = 2\pi ik$. Таким образом, мы описали множество всех периодов функции e^z, это $\{2\pi ik : k \in \mathbb{Z}\}$. Простейший ненулевой период $2\pi i$ называется *основным периодом* экспоненциальной функции.

2.5. Тригонометрические и гиперболические функции

Из формулы Эйлера (2.20) следует, что

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{ix}}{2}.$$

Это дает нам возможность распространить определения синуса и косинуса на комплексные значения аргумента.

Определение 2.8. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{2.23}$$

Эти функции называются *синусом* и *косинусом* соответственно.

Непосредственно из определения вытекает, что первая из них является четной, а вторая — нечетной. Обе являются периодическими с периодом $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Число 2π называется *основным периодом* для этих функций.

Из теоремы 2.1 вытекает, что эти функции дифференцируемы и их производные вычисляются по привычным формулам

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Следующие два тождества

$$2\left\{e^{i(z_1+z_2)} \pm e^{-i(z_1+z_2)}\right\} =$$
$$= (e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} \pm e^{-iz_2}) + (e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} \mp e^{-iz_2})$$

легко проверяются с помощью раскрытия скобок в правой части. Из них нетрудно вывести формулы сложения для тригонометрических функций

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2, \tag{2.24}$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2, \tag{2.25}$$

которые являются основными в теории тригонометрических функций. Из них легко выводятся другие тождества для тригонометрических функций.

С помощью синуса и косинуса вводится еще одна пара тригонометрических функций — тангенс и котангенс.

Определение 2.9. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}),$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Эти функции называются *тангенсом* и *котангенсом* соответственно.

Для данных функций также легко вывести стандартные тригонометрические формулы, связывающие их.

С тригонометрическими функциями тесно связаны так называемые гиперболические функции.

Определение 2.10. Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Эти функции называются соответственно *гиперболическими синусом* и *гиперболическими косинусом*.

Из определений 2.8 и 2.10 вытекают следующие формулы, выражающие связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями

$$\operatorname{ch} iz = \cos z, \quad \operatorname{sh} iz = -i \sin z.$$

В свою очередь отсюда и из тригонометрических формул сложения (2.24)–(2.25) следуют формулы сложения для гиперболических функций

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2,$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2.$$

Отметим еще несколько формул подобного рода

$$\operatorname{Re}\cos z = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im}\cos z = -\sin x \operatorname{sh} y;$$
$$\operatorname{Re}\sin z = \sin x \operatorname{ch} y; \quad \operatorname{Im}\sin z = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Отсюда, в частности,

$$|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x,$$
$$|\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x$$

Из теоремы 2.1 следует, что гиперболические функции дифференцируемы, а формула для производной экспоненциальной функции приводит к равенствам

$$(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

2.6. Логарифмическая функция

Здесь мы впервые столкнемся с многозначной функцией (см. раздел 1.3.1). Для любого $w \neq 0$ множеством решений уравнения $e^z = w$ является

$$\{\ln|w| + i(2\pi k + \arg w) :\ k \in \mathbb{Z}\} = \ln|w| + i\operatorname{Arg} w. \tag{2.26}$$

Определение 2.11. *Логарифмической* (с основанием e) называется многозначная функция

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln|z| + i(2\pi k + \arg z) :\ k \in \mathbb{Z}\} = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z.$$

Главным значением логарифма называется

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z.$$

Для любого значения $\operatorname{Ln} z$ справедливы равенства $e^{\operatorname{Ln} z} = z$ (при $z \neq 0$) и $\operatorname{Ln} e^z = z$. Это показывает, что логарифмическая функция является в некотором смысле обратной к экспоненциальной. Хотя в обычном понимании термина «обратная функция» это не так, потому что экспоненциальная функция не является взаимно однозначной.

В силу основного свойства экспоненциальной функции (2.22) справедливы равенства

$$\ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$$

и

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

если последнее равенство понимать как совпадение множества слева и множества сумм элементов из слагаемых справа.

Отметим, что с равенствами для многозначных функций надо быть осторожным. Это показывает, например, следующий *парадокс Бернулли*

$$(-z)^2 = z^2 \ \Rightarrow\ \operatorname{Ln}(-z)^2 = \operatorname{Ln} z^2 \ \Rightarrow\ 2\operatorname{Ln}(-z) = 2\operatorname{Ln} z,$$

но множества $\operatorname{Ln}(-z)$ и $\operatorname{Ln} z$ не имеют общих элементов. Найдите ошибку в этом «рассуждении».

Выделение однозначной ветви логарифмической функции можно произвести, рассматривая сужение экспоненциальной функции, на какое-либо множество ее однолистности, к примеру на полосу

$$S(a, k) = \{z \in \mathbb{C} : a + (2k-1)\pi < \operatorname{Im} z \leqslant a + (2k+1)\pi\}.$$

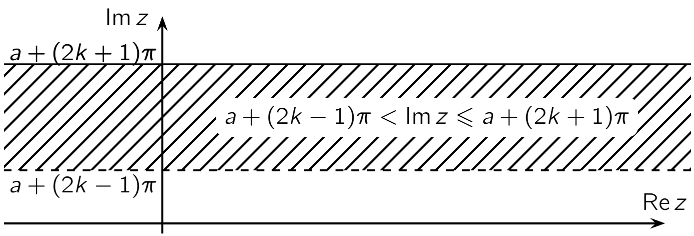


Рис. 2.3

Однако можно поступить другим способом. Зафиксируем числа $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{Z}$, задавая тем самым значение логарифмической функции

$$\ln_k z_0 = \ln|z_0| + i(\arg z_0 + 2\pi k).$$

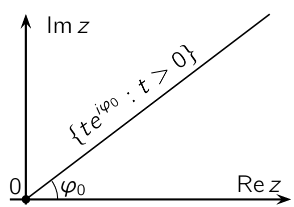


Рис. 2.4

При обходе вокруг начала координат 0 с возвратом в z_0 мы придем к другому значению логарифмической функции. Поэтому 0 называется точкой ветвления логарифмической функции.

Чтобы избежать этого, проведем разрез комплексной плоскости, соединяя 0 с бесконечно удаленной точкой ∞, например, лучом

$$\{te^{i\varphi_0} : t \in [0, +\infty)\},$$

где $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ фиксировано. Тогда, переходя по любому пути из любой точки $0 \neq z \in \mathbb{C}$, мы не сможем вернуться в нее, пересекая этот луч. Поэтому мы возвращаемся в точку z, не изменяя значения функции в этой точке.

Таким образом, фиксация значения логарифмической функции в какой-либо точке $0 \neq z_0 \in \mathbb{C}$ и проведение разреза, соединяющего точку ветвления с бесконечно удаленной точкой, позволяет выделить однозначную ветвь логарифмической функции.

Производная логарифмической функции, вычисляется независимо от выбора ветви на основании теоремы 2.1 по формуле

$$(\operatorname{Ln} z)' = \frac{1}{z}.$$

2.7. Степенная функция

Определение 2.12. *Степенной* функцией с показателем $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется многозначная функция

$$z^\mu = e^{\mu \operatorname{Ln} z} = |z|^\mu e^{i\mu \arg z} e^{2\pi i k\mu}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Неоднозначность степенной функции обусловлена множителем $e^{2\pi k i\mu}$, $k \in \mathbb{Z}$. Характер этой неоднозначности зависит от структуры показателя степени μ и мы рассмотрим подробнее некоторые частные случаи выбора μ в определении.

Если $\mu = n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то (см. (2.21))

$$e^{\mu \operatorname{Ln} z} = e^{\mu(\ln|z| + i \operatorname{Arg} z)} = e^{\mu \ln|z|} e^{\mu i \operatorname{Arg} z} = (|z| e^{i \arg z})^n = z^n.$$

В этом случае степенная функция имеет единственное значение, совпадающее с привычным.

Если $\mu = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ — рациональное число, то $e^{2\pi i k\mu}$ принимает q различных значений, получаемых при $k = 0, 1, \ldots, q - 1$. Поэтому сейчас степенная функция в каждой точке имеет q различных значений.

Если $\mu \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — иррациональное число, то все значения $e^{2\pi k i\mu}$ различны при различных $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, в случае иррационального μ степенная функция z^μ имеет счетное множество различных значений.

Выделение однозначной ветви степенной функции осуществляется как и выше для логарифмической (см. раздел 2.6): фиксируем значение в какой-либо точке $z_0 \neq 0$ и производим разрез в комплексной плоскости, соединяя с его помощью $z = 0$ и $z = \infty$.

2.8. Обратные функции к тригонометрическим и гиперболическим

Рассмотрим теперь определения «обратных» функций к тригонометрическим и гиперболическим. Кавычки обусловлены тем, что эти функции выражаются через экспоненциальную (см. определения 2.8–2.10) и, естественно, не являются взаимно однозначными. Поэтому, как и в случае логарифмической функции, мы придем к многозначным функциям.

Пусть задано число $w \in \mathbb{C}$. Решим уравнение $\sin z = w$. В силу равенства (2.23) оно сводится к уравнению

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0$$

откуда $e^{iz} = iw + \sqrt{1 - w^2}$. Таким образом, множеством решений уравнения $\sin z = w$ является (см. (2.26)) $-i\,\mathrm{Ln}(iw + \sqrt{1 - w^2})$. Это приводит нас к определению многозначной функции *арксинуса*

$$\mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

Действуя аналогично, мы получим определения обратных к другим тригонометрическим функциям — *арккосинуса*

$$\mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

арктангенса

$$\mathrm{Arctg}\, z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1 + iz}{1 - iz},$$

арккотангенса

$$\mathrm{Arcctg}\, z = \frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{iz - 1}{iz + 1}.$$

Точно так же нетрудно придти к следующим определениям обратных функций к гиперболическим — *арксинуса гиперболического*

$$\mathrm{Arsh}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1})$$

и *арккосинуса гиперболического*

$$\mathrm{Arch}\, z = \mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 + 1}).$$

Читателю рекомендуется проделать это самостоятельно. Подчеркнем, что эти функции являются многозначными.

Глава 3

Интегральные теорема и формула Коши

3.1. Криволинейные интегралы

3.1.1. Комплексные криволинейные интегралы

Пусть задана спрямляемая ориентированная жорданова кривая (или контур) $\Gamma \subset \mathbb{C}$ и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$.

Возьмем любую параметризацию $\gamma \in \mathcal{P}(\Gamma)$, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, сохраняющую ориентацию Γ и зададим произвольно разбиение

$$\Pi : \alpha = t_0 < \cdots < t_n = \beta$$

ее области определения. На каждом частичном отрезке отметим точку $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и составим интегральные суммы

$$s = s(\Pi, \tau) = \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\big(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\big). \tag{3.1}$$

Рангом разбиения назовем число

$$\lambda_\Pi = \max\{t_k - t_{k-1} : \ k = 1, 2, \ldots, n$$

(это — наибольшая из длин частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k]$).

Определение 3.1. Число $I \in \mathbb{C}$ называется пределом интегральных сумм, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \implies \big|s(\Pi, \xi) - I\big| < \varepsilon.$$

Если такой предел существует, то он называется *криволинейным интегралом (второго рода) от функции f по пути γ* и обозначается

$$\oint_\gamma f(z)\, dz. \tag{3.2}$$

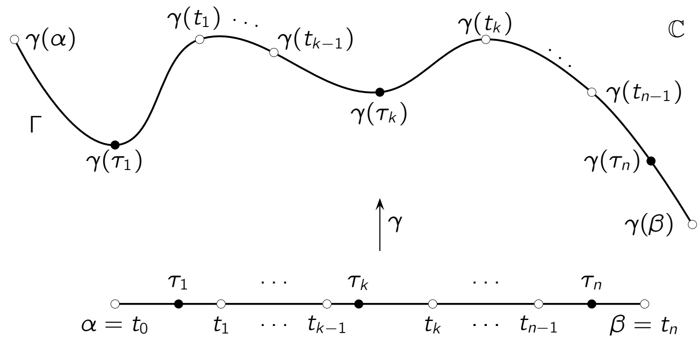


Рис. 3.1

Если $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ и $f = u + iv$, то мы можем преобразовать выражение для интегральных сумм (3.1) следующим образом

$$s = \sum_{k=1}^{n} \big(u(\tau_k)(x(t_k) - x(t_{k-1})) - v(\tau_k)(y(t_k) - y(t_{k-1}))\big) +$$
$$+ i \sum_{k=1}^{n} \big(v(\tau_k)(x(t_k) - x(t_{k-1})) + u(\tau_k)(y(t_k) - y(t_{k-1}))\big).$$

Действительная и мнимая части выражения справа являются интегральными суммами для обычных криволинейных интегралов второго рода от действительнозначных функций

$$\oint_\Gamma (u\,dx - v\,dy) \quad \text{и} \quad \oint_\Gamma (v\,dx + u\,dy).$$

Следовательно, комплексный криволинейный интеграл (3.2) выражается в виде линейной комбинации этих интегралов

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i\oint_\Gamma (v\,dx + u\,dy). \tag{3.3}$$

3.1.2. Свойства криволинейных интегралов

Из равенства (3.3) вытекает, что свойства комплексного криволинейного интеграла можно получить как следствия из соответствующих свойств криволинейных интегралов от действительнозначных функций, которые рассматриваются обычно в курсе математического анализа.

Прежде всего отметим, что в случае, когда ориентированная жорданова кривая или контур Γ является гладкой или кусочно-гладкой (см. раздел 1.4.1), то вычисление интеграла (3.2) сводится к вычислению интеграла Римана с помощью формул

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(u(\gamma(t))\varphi'(t) - v(\gamma(t))\psi'(t)\big)\,dt + \\ + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(v(\gamma(t))\varphi'(t) + u(\gamma(t))\psi'(t)\big)\,dt. \quad (3.4)$$

Здесь $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — параметризация Γ. Это вытекает из формул, сводящих вычисление криволинейного интеграла от действительной функции к интегралу Римана в случае гладкого (кусочно-гладкого) контура.

Равенство (3.4) можно переписать также в комплексной форме

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt. \quad (3.5)$$

Для этого достаточно отделить действительную и мнимую части в интеграле (3.5) слева и мы получим правую часть (3.4).

Используем формулу (3.4) для вычисления двух интегралов.

Лемма 3.1. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — гладкая (или кусочно-гладкая) кривая с началом в точке z_0 и концом в z_1. Тогда*

$$\oint\limits_{\Gamma} dz = z_1 - z_0, \quad \oint\limits_{\Gamma} z\,dz = \frac{z_1^2 - z_0^2}{2}.$$

В частности, если Γ — гладкий (или кусочно-гладкий) контур, то

$$\oint\limits_{\Gamma} dz = \oint\limits_{\Gamma} z\,dz = 0.$$

Доказательство. Пусть $\gamma(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ — параметризация кривой Γ. Тогда по формуле (3.4)

$$\oint\limits_{\Gamma} dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi'(t)\,dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi'(t)\,dt =$$

$$= \big(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)\big) + i\big(\psi(\beta) - \psi(\alpha)\big) = z_1 - z_0.$$

Кроме того, снова применяя(3.4), получаем

$$\oint\limits_{\Gamma} z\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(\varphi(t)\varphi'(t) - \psi(t)\psi'(t)\big)\,dt + i\int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(\psi(t)\varphi'(t) + \varphi(t)\psi'(t)\big)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\big(\varphi^2(t) + 2i\varphi(t)\psi(t) - \psi^2(t)\big)\Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{z_1^2 - z_0^2}{2}.$$

Здесь было использовано равенство

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \big(\psi(t)\varphi'(t) + \varphi(t)\psi'(t)\big)\,dt = \varphi(t)\psi(t)\Big|_{\alpha}^{\beta},$$

вытекающее из формулы интегрирования по частям. □

В качестве примера применения (3.5) вычислим один специальный криволинейный интеграл, значение которого нам понадобится ниже.

Лемма 3.2. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$ — *окружность с центром в точке* z_0 *радиуса* $r > 0$. *Тогда*

$$\oint_\Gamma (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при} \quad n = -1. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть сначала $n \neq -1$. Тогда, параметризуя окружность с помощью пути $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [-\pi, \pi]$, получаем

$$\oint_\Gamma (z - z_0)^n \, dz = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{it})^n ire^{it} \, dt = ir^{n+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n+1)t} \, dt = \frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

в силу 2π-периодичности экспоненциальной функции.

В случае $n = -1$ получаем

$$\oint_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ire^{it} \, dt}{re^{it}} = i \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi i. \qquad \square$$

Далее перечислим основные свойства комплексных криволинейных интегралов.

Теорема 3.1 (свойства криволинейного интеграла).

1. *При изменении ориентации кривой или контура знак криволинейного интеграла изменяется на противоположный, т.е.*

$$\oint_{-\Gamma} f(z) \, dz = -\oint_\Gamma f(z) \, dz.$$

2. *Криволинейный интеграл обладает свойствами*

а) *линейности*

$$\oint_{\Gamma} \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\, dz = \alpha \oint_{\Gamma} f(z)\, dz + \beta \oint_{\Gamma} g(z)\, dz,$$

б) *аддитивности — если жорданова кривая или контур* Γ *является объединением жордановых кривых* Γ_1 *и* Γ_2, *причем конец* Γ_1 *совпадает с началом* Γ_2, *то*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)\, dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)\, dz.$$

3. *Для криволинейного интеграла справедливы следующие оценки*

$$\left| \oint_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leqslant \oint_{\Gamma} |f|\, dl \leqslant \sup_{z\in\Gamma} |f(z)| \cdot l_{\Gamma}.$$

В средней части последних неравенств находится криволинейный интеграл первого рода.

3.2. Интегральная теорема Коши

3.2.1. Интегральная теорема

Следующая теорема является одним из центральных фактов теории функций комплексного переменного, лежащим в основе ее важнейших результатов.

Теорема 3.2 (Коши, интегральная). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D. Тогда для любого спрямляемого контура в $\Gamma \subset D$*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Начнем обоснование этой теоремы с частного случая многоугольника (в этом случае утверждение нашей теоремы обычно называют называется леммой Гурса.

Лемма 3.3 (Гурса). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D. Тогда для любого многоугольника $\Delta \subset D$ с границей Γ справедливо равенство*

$$\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай треугольника, так как любой многоугольник разбивается в объединение конечного числа треугольников (см. левый рис. 3.2).

Обозначим

$$M = \left|\oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz\right|$$

и разобьем Δ на четыре треугольника, деля стороны пополам. Из них выберем тот треугольник Δ_1 с границей Γ_1, для которого

$$\left|\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4}.$$

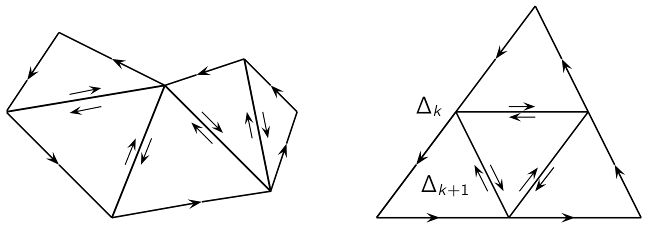


Рис. 3.2

К Δ_1 применим такое же рассуждение, деля его на четыре треугольника.

Продолжая по индукции (см. правый рис. 3.2), мы получим последовательность замкнутых вложенных треугольников $\{\Delta_n\}$ со свойством

$$\left|\oint_{\Gamma_n} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{M}{4^n}.$$

(Γ_n — граница треугольника Δ_n).

По лемме Кантора существует точка $z_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \Delta_n$. Кроме того, так как z_0 является внутренней точкой D (напомним, что D — область), то существует круг $B(z_0, \delta) \subset D$, содержащийся в D. При этом для достаточно больших n треугольник Δ_n будет целиком содержаться в этом круге.

Далее используем дифференцируемость функции f. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех z, удовлетворяющих условию $|z - z_0| < \delta$, выполнено неравенство

$$|\rho(z)| < \varepsilon|z - z_0|, \quad \rho(z) = f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)$$

Отсюда, используя еще утверждение леммы 3.1 и неравенство из части 3 теоремы 3.1, получаем

$$\frac{M}{4^n} \leqslant \left| \oint_{\Gamma_n} f(z)\,dz \right| = \left| \oint_{\Gamma_n} [f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \rho(z)]\,dz \right| =$$

$$= \left| \oint_{\Gamma_n} \rho(z)\,dz \right| < \varepsilon l_{\Gamma_n} \cdot \sup_{z \in \Delta_n} |z - z_0| = \varepsilon \frac{l_\Gamma \operatorname{diam} \Gamma}{4^n}.$$

Следовательно, $M \leqslant \varepsilon l_\Gamma \operatorname{diam} \Gamma$ для любого $\varepsilon > 0$, поэтому и $M = 0$. $\square$

Из леммы Гурса можно вывести и утверждение теоремы 3.2, совершая подходящий предельный переход. Мы не будем делать этого, так как в следующем разделе, также опираясь на лемму Гурса, докажем более общую форму этой теоремы.

3.2.2. Обобщение интегральной теоремы Коши

Введем понятие *модуля непрерывности* функции f на множестве E как

$$\omega(\delta, f, E) = \sup\{|f(x) - f(y)| : |x - y| < \delta, \ x, y \in E\}. \tag{3.6}$$

Это — удобная количественная характеристика функции, так как ее поведение при $\delta \to +0$ отвечает за свойство равномерной непрерывности. Действительно, если E — компакт, то условие $\lim\limits_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 0$ равносильно тому, что функция f равномерно непрерывна на E.

С помощью модуля непрерывности можно дать полезную оценку криволинейного интеграла.

Лемма 3.4. *Если Γ — спрямляемый контур и функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ непрерывна на Γ, то*

$$\left| \oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \leqslant \omega(\delta, f, \Gamma) l_{\Gamma}, \qquad \delta = \operatorname{diam} \Gamma.$$

Доказательство. В самом деле, пусть $z_0 \in \Gamma$ — фиксированная точка. Тогда, используя лемму 3.1, получаем

$$\left| \oint\limits_{\Gamma} f(z)\, dz \right| = \left| \oint\limits_{\Gamma} [f(z) - f(z_0)]\, dz \right| \leqslant \sup_{z\in\Gamma} |f(z) - f(z_0)| l_{\Gamma} \leqslant \omega(\delta, f, \Gamma) l_{\Gamma}. \qquad \square$$

Следующая теорема является обобщением интегральной теоремы Коши. Существенным отличием в новой формулировке будет то, что в ней не требуется аналитичности функции в точках контура.

Теорема 3.3 (обобщенная теорема Коши). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область, границей которой является спрямляемый контур, функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 0.$$

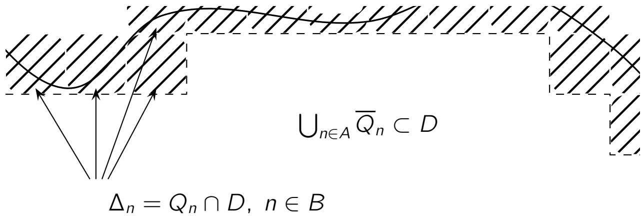


Рис. 3.3

Доказательство. Возьмем $0 < \delta < \frac{1}{3}\operatorname{diam}\partial D$ и разобьем всю комплексную плоскость на открытые квадраты $\{Q_n\}$ с помощью прямых $\operatorname{Im} z = k\delta$, $\operatorname{Re} z = k\delta$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Введем два множества индексов

$$A = \{n:\ \overline{Q_n} \subset D\}, \quad B = \{n:\ \overline{Q_n} \cap \partial D \neq \varnothing\}$$

и обозначим $\Delta_n = Q_n \cap D$ при $n \in B$. Тогда каждое из множеств Δ_n, $n \in B$, открыто и является объединением конечного или счетного множества односвязных областей со спрямляемыми границами.

Запишем равенство (см. рис. 3.3, на котором квадраты Q_n, пересекающиеся с ∂D (при $n \in B$), заштрихованы)

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \oint\limits_{\partial\left(\bigcup_{n\in A}\overline{Q_n}\right)} f(z)\,dz + \sum_{n\in B}\oint\limits_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz \tag{3.7}$$

и заметим, что первое слагаемое справа в (3.7) равно нулю в силу леммы 3.3, так как $\bigcup_{n\in A}\overline{Q_n}$ является многоугольнком.

Наше утверждение будет доказано, если мы установим, что, что сумма справа в (3.7) стремится к нулю при $\delta \to 0$. Для оценки слагаемых этой суммы воспользуемся неравенством из леммы 3.4

$$\left|\oint\limits_{\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \partial\Delta_n)\,l(\partial\Delta_n) \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D})[l(\partial D \cap Q_n) + 4\delta].$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$\left|\sum_{n\in B}\oint_{\partial\Delta_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D})\left\{l(\partial D) + 4\sum_{n\in B}\delta\right\}.$$

Пусть Q_n^* — квадрат, концентрический с Q_n, но с длиной стороны втрое больше. Так как $\delta < \frac{1}{3}\operatorname{diam}\partial D$, а ∂D и Q_n имеют общую точку, то $\partial Q_n^* \cap \partial D \neq \varnothing$, следовательно,

$$\delta \leqslant l(\partial D \cap Q_n^*).$$

Складываем эти неравенства:

$$\sum_{n\in B}\delta \leqslant \sum_{n\in B} l(\partial D \cap Q_n^*) \leqslant 9\sum_{n\in B} l(\partial D \cap Q_n) \leqslant 9l(\partial D),$$

а это означает, что при $\delta \to 0$

$$\left|\oint_{\Gamma} f(z)\,dz\right| \leqslant 37l(\partial D)\omega(\delta\sqrt{2}, f, \overline{D}) \to 0. \qquad \square$$

3.2.3. Случай многосвязной области

Интегральная теорема Коши допускает распространение на случай конечносвязных областей.

Пусть $D_0 \subset \widehat{\mathbb{C}}$, $D_1, D_2, \ldots, D_m \subset \mathbb{C}$ — односвязные области, границы которых ∂D_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, являются спрямляемыми контурами, причем выполнены условия

$$\overline{D_k} \subset D_0; \; \overline{D_k} \cap \overline{D_j} \neq \varnothing, \quad (k \neq j)$$

Область

$$D = D_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{D_k}$$

будем называть *стандартной $(m+1)$-связной областью*. Ее границей является объединение границ $\bigcup_{k=0}^{m} \partial D_k$. Положительно *ориентированной границей* ∂D^+ будем называть

$$\partial D_0^+ \bigcup \left(\bigcup_{k=1}^{m} \partial D_k^- \right)$$

При таком соглашении при обходе границы в выбранном направлении область D останется слева.

Принятая только что терминология позволяет, в частности, упростить выражение «односвязная область, границей которой является спрямляемый контур», заменив его на «стандартная односвязная область».

Теорема 3.4. *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда*

$$\oint_{\partial D^+} f(z)\, dz = 0.$$

Доказательство. Пусть D — ограниченная $(m+1)$-связная область, граница, которой состоит из $(m+1)$-го спрямляемого контура Γ_k, $k = 0, 1, \ldots, m$, причем Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, лежат внутри Γ_0. Проведем в D разрезы по непересекающимся гладким жордановым кривым, соединяющим последовательно

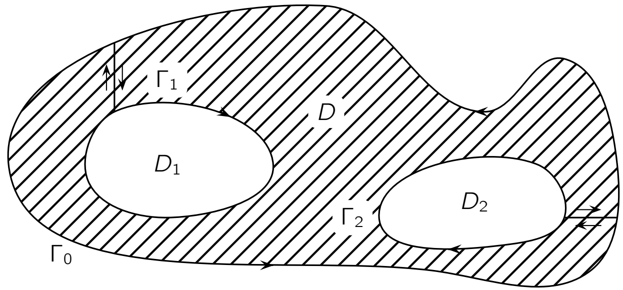


Рис. 3.4

Γ_0 с Γ_1, Γ_1 с $\Gamma_2, \ldots, \Gamma_{m-1}$ с Γ_m (см. рис. 3.4). Тогда мы получим односвязную область, к которой можно применить теорему 3.3. Каждый из разрезов при интегрировании по границе новой области проходится дважды в противоположных направлениях, поэтому интегралы по этим разрезам взаимно сокращаются. Следовательно, интеграл по границе новой области совпадает с интегралом по границе области D. $\square$

3.2.4. Первообразная аналитической функции

Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ заданы две функции $F : D \to \mathbb{C}$ и $f : D \to \mathbb{C}$.

Определение 3.2. Функция F называется *первообразной* для функции $f : D \to \mathbb{C}$, если для всех $z \in D$ справедливо равенство

$$F'(x) = f(z).$$

Отметим, что любые две первообразные функции f отличаются на постоянное слагаемое. В самом деле, пусть F_1 и F_2 — две первообразные функции f в области D и

$$\Phi(z) = F_1(z) - F_2(z).$$

Тогда функция Φ аналитична в D и ее производная тождественно равна нулю в области D. В силу условий Коши–Римана

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D.$$

А тогда, как известно из курса математического анализа, $\operatorname{Re}\Phi$ и $\operatorname{Im}\Phi$ есть тождественные постоянные.

Итак, мы знаем все первообразные, если сумеем найти хотя бы одну. Нашей следующей целью является указание способа нахождения первообразной аналитической функции. Для этого нам понадобится подготовка.

Будем говорить, что криволинейный интеграл (3.2) не зависит от пути в области D, если для любых точек $z_0, z_1 \in D$ и любой кусочно-гладкой жордановой кривой $\Gamma \subset D$ с началом в z_0 и концом в z_1 интеграл (3.2) имеет одно и то же значение.

Лемма 3.5. *Если $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D, то интеграл* (3.2) *не зависит от пути в D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это нетрудно вывести из интегральной теоремы Коши. В самом деле, пусть $z_0, z_1 \in D$ и Γ_1, Γ_2 — две жордановы кривые с началом в z_0 и концом в z_1. Нетрудно построить ломаную (см.

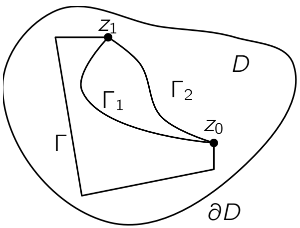


Рис. 3.5

рис. 3.5) Γ с началом в z_0 и концом в z_1, дополняющую каждую из кривых Γ_1 и Γ_2 до контура (то есть $\Gamma \cup \Gamma_1$ и $\Gamma \cup \Gamma_2$ — контуры). В силу интегральной теоремы Коши

$$\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz - \oint\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 0 \quad \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz - \oint\limits_{\Gamma} f\,dz = 0.$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \oint\limits_{\Gamma_2} f(z)\,dz. \qquad \square$$

Итак, что при условиях леммы 3.5 корректно определение следующей функции

$$F(z) = \oint\limits_{\Gamma} f(\zeta)\,d\zeta \equiv \oint\limits_{z_0}^{z} f(\zeta)\,d\zeta, \tag{3.8}$$

где $\Gamma \subset D$ — любая спрямляемая жорданова кривая, соединяющая точки z_0 и z. Эту функцию естественно назвать интегралом с переменным верхним пределом и началом в точке z_0.

Теорема 3.5. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D, $z_0 \in D$. Тогда интеграл с переменным верхним пределом и началом в точке z_0 является первообразной функции f.*

Доказательство. Пусть $z \in D$ и $r_0 > 0$ мало настолько, чтобы шар $B(z, 2r_0)$ содержался в области D. Для $z_1 \in \overline{B(z, r_0)} \equiv \overline{B_0}$ рассмотрим выражение

$$\left|\frac{F(z_1) - F(z)}{z_1 - z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{z_1 - z} \oint_{[z, z_1]} (f(\zeta) - f(z))\, d\zeta\right| \leqslant \leqslant \omega(|z_1 - z|, f, \overline{B_0}) \to 0, \quad (z_1 \to z).$$

Здесь были использованы оценка криволинейного интеграла из части 3 теоремы 3.1 и определение модуля непрерывности. □

Теорема 3.6 (формула Ньютона – Лейбница). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — односвязная область и функция $f : D \to \mathbb{C}$ аналитична в D. Тогда для любых точек z_0 и Z_1 и любой жордановой кривой $\Gamma \subset D$, соединяющей эти точки, справедливо равенство*

$$\oint_{\Gamma} f(z)\, dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0), \tag{3.9}$$

где Φ — любая первообразная функции f в области D.

Доказательство. Запишем интеграл из (3.8)

$$F(z) = \oint_{z_0}^{z} f(\zeta)\, d\zeta,$$

который является первообразной для функции f в области D по теореме 3.5. По доказанному выше существует такое число $C \in \mathbb{C}$, что для всех $z \in D$

$$\Phi(z) = F(z) + C.$$

Это число C находим, подставляя в последнее равенство $z = z_0$, получая $C = \Phi(z_0)$. Беря теперь здесь $z = z_1$, приходим к равенству 3.9. □

3.3. Интегральная формула Коши

3.3.1. Интегральная формула Коши

Здесь мы докажем важнейшее из следствий интегральной теоремы Коши. Это — замечательная формула Коши, которая количественно закрепляет удивительное свойство аналитических функций: ее значения в области можно восстановить по ее значениям на границе этой области.

Теорема 3.7 (формула Коши). *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — стандартная многосвязная область и функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда для любого $z \in D$ справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.10}$$

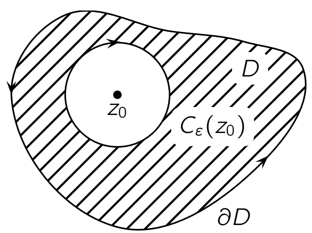


Рис. 3.6

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ выбрано так, что $\overline{B}_0 = \overline{B}(z, \varepsilon_0) \subset D$. Тогда для $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ по интегральной теореме Коши 3.4, применяемой к функции $\zeta \mapsto f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ в стандартной многосвязной области $D \setminus \overline{B}(z, \varepsilon)$ (см. рис 3.6 и п.3.2.3 об ориентации границы многосвязной области),

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \oint\limits_{C_\varepsilon^-(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0$$

или

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.11}$$

С другой стороны, используя случай $n = -1$ леммы 3.2, мы видим, что

$$\left| 2\pi i f(z) - \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| = \left| \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta - \oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\zeta \in C_\varepsilon^+(z)} |f(z) - f(\zeta)| \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} \leqslant 2\pi\omega(\varepsilon, f, \overline{B}_0) \to 0$$

(определение модуля непрерывности ω см. в (3.6)) при $\varepsilon \to 0$. Поэтому при $\varepsilon \to 0$

$$\oint\limits_{C_\varepsilon^+(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \to 2\pi i f(z).$$

Учитывая (3.11), получаем требуемое равенство. □

Интеграл в формуле (3.10) называется *интегралом Коши*, функция f — *плотностью интеграла Коши*, а функция $(\zeta - z)^{-1}$ — *ядром Коши*.

Если $z \notin \overline{D}$, то функция $\zeta \mapsto f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ является аналитической в D и непрерывной в $\overline{D}$, поэтому в силу интегральной теоремы Коши интеграл от нее вдоль ∂D будет равен нулю. Таким образом, формулу Коши можно переписать так

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{cases} f(z), & z \in D \\ 0 & z \notin \overline{D}. \end{cases} \tag{3.12}$$

Далее выведем из формулы Коши несколько других равенств такого же типа, дающих формулы для вычисления значений функции по ее значениям на окружностях.

3.3.2. Формула среднего значения и принцип максимума

Теорема 3.8 (формула среднего значения). *Пусть функция f аналитична в круге $B(z, r_0)$, тогда при $0 < r < r_0$ справедливы равенства*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta = f(z),$$

в частности,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z + re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} f(z), \quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Im} f(z + re^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Im} f(z).$$

Доказательство. Применим формулу Коши для круга $B(z, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \begin{bmatrix} \zeta = z + re^{i\theta} \\ d\zeta = ire^{i\theta}\,\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_{|\zeta - z| = r} \frac{f(z + re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{re^{i\theta}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Вторая часть теоремы получается из первой отделением действительной и мнимой частей. □

Теорема 3.9 (принцип максимума модуля). *Если функция аналитична в некоторой области, то ее модуль не может иметь точек строгого локального максимума в области аналитичности.*

Доказательство. Предположим противное, то есть для некоторого z_0 в области аналитичности неравенство $|f(z_0)| > |f(z_0 + re^{i\theta})|$ выполнено для всех z из достаточно малой окрестности точки z_0. Отсюда следует, что

$$|f(z_0)| > \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

(непрерывная функция $\theta \mapsto |f(z_0 + re^{i\theta})|$, $\theta \in [0, 2\pi]$, принимает свое максимальное значение на компакте $[0, 2\pi]$).

С другой стороны из формулы среднего значения (теорема 3.8) следует, что

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z + re^{i\theta})\, d\theta \right| \leqslant \sup_{\theta\in[0,2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|.$$

Противоречие доказывает наше утверждение. □

Приведем еще одну форму принципа максимума.

Теорема 3.10 (принцип максимума модуля). *Если функция f аналитична в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$ и ее модуль $|f|$ имеет локальный максимум в некоторой точке из D, то f есть тождественная постоянная.*

Доказательство. Пусть f не является тождественной постоянной, но $z_0 \in D$ точка локального максимума для $|f|$. Тогда существует такое $r > 0$, что

$$|f(z)| \leqslant |f(z_0)| \quad \text{при} \quad z \in B(z_0, r).$$

В чиле принципа сохранения области (теорема 6.11) образ $f(B(z_0, r))$ содержит некоторый круг $B(f(z_0), \rho)$, $\rho > 0$. Возьмем любую точку $w_1 \in B(f(z_0), \rho)$ с $|w_1| > |w_0|$. Тогда ее прообраз $z_1 \in B(z_0, r)$ удовлетворяет неравенству $|f(z_1)| > |f(z_0)|$ — противоречие. □

Теорема 3.11 (Лиувилля). *Если функция аналитична во всей комплексной плоскости и ограничена, то она является тождественной постоянной.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C}$ и $r > |z|$, тогда по теореме 3.14

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta.$$

Тогда

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| = \left[\begin{array}{c} \zeta = re^{i\theta} \\ d\zeta = ire^{i\theta}\, d\theta \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left| \oint\limits_{C_r(0)} \frac{f(re^{i\theta}) ire^{i\theta}}{(re^{i\theta} - z)^2}\, d\zeta \right| \leqslant \frac{Mr}{(r - |z|)^2} \to 0, \quad r \to +\infty,$$

если $|f(z)| \leqslant M$ для всех $z \in \mathbb{C}$. Итак, производная функции f тождественно равна нулю и f есть тождественная постоянная. □

Лемма 3.6 (Шварца). *Пусть функция f аналитична в круге $B(0, R)$, $f(0) = 0$ и $f(z) \leqslant M$ при $z \in C_R(0)$. Тогда*

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R} |z| \quad \text{при} \quad z \in B(0, R).$$

При этом, если в некоторой точке $0 \neq z_0 \in B(0, R)$ достигается равенство, то $f(z) = e^{i\theta} Mz/R$ для некоторого $\theta \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Функция $g(z) = f(z)/z$ аналитична в круге $B(0, R)$ и удовлетворяет неравенству $g(z) \leqslant M/R$ на его границе. В силу принципа максимума $|g(z)| < M/R$ при $z \in B(0, R)$.

Если $|f(z)| = M|z|/R$ в некоторой точке $0 \neq z_0 \in B(0, R)$, то функция $|g|$ во внутренней точке круга $B(0, R)$ имеет локальный максимум. По теореме 3.10 g является тождественной постоянной, по модулю равной 1. □

3.3.3. Формула Шварца

Следующая теорема говорит нам о том, что значения аналитической функции в круге можно вычислить, используя лишь значения ее действительной части на границе круга .

Теорема 3.12 (формула Шварца). *Пусть функция f аналитична в открытом круге $B(z_0, r)$ и непрерывна в его замыкании $\overline{B}(z_0, r)$. Тогда при $z \in B(z_0, r)$ справедливо равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(z_0 + re^{it}) \frac{re^{it} + (z - z_0)}{re^{it} - (z - z_0)}\, dt + i \operatorname{Im} f(z_0).$$

Доказательство. Для простоты будем считать $z_0 = 0$. Пусть $z \in B(0, r)$ и $z^* = r^2/\overline{z}$, тогда $z^* \in \mathbb{C} \setminus \overline{B}(0, r)$.

По формуле Коши и интегральной теореме Коши справедливы равенства

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad 0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z^*}\, d\zeta,$$

где $C_r = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - z| = r\}$ — окружность с центром в точке z радиуса r. Вычтем из первого второе и воспользуемся тем, что при $z = re^{it}$

$$\zeta - z = re^{it} - re^{i\theta}, \quad \zeta - z^* = re^{it} - \frac{r^2}{\rho} e^{i\theta}, \quad d\zeta = ire^{it}\, dt.$$

Тогда мы получим равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(t - \theta) + \rho^2}\, dt. \tag{3.13}$$

Далее, легко видеть, что

$$\operatorname{Re} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} = \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 - 2r\rho \cos(t - \theta) + \rho^2},$$

следовательно,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) \operatorname{Re} \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \, dt.$$

Рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{it}) \frac{re^{it} + z}{re^{it} - z} \, dt.$$

Она аналитична в круге $B(0, r)$ — это проверяется непосредственной проверкой ее дифференцируемости. Кроме того, из доказанного равенства (3.13) следует, что $\operatorname{Re} f \equiv \operatorname{Re} g$, поэтому функции f и g различаются на некоторую постоянную C (см. замечание в конце раздела 2.1.3). В частности, $C = f(0) - g(0)$, но $\operatorname{Re} f(0) - \operatorname{Re} g(0) = 0$ и $\in g(0) = 0$, следовательно, $C = i \operatorname{Im} f(0)$. $\square$

3.3.4. Интеграл типа Коши

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая жорданова кривая или контур и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Тогда для любого $z \notin \Gamma$ существует интеграл

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.14}$$

Определение 3.3. Интеграл (3.14) называется *интегралом типа Коши*, в отличие от интеграла Коши. Функция f в (3.14) называется *плотностью интеграла типа Коши*.

Рассмотрим случай, когда $D \subset \mathbb{C}$ стандартная многосвязная область $\Gamma = \partial D$ — ее граница. Тогда если задана функция f, аналитическая в области D и непрерывная в ее замыкании, то интеграл типа Коши совпадает с интегралом Коши в D и тождественно равен нулю в $\mathbb{C} \setminus \overline{D}$ (см. (3.12)).

Теорема 3.13. *Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — спрямляемая жорданова кривая или контур и на Γ задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C}$. Тогда интеграл типа Коши (3.14) F является аналитической функцией в каждой точке из $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, функция $F : \mathbb{C} \setminus \Gamma \to \mathbb{C}$ имеет производные любого порядка и*

$$F^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F_k(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$$

и покажем, что

$$F_k'(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \tag{3.16}$$

Для этого покажем, что выражение

$$I(h) = \frac{F_k(z+h) - F_k(z)}{h} - \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta$$

сходится к нулю при $h \to 0$. Будем считать. что $|h| < d$, где $d = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(z, \Gamma)$.

Используя формулу бинома Ньютона, запишем

$$I(h) = \frac{(k-1)!}{2\pi i h} \oint\limits_{\Gamma} f(\zeta) P(\zeta, h)\, d\zeta,$$

где

$$P(\zeta, h) = \frac{1}{(\zeta - z - h)^k} - \frac{1}{(\zeta - z)^k} - \frac{kh}{(\zeta - z)^{k+1}} = \frac{h^2 Q(\zeta, h)}{(\zeta - z - h)^k (\zeta - z)^{k+1}}$$

и

$$Q(\zeta, h) = -\sum_{j=2}^{k} (-1)^j C_k^j (\zeta - z)^{k-j+1} h^{j-2} - k \sum_{j=1}^{k} (-1)^j C_k^j (\zeta - z)^{k-j} h^{j-1}.$$

Легко убедиться в том, что это выражение ограничено некоторой постоянной $A > 0$, зависящей только от кривой Γ, z и от d

$$|Q(\zeta, h)| \leqslant A.$$

Поэтому

$$|P(\zeta, h)| \leqslant \frac{A|h|^2}{d^{2k+1}}$$

и

$$|I(h)| \leqslant \frac{k! A |h|}{2\pi d^{2k+1}} \sup_{\zeta \in \Gamma} |f(\zeta)| l_\Gamma \to 0, \quad h \to 0.$$

Применяя доказанное при $k = 0$, получаем дифференцируемость функции F и базу для доказательства нашей теоремы по индукции. Предполагая, что наше утверждение уже доказано для $k - 1$, то есть $F^{(k-1)}(z) = F_k(z)$ из (3.16) видим, что оно верно и для k. $\square$

Из теоремы 3.13 и замечания перед ее формулировкой сразу вытекает следующая важная теорема.

Теорема 3.14. *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область и функция $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ аналитична в области D и непрерывна в ее замыкании $\overline{D}$. Тогда f имеет производные любого порядка в D и справедливы равенства*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

В частности, все производные аналитической функции являются аналитическими.

3.3.5. Теорема Мореры

Здесь мы докажем утверждение, которое является в некотором смысле обратным к интегральной теореме Коши.

Лемма 3.7. *Пусть функция $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$ и интеграл от нее по границе любого треугольника Δ, $\overline{\Delta} \subset D$, равен нулю. Тогда в любом круге $B(z_0, r) \subset D$ функция f имеет первообразную.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$F(z) = \oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta, \quad z \in B = B(z_0, r)$$

(интеграл берется по отрезку, соединяющему точки z_0 и z) и пусть $h \neq 0$ мало настолько, что $z + h \in B$. По условию

$$\oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta + \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta + \oint\limits_{[z+h,z]} f(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\oint\limits_{[z+h,z]} f(\zeta)\,d\zeta - \oint\limits_{[z_0,z]} f(\zeta)\,d\zeta = \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta$$

или

$$F(z+h) - F(z) = \oint\limits_{[z,z+h]} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Отсюда после несложных преобразований получаем

$$\left|\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\oint\limits_{[z,z+h]} [f(\zeta) - f(z)]\,d\zeta\right| \leqslant \sup_{\zeta\in[z,z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \to 0$$

при $h \to 0$ в силу непрерывности функции f в точке z. Здесь была использована часть 3 теоремы 3.1. Итак, $F'(z) = f(z)$ для любого $z \in B$ и лемма доказана. □

Теорема 3.15 (Мореры). *Если $f : D \to \mathbb{C}$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$ и интеграл от нее по границе любого треугольника Δ, $\overline{\Delta} \subset D$, равен нулю, то f аналитична в D.*

Доказательство. В силу леммы 3.7 в любом круге $B \subset D$ функция f имеет первообразную. Поэтому она аналитична в B как производная аналитической функции (см. теорему 3.14). □

3.3.6. Сопряженные гармонические функции

Введем обозначение

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3.18}$$

Это дифференциальное выражение называют *оператором Лапласа*. Функция u, заданная в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ называется *гармонической* в области D, если она имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно и $\Delta u = 0$ во всех точках этой области.

Пусть функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, тогда по теореме 3.14 она и ее действительная и мнимая части $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ бесконечно дифференцируемы в D. Дифференцируя условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

мы получим $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$. Следовательно, действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими.

Две гармонические функции u и v, связанные уравнениями Коши – Римана, называются *сопряженными гармоническими функциями*

Теорема 3.16. *Пусть функция U гармонична в области $D \subset \mathbb{C}$. Тогда существует такая аналитическая в области D функция f, что $\operatorname{Re} f = u$.*

Доказательство. Пусть $(x_0, y_0) \in D$ — фиксированная точка и $(x, y) \in D$ произвольная точка в области D. Рассмотрим функцию

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy.$$

Здесь не имеет значения по какому пути, соединяющему точки (x_0, y_0) и (x, y), идет интегрирование. В силу условия $\Delta u = 0$ выражение под знаком интеграла является полным дифференциалом и интеграл не зависит от пути интегрирования. Частные производные функции v легко вычисляются (это делается в курсе анализа) и для них справедливы условия Коши–Римана. Поэтому в силу теоремы 2.2 функция $f = u + iv$ аналитична. $\square$

Из этой теоремы следует, что гармонические функции обладают рядом свойств аналитических функций. В частности, они бесконечно дифференциаруемы, для них справедливы формулы средних значений, доказательство принципа максимума говорит о том, что он справедлив для гармонических функций.

Глава 4

Последовательности и ряды

4.1. Ряды Тейлора

4.1.1. Основные понятия теории рядов

Напомним прежде всего основные понятия общей теории рядов, адаптированные к комплексному случаю.

Если $\{a_k\} \subset \mathbb{C}$ — последовательность комплексных чисел, то символ

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{4.1}$$

называют *рядом*.

Чисто формальное восприятие знака суммы означает, что мы пытаемся складывать бесконечное число слагаемых. Такая операция нуждается в дополнительном определении.

С каждым рядом (4.1) свяжем последовательность сумм

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \tag{4.2}$$

которые называются его *частичными суммами*.

Ряд (4.1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм, то есть существует число $s \in \mathbb{R}$, для которого

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

В этом случае s называется *суммой ряда* и мы пишем $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$. В противном случае ряд называется *расходящимся*.

Итак, по определению вопрос о сходимости ряда сводится к вопросу о сходимости последовательности его частичных сумм. Обратно, если задана последовательность $\{s_k\} \subset \mathbb{R}$, то, полагая

$$a_1 = s_1, \quad a_k = s_k - s_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots),$$

получаем ряд (4.1), для которого $\{s_k\}$ является последовательностью частичных сумм (проверьте это самостоятельно).

Таким образом, вопрос о сходимости последовательности — вопрос о сходимости некоторого ряда. Следовательно, рассмотрение рядов — это лишь новая форма изучения последовательностей. Но такой подход даст нам новые возможности как при установлении существования предела, так и при его вычислении. Мы увидим, что теория рядов является мощным средством теории функций комплексного переменного.

Пример 4.1. Простейшими примерами сходящихся рядов могут служить следующие:

— ряд с постоянными слагаемыми

$$\sum_{k=1}^{\infty} a$$

сходится тогда и только тогда, когда $a = 0$,

— геометрический ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k, \quad a \neq 0,$$

сходится тогда и только тогда, когда $|z| < 1$, при этом

$$\sum_{k=0}^{\infty} az^k = \frac{a}{1-z}, \quad |z| < 1. \tag{4.3}$$

Лемма 4.1. *Ряд (4.1) сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм) фундаментальна, то есть*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, n, m \geqslant n_\varepsilon \quad |s_n - s_m| < \varepsilon.$$

В частности, если ряд (4.1) сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ряд (4.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \tag{4.4}$$

Из леммы 4.1 вытекает, что из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость. Обратное неверно — существуют сходящиеся ряды, которые не являются абсолютно сходящимися. Если ряд (4.1) сходится, а ряд (4.4) расходится, то говорят, что ряд (4.1) сходится *условно*.

4.1.2. Степенные ряды

Определение 4.1. *Степенным рядом* будем называть ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \tag{4.5}$$

при этом c_k — *коэффициенты* степенного ряда, а z_0 — его *центр*.

Областью сходимости ряда (4.5) называется множество тех $z \in \mathbb{C}$, для которых он сходится.

Следующие утверждения показывают, что область сходимости степенного ряда не может быть произвольной и имеет весьма специфическую структуру.

Лемма 4.2 (Абеля). *Если степенной ряд сходится при некотором $z^* \neq z_0$, то он сходится абсолютно в круге*

$$B(z_0 : |z^*-z_0|) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z-z_0| < |z^*-z_0|\}$$

и равномерно в любом круге $\overline{B(z_0, r)}$, $0 < r < |z^*-z_0|$.

Доказательство. В силу сходимости $|c_k(z^*-z_0)^k| \leqslant M$. Если $z \in \mathbb{C}$ такой, что $|z-z_0| < |z^*-z_0|$, то

$$|c_k(z-z_0)^k| = |c_k(z^*-z_0)^k| \cdot \left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|^k \leqslant M\left|\frac{z-z_0}{z^*-z_0}\right|^k.$$

Абсолютная сходимость следует теперь из (4.3). Точно так же получается равномерная сходимость в любом круге $\overline{B}(z_0, r)$ меньшего радиуса. □

Теорема 4.1 (Коши – Адамара). *Пусть $\{c_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ и*

$$l = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Тогда при
1) $l = \infty$ *ряд (4.5) расходится при всех $z \neq z_0$,*
2) $l > 0$ *ряд (4.5) сходится при всех z с $|z-z_0| < 1/l$ и расходится при всех z с $|z-z_0| > 1/l$,*
3) $l = 0$ *ряд (4.5) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. 1) В этом случае для любого $z \neq z_0$ для бесконечно многих $k \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство $\sqrt[k]{|c_k|} \cdot |z - z_0| > 1$ и слагаемые ряда (4.5) не стремятся к 0 — не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

В случае 2) при $|z - z_0| < 1/l$ применим к ряду признак Коши с корнем. Если же $|z - z_0| > 1/l$, то (как и в случае 1)) не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

Наконец, в случае 3) при любом $z \in \mathbb{C}$ по признаку Коши с корнем ряд (4.5) сходится. $\square$

4.1.3. Радиус сходимости и формула Коши — Адамара

Формулировка теоремы 4.1 делает естественным следующее понятие.

Определение 4.2. Число $R \in \mathbb{R}$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда (4.5), если этот ряд сходится при всех z с $|z - z_0| < R$ и расходится при всех z с $|z - z_0| > R$.

Круг

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$$

называется *кругом сходимости*.

Если ряд (4.5) сходится только при $z = z_0$, то считаем $R = 0$, а если (4.5) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то считаем $R = \infty$.

Теорема 4.1 доказывает существование радиуса сходимости и дает формулу для его вычисления.

Теорема 4.2 (формула Коши – Адамара). *Радиус сходимости R степенного ряда (4.5) вычисляется по формуле*

$$\frac{1}{R} = \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}. \tag{4.6}$$

Конечно, формула (4.6) справедлива и в случаях $R = 0$ и $R = \infty$, если считать $1/0 = \infty$ и $1/\infty = 0$.

Теорема 4.3. *Сумма степенного ряда (4.5) с положительным радиусом сходимости аналитична в круге сходимости и его коэффициенты вычисляются по формулам*

$$c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots,$$

где f — сумма ряда.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналитичность суммы ряда вытекает из леммы Абеля и теоремы Вейерштрасса. Кроме того, из второй части теоремы Вейерштрасса следует, что при каждом $n = 0, 1, \ldots$ справедливо равенство

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)c_k(z-z_0)^{k-n}.$$

Беря здесь $z = z_0$, видим, что все слагаемые справа обращаются в нуль, кроме первого. Это приводит к равенствам $f^{(n)}(z_0) = n!c_n$ и мы получаем формулы для коэффициентов. □

Следствие 4.1. *Два степенных ряда вида (4.5) с положительными радиусами сходимости, сходящиеся к одной и той же сумме в некотором круге $B(z_0, \delta)$, где $\delta > 0$, являются тождественными.*

4.1.4. Разложение в степенной ряд

Определение 4.3. *Рядом Тейлора* функции f в точке z_0 называется степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k. \tag{4.7}$$

Из теоремы 4.3 сразу следует, что степенной ряд с положительным радиусом сходимости является рядом Тейлора своей суммы.

Конечно, чтобы записать ряд (4.7) мы должны потребовать существования производных любого порядка в точке z_0, а для этого на самом деле нужно, чтобы все производные существовали в некоторой окрестности z_0, то есть функция f должна быть аналитичной в некоторой окрестности точки z_0. Кроме того, подчеркнем, что в этом определении ничего не говорится о сходимости ряда (4.7).

Таким образом, возникают следующие естественные вопросы:

— сходится ли ряд Тейлора,

— чему равна его сумма в случае сходимости?

Теорема 4.4 (Тейлора). *Пусть функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$, $0 < r < d = \operatorname{dist}(z_0, \partial D)$. Тогда степенной ряд (4.5), коэффициенты которого вычислены по формулам*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\, d\zeta, \quad k \in \mathbb{N}_0, \tag{4.8}$$

сходится в круге $B(z_0, d)$ к функции f.

Доказательство. Пусть $z \in B(z_0, d)$ и $0 < \rho = |z - z_0| < r$ (ниже мы избавимся от предположения $\rho < r$). Воспользуемся интегральной формулой Коши для круга $B(z_0, r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

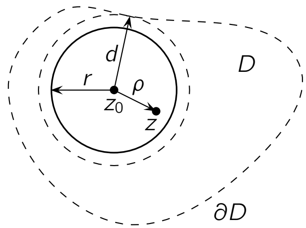


Рис. 4.1

и разложим ядро Коши $(\zeta - z)^{-1}$ в ряд

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$$

Умножим обе части этого равенства на $(2\pi i)^{-1} f(\zeta)$

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k$$

и проинтегрируем это равенство по $\zeta \in C_r(z_0)$, получая требуемое равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_))^{k+1}}\, d\zeta \cdot (z - z_0)^k$$

При этом почленное интегрирование ряда справа возможно в силу его равномерной сходимости по признаку Вейерштрасса — при $|\zeta - z_0| = r$ и $k \in \mathbb{N}_0$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k \right| \leqslant \frac{M}{r} \cdot \left(\frac{\rho}{r} \right)^k, \quad \text{где} \quad M = \sup_{\zeta \in C_r(z_0)} |f(\zeta)|.$$

То, что в (4.8) можно брать любое $r < d$, вытекает из следствия 4.1. В частности, можно было считать, что $\rho < r$. □

4.1.5. Эквивалентные описания аналитичности

Следующее утверждение собирает многое из доказанного выше и дает нам возможность различными способами выражать свойство аналитичности.

Теорема 4.5. *Пусть функция f задана в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Тогда следующие условия равносильны аналитичности f в точке z_0:*

1) *f дифференцируема в некоторой окрестности z_0,*

2) *f есть сумма степенного ряда с центром в f с положительным радиусом сходимости,*

3) *f непрерывна в некоторой окрестности z_0 и интеграл от нее по границе любого треугольника равен нулю.*

Доказательство. То, что из 1) следует 2), вытекает из теоремы Тейлора. Обратное утверждение вытекает из теоремы 4.3.

По теореме 3.3 из 1) следует 3). Впрочем, это следует и из леммы Гурса. Обратное получаем из теоремы Мореры. □

4.2. Теоремы единственности

4.2.1. Локальная форма единственности

Множество нулей аналитической функции имеет весьма специфическую структуру и не может быть «очень большим». Здесь нуль функции — это, конечно, точка из области ее определения, в которой она обращается в нуль.

Лемма 4.3. *Если функция f аналитична и отлична от тождественного нуля в некоторой окрестности точки z_0, то она отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки z_0.*

Доказательство. Пусть f отлична от тождественного нуля в окрестности точки z_0. По теореме 4.4 ее можно разложить в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k,$$

сходящийся в окрестности z_0. Здесь n — наименьший номер, для которого $c_n \neq 0$ (не все коэффициенты этого ряда равны нулю — иначе она была бы тождественно равна нулю в этой окрестности). Поэтому

$$f(z) = (z - z_0)^n \left[c_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-n} \right]$$

и при $z \neq z_0$ достаточно близком к z_0 квадратная скобка отлична от нуля, так как первое слагаемое в ней отлично от нуля, а предел второго (при $z \to z_0$) равен нулю. $\square$

4.2.2. Теорема единственности Вейерштрасса

В частности, лемма 4.3 показывает, что нули аналитической функции изолированы от других нулей и этот эффект в ней имеет локальный характер. Следующая теорема дает глобальное утверждение такого же сорта.

Теорема 4.6 (Вейерштрасса о единственности). *Если функция f аналитична в области $D \subset \mathbb{C}$ и обращается в нуль на бесконечном множестве с предельной точкой в D, то $f(z) \equiv 0$ в D.*

Доказательство. Пусть $Z \subset D$ — совокупность всех внутренних точек множества нулей функции. Тогда, очевидно, Z открыто.

Покажем, что его дополнение $D \setminus Z$ в D также является открытым. В самом деле, если предположить противное, то некоторая точка $z_0 \in D \setminus Z$ не является внутренней для $D \setminus Z$. Тогда она является предельной для Z и силу непрерывности f также является ее нулем. Отсюда и из леммы 4.3 следует, что наша функция тождественно равна нулю в некоторой окрестности z_0 и должно быть $z_0 \in Z$ в то время как $z_0 \in D \setminus Z$.

Итак, $D = Z \cup (D \setminus Z)$ и оба множества справа открыты и не пересекаются. Отсюда следует, что $D \setminus Z = \varnothing$ и $D = Z$, так как противное противоречит связности области D. □

Следствие 4.2. *Если две функции аналитичны в области $D \subset \mathbb{C}$ и совпадают на бесконечном подмножестве из D с предельной точкой в D, то они совпадают в D тождественно.*

Доказательство. Применим теорему 4.6 к разности этих функций. □

4.3. Последовательности аналитических функций

4.3.1. Сходимость внутри области

Ниже нам будет удобно пользоваться следующей терминологией. Пусть имеется некоторое свойство, связанное с подмножествами из $\mathbb{C}$. Будем говорить, что это свойство выполнено внутри A, если оно справедливо для любого компактного подмножества $K \subset A$. Примерами могут служить ограниченность внутри A, равномерная сходимость внутри A и т.д.

Основное содержание многих утверждений в этом параграфе будет состоять в том, что свойства, присущие обычно непрерывным функциям (или последовательностям непрерывных функций) на компактах, для аналитических функций выполняются внутри областей.

4.3.2. Принцип счетной компактности

Для множеств в евклидовых пространствах справедлив принцип Больцано – Вейерштрасса: каждое бесконечное ограниченное множество содержит сходящуюся подпоследовательность. Положение меняется, когда мы переходим к последовательностям функций — чтобы выделить, к примеру, равномерно сходящуюся подпоследовательность, нужно требовать гораздо больше. (см., например, теорему Арцела–Асколи).

На первый взгляд, удивительным выглядит то, что для аналитических функций ситуация больше похожа на случай конечномерных пространств. Это показывает следующая теорема, известная под названием «*принцип счетной компактности*».

Теорема 4.7 (Монтеля). *Если последовательность аналитических функций ограничена внутри области $D \subset \mathbb{C}$, то из нее можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри D.*

Доказательство. Шаг 1. Пусть $K \subset D$ — фиксированное замкнутое ограниченное (компактное) множество. Покажем, что последовательность $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна на K. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $n \in \mathbb{N}$ и всех $z_1, z_2 \in K$ со свойством $|z_1 - z_2| < \delta$ выполнено неравенство $|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon$.

Введем обозначение

$$\alpha = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$$

(положительность α легко вытекает из компактности множеств K и ∂D) и рассмотрим множество

$$K_\alpha = \{z \in D : \operatorname{dist}(z, K) \leqslant 2\alpha\}.$$

Оно замкнуто и ограничено, поэтому в силу основного условия теоремы

$$\sup_n \sup_{z \in K_\alpha} |f_n(z)| = M < \infty.$$

Пусть $0 < \varepsilon < \alpha$. Возьмем точки $z_1, z_2 \in K$ так, чтобы $|z_1 - z_2| < \varepsilon$ и применим формулу Коши к кругу $B(z_1, 2\alpha)$

$$f_n(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\delta(z_1)} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z_j} d\zeta, \quad j = 1, 2$$

$(C_\alpha(z_1) = \{\zeta : |\zeta - z_j| = 2\alpha\}$ — граница круга $B(z_1, 2\alpha))$. Отсюда

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\alpha(z_1)} f_n(\zeta) \frac{z_1 - z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\alpha \max_{\zeta \in C_\alpha(z_1)} \left| f_n(\zeta) \frac{z_1 - z_2}{(\zeta - z_1)(\zeta - z_2)} \right| \leqslant 2\alpha M \frac{|z_1 - z_2|}{2\alpha \cdot \alpha} = \frac{M}{\alpha} |z_1 - z_2|.$$

Отсюда следует, что если взять $\delta = \min\{\varepsilon, \alpha\varepsilon/M\} > 0$, то для любых $z_1, z_2 \in K$ со свойством $|z_1 - z_2| < \delta$ выполнено неравенство

$$|f_n(z_1) - f_n(z_2)| < \varepsilon.$$

Свойство равностепенной непрерывности доказано.

Итак, выполнены все условия теоремы Арцела–Асколи (равностепенная непрерывность плюс равномерная ограниченность равносильны счетной компактности), из которой следует, что $\{f_n\}$ содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на K.

Шаг 2. Для того, чтобы доказать, что из $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящаяся равномерно внутри D, применим диагональный процесс Кантора.

Для $m \in \mathbb{N}$ определим множество

$$K_m = \left\{ z \in D : \operatorname{dist}(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{m} \right\} \cap \overline{B}(0, m).$$

Для достаточно больших m эти множества непусты и, кроме того, они ограничены и замкнуты (последнее следует из того, что функция $z \mapsto \operatorname{dist}(z, \partial D)$ непрерывна). Отметим также, что

$$K_m \subset K_{m+1}, \quad D = \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m.$$

По доказанному существует такая подпоследовательность индексов $\{n_k^1\}$, что $\{f_{n_k^1}\}$ сходится равномерно на K_1. Из $\{n_k^1\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{n_k^2\}$, что $\{f_{n_k^2}\}$ сходится равномерно на K_2. Продолжая процесс по индукции, на j-м шаге из последовательности $\{n_k^{j-1}\}$ выделим подпоследовательность $\{n_k^j\}$ так, чтобы последовательность $\{f_{n_k^j}\}$ сходилась равномерно на K_j и так далее. Обозначим $n_k = n_k^k$, тогда ясно что подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится равномерно на каждом из множеств K_m.

Выбранная подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ сходится равномерно внутри D, так как $\operatorname{dist}(K, \partial D) > 0$ для любого замкнутого ограниченного множества $K \subset D$ (см. шаг 1) и $K \subset K_m$ для $m > (\operatorname{dist}(K, \partial D))^{-1}$. $\square$

4.3.3. Теорема Витали

Теорема 4.8 (Витали). *Если последовательность $\{f_n\} \subset H(D)$ ограничена внутри D, и сходится на бесконечном множестве точек с предельной точкой в D, то она равномерно сходится внутри D.*

Доказательство. Пусть в некоторой точке $z_0 \in D$ последовательность расходится. Тогда выделим две подпоследовательности сходящиеся к разным пределам в z_0. Из этих последовательностей по теореме Монтеля выделим подпоследовательности, сходящиеся равномерно внутри D к двум аналитическим функциям, совпадающим на множестве с предельной точкой в D. По следствию 4.2 эти функции должны быть тождественны. Противоречие показывает, что $\{f_n\}$ сходится всюду в D. А равномерность сходимости доказывается точно так же как в теореме Монтеля. □

4.3.4. Теорема Вейерштрасса

Следующая теорема показывает, в частности, что предел последовательности аналитических функций, сходящейся равномерно внутри области, также является аналитической функцией. Это, в свою очередь, говорит нам о том, что понятие равномерной сходимости внутри области является естественным для класса функций, аналитических в этой области, так как не выводит из этого класса.

Теорема 4.9 (Вейерштрасс). *Пусть последовательность аналитических функций $\{f_n\}$ сходится равномерно внутри области D к функции f. Тогда*

1) *функция f аналитична в D,*

2) *для любого $k \in \mathbb{N}$ последовательность k-х производных $\{f_n^{(k)}\}$ сходится к производной предельной функции $f^{(k)}$ равномерно внутри D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $z_0 \in D$ и $\overline{B}(z_0, r) \subset D$, тогда по формуле Коши

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Переходя здесь к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Предельный переход под знаком интеграла справа возможен в силу равномерной сходимости f_n на окружности $\{\zeta : \ |\zeta - z| = r\}$. Из полученного равенства и теоремы 3.13 следует, что f аналитична в в любом круге $B(z_0, r)$, содержащемся в D. Следовательно, функция f аналитична во всей области D.

2) Пусть $z_0 \in D$ и $\overline{B}(z_0, 2r) \subset D$. Применим равенство (3.17) из теоремы 3.14 к разности $f^{(k)} - f_n^{(k)}$, окружности $\{\zeta : |\zeta - z| = r\}$ и $z \in \overline{B}(z_0, r) \subset D$

$$|f^{(k)}(z) - f_n^{(k)}(z)| = \left| \frac{k!}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = 2r} \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\, d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{k!}{2\pi} \cdot \frac{4\pi r}{r^{k+1}} \sup_{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| = \frac{2k!}{r^k} \sup_{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r} |f(\zeta) - f_n(\zeta)| \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу равномерной сходимости последовательности f_n на компакте $\{\zeta : |\zeta - z_0| = 2r\}$.

Таким образом, последовательность производных $f_n^{(k)}$ сходится равномерно к $f^{(k)}$ в любом замкнутом круге $\overline{B}(z_0, r)$, для которого $\overline{B}(z_0, 2r) \subset D$. Но любой компакт в D можно покрыть конечным числом таких кругов. Следовательно, $f_n^{(k)}$ сходится к $f^{(k)}$ равномерно внутри D. $\square$

Глава 5

Ряды Лорана

5.1. Разложение в ряд Лорана

5.1.1. Ряд Лорана

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{-k}$$

по отрицательным степеням разностей $z - z_0$. С помощью замены $z - z_0 = \frac{1}{\zeta}$ легко видеть, что это ряд сходится в области

$$|z - z_0| > \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|c_k|} = R$$

и по теореме Вейерштрасса о рядах его сумма аналитична в этой области.

Мы будем рассматривать ряды по всем целым степеням разностей $z - z_0$.

Определение 5.1. *Рядом Лорана* будем называть ряд вида

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k (z - z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k . \tag{5.1}$$

Часть ряда Лорана (5.1) с отрицательными индексами называется его *главной частью*, а часть с неотрицательными индексами — *правильной* или аналитической.

Сумму ряда Лорана (5.1) будем понимать как

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{-1} c_k (z - z_0)^k + \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} c_k (z - z_0)^k$$

(конечно, если эти пределы существуют).

Из рассуждения перед определением ряда Лорана и из теоремы Коши – Адамара получаем, что областью сходимости ряда Лорана является кольцо

$$K(z_0, r, R) \equiv \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} ,$$

где

$$r = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}; \qquad \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

Конечно, если $r \geqslant R$, то это кольцо пусто.

Ряды Лорана естественно рассматривать по следующей причине. Если функция аналитична в некотором круге, то она разлагается в степенной ряд (см. теорему Тейлора) в этом круге. Если же в круге есть точки неаналитичности, то такое разложение уже невозможно. Выбрав кольцо $K(z_0, r, R)$, в котором наша функция аналитична, можно попытаться разложить ее в ряд Лорана.

5.1.2. Формулы для коэффициентов разложения

Следующая теорема показывает, что аналитическая в кольце функция может быть разложена в ряд Лорана, а также позволяет вычислить коэффициенты этого ряда.

Теорема 5.1 (Лорана). *Пусть* $0 \leqslant r < R$ *и* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Если функция* f *аналитична в кольце* $K(z_0, r, R)$, $0 \leqslant r < R$, *то она является суммой сходящегося ряда Лорана (5.1), причем*

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad r < \rho < R. \tag{5.2}$$

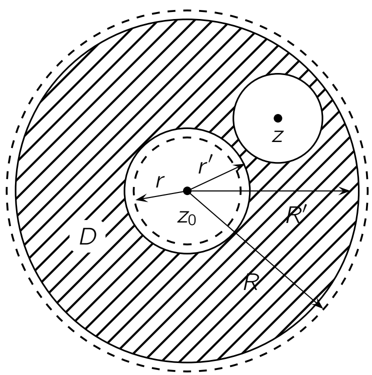


Рис. 5.1

Доказательство. Пусть $z \in K(z_0, r, R)$, выберем числа r' и R' так, чтобы

$$r < r' < |z - z_0| < R' < R,$$

а $\delta > 0$ возьмем настолько малым, чтобы $\overline{B}(z, \delta) \subset K(z_0, r', R')$.

Теперь к функции $\zeta \to f(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ применим интегральную формулу Коши в области (заштрихованная область на рис. 5.1)

$$D = K(z_0, r', R') \setminus \overline{B}(z, \delta),$$

получим равенство

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{5.3}$$

Далее заметим, что

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

А так как $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| < 1$, то ряд сходится равномерно по ζ на $C_{R'}(z_0)$. Поэтому первый интеграл в (5.3) разлагается в ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint\limits_{C_{R'}(z)} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Аналогично

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}}$$

А так как $\left|\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right| < 1$, то ряд сходится равномерно по ζ на $C_{r'}(z_0)$. Поэтому второй интеграл в (5.3) разлагается в ряд

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z - z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_{r'}(z)} f(\zeta)(\zeta - z_0)^n \, d\zeta.$$

Для доказательства того, что формулы коэффициентов не зависят от ρ, воспользуемся обобщенной теоремой Коши, применяя ее к двусвязной области $K(z_0, \rho, \rho')$ к функции $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ где $r < \rho < \rho' < R$.

□

Определение 5.2. Ряд Лорана (5.1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.2), будем называть *рядом Лорана функции* f в кольце $K(z_0, r, R)$.

Справедливо следующее утверждение, которое является в некотором смысле обратным к теореме Лорана.

Теорема 5.2. *Пусть* $0 \leqslant r < R$ *и* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Если ряд (5.1) сходится равномерно внутри кольца* $K(z_0, r, R)$, $0 \leqslant r < R$, *то он является рядом Лорана своей суммы.*

Доказательство. Эта теорема является следствием теоремы Вейерштрасса. Действительно, все слагаемые ряда Лорана аналитичны и ряд сходится равномерно внутри кольца $K(z_0, r, R)$, поэтому его сумма аналитична в этом кольце.

Для вычисления коэффициентов ряда (5.1) обозначим f его сумму, умножим его на $\dfrac{1}{2\pi i}(z - z_0)^{-n-1}$, $n \in \mathbb{Z}$, и проинтегрируем почленно по окружности $|z - z_0| = \rho \in (r, R)$, получая

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\, dz = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{C_\rho(z_0)} (z - z_0)^{k-n-1} dz = c_n.$$

Последнее равенство вытекает из того, что интеграл

$$\int\limits_{C_\rho(z_0)} (z - z_0)^{k-n-1}\, dz$$

равен $2\pi i$ при $k = n$ и нулю при $k \neq n$ (см. лемму 3.2). $\square$

5.1.3. Неравенства Коши

Из формул (5.2) нетрудно получить следующие оценки для коэффициентов ряда Лорана функции f

$$|c_k| \leqslant M_\rho \rho^{-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad M_\rho = \max_{z \in C_{\rho(z_0)}} |f(z)|, \tag{5.4}$$

которые называют обычно *неравенствами Коши*.

Действительно, в силу (5.2) и теоремы 3.1 получаем

$$|c_k| = \left| \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right| \leqslant \frac{1}{2\pi} \oint\limits_{C_\rho(z_0)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} dl \leqslant \frac{M_\rho}{\rho^{k+1}} \cdot 2\pi\rho.$$

5.2. Классификация изолированных особых точек

5.2.1. Правильные точки функции

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$ при некотором $r > 0$ Тогда либо найдется число $c_0 \in \mathbb{C}$, что переопределение нашей функции в точке z_0 равенством $f(z_0) = c_0$ делает ее аналитичной также и в точке z_0, либо такого числа нет. В первом случае z_0 называют *правильной точкой* для f (часто используется также термин «устранимая особая точка»). Во втором случае, говорят, что z_0 — *изолированная особая точка* для f. Простой способ проверки того, что точка является правильной для функции, дает следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$, $r > 0$. Тогда z_0 является для нее правильной точкой тогда и только тогда, когда f ограничена в некоторой проколотой окрестности z_0.*

Доказательство. Ограниченность функции в окрестности правильной точки очевидна.

Для доказательства обратного утверждения разложим нашу функцию в ряд Лорана по теореме 5.1 и воспользуемся неравенствами (5.4) для коэффициентов Лорана: если $|f(z)| \leqslant M$ в $B^\circ(z_0, r)$, то для любого $0 < \rho < r$ выполнены неравенства $|c_k| \leqslant M\rho^{-k}$. При $\rho \to +0$ получаем отсюда, что $c_k = 0$ при всех $k < 0$. То есть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \tag{5.5}$$

и определение $f(z_0) = c_0$ делает ее аналитической в $B(z_0, r)$. □

Следствие 5.1. *z_0 является правильной точкой функции f в том и только в том случае, когда ее разложение в ряд Лорана имеет вид (5.5), т.е. является ее рядом Тейлора.*

Это вытекает из доказательства теоремы 5.3.

Понятие правильной точки функции не очень содержательно и не представляет интереса для теории.

Мы изучим более подробно изолированные особые точки. Основным и естественным средством при этом будут служить разложения в ряды Лорана.

5.2.2. Полюсы

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^\circ(z_0, r)$, $r > 0$. Тогда из теоремы 5.3 вытекает, что z_0 является изолированной особой точкой для f в том и только том случае, когда

$$\varlimsup_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty.$$

Определение 5.3. Изолированная особая точка z_0 функции f называется ее *полюсом*, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty. \tag{5.6}$$

Самый простой пример полюса — точка z_0 для функции $f(z) = (z - z_0)^{-n}$ где $n \in \mathbb{N}$. По существу, этот пример показывает, как устроена функция в окрестности любого полюса, т.к. следующая теорема утверждает, что эта ситуация вполне типична.

Теорема 5.4. *Изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее полюсом тогда и только тогда, когда существует такое $n \in \mathbb{N}$, что разложение f в ряд Лорана имеет вид*

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-n} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \text{где} \quad c_{-n} \neq 0. \tag{5.7}$$

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $g = 1/f$, заданную в такой проколотой окрестности $B^\circ(z_0, r)$ точки z_0, в которой $F(z) \neq 0$ (ее существование обеспечивается условием (5.6)). Эта функция g аналитична в $B^\circ(z_0, r)$ и z_0 является ее правильной точкой (что также обесепечивается условием (5.6)), причем $\lim_{z \to z_0} g(z) = 0$. В силу следствия 5.1 ее лорановское разложение имеет вид

$$g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^k$$

при некотором $n \in \mathbb{N}$ и $a_n \neq 0$.

Так как $a_n \neq 0$, то функция h, определенная равенством

$$\frac{1}{h(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k}(z-z_0)^k,$$

аналитична в некоторой окрестности точки z_0. Разлагая h в ряд Тейлора, видим, что ряд Лорана функции $f(z) = (z-z_0)^{-n}h(z)$ имеет вид (5.7).

Обратно, разложение Лорана вида (5.7) дает нам

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z) = c_{-n} \neq 0,$$

поэтому (5.6) выполнено. □

Теорема 5.4 делает естественной следующую классификацию полюсов.

Определение 5.4. Будем говорить, что изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее *полюсом порядка (кратности) $n \in \mathbb{N}$*, если разложение Лорана для f имеет вид (5.7).

Полюс кратности $n = 1$ называется *простым*.

Пусть функция f аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$. Условимся называть точку z_0 *нулем порядка (кратности) n* функции f, если

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Другими словами, это означает, что разложение функции f в ряд Тейлора в точке z_0 имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k(z-z_0)^k, \quad \text{где} \quad c_n \neq 0.$$

Еще одна эквивалентная форма: в некоторой окрестности нуля кратности n функция f представима в виде $f(z) = (z-z_0)^n g(z)$, где g аналитична в этой окрестности и $g(z_0) \neq 0$.

Теорема 5.5. *Точка $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс порядка n для функции f тогда и только тогда, когда z_0 — нуль порядка n для функции $1/f$.*

Доказательство. Пусть z_0 — полюс порядка n для f. Тогда функция $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$, аналитична и отлична от нуля в некоторой окрестности z_0, т.к. $g(z_0) = c_{-n} \neq 0$. Поэтому функция $1/g$ аналитична в этой окрестности и разлагается в ряд Тейлора

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{f(z)} = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

и z_0 — нуль порядка n для $1/f$. Каждый шаг в этом рассуждении обратим, поэтому обратное утверждение также верно. $\square$

5.2.3. Существенно особые точки

Пусть функция f аналитична в проколотом круге $B^{\circ}(z_0, r)$ при некотором $r > 0$ и z_0 не является ни правильной точкой, ни полюсом. Такие изолированные особенности называются существенно особыми точками для f.

Определение 5.5. Изолированная особая точка z_0 функции f называется *существенно особой точкой* для f, если в этой точке она не имеет ни конечного, ни бесконечного предела.

Как и в случае полюса (см. теорему 5.4) судить о том, является ли изолированная особенность существенно особой точкой, можно по ряду Лорана.

Теорема 5.6. *Изолированная особая точка функции f является существенно особой тогда и только тогда, главная часть ряда Лорана в этой точке содержит бесконечно много ненулевых слагаемых.*

Доказательство. Правильная точка, полюс и существенно особая точка являются взаимоисключающими случаями изолированной особенности. Для завершения доказательства остается применить следствие 5.1 и теорему 5.4. □

Таким образом, вид неаналитической части ряда Лорана полностью распознает тип изолированной особенности в точке z_0:

— если она отсутствует, то z_0 — правильная точка,
— если в ней лишь конечное число ненулевых слагаемых, то z_0 — полюс соответствуюшего порядка,
— если ненулевых слагаемых бесконечно много, то z_0 — существенная особенность.

Следующее утверждение аналогично теореме 5.5 и дает способ проверки на существенную особенность для f с помощью функции $1/f$.

Теорема 5.7. *Пусть функция f аналитична и отлична от нуля в некоторой проколотой окрестности точки z_0.*

Тогда если z_0 является существенно особой точкой для f, то z_0 — существенно особая точка для $1/f$.

Доказательство. Функция $g = 1/f$ аналитична в той же проколотой окрестности точки z_0, которая является для нее изолированной особенностью.

Если предположить, что z_0 — полюс для g, то по теореме 5.5 z_0 является нулем для f. Поэтому f аналитична в точке z_0, что невозможно по условию.

Следовательно, z_0 является либо правильной, либо существенно особой для для g. Если z_0 — правильная точка для g, то либо $g(z_0) = 0$ и f имеет в z_0 полюс (по теореме 5.5), либо $g(z_0) \neq 0$ и $g(z) \neq 0$ в некоторой окрестности z_0, тогда функция $1/g = f$ аналитична в точке z_0. Это опять невозможно. Остается единственное: z_0 — существенно особая точка для g. $\square$

5.2.4. Случай бесконечно удаленной точки

Понятие изолированной особой точки можно распространить и на случай $z_0 = \infty$ следующим образом.

Пусть функция аналитична в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки, т.е. в области вида $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ с достаточно большим R.

Определение 5.6. Будем говорить, что бесконечно удаленная точка является правильной, полюсом порядка n или существенно собой точкой для функции f, если 0 является таковой для функции $g : z \mapsto f(1/z)$.

Разложим функцию $g : z \mapsto f(1/z)$ в ряд Лорана в точке 0

$$g(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \zeta^{-k}.$$

По количеству ненулевых слагаемых в неаналитической части этого разложения мы можем проверить тип особенности функции g.

Выполняя в этом разложении замену $\zeta = 1/z$ и учитывая связь между f и g, мы получим разложение

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} z^k.$$

для f в окрестности бесконечно удаленной точки. Для того, чтобы иметь унифицированную запись разложения в ряд Лорана в точках $z_0 \in \mathbb{C}$ (см. (5.1)) и $z_0 = \infty$ заменим в последнем ряде a_k на c_{-k}, приходя к ряду

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k. \tag{5.8}$$

Это разложение мы будем называть *рядом Лорана функци f на бесконечности*. Однако теперь главной частью этого разложения является первая, а аналитической — вторая.

С помощью ряда (5.8) него мы будем судить о типе особенности функции f в бесконечно удаленной точке по числу ненулевых коэффициентов с положительными индексами в разложении (5.8):

— если все они отсутствуют, то ∞ — правильная точка для f,
— если их конечное число, то ∞ — полюс соответствующего порядка,
— если их бесконечно много, то ∞ является существенной особенностью функции f.

5.2.5. Теорема Сохоцкого

Асимптотическое поведение вблизи правильной точки функции и вблизи полюса уже выяснено. Именно,

— если z_0 — правильная точка для f, то существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$,

— если z_0 — полюс для f, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$,

— если z_0 — полюс порядка n для f, то существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)^n$.

В окрестности существенной особой точки поведение функции значительно сложнее, что показывает следующее утверждение.

Теорема 5.8 (Сохоцкого). *Если точка z_0 — существенно особая для f, то для любого числа $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ найдется последовательность $z_k \to z$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_k) = w$.*

Доказательство. Если $w = \infty$, то все доказанно, так как f неограничена в любой окрестности z_0 (см. начало пункта 5.2.2).

Пусть $w \in \mathbb{C}$. Если z_0 — предельная точка множества нулей функции $f(z) - w$, то все доказано. Если же нет, то $f(z) - w \neq 0$ в некоторой окрестности z_0 и по теореме 5.7 для функции $z \mapsto (f(z) - w)^{-1}$ точка z_0 также является существенно особой. По доказанному найдется последовательность $z_k \to z_0$, для которой $(f(z_k) - w)^{-1} \to \infty$, т.е. $f(z_k) \to w$. □

На самом деле справедливо следующее более глубокое утверждение, которое мы приводим здесь без доказательства.

Теорема 5.9 (Пикара). *Если z_0 — существенно особая точка функции f, то в любой окрестности точки z_0 f принимает каждое значение $w \in \mathbb{C}$, кроме, быть может, одного, бесконечно много раз.*

Значение w, которое в теореме Пикара функция не принимает, называют обычно исключительным. Рассмотрим в связи с этим две функции

$$\exp\frac{1}{z}, \quad \sin\frac{1}{z}$$

и точку $z_0 = 0$, которая является существенно особой для каждой из них. Для первой функции исключительное значение $w_0 = 0$, а для второй исключительного значения нет.

5.2.6. Целые и мероморфные функции

Аналитическая функция, не имеющая особых точек в расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, является тождественно постоянной. Действительно, ее разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{5.9}$$

и сходится при всех $z \in \mathbb{C}$. Этот же ряд является разложением Лорана f в бесконечно удаленной точке. Поскольку ∞ не является особой, то (см. пункт 5.2.4) $c_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Функция, аналитическая всюду в $\mathbb{C}$ называется *целой*. Такие функции имеют единственную особенность — бесконечно удаленную точку.

Если $n \in \mathbb{N}$ и в разложении (5.9) все коэффициенты c_k с номерами $k > n$ равны нулю, а $c_n \neq 0$, то ∞ является полюсом порядка n. Такая функция является многочленом.

Если же в (5.9) бесконечно много коэффициентов c_k отличны от нуля, то ∞ является существуенно особой для f. Такие функции называются *целыми трансцендентными*. Примерами могут служить $\exp z$, $\sin z$, $\cos z$.

Функция называется *мероморфной* в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, если она не имеет в этой области других особых точек, кроме изолированных полюсов. Простейший пример мероморфной функции — это $(z - z_0)^{-n}$, у которой точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является полюсом порядка n.

Теорема 5.10. *Любая функция, мероморфная в расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, является рациональной, т.е. имеет вид*

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

где P и Q — многочлены.

Доказательство. Наша функция имеет лишь конечное число полюсов, так как каждый из них является изолированным. Пусть z_k — конечный полюс порядка n_k, $k = 1, \ldots, p$, для f. Возможно еще ∞

является полюсом порядка n. Вычтем из f главные части рядов Лорана, соответствующих этим особенностям,

$$f(z) - \sum_{k=1}^{p} \sum_{m=1}^{n_k} \frac{c_{mk}}{(z - z_k)^{n_k}} - \sum_{m=1}^{n} c_k z^k.$$

Для полученной разности все точки z_k, $k = 1, \ldots, p$, и ∞ являются устранимыми особенностями. Других особенностей она не имеет. По теореме Лиувилля эта разность есть тождественная постоянная. $\square$

Глава 6

Теория вычетов

6.1. Вычеты и основная теорема о вычетах

6.1.1. Вычеты

Пусть функция f аналитична в некоторой проколотой окрестности $B^\circ(z_0,\varepsilon)$ изолированной особой точки $z_0 \in \mathbb{C}$.

Определение 6.1. *Вычетом функции f* в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} f(z)\,dz, \quad 0 < r < \varepsilon. \tag{6.1}$$

Используя теорему 3.4, нетрудно показать, что значение интеграла в (6.1) не зависит от $r \in (0,\varepsilon)$.

Действительно, если $0 < r' < r < \varepsilon$, то, применяя к двусвязной области $B(z_0,r)\setminus\overline{B}(z_0,r')$ теорему 3.4, получаем равенство

$$\oint\limits_{(C_r(z_0))^+} f(z)\,dz + \oint\limits_{(C_{r'}(z_0))^-} f(z)\,dz = 0.$$

или

$$\oint\limits_{(C_r(z_0))^+} f(z)\,dz = \oint\limits_{(C_{r'}(z_0))^+} f(z)\,dz.$$

В частности, это рассуждение показывает, что для вычисления вычета в (6.1) можно брать достаточно малое $r > 0$.

6.1.2. Формулы для вычисления вычетов

Поскольку представлением аналитической функции в изолированной особой точке является ряд Лорана, то естественно использовать этот ряд для вычисления вычета. Равенство (5.2) в теореме Лорана при $k = 0$ показывает, это действительно возможно.

Теорема 6.1. *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка функции f, то вычет $\operatorname*{Res}_{z_0} f$ равен коэффициенту c_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении Лорана для f в этой точке.*

Рассмотрим несколько примеров на вычисление вычетов.

Пример 6.1. Рассмотрим функцию

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k}, \quad z \neq 0.$$

Это разложение сходится в проколотой плоскости $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и потому является ее рядом Лорана для точки $z_0 = 0$. В силу теоремы 6.1 $\operatorname*{Res}_{0} \exp(1/z) = 1$.

Пример 6.2. Если особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ является правильной, то вычет в этой точке равен нулю, так как в этом случае по следствию 5.1 ряд Лорана вырождается в ряд Тейлора — все коэффициенты Лорана с отрицательными индексами равны нулю.

В связи с последним примером отметим, что из того, что вычет в особой точке равен нулю, не следует, что эта особенность является устранимой. Другие лорановские коэффициенты с отрицательными индексами могут быть равны нулю. Пример $f(z) = z^{-2}$ показывает это.

Пример 6.3. Если z_0 — простой полюс для f (кратности 1), то

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0).$$

В самом деле, ряд Лорана в таком случае имеет вид

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \quad \text{или} \quad f(z)(z - z_0) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $z \to z_0$ получим требуемое.

Следующая теорема дает способ вычисления вычета в полюсе любого порядка и обобщает результат последнего примера.

Теорема 6.2. *Если $z_0 \in \mathbb{C}$ — полюс кратности n, то*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] \,.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 5.4 — умножим обе части разложения Лорана в полюсе (5.7) на $(z - z_0)^n$, получим равенство

$$(z - z_0)^n f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+n}.$$

Продифференцируем это равенство $(n-1)$-раз:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = (n-1)! c_{-1} + \sum_{k=-n+1}^{\infty} c_k A_k (z - z_0)^{k+n},$$

где $A_k = (n + k)(n + k - 1) \ldots (k + 1)$. Осталось перейти к пределу при $z \to z_0$. $\square$

6.1.3. Теорема Коши о вычетах

Своим появлением вычеты обязаны Коши. Одним из основных назначений вычетов является возможность вычислять интегралы по кривым. Как реализуется эта возможность — показывает следующая важная теорема.

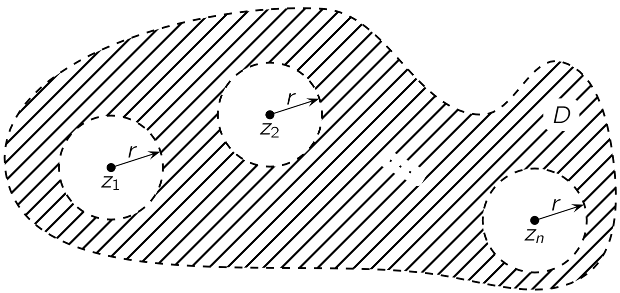


Рис. 6.1

Теорема 6.3 (Коши, о вычетах). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в D, кроме конечного множества $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset D$ изолированных особых точек, и непрерывна в $\overline{D} \setminus S$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f. \tag{6.2}$$

Доказательство. Выберем $r > 0$ так, чтобы круги $\overline{B}(z_k, r) \subset D$, $k = 1, 2, \ldots, n$, попарно не пересекались и содержались в D. Применим к многосвязной области

$$D_r = D \setminus \bigcup_{k=1}^{m} \overline{B(z_k, r)}$$

теорему Коши, получим равенство

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D_r} f(z)\,dz = \oint\limits_{\partial D} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_k)} f(z)\,dz.$$

В силу теоремы 6.1 отсюда следует (6.2). $\square$

6.1.4. Вычет в бесконечно удаленной точке

Пусть функция f аналитична во внешности круга $\overline{B}(0,r)$ достаточно большого радиуса и $z_0 = \infty$ является изолированной особой точкой для f.

Определение 6.2. *Вычетом функции f* в изолированной особой точке ∞ называется число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C_r(0))^-} f(z)\,dz, \quad r > R. \tag{6.3}$$

Как и в случае конечной изолированной особой точки, интеграл в (6.3) не зависит от r (его надо брать достаточно большим).

Теорема 6.4. *Если ∞ — изолированная особая точка функции f, то вычет $\operatorname*{Res}_{\infty} f$ равен $-c_{-1}$ — коэффициенту при z^{-1} в разложении Лорана (5.8) для f в бесконечно удаленной точке, взятому с противоположным знаком.*

Доказательство. Достаточно проинтегрировать ряд (5.8) по отрицательно ориентированной окружности $C_R(0)$ и применить лемму 3.2. □

Пример 6.4. Если ∞ является правильной особой точкой (см. пункт 5.2.4), то ряд Лорана (5.8) вырождается в ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{0} c_k z^k,$$

поэтому теорема 6.2 дает нам $\operatorname*{Res}_{\infty} f = -c_{-1}$.

Обратим внимание на отличие результата последнего примера 6.4 от случая конечной особенности (ср. с примером 6.2).

Теорема 6.5. *Если ∞ — полюс кратности n, то*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z\to\infty} \left[z^{n+2} f^{(n+1)}(z)\right].$$

Доказательство. Для бесконечно удаленной точки используем запишем разложение Лорана (5.8)

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{n} c_k z^k,$$

которое продифференцируем $n+1$ раз, а затем умножим на z^{n+2}

$$z^{n+2} f^{(n+1)}(z) = (-1)^{n+1}(n+1)!c_{-1} + \sum_{k=-\infty}^{-2} c_k A_k z^{k+1},$$

где $A_k = k(k-1)\dots(k-n)$. Отсюда при $z \to \infty$ получаем требуемое. $\square$

6.1.5. Теорема о полной сумме вычетов

Теорема 6.6. *Пусть функция f аналитична всюду в $\mathbb{C}$, кроме конечного множества $S = \{z_1, \ldots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ изолированных особых точек. Тогда справедливо равенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f + \operatorname*{Res}_{\infty} f = 0.$$

Доказательство. Для достаточно большого $r > 0$ все точки из S содержатся в круге $B(0, r)$. Поэтому в силу теоремы 6.3 справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z_k} f = \oint\limits_{C_r^+(0)} f(z)\, dz,$$

правая часть которого равна $-\operatorname*{Res}_{\infty} f$ (см. определение 6.1). $\square$

6.2. Теорема о логарифмическом вычете и ее приложения

6.2.1. Логарифмический вычет

Пусть $z_0 \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка аналитической функции f, которая аналитична в некоторой проколотой окрестности $B^\circ(z_0, \varepsilon)$ и отлична там от нуля.

Определение 6.3. *Логарифмическим вычетом* функции f в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется вычет ее логарифмической производной f'/f в этой точке.

Другими словами, логарифмический вычет — это

$$\operatorname*{Res}_{z_0} \frac{f'}{f} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C(z_0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Рассмотрим примеры на вычисление логарифмического вычета.

Пример 6.5. Пусть функция аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, которая является для нее нулем кратности n. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_0}(f'/f) = n. \tag{6.4}$$

Р е ш е н и е. Действительно, функция f представима в виде $f(z) = (z - z_0)^{n_k} g(z)$, где g аналитична в окрестности z_0 и $g(z) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда

$$f'(z) = n(z - z_0)^{n-1} g(z) + (z - z_0)^n g'(z),$$

откуда

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Так как второе слагаемое справа аналитично в некоторой окрестности точки z_0, то равенство (6.4) вытекает из случая $n = -1$ леммы 3.2. $\square$

Пример 6.6. Пусть функция аналитична в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$, которая является для нее полюсом кратности p. Тогда

$$\operatorname*{Res}_{z_0}(f'/f) = -p \tag{6.5}$$

Решение. Это можно доказать повторяя рассуждение из примера 6.5. Однако, можно просто сослаться на этот пример, так как если $g = 1/f$, $f'/f = -g'/g$ и z_0 является нулем кратности p для g. □

Следующая теорема является основной в этом параграфе. В ней используются следующие обозначения:

$N(f, D)$ — число нулей функции f в области $D \subset \mathbb{C}$,

$P(f, D)$ — число полюсов функции f в области $D \subset \mathbb{C}$

с учетом их кратностей.

Теорема 6.7 (о логарифмическом вычете). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная многосвязная область, функция f аналитична в D, кроме конечного множества полюсов S, непрерывна вместе со своей производной в $\overline{D} \setminus S$ и $f(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N(f, D) - P(f, D), \tag{6.6}$$

где Z и P — числа нулей и полюсов f в D с учетом их кратности.

Доказательство. Пусть f имеет нули кратности n_k в точках $z_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots, N$, и полюсы кратности m_k в точках $\zeta_k \in D$, $k = 1, 2, \ldots, P$. Тогда функция f'/f аналитична в D, кроме указанных нулей и полюсов функции f. Применив теорему о вычетах, получаем равенство

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{z_k} \frac{f'}{f} + \sum_{k=1}^{P} \operatorname*{Res}_{\zeta_k} \frac{f'}{f}. \tag{6.7}$$

Каждое слагаемое справа вычисляется по формуле (6.4) для нулей и по формуле (6.4) для полюсов. □

6.2.2. Принцип аргумента

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{C}$ — ориентированная жорданова кривая или контур, на которой задана непрерывная функция $f : \Gamma \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, не обращающаяся в нуль.

Если $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ — параметризация Γ, сохраняющая ориентацию, то найдется такая непрерывная функция $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, что

$$f(\gamma(t)) = |f(\gamma(t))| e^{i\varphi(t)}, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

Эта функция определяется не единственным образом, однако, любые две такие функции отличаются на слагаемое, кратное 2π. Поэтому разность $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ не зависит от выбора функции φ.

Определение 6.4. Разность $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ называется *приращением аргумента функции вдоль кривой (контура)* Γ и обозначается $\Delta_\Gamma \arg f$.

Легко убедиться в том, что такое определение не зависит от выбора параметризации.

Теорема 6.8 (принцип аргумента). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная односвязная область с кусочно-гладкой границей, функция f удовлетворяет условиям теоремы о логарифмическом вычете и имеет конечное число полюсов в D. Тогда*

$$N(f, D) - P(f, D) = \Delta_{\partial D} \arg f. \tag{6.8}$$

Доказательство. Пусть $\gamma : [0, 2\pi) \to \partial D$ — положительная параметризация границы ∂D. Тогда в силу равенства (3.5)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \gamma'(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Ln} f \circ \gamma)'\, dt = \operatorname{Ln} f(\gamma(2\pi)) - \operatorname{Ln} f(\gamma(0)) =$$

$$= [\ln |f(\gamma(2\pi))| - \ln |f(\gamma(0))|] + i[\operatorname{Arg} f(\gamma(2\pi)) - \operatorname{Arg} f(\gamma(0))].$$

Действительная часть выражения справа равна нулю, а мнимая есть $\Delta_{\partial D} \arg f$. Равенство (6.8) вытекает теперь из (6.6). $\square$

6.2.3. Теорема Руше

Теорема 6.9 (Руше). *Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — стандартная односвязная область, функции f и g аналитичны в D и непрерывны в $\overline{D}$ вместе со своими производными, причем*

$$|f(\zeta)| > |g(\zeta)| \quad \text{при} \quad \zeta \in \partial D.$$

Тогда f и $f+g$ имеют одинаковое число нулей в D.

Доказательство. Для $\alpha \in [0,1]$ рассмотрим семейство функций

$$h_\alpha(z) = f(z) + \alpha g(z).$$

Ясно, что $h_\alpha(z) \neq 0$ при всех $\alpha \in [0,1]$ и $z \in \partial D$, так как

$$|f(z) + \alpha g(z)| \geqslant |f(z)| - \alpha|g(z)| > (1-\alpha)|f(z)|$$

и $f(z) \neq 0$ при $z \in \partial D$.

Применим к h_α теорему о логарифмическом вычете, получая

$$\oint\limits_{\partial D} \frac{f'(z) + \alpha g'(z)}{f(z) + \alpha g(z)}\, dz = N(\alpha), \tag{6.9}$$

где $N(\alpha)$ — количество нулей h_α в D.

Левая часть (6.9) непрерывна по $\alpha \in [0,1]$ (так как подынтегральная функция непрерывно зависит от α). Функция $N(\alpha)$ также непрерывна по α. Но $N(\alpha)$ принимает только целые значения, поэтому она постоянна и $N(0) = N(1)$. Значит число нулей в D для $f+g$ и g одинаково. □

Смысл теоремы Руше в том, что можно вычислять количество нулей функции, упрощая выражение для нее отбрасывнием ее «небольших частей».

Для иллюстрации теоремы Руше докажем с ее помощью основную теорему алгебры.

Теорема 6.10. *Каждый алгебраический многочлен*

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad z \in \mathbb{C},$$

степени n имеет ровно n комплексных нулей (с учетом их кратности).

Доказательство. Запишем наш полином в виде $P_n = f + g$, где

$$f(z) = a_0 z^n, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k.$$

Так как P_n имеет полюс порядка n в бесконечно удаленной точке, то все его корни (если таковые имеются) лежат в круге $B(0, R)$ достаточно большого радиуса R. Кроме того, $f(z)/g(z) \to \infty$ при $z \to \infty$ и можно также считать, что $|f(z)| > |g(z)|$ при $|z| = R$. По теореме Руше P_n имеет в круге $B(0, R)$ столько же нулей, сколько и $a_0 z^n$ — ровно n. $\square$

6.2.4. Принцип сохранения области

Напомним, что область $D \subset \mathbb{C}$ — открытое связное множество.

Теорема 6.11 (принцип сохранения области). *Пусть функция f аналитична в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ и отлична от тождественной постоянной. Тогда образ $f(D)$ является областью.*

Доказательство. Связность образа $f(D)$ является общетопологическим фактом (аналитическая функция непрерывна). Существенно комплексным фактом является открытость образа.

Докажем, что $f(D)$ — открытое множество. Пусть $z_0 \in D$ и $w_0 = f(z_0) \in f(D)$. Докажем, что некоторая окрестность точки w_0 также содержится в $f(D)$.

Сначала считаем $z_0 \neq \infty$ и $w_0 \neq \infty$. Тогда найдется круг $\overline{B}(z_0, \rho) \subset D$, в котором $f(z) \neq w_0$. Это следует из теоремы 4.6.

Обозначим

$$r = \min\{|f(z) - w_0| : \ z \in C_\rho(z_0)\}.$$

Тогда $r > 0$, так как непрерывная функция $z \mapsto |f(z) - w_0|$ принимает свое минимальное значение на компакте $C_\rho(z_0)$.

Покажем, что $B(w_0, r) \subset f(D)$. Если $w \in B(w_0, r)$ — произвольная точка, то

$$|w - w_0| < r < |f(z) - w_0|.$$

По теореме Руше функция

$$f(z) - w = [f(z) - w_0] - [w - w_0]$$

имеет в круге $B(z_0, \rho)$ столько нулей сколько и $f(z) - w_0$ (а она их имеет). Итак, $f(z) = w$ в некоторой точке $z \in B(z_0, \rho)$, т.е. $w \in f(D)$. А так как w — произвольная точка $B(w_0, r)$, то $B(w_0, r) \subset f(D)$ и $f(D)$ открыто.

Если $z_0 \neq \infty$, $w = \infty$, то функция f имеет полюс в точке z_0 и $g = 1/f$ имеет в z_0 нуль. По доказанному $g(z_0) = 0$ — внутренняя точка ее области значений. Если $z_0 = \infty$, $w = \infty$, то точно так же рассуждаем с функцией $g(z) = 1/f(1/z)$. $\square$

Глава 7

Дополнительные главы комплексного анализа

7.1. Аналитическое продолжение

7.1.1. Элемент аналитической функции и его продолжение

Будем говорить, что функция f_0, аналитическая в области $D_0 \subset \widehat{\mathbb{C}}$, допускает *аналитическое продолжение* в область $D_1 \subset \widehat{\mathbb{C}}$, имеющую непустое связное пересечение с D_0, если существует функция f_1, аналитическая в области D_1, для которой

$$f_0(z) = f_1(z) \quad \text{при} \quad z \in D_0 \cap D_1.$$

Простейшим примером служит аналитическое продолжение аналитической функции в устранимую особую точку с сохранением свойства непрерывности. Это продолжение задается рядом Тейлора с центром в этой точке.

Пример 7.1. Рассмотрим гамма-функцию Эйлера, задаваемую несобственным интегралом

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1}\, dt. \tag{7.1}$$

Аналогично тому, как это делалось в курсе математического анализа, нетрудно установить, что интеграл (7.1) сходится при $\operatorname{Re} z > 0$.

Построим аналитическое продолжение гамма-функции с помощью функционального соотношения $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, которое при $\operatorname{Re} z > 0$ получается интегрированием по частям.

Используем это соотношение для определения гамма-функции в более широкой области, чем исходная. Такой подход кажется естественным, так как в этом соотношении заложено ее важнейшее свойство — давать определение факториала для нецелых показателей (на самом деле, роль гамма-функции Эйлера в математике значительно шире).

Именно, положим

$$\Gamma(z) := \frac{\Gamma(z+1)}{z} \quad \text{при} \quad \operatorname{Re} z > -1,\ z \neq 0.$$

Повторяя эту процедуру, мы можем продолжить гамма-функцию в левую полуплоскость, за исключением точек $z = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, в которых она будет иметь изолированные полюсы.

Пример 7.2. Рассмотрим задачу аналитического продолжения логарифма, начиная с его разложения Тейлора в круге $D_0 = B(1,1)$

$$f_0(z) = \ln z = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(z-1)^k \quad z \in B(1,1).$$

Из теоремы Вейерштрасса вытекает, что при $z \in B(1,1)$

$$f_0'(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(z-1)^{n-1} = \frac{1}{1-(z-1)} = \frac{1}{z}.$$

Отсюда по формуле Ньютона–Лейбница

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in B(1,1), \tag{7.2}$$

где интегрирование ведется, например, по отрезку $[1,z]$.

Это равенство может служит для аналитического продложения логирифмической функции. Именно, положим

$$f_1(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\zeta}, \quad z \in D_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

где интеграл снова берется по отрезку $[1,z]$.

Вместо разреза по отрицательной полуоси $(-\infty, 0]$ можно было бы использовать другой, например, по любому лучу, исходящему из начала координат. Тогда мы получим аналитическое продолжение логарифма в другую область. Объединение таких областей даст проколотую плоскость $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Отметим еще, что интеграл в (7.2) имеет смысл для любого пути, соединяющего 1 и $z \in \mathbb{C}$ и не проходящего через точку 0. Однако, его значение уже будет зависеть от пути (сколько оборотов будет сделано вокруг начала координат).

Дадим теперь более общее понятие аналитического продолжения. В отличие от него аналитическое продолжение, введенное в начале параграфа будем называть *непосредственным*.

Определение 7.1. Пара $\{D, f\}$, где $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — выпуклая область, $f \in H(D)$ называется *элементом аналитической функции*. Два элемента $\{D_0, f_0\}$ и $\{D_1, f_1\}$ называются равными, если $D_0 = D_1$ и $f_0(z) \equiv f_1(z)$ в D_0.

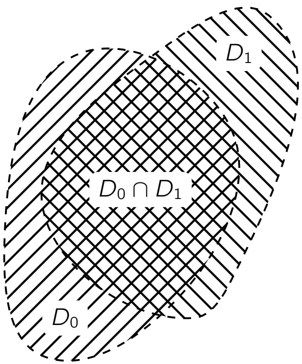


Рис. 7.1

Определение 7.2. Элемент $\{D_1, f_1\}$ называется (непосредственным) *аналитическим продолжением элемента* $\{D_0, f_0\}$, если

1) $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$,
2) $f_0(z) = f_1(z)$, $z \in D_0 \cap D_1$.

Если в этом случае $D_0 \subset D_1$, то будем говорить также, что элемент $\{D_0, f_0\}$ *подчинен* элементу $\{D_1, f_1\}$.

Определение 7.3. Конечный набор элементов $\{D_k, f_k\}_{k=0}^{n}$ называется *цепью*, если каждый элемент $\{D_k, f_k\}$ является аналитическим продолжением предыдущего элемента $\{D_{k-1}, f_{k-1}\}$.

В этом случае также говорят, что $\{D_n, f_n\}$ является аналитическим продолжением $\{D_0, f_0\}$ по соединяющей цепи (см. рис. 7.2).

Рассмотрим множество $\mathcal{E}$ всех элементов $\{D, f\}$ и введем в нем отношение эквивалентности: два элемента эквивалентны, если один из них является аналитическим продолжением другого по некоторой цепи (проверьте самостоятельно, что это — действительно отношение эквивалентности).

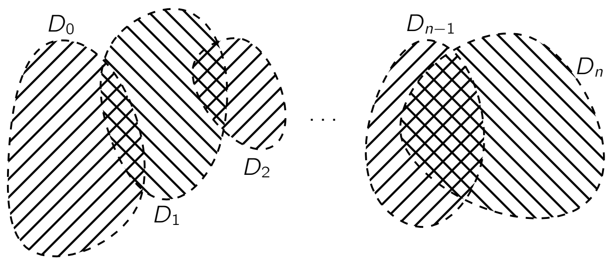


Рис. 7.2

Определение 7.4. Каждый фактор-класс $\mathcal{E}$ по указанному отношению эквивалентности называется *полной аналитической функцией*.

Областью существования полной аналитической функции называется объединение областей всех элементов, входящих в этот класс. Будем обозначать ее $\operatorname{Dom} F$. Область существования полной аналитической функции является областью (докажите это самостоятельно).

Каждая точка $z \in \operatorname{Dom} F$ может входить в различные области элементов класса и соответствующие функции в этой точке не обязаны иметь одинаковые значения, то есть полная аналитическая функция, вообще говоря, многозначна.

Желая избежать многозначности, Риман предложил некоторое обобщение понятия области определения полной аналитической функции — так называемая риманова поверхность.

Существо дела состоит в том, что точку $z \in \operatorname{Dom} F$, принадлежащую областям двух элементов $\{D_0, f_0\}$ и $\{D_1, f_1\}$ полной аналитической функции, мы рассматриваем как одну и ту же, тогда и только тогда, когда эти элементы являются непосредственными аналитическими продолжениями друг друга.

Может случиться, что пересечение областей D_0 и D_1 непусто, однако элементы $\{D_0, f_0\}$ и $\{D_1, f_1\}$ являются аналитическими продолжениями друг друга по некоторой цепи, содержащей некоторые промежуточные элементы. В таком случае мы не отождествляем точки из $D_0 \cap D_1$.

Чтобы придать наглядность этому процессу предположим, что для каждого D заготовлена «модель D» (кусок плоскости). Процесс объединения областей представляем себе как склеивание (отождествление) тех частей, точки которых отождествляются. В результате этого процесса «склеивания» мы получаем многослойную (вообще говоря) поверхность, расположенную над областью $\operatorname{Dom} F$.

Элементы аналитической функции вида

$$\left(B(z_0, r),\ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\right).$$

называются *каноническими*.

Нетрудно убедиться (сделайте это самостоятельно), что любой элемент $\{D, f\}$ аналитической функции является результатом аналитического продолжения по цепи любого канонического элемента, подчиненного ему. Поэтому при построении полной аналитической функции в качестве исходного класса можно брать не все множество элементов данного класса, а лишь его подмножество, состоящее из канонических элементов.

7.1.2. Принцип симметрии Римана-Шварца

Рассмотрим некоторые специальные достаточные условия аналитической продолжаемости функции.

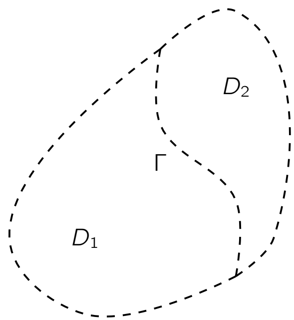


Рис. 7.3

Начнем с доказательства вспомогательного утверждения, показывающего, грубо говоря, что функция, аналитическая в окрестности жордановой кривой Γ_0 и непрерывная на этой кривой, является аналитической и в точках Γ_0.

Пусть $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}$ — две области, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, имеющие общий участок границы — спрямляемую жорданову кривую Γ, Γ_0 — та же кривая, но без концов. Положим $D = D_1 \cup D_2 \cup \Gamma_0$.

Лемма 7.1. *Пусть функции f_k аналитичны в D_k и непрерывны в $D_k \cup \Gamma_0$ соответственно ($k = 1, 2$), причем $f_1(z) = f_2(z)$ при $z \in \Gamma_0$. Тогда функция*

$$\varphi(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \Gamma_0, \\ f_2(z), & z \in D_2, \end{cases}$$

аналитична в D.

Доказательство. Достаточно доказать аналитичность в точках $z_0 \in \Gamma_0$. Пусть $B(z_0, \delta) \subset D$, тогда функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z_0)} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z}, \quad z \in B(z_0, \delta)$$

аналитична в круге $B(z_0, \delta)$.

Обозначим $\widetilde{D}_k = D_k \cap B(z_0, \delta)$, $k = 1, 2$, и в этих областях применим интегральную формулу Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial \widetilde{D}_k} \frac{f_k(\xi) d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f_k(z), & z \in \widetilde{D}_k, \\ 0, & z \notin \widetilde{D}_k. \end{cases}$$

Складывая эти равенства, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\delta(z_0)} \frac{\varphi(\xi) d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} f_1(z), & z \in \widetilde{D}_1, \\ f_2(z), & z \in \widetilde{D}_2. \end{cases}$$

Поэтому $\Phi \equiv \varphi$ в $\widetilde{D}_1 \cup \widetilde{D}_2$, а на Γ_0 это следует из непрерывности. □

Теорема 7.1 (принцип симметрии Римана–Шварца). *Пусть граница области $D \subset \mathbb{C}$ содержит открытую дугу γ_0 $\widehat{\mathbb{C}}$-окружности $\gamma \subset \partial D$, функция f аналитична в D, непрерывна в $D \cup \gamma_0$ и образ $\Gamma_0 = f(\gamma_0)$ является открытой дугой некоторой $\mathbb{C}$-окружности.*

Тогда функцию f можно аналитически продолжить из области D через дугу γ_0 в область D^*, симметричную D относительно γ_0 по правилу

$$f(z) = f^*(z^*), \quad z \in D^*. \tag{7.3}$$

(В формулировке теоремы открытая дуга — дуга без концов, а $*$ означает отображения симметрии относительно γ_0 и Γ_0 соответственно.)

Доказательство. Применяя подходящие дробно-линейные отображения сводим доказательство к случаю, когда Γ_0 и γ_0 — интервалы на вещественной прямой. В этом случае $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

Если $z_0 \in D$, то существует такой круг $B(z_0, r)$, $r > 0$, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in B(z_0, r).$$

Следовательно, при $z \in B(\overline{z}_0, r)$ справедливо равенство

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c}_n (z - \overline{z}_0)^n.$$

В силу теоремы 4.5 продолженная функция аналитична в точках D^*.

В силу непрерывности функции f в $D \cup \gamma_0$ и того, что f на γ_0 имеет действительные значения при $z \to x_0 \in \gamma_0$ (в D^*)

$$\lim_{z \to x_0} f^*(z) = \lim_{\overline{z} \to x_0} \overline{f(\overline{z})} = \overline{f(x_0)} = f(x_0).$$

Итак, выполнены условия леммы 7.1, применение которой доказывает аналитичность продолженной функции и в точках γ_0. □

Смысл термина «принцип симметрии» объясняет формула (7.3) — функция, задаваемая этим равенством переводит точки, симметричные относительно γ_0, в точки, симметричные относительно $\Gamma_0 = f(\gamma_0)$.

Важный и интересный пример применения принципа симметрии мы рассмотрим немного позже в п. 7.4.2, когда изучим новую функцию — эллиптический синус.

7.2. Однолистные функции

7.2.1. Теорема о числе прообразов

Пусть функция f аналитична в точке z_0, $w_0 = f(z_0)$ и $n \in \mathbb{N}$. Будем говорить, что z_0 является *n-кратной w_0-точкой функции* f, если $f^{(k)}(z_0) = 0$ при $k = 1, \dots, n-1$ и $f^{(n)}(z_0) \neq 0$.

Теорема 7.2 (о кратности точки). *Если z_0 является n-кратной $f(z_0)$-точкой функции f, $n \in \mathbb{N}$, то существуют такие круги $B(z_0, r)$, $r > 0$, и $B(f(z_0), \rho)$, $\rho > 0$, что каждая точка $w \in B(f(z_0), \rho)$ имеет ровно n прообразов в $B(z_0, r)$ (различных, если $w \neq f(z_0)$).*

Доказательство. По условию функция f имеет нуль кратности n в точке z_0. Существует замкнутый круг $\overline{B}(z_0, r)$, в котором функции $f - f(z_0)$ и f' нет других нулей, кроме точки z_0. Тогда

$$\rho = \inf\{|f(z) - f(z_0)| : z \in C_r(z_0)\} > 0.$$

Возмем $w \in B(f(z_0), \rho)$ и рассмотрим функцию

$$g(z) = f(z) - w = [f(z) - f(z_0)] + [f(z_0) - w].$$

Так как $|f(z) - f(z_0)| \geqslant \rho > |f(z_0) - w|$ при $z \in C_r(z_0)$, то по теореме Руше функция $g = f - w$ имеет в круге $B(z_0, r)$ столько же нулей (с учетом их кратности), сколько и $f - f(z_0)$, т.е. n. Все эти нули простые, т.к. производная $g' = f'$ не имеет нулей, отличных от z_0. $\square$

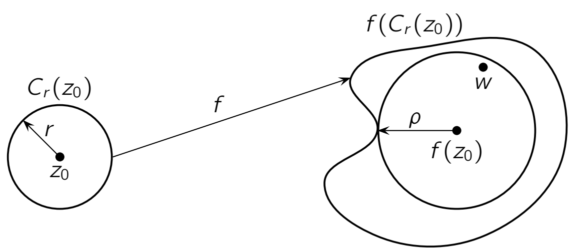


Рис. 7.4

7.2.2. Критерий локальной однолистности

Напомним, что функция f называется однолистной в области $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, если она инъективна, т.е.

$$f(z_1) \neq f(z_2) \quad \text{для любых точек } z_1 \neq z_2 \text{ из } D.$$

Следующая лемма дает необходимое условие локальной однолистности.

Лемма 7.2. *Если функция f аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то f однолистна в некоторой окрестности z_0 и обратная функция f^{-1} однолистна и аналитична в некоторой окрестности точки $f(z_0)$.*

Доказательство. Однолистность является прямым следствием теоремы об обратной функции из курса математического анализа. Пусть f однолистна в круге $B(z_0, r)$. Отметим, что по теореме 6.11 образ $f(B(z_0, r))$ является открытым множеством.

Для существования производной у обратной функции в любой точке $w \in f(B(z_0, r))$ возьмем $w_1 \in f(B(z_0, r))$, $w \neq w_1$. Тогда найдутся такие $z, z_1 \in B(z_0, r)$, что $w = f(z)$, $w_1 = f(z_1)$, при этом $z_1 \neq z$. Кроме того, если $w_1 \to w$, то $z_1 \to z$ (что легко вывести из леммы Больцано–Вейрштрасса — сделайте это самостоятельно). Поэтому

$$\lim_{w_1 \to w} \frac{f^{-1}(w_1) - f^{-1}(w)}{w_1 - w} = \lim_{z_1 \to z} \frac{1}{\frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}} = \frac{1}{f'(z)}. \qquad \square$$

Пример функции $f(z) = e^z$ показывает, что это утверждение не носит глобального характера. Ее производная всюду в $\mathbb{C}$ отлична от нуля, однако e^z не является глобально однолистной.

Для глобальной однолистности условие отсутствия нулей у производной является необходимым.

Теорема 7.3. *Если функция f аналитична и однолистна в области $D \subset \mathbb{C}$, то $f'(z) \neq 0$ в D.*

Доказательство. Предположим, что $f'(z_0) = 0$ в некоторой точке $z_0 \in D$. Тогда для некоторого $n \geqslant 2$

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad \text{причем} \quad c_n \neq 0.$$

В силу теоремы о единственности существует такое $r_1 > 0$, что

$$f'(z) \neq 0, \quad z \in \overline{B}^{\circ}(z_0, r_1).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(z) = f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k-n}$$

и отметим, что второй множитель справа отличен от нуля в некотором круге $\overline{B}(z_0, r_2)$. Это означает, что z_0 является корнем кратности n для функции g. Положим

$$r = \frac{1}{2}\min\{r_1, r_2\} > 0$$

и

$$2\alpha = \inf\{|g(z)| : z \in C_r(z_0)\} > 0.$$

Тогда $|g(z)| \geqslant 2\alpha$ при $z \in C_r(z_0)$ и к функциям g и $h(z) \equiv \alpha$ можно применить теорему Руше, согласно которой g и $g+h$ имеют одинаковое число нулей в $B(z_0, r)$. Функция g имеет там n-кратный корень z_0, а все корни $g+h = g+\alpha$ просты (ее производная отлична от нуля при $z \neq z_0$). Следовательно, и $f(z) = f(z_0)+\alpha$ в $n \geqslant 2$ точках, что невозможно в силу однолистности f. □

Будем говорить, что функция f *однолистна в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если она однолистна в некоторой окрестности этой точки.

Теорема 7.4 (критерий локальной однолистности). *Функция f, аналитическая в точке $z_0 \in \mathbb{C}$, будет однолистной в этой точке тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 7.3. Достаточность является следствием теоремы 7.2, согласно которой каждое значение в точках из этой окрестности принимается ровно один раз, т.к. z_0 является 1-кратной $f(z_0)$-точкой для f. □

Рассмотрим теперь понятие однолистности в бесконечно удаленной точке. Естественно считать, что функция однолистна в ∞, если функция $\zeta \to f(1/\zeta)$ однолистна в точке 0. Если f аналитична в точке ∞, то разложение функции $\zeta \to f(1/\zeta)$ в ряд Тейлора в нуле имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^k,$$

и ее однолистность в нуле по теореме 7.4 равносильна тому, что $a_1 \neq 0$. Это дает разложение

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{-k},$$

функции f в ∞ и мы приходим к следующему критерию однолистности на бесконечности.

Теорема 7.5. *Функция f, аналитическая в точке $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$, будет однолистной в этой точке тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Res}_{\infty} f \neq 0$.

7.2.3. Особые точки однолистных функций

Выясним теперь, какими особыми точками могут обладать однолистные функции. Оказывается они не могут быть произвольными.

Теорема 7.6 (об особенностях однолистных функций). *Пусть $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — область, $S \subset D$ — конечное множество и функция f аналитична и однолистна в $D \setminus S$.*

Тогда все точки из S являются устранимыми для f, кроме, быть может, одной, которая может быть только полюсом 1-го порядка.

Доказательство. Пусть $z_0 \in S$, $z_0 \neq \infty$. Выберем $r > 0$ настолько малым, чтобы $B(z_0, r) \subset D$ и пусть $w_0 \notin \overline{f(B^\circ(z_0, r))}$ (здесь черта обозначает замыкание множества).

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(z) = (f(z) - w_0)^{-1}$, которая аналитична и ограничена в $B(z_0, r)$, поэтому z_0 является устранимой особенностью для g. Положим $g(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} g(z)$ и доопределим f в точке z_0, полагая

$$f(z_0) = \begin{cases} w_0 + 1/g(z_0), & \text{если } g(z_0) \neq 0, \\ \infty, & \text{если } g(z_0) = 0. \end{cases}$$

При таком определении f локально ограничена в каждой точке $z_0 \in S$, где $g(z_0) \neq 0$. Поэтому такие точки из S являются для f устранимыми. Если же $g(z_0) = 0$, то z_0 является полюсом для f, т.к. в этом случае $f(z) \to \infty$ при $z \to z_0$.

Доопределив таким образом f на S, покажем, что она однолистна в D.

В самом деле, если предположить, что для каких-то двух различных точек $z_1, z_2 \in D$ будет $f(z_1) = f(z_2)$, то

$$B(z_1, r) \cap B(z_2, r) \neq \varnothing, \quad B(z_k, r) \subset D, \quad k = 1, 2 \tag{7.4}$$

для достаточно малого $r > 0$, образы $f(B(z_k, r))$ этих кругов будут открыты по принципу сохранения области и точка $f(z_1) = f(z_2)$ будет внутренней для $f(B(z_1, r)) \cap f(B(z_2, r))$. Поэтому каждое значение из этого пересечения будет приниматься дважды, что противоречит однолистности функции f на $D \setminus S$. Однолистность f на D доказана.

В частности, полюс может быть только в одной точке z_0. Если порядок n этого полюса больше единицы, то функция $1/f$ имела бы нуль порядка $n \geqslant 2$ в z_0 и по теореме 7.2 в некоторой окрестности z_0 каждое значение принимала бы по крайней мере дважды в различных точках. Это же было бы верно и для f, что невозможно из-за ее однолистности. $\square$

7.2.4. Последовательности однолистных функций

Теорема 7.7 (о последовательности однолистных функций). *Пусть последовательность $\{f_n\}$ аналитических и однолистных функций сходится равномерно внутри $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ к функции f, отличной от тождественной постоянной.*

Тогда f аналитична и однолистна в D.

Доказательство. Если $f(z_1) = f(z_2) = w_0$, то возьмем $r > 0$ настолько малым, чтобы выполнялось условие (7.4) и в кругах $B(z_k, r)$ значение w_0 функция f больше не принимает. Пусть

$$\rho = \inf\{|f(z) - w_0| : z \in \Gamma := C_r(z_1) \cup C_r(z_2)\} > 0$$

$\Gamma \subset D$ — компакт, поэтому в силу равномерной сходимости на Γ существует такое n, что $|f_n(z) - f(z)| < \rho \leqslant |f(z) - w_0|$ для всех $z \in \Gamma$. В каждом из кругов $B(z_1, r)$ и $B(z_2, r)$ применим теорему Руше, по которой функция

$$f_n - w_0 = [f_n - f] + [f - w_0]$$

имеет в каждом из этих кругов столько же нулей, что $f - w_0$. Итак f_n принимает значение w_0 в каждом из кругов $B(z_1, r)$ и $B(z_2, r)$, что противоречит однолистности f_n. □

7.3. Конформное отображение областей

7.3.1. Автоморфизмы основных областей

Мы уже встречались с термином «автоморфизм», когда рассматривали дробно-линейные отображения основных областей — расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, плоскости $\mathbb{C}$ и круга (2.12). Сейчас мы расширим это понятие и рассмотрим его более подробно.

Определение 7.5. Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область. Отображение $\varphi : D \to D$ называется *автоморфизмом области* G если

1) φ аналитична в D,
2) φ отображает D на D однолистно (взаимно однозначно).

Множество всех автоморфизмов области D обозначается $\operatorname{Aut} D$.

Это множество является группой относительно операции композициии и обратным элементом к автоморфизму φ является обратная функция φ^{-1}.

Действительно, если φ является автоморфизмом области D, то по теореме 7.3 ее производная отлична от нуля всюду в D. По лемме 7.2 обратная функция φ^{-1} аналитична в каждой точке из D и также однолистна. Следовательно, φ^{-1} является автоморфизмом области D.

Опишем группы автоморфизмов основных областей $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и U (единичного круга).

Теорема 7.8 (об автоморфизмах). *Любой автоморфизм каждой из областей $\widehat{\mathbb{C}}$, $\mathbb{C}$ и U является дробно-линейным отображением.*

Доказательство. Пусть φ — автоморфизм расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$ и $\varphi(z_0) = \infty$. Тогда по теореме 7.6 единственной особенностью функции φ является z_0 — полюс первого порядка, а по теореме 5.10

$$\varphi(z) = \begin{cases} \dfrac{a}{z - z_0} + b & \text{при} \quad z_0 \neq \infty, \\ az + b & \text{при} \quad z_0 = \infty, \end{cases}$$

при некоторых $a, b \in \mathbb{C}$.

Теперь рассмотрим любой автоморфизм φ плоскости $\mathbb{C}$. Доопределим его равенством $\varphi(\infty) = \infty$. Тогда оно непрерывно в бесконечности. Действительно, если предположить, что для некоторой последовательности $z_k \to \infty$ последовательность $w_k = \varphi(z_k)$ будет ограниченной, то, выделяя из нее сходящуюся подпоследовательность $w_{k_l} \to w_0 \in \mathbb{C}$, получили бы $z_{k_l} = \varphi^{-1}(w_{k_l}) \to \varphi^{-1}(w_0)$.

Отсюда следует, что функция $1/\varphi$ аналитична в проколотой окрестности бесконечности и имеет в точке ∞ устранимую особенность.

Такое же рассуждение верно и для обратного отображения. Итак, мы продолжили φ до автомрфизма расширенной плоскости $\widehat{\mathbb{C}}$, причем $\varphi(\infty) = \infty$. Как уже доказано, тогда оно имеет вид $\varphi(z) = az + b$.

Рассмотрим, наконец, любой автоморфизм φ единичного круга U. Пусть $\varphi(0) = w_0 \in U$. Рассмотрим дробно-линейный автоморфизм единичного круга

$$\psi(w) = \frac{w - w_0}{1 - \overline{w_0} w},$$

переводящий w_0 в 0. тогда композиция $f = \psi \circ \varphi$ является автоморфизмом круга U, переводящим 0 в 0. Т.к. $|f(z)| < 1$ при $|z| < 1$, то по лемме Шварца будет $|f(z)| \leqslant |z|$ в U.

Повторяя это рассуждение для обратного автоморфизма f^{-1}, получим неравенство $|f^{-1}(\zeta)| < |\zeta|$ для всех $\zeta \in U$. Беря здесь $\zeta = f(z)$, видим, что $|z| \leqslant |f(z)|$ при всех $z \in U$. Следовательно, $|z| = |f(z)|$ при $z \in U$. В силу случая равенства в лемме Шварца $f(z) = e^{i\theta} z$.

Таким образом, мы получаем, что

$$\varphi(z) = (\psi^{-1} \circ f)(z) = e^{i\theta} \psi^{-1}(z),$$

а это дробно-линейное отбражение. □

Вспоминая п.2.3.6, мы получаем следующие описания всех автоморфизмов основных областей:

$$\operatorname{Aut} \widehat{\mathbb{C}} = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{C},\ ad - bc \neq 0 \right\}.$$

$$\operatorname{Aut} \mathbb{C} = \{ z \mapsto az + b : a, b \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \},$$

$$\operatorname{Aut} U = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} : \theta \in \mathbb{R},\ z_0 \in U \right\}.$$

7.3.2. Теорема Римана

Рассмотрим теперь конформные отображения различных областей.

Определение 7.6. Две области $D, \Delta \subset \widehat{\mathbb{C}}$ называются *конформно эквивалентными*, если существует функция f, аналитическая и однолистная в D, со свойством

$$f(D) = \Delta.$$

Точно так же, как на с. 199 (после определения 7.5), доказывается, что обратное отображение f^{-1} к f в определении 7.6 также аналитично и однолистно отображает Δ на D. Так что области D и Δ в этом определении действительно равноправны.

Заметим, что расширенная комплексная плоскость $\widehat{\mathbb{C}}$ компактна, поэтому она не может быть гомеоморфна открытым областям $\mathbb{C}$ и U. Кроме того, $\mathbb{C}$ не является конформно эквивалентной единичному кругу, так как иначе существовала бы функция, аналитическая во всей плоскости $\mathbb{C}$, по модулю ограниченная единицей. Но такая функция обязана быть тождественной постоянной по теореме Лиувилля.

Рассмотрим следующий вопрос — какие области являются конформно эквиалентными единичному кругу U? Односвязность области, конечно, необходима для этого (докажите это самостоятельно).

Ответ на поставленный вопрос дает теорема Римана, доказываемая ниже: граница односвязной области должна иметь более одной точки. В связи с этим заметим, что у $\widehat{\mathbb{C}}$ и $\mathbb{C}$ границы — это соответственно $\varnothing$ и $\{\infty\}$.

Лемма 7.3. *Любую односвязную область $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, граница которой содержит более одной точки можно однолистно отобразить на область внутри единичного круга U, содержащую* 0.

Доказательство. Пусть сначала D имеет внешнюю точку z_0, т.е. внутренность дополнения $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ непуста.

Если $z_0 = \infty$, то D содержится в некотором круге $D \subset B(0, R)$ и отображение $z \mapsto z/R$ переведет D в единичный круг. Если $z_0 \neq \infty$, то сначала выполним отображение $z \mapsto (z - z_0)^{-1}$, которое переведет D в область, для которой ∞ является внешней точкой и приходим к первому случаю.

Совершая автоморфизм единичного круга из примера 2.2 добиваемся того, что 0 принадлежит образу нашей области.

Пусть теперь D не имеет внешних точек. Т.к. граница D содержит по крайней мере две точки a и b, то функция

$$z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$$

переведет D в область D_1, не содержащую 0 и ∞. Функция $z \to \sqrt[+]{z}$ (положительная ветвь квадратного корня) переведет D_1 в область D_2 с внешними точками (если $w \in D_2$, то $-w \notin \overline{D_2}$). Снова приходим к уже разобранному случаю. $\square$

Теорема 7.9 (Римана). *Любая односвязная область $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, граница которой содержит более одной точки, конформно эквивалентна единичному кругу U.*

Если $z_0 \in D$, то аналитическая и однолистная функция f со свойством $f(D) = U$, удовлетворяющая условиям $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$, определяется единственным образом.

Доказательство. В силу леммы 7.3 можно считать, что $D \subset U$ и $0 \in D$. Рассмотрим множество $\mathcal{A}$ аналитических и однолистных в области D функций, удовлетворяющих условиям

$$f(D) \subset U, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0.$$

Это множество не пусто, так как $\lambda z \in \mathcal{A}$ при $\lambda \in (0, 1]$.

Так как $B(0, r) \subset D$ при некотором $r > 0$, то по лемме Шварца $|f'(0)| \leqslant 1/r$ для каждой функции $f \in \mathcal{A}$, поэтому

$$1 \leqslant I_0 = \sup\{f'(0) : f \in \mathcal{A}\} < +\infty$$

Возьмем последовательность функций $\{f_n\} \subset \mathcal{A}$ так, чтобы $f_n' \to I_0$. В силу теоремы Монтеля из $\{f_n\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри D к некоторой функции f_0, которая аналитична и однолистна в D, причем $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) = I_0$, т.е. $f \in \widehat{A}$. Докажем, что эта функция f_0 отображает D на U.

Предположим противное, то есть некоторая точка $a \in U$ не входит в образ $f_0(D)$. Рассмотрим дробно-линейное отображение

$$b_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

(см. пример 2.2). Тогда

$$b'_a = \frac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}.$$

Пусть

$$g(z) = e^{-i\lambda} b_{\sqrt[+]{|a|}}\left(\sqrt[+]{e^{i\lambda} b_a(f_0(z))}\right), \qquad \lambda = \pi - \arg a.$$

Легко видеть, что $g \in \mathcal{A}$ (проверьте это самостоятельно).

Непосредственный подсчет показывает, что

$$g'(0) = b'_{\sqrt[+]{|a|}}\left(\sqrt[+]{e^{i\lambda} b_a(0)}\right) \frac{b'_a(0)}{2\sqrt[+]{e^{i\lambda} b_a(0)}} f'(0) = b'_{\sqrt[+]{|a|}}\left(\sqrt[+]{-ae^{i\lambda}}\right) \frac{1-|a|^2}{2\sqrt[+]{ae^{i\lambda}}} f'_0(0) =$$
$$= \frac{1-|a|}{(1-|a|)^2} \frac{1-|a|^2}{2\sqrt[+]{|a|}} f'_0(0) = \frac{1+|a|}{2\sqrt[+]{|a|}} f'_0(0) > f'_0(0).$$

Это противоречит определению l_0 и тому, что $f'_0(0) = l_0$.

Докажем единственность. Пусть f_1 и f_2 две функции, удовлетворяющие нашим условиям. Тогда композиция $h(z) = f_1(f_2^{-1}(z))$ является автоморфизмом круга U, причем $h(0) = 0$. Поэтому

$$h(z) = e^{i\lambda} \frac{z-0}{1-0z} = e^{i\lambda} z.$$

Отсюда $f_1(z) = e^{i\lambda} f_2(z)$, но $f'_i(0) > 0$ и $\lambda = 0$. □

Следствие 7.1. *Любые две области $D, \Delta \subset \widehat{\mathbb{C}}$, границы которых состоят более чем из одной точки, являются конформно эквивалентными.*

Доказательство. Если $f : D \to U$ и $g : \Delta \to U$ — функции, определяемые из теоремы Римана для областей D и Δ, то отображение $g^{-1} \circ f$ устанавливает конформную эквивалентность D и Δ. □

7.4. Конформные отображения многоугольников

7.4.1. Эллиптические интегралы 1-го рода

Теорема Римана является теоремой существования — она утверждает лишь, что функция Римана (осуществляющая аналитическое и однолистное отображение на единичный круг) существует, но не дает способа для нахождения такой функции.

Поэтому представляет интерес указание явной конструкции для функции Римана в случае хотя бы в случае наиболее просто устроенных областей. В этом параграфе мы дадим такую конструкцию для случая многоугольника.

Для $0 < k < 1$ введем так называемый *эллиптический интеграл первого рода*

$$F(z) = F(z,k) := \int\limits_0^z \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{7.5}$$

и рассмотрим отображение верхней полуплоскости H с его помощью. Для краткости будем обозначать подинтегральную функцию в (7.5)

$$\varphi(z) = \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}.$$

Мы рассматриваем здесь однозначную ветвь φ, определяемую условием $\varphi(0) = 1$, в односвязной области D, которая получается из $\mathbb{C}$ выбрасыванием четырех лучей

$$D = \mathbb{C} \setminus \{z : z = \pm 1 - iy,\ z = \pm 1/k - iy,\ y \geqslant 0\}.$$

Интеграл в (7.5) берется по любой спрямляемой жордановой кривой, соединяющей начало координат 0 и z.

В исключительных точках ± 1, $\pm 1/k$, ∞ можно доопределить как абсолютно сходящиеся несобственные интегралы. К примеру, при $z = 1$ положим

$$F(1) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \lim_{x\to 1-0} \int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Сходимость этого интеграла вытекает из оценки

$$|\varphi(z)| \geqslant c\sqrt{|1-z|} \quad \text{при} \quad |1-z| \leqslant \delta$$

(c и δ — некоторые положительные постоянные). Аналогично определяются $F(-1)$ и $F(\pm 1/k)$. Для определения $F(\infty)$ как несобственного интеграла

$$F(\infty) = \int\limits_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

можно использовать оценку

$$|\varphi(z)| \geqslant c|z|^2 \quad \text{при} \quad x| \geqslant \delta.$$

Определенная таким образом функция F аналитична в полуплоскости H и непрерывна в $\overline{H}$. В самом деле, как первообразная аналитической функции она аналитична в $\overline{H} \setminus \{\pm 1, \pm 1/k\}$. Непрерывность в исключительных точках ± 1, $\pm 1/k$ и ∞ легко вывести из приведенных оценок (проделайте это самостоятельно).

Покажем, что функция (7.5) однолистно отображает полуплоскость H на открытый прямоугольник Δ с вершинами в точках

$$-K, \quad K, \quad K+iK', \quad -K+iK' \tag{7.6}$$

где

$$K = F(1,k) = \int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}, \tag{7.7}$$

$$K' = F\left(\frac{1}{k}, k\right) - F(1,k) = \int\limits_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{7.8}$$

При $z \in I_1 = [0,1]$ интеграл (7.5) принимает положительные значения, возрастающие от $F(0,k)$ до $F(1,k)$. Поэтому функция $w = F(z,k)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает на отрезок $[0,K] \subset \mathbb{C}_w$.

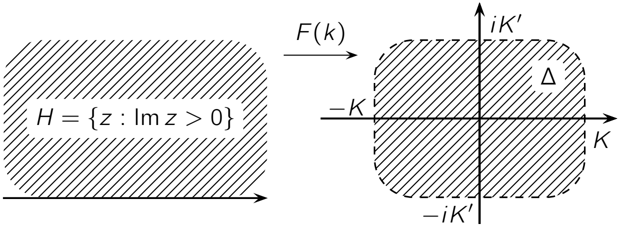


Рис. 7.5

При переходе через точку $t = 1$ множитель $1 - t$ в подкоренном выражении интеграла (7.5) меняет знак и на отрезке $I_2 = [1, 1/k]$ этот интеграл представим в виде

$$F(x, k) = K + i \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2t^2)}},$$

причем выбор ветви квадратного корня здесь согласован с выбором ветви корня в (7.5) на I_1. Отсюда ясно, что интеграл (7.5) отображает взаимно однозначно и непрерывно I_2 на вертикальный отрезок в $\mathbb{C}_w$, соединяющий точки K и $K + iK'$.

При переходе через точку $t = 1/k$ множитель $1 - kt$ под корнем в (7.5) меняет знак. Легко видеть, что

$$\int_{1/k}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 - 1)(1 - k^2t^2)}} = K.$$

Поэтому, рассуждая аналогично, мы видим, что интеграл (7.5) отображает взаимно однозначно и непрерывно луч $I_3 = [1/k, \infty]$ в отрезок с концами в точках $K + iK'$ и iK'.

Наконец, подобные рассуждения показывают, что (7.5) отображает взаимно однозначно и непрерывно отрицательную часть действительной прямой на ломаную с вершинами в точках iK', $-K + iK'$, $-K$ и 0.

Этим показано, что интеграл (7.5) взаимно однозначно и непрерывно отображает границу полуплоскости H на границу прямоугольника с вершинами в точках (7.6).

Отсюда уже можно вывести, что функция (7.5) осуществляет однолистное и конформное отображение полуплоскости на открытый прямоугольник с вершинами (7.6).

Докажем сначала, что $\Delta \subset F(H)$. Если $w \in \Delta$, то в силу интегральной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta}\frac{d\xi}{\xi - w} = 1.$$

После замены переменной $\xi = F(\zeta)$ с учетом того, что $F(\partial H) = \partial\Delta$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial H}\frac{F'(\zeta)}{F(\zeta) - w}\,d\zeta = 1.$$

По теореме о логарифмическом вычете функция $F - w$ имеет простой нуль в некоторой точке $z \in H$. Следовательно, $\Delta \subset F(H)$.

Для доказательства обратного включения $F(H) \subset \Delta$ предположим противное — существует точка $w_0 \notin \Delta$, для которой $F(z_0) = w_0$ при некотором $z_0 \in H$. Тогда если $w_0 \notin \overline{\Delta}$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta}\frac{d\xi}{\xi - w} = 0.$$

Отсюда аналогично предыдущему выводим, что $F - w_0$ не имеет нулей в H, а это противоречит тому, что $w_0 \in F(H)$. Случай $w_0 \in \partial\Delta$ также невозможен, т.к. иначе (поскольку $f(H)$ — область) $B(w_0, r) \subset f(H)$ при некотором $r > 0$ и $\mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$ содержит точки из $F(H)$, хотя мы уже показали, что это не так. Итак, мы показали, что $F(H) = \Delta$.

Отметим, что вывод равенства $F(H) = \Delta$ из $F(\partial H) = \partial\Delta$ не использовал какие-то специфические свойства эллиптического интеграла. Следовательно, мы доказали следующий общий факт, известный как принцип взаимно однозначного соответствия.

Теорема 7.10 (принцип взаимно однозначного соответствия). *Пусть $D, \Delta \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — односвязные области, границами которых являются кусочно-гладкие жордановы кривые. Пусть еще функция f аналитична в D, непрерывна вместе со своей производной на ∂D и отображает ∂D на $\partial\Delta$ взаимно однозначно с сохранением ориентации. Тогда f однолистно и конформно отображает D на Δ.*

Эта теорема часто используется при построении конкретных однолистных конформных отображений заданных областей.

7.4.2. Эллиптический синус

В п. 7.4.1 было показано, что эллиптический интеграл первого рода $z \mapsto F(z,k)$, $0<k<1$ однолистно и конформно отображает верхнюю полуплоскость $H=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ на прямоугольник Δ с вершинами в точках (7.6) (см. также (7.7)–(7.8)).

Обратная функция, отображающая прямоугольник Δ в H, называется *эллиптическим синусом* и обозначается $\operatorname{sn}(k)$, т.е. $\operatorname{sn}(k) : \Delta \to H$. С помощью принципа симметрии эта функция продолжается как мероморфная двоякопериодическая функция на всю комплексную плоскость.

Вертикальный интервал $(K, K+iK')$ функция $\operatorname{sn}(k)$ отображает на интервал $(1, 1/k)$. В силу принципа симметрии Римана–Шварца область Δ_{+1}, симметричную Δ относительно интервала $(K, K+iK')$, отображается аналитическим продолжением функции $\operatorname{sn}(k)$ на нижнюю полуплоскость $H^* = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$.

Точно так же вертикальный интервал $(-K, -K+iK')$ функция $\operatorname{sn}(k)$ отображает на интервал $(-1, -1/k)$ и в силу принципа симметрии область Δ_{-1}, симметричную Δ относительно $(-K, -K+iK')$, также отображается аналитическим продолжением функции $\operatorname{sn}(k)$ на нижнюю полуплоскость $H^* = \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$.

Этот процесс аналитического продолжения с помощью принципа симметрии теперь можно применить и к областям $\Delta_{\pm1}$ и так далее. Кроме того, подобный процесс можно применить и к аналитическому продолжению функции $\operatorname{sn}(k)$ через горизонтальные интервалы $(-K, K)$ и $(-K+iK', k+iK')$. В результате мы получим аналитическое продолжение эллиптического синуса $\operatorname{sn}(k)$ на всю плоскость. Читателю предлагается самостоятельно проверить следующие свойства этого аналитического продолжения, которое мы также обозначаем $\operatorname{sn}(k)$:

1) $\operatorname{sn}(k)$ имеет простые полюса в точках вида $2mK+i(2n+1)K'$, $n,m\in\mathbb{Z}$,
2) $\operatorname{sn}(k)$ имеет простые нули в точках вида $2mK+2niK'$, $n,m\in\mathbb{Z}$,
3) $\operatorname{sn}(k)$ является периодической и ее периодом является любое число вида $4mK+2niK'$, $n,m\in\mathbb{Z}$.

7.4.3. Формула Кристоффеля–Шварца

Пусть $P \subset \mathbb{C}$ — многоугольник с последовательными вершинами $A_1, \dots, A_n$ и углом $\pi\alpha_k$ при вершине A_k. По теореме Римана существует однолистное конформное отображение F верхней полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ на P. Можно показать, что такая функция F задается равенством

$$F(z) = c_1 \int\limits_{z_0}^{z} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} \cdot \ldots \cdot (t - a_n)^{\alpha_n - 1}\, dt + c_2,$$

где $z_0 \in \mathbb{C}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ — некоторые числа и $a_k = F^{-1}(A_k)$ — прообразы вершин многоугольника. Эта функция называется *интегралом Кристоффеля–Шварца*. Ясно, что она является обобщением эллиптического интеграла. Поэтому его можно использовать для построения функций, конформно отображающих полуплоскость H на заданный многоугольник.

Выбор начального значения z_0 и ветви подинтегрального выражения не является принципиальным — другой выбор приведет к изменению c_1 и c_2.

Предметный указатель

а

В

З

И

К

Л

М

Н

О

П

Р

С

Т

У

Ф

Ц

Э

Я

Определения

Автоморфизм области

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — область. Отображение $\varphi : D \to D$ называется *автоморфизмом области* G если
1) φ аналитична в D,
2) φ отображает D на D однолистно (взаимно однозначно).

[Перейти к основному тексту]

Аналитическая функция

Функция f, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется *аналитической* в этой точке, если она дифференцируема в некоторой окрестности точки z_0.

Функция f называется аналитической в бесконечно удаленной точке $z_0 = \infty$, если функция $f(1/z)$ аналитична в точке 0.

Функция называется аналитической в некоторой области $G \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

[Перейти к основному тексту]

Аналитическое продолжение элемента

Элемент $\{D_1, f_1\}$ называется (непосредственным) *аналитическим продолжением элемента* $\{D_0, f_0\}$, если

1) $D_0 \cap D_1 \neq \varnothing$,
2) $f_0(z) = f_1(z)$, $z \in D_0 \cap D_1$.

[Перейти к основному тексту]

Вычет функции на бесконечности

Вычетом функции f в изолированной особой точке ∞ называется число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(C_r(0))^-} f(z)\,dz, \quad r > R. \tag{O.1}$$

[Перейти к основному тексту]

Вычет функции

Вычетом функции f в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется число

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_r(z_0)} f(z)\,dz, \quad 0 < r < \varepsilon. \tag{O.2}$$

[Перейти к основному тексту]

Граница множества

Границей множества A в метрическом пространстве называется множество

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}. \tag{O.3}$$

Точки, принадлежащие границе множества, называются *граничными* точками для него.

[Перейти к основному тексту]

Дифференцируемость

Функция f заданная в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$ называется *дифференцируемой* в этой точке, если существует такое комплексное число $D \in \mathbb{C}$, что

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = Dh + o(|h|), \quad |h| \to 0. \tag{O.4}$$

[Перейти к основному тексту]

Дробно-линейное отображение

Дробно-линейными называются отображения вида

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \tag{O.5}$$

[Перейти к основному тексту]

Жорданова кривая

Кривая $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *жордановой*, если она имеет взаимно-однозначную параметризацию.

[Перейти к основному тексту]

Замкнутое множество

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

[Перейти к основному тексту]

Замыкание множества

Замыканием множества A называется множество $\overline{A} = A \cup A'$.

[Перейти к основному тексту]

Интеграл типа Коши

Интеграл (3.14) называется *интегралом типа Коши*, в отличие от интеграла Коши. Функция f в (3.14) называется *плотностью интеграла типа Коши*.

[Перейти к основному тексту]

Компактное множество

Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *компактным* или *компактом*, если из любого открытого покрытия этого множества можно выделить конечное подпокрытие. [Перейти к основному тексту]

Контур

Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *контуром* (*замкнутой жордановой кривой*) в $\mathbb{C}$, если существует непрерывная взаимнооднозначная функция $\gamma : C \to \mathbb{C}$, для которой $\gamma(C) = \Gamma$ (здесь $C = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$ — единичная окружность). [Перейти к основному тексту]

Конформно эквивалентные области

Две области $D, \Delta \subset \widehat{\mathbb{C}}$ называются *конформно эквивалентными*, если существует функция f, аналитическая и однолистная в D, со свойством

$$f(D) = \Delta.$$

[Перейти к основному тексту]

Конформное отображение

Непрерывное отображение $f \in C(G)$ области $G \subset \mathbb{C}$ называется *конформным* в точке $z_0 \in G$, если оно сохраняет углы между кривыми, проходящими через эту точку. [Перейти к основному тексту]

Кривая

Множество $\Gamma \subset \mathbb{C}$ называется *кривой*, если существует непрерывная функция $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$, для которой

$$\Gamma = \gamma([\alpha, \beta]).$$

Отображение γ называется *параметризацией* кривой. [Перейти к основному тексту]

Криволинейный интеграл по пути

Число $I \in \mathbb{C}$ называется пределом интегральных сумм, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (\Pi, \xi) \quad \lambda_\Pi < \delta \implies \left| s(\Pi, \xi) - I \right| < \varepsilon.$$

Если такой предел существует, то он называется *криволинейным интегралом (второго рода) от функции f по пути γ* и обозначается

$$\oint_\gamma f(z)\, dz. \tag{O.6}$$

[Перейти к основному тексту]

Логарифмическая функция

Логарифмической (с основанием e) называется многозначная функция

$$\operatorname{Ln} z = \{\ln|z| + i(2\pi k + \arg z) : k \in \mathbb{Z}\} = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z.$$

Главным значением логарифма называется

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

[Перейти к основному тексту]

Логарифмический вычет

Логарифмическим вычетом функции f в изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}$ называется вычет ее логарифмической производной f'/f в этой точке. [Перейти к основному тексту]

Множество комплексных чисел

Множество комплексных чисел (*комплексная плоскость*) $\mathbb{C}$ определяется как множество

$$\{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

всех упорядоченных пар действительных чисел, на котором определены отношение равенства и две операции — сложения и умножения. [Перейти к основному тексту]

Область

Непустое открытое связное множество в $\mathbb{C}$ называется *областью*.
Область называется *жордановой*, если ее границей является контур. [Перейти к основному тексту]

Ограниченное множество

Непустое множество в $\mathbb{C}$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором круге.

[Перейти к основному тексту]

Окрестность точки

Окрестностью точки $z \in \mathbb{C}$ называется любое открытое множество, содержащее эту точку. Если $G \subset X$ — окрестность точки $x \in X$, то $G^\circ = G \setminus \{x\}$ называется *проколотой* окрестностью этой точки.

[Перейти к основному тексту]

Особенность бесконечно удаленной точки

Будем говорить, что бесконечно удаленная точка является правильной, полюсом порядка n или существенно собой точкой для функции f, если 0 является таковой для функции $g : z \mapsto f(1/z)$.

[Перейти к основному тексту]

Открытое множество

Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *открытым*, если для любой точки $z \in A$ существует открытый круг $B(z, r)$ положительного радиуса $r > 0$ с центром в этой точке, содержащийся в A.

[Перейти к основному тексту]

Первообразная

Функция F называется *первообразной* для функции $f : D \to \mathbb{C}$, если для всех $z \in D$ справедливо равенство

$$F'(x) = f(z).$$

[Перейти к основному тексту]

Полная аналитическая функция

Каждый фактор-класс $\mathcal{E}$ по указанному отношению эквивалентности называется *полной аналитической функцией*.

[Перейти к основному тексту]

Полюс

Изолированная особая точка z_0 функции f называется ее *полюсом*, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty. \tag{О.7}$$

[Перейти к основному тексту]

Порядок полюса

Будем говорить, что изолированная особая точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функции f является ее *полюсом порядка (кратности)* $n \in \mathbb{N}$, если разложение Лорана для f имеет вид (5.7).

Полюс кратности $n = 1$ называется *простым*.

[Перейти к основному тексту]

Предел функции

Число $w_0 \in \mathbb{C}$ называется *пределом функции* $f : D \to \mathbb{C}$ в предельной точке z_0 множества $D \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Точка $\infty \in \widehat{\mathbb{C}}$ является пределом функции $f : D \to \mathbb{C}$:

1) в предельной точке z_0 множества $D \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall z \in D \quad 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z)| > A,$$

2) в бесконечно удаленной точке неограниченного множества $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$, если

$$\forall A > 0 \quad \exists \Delta > 0 \quad \forall z \in D \quad |z| > \Delta \Longrightarrow |f(z)| > A.$$

[Перейти к основному тексту]

Предельная точка

Точка $z \in \mathbb{C}$ называется *предельной* для множества $A \subset \mathbb{C}$, если в любой проколотой окрестности x есть точки из A.

[Перейти к основному тексту]

Приращение аргумента вдоль кривой

Разность $\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$ называется *приращением аргумента функции вдоль кривой (контура)* Γ и обозначается $\Delta_\Gamma \arg f$.

[Перейти к основному тексту]

Производная

Пусть функция f задана в окрестности точки $z_0 \in \mathbb{C}$. Если существует предел

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \tag{O.8}$$

то он называется *производной* функции f в точке z_0.

[Перейти к основному тексту]

Равномерно непрерывная функция

Пусть $D \subset \mathbb{C}$. Функция $f : D \to \mathbb{C}$ называется *равномерно непрерывной* на D, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, z', z'' \in D \quad |z' - z''| < \delta \Longrightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon. \tag{O.9}$$

[Перейти к основному тексту]

Радиус сходимости

Число $R \in \mathbb{R}$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда (O.13), если этот ряд сходится при всех z с $|z - z_0| < R$ и расходится при всех z с $|z - z_0| > R$.

Круг

$$B(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z - z_0| < R\}$$

называется *кругом сходимости*.

Если ряд (O.13) сходится только при $z = z_0$, то считаем $R = 0$, а если (4.5) сходится при любом $z \in \mathbb{C}$, то считаем $R = \infty$.

[Перейти к основному тексту]

Ряд Лорана функции

Ряд Лорана (О.10), коэффициенты которого вычисляются по формулам (5.2), будем называть *рядом Лорана функции* f в кольце $K(z_0, r, R)$.

[Перейти к основному тексту]

Ряд Лорана

Рядом Лорана будем называть ряд вида

$$f(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(z-z_0)^k = \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k\,. \tag{O.10}$$

Часть ряда Лорана (O.10) с отрицательными индексами называется его *главной частью*, а часть с неотрицательными индексами — *правильной* или аналитической. [Перейти к основному тексту]

Ряд Тейлора

Рядом Тейлора функции f в точке z_0 называется степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k. \tag{O.11}$$

[Перейти к основному тексту]

Связное множество

Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется *связным*, если не существует таких двух открытых множеств $G_1 \subset \mathbb{C}$ и $G_2 \subset \mathbb{C}$, что

$$G_1 \cap G_2 = \varnothing, \quad A \cap G_1 \neq \varnothing, \quad A \cap G_2 \neq \varnothing, \quad A \subset G_1 \cup G_2.$$

[Перейти к основному тексту]

Симметричные точки

Две точки называются *симметричными относительно прямой*, если они лежат на одном и том же перпендикуляре к этой прямой на равном расстоянии от нее.

Две точки называются *симметричными относительно окружности*, если они лежат на одном луче с началом в центре окружности и произведение расстояний от этих точек до центра окружности равно квадрату ее радиуса.

Центр окружности будем считать симметричным бесконечно удаленной точке ∞.

[Перейти к основному тексту]

Спрямляемая кривая

Если множество $\{l(\Pi)\}$ ограничено, то жорданова кривая Γ называется *спрямляемой*. В таком случае *длиной кривой* называется число

$$l_\Gamma := \sup_{\Pi} l(\Pi). \qquad (\text{O}.12)$$

[Перейти к основному тексту]

Степенная функция

Степенной функцией с показателем $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ называется многозначная функция

$$z^{\mu} = e^{\mu \operatorname{Ln} z} = |z|^{\mu} e^{i\mu \arg z} e^{2\pi i k \mu}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

[Перейти к основному тексту]

Степенной ряд

Степенным рядом будем называть ряд вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \tag{O.13}$$

при этом c_k — *коэффициенты* степенного ряда, а z_0 — его *центр*.

[Перейти к основному тексту]

Существенно особая точка

Изолированная особая точка z_0 функции f называется *существенно особой точкой* для f, если в этой точке она не имеет ни конечного, ни бесконечного предела. [Перейти к основному тексту]

Функции гиперболический синус и гиперболический косинус

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Эти функции называются соответственно *гиперболическими синусом* и *гиперболическими косинусом*.

[Перейти к основному тексту]

Функции синус и косинус

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \tag{O.14}$$

Эти функции называются *синусом* и *косинусом* соответственно. [Перейти к основному тексту]

Функции тангенс и котангенс

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}, \quad z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}, \quad z \neq \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Эти функции называются *тангенсом* и *котангенсом* соответственно.

[Перейти к основному тексту]

Цепь

Конечный набор элементов $\{D_k, f_k\}_{k=0}^{n}$ называется *цепью*, если каждый элемент $\{D_k, f_k\}$ является аналитическим продолжением предыдущего элемента $\{D_{k-1}, f_{k-1}\}$. [Перейти к основному тексту]

Экспоненциальная функция

Для $z \in \mathbb{C}$ положим

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y),$$

где $z = x + iy$.

[Перейти к основному тексту]

Элемент аналитической функции

Пара $\{D, f\}$, где $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ — выпуклая область, $f \in H(D)$ называется *элементом аналитической функции*. Два элемента $\{D_0, f_0\}$ и $\{D_1, f_1\}$ называются равными, если $D_0 = D_1$ и $f_0(z) \equiv f_1(z)$ в D_0.

[Перейти к основному тексту]

Часть II

Задачи

Глава 1

Комплексные числа и действия над ними

1.1. Задания для аудиторной работы

1. Найти z_1+z_2, $z_1\cdot z_2$, z_1/z_2, $z_1^2+z_2^2$, если:

1) $z_1=1-i$, $z_2=1+i$; [Решение] [Ответ]

2) $z_1=1+i$, $z_2=1-i$; [Ответ]

3) $z_1=1-2i$, $z_2=2+i$; [Ответ]

4) $z_1=1+i$, $z_2=i$; [Ответ]

5) $z_1=1-i$, $z_2=i$; [Ответ]

6) $z_1=1-3i$, $z_2=1+3i$. [Ответ]

2. Найти модуль и главное значение аргумента $(\arg z\in(-\pi,\pi])$ комплексных чисел z, $\overline{z}$, $-\overline{z}$, $-z$, если:

1) $z=1+i$; [Решение] [Ответ]

2) $z=1+i\sqrt{3}$; [Ответ]

3) $z=\sqrt{3}+i$; [Ответ]

4) $z=i$; [Ответ]

5) $z=1$; [Ответ]

6) $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$. [Ответ]

3. Представить комплексное число z в тригонометрической и показательной форме и найти z^6, если:

1) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$; [Решение] [Ответ]

2) $z=1-i\sqrt{3}$; [Ответ]

3) $z = \sqrt{3} + i$; [Ответ]

4) $z = -1 + i$; [Ответ]

5) $z = -i$; [Ответ]

6) $z = i$. [Ответ]

4. Найти все значения следующих корней и указать их расположение на комплексной плоскости:

1) $\sqrt[4]{1}$; [Решение] [Ответ]

2) $\sqrt[3]{-i}$; [Ответ]

3) $\sqrt[3]{-1}$; [Ответ]

4) $\sqrt[4]{-1}$; [Ответ]

5) $\sqrt[3]{8i}$; [Ответ]

6) $\sqrt{1 + i\sqrt{3}}$. [Ответ]

5. Решить уравнение:

1) $z^2 + |z| = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $|z| + z = 2\overline{z} + 1 + 9i$; [Ответ]

3) $iz + 2\overline{z} = i$; [Ответ]

4) $z\overline{z} = 3 + i + z$; [Ответ]

5) $|z| - iz = 2 + i$; [Ответ]

6) $z\overline{z} = -|z|^2$. [Ответ]

6. Изобразить на комплексной плоскости множество, если:

1) $\{z: \ 0 < \mathrm{Re}(iz) < 1\}$; [Решение]

2) $\{z: \ 0 < \mathrm{Im}(iz) < 1\}$;

3) $\left\{z: \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

4) $\{z: \ 1 < |z - i| < 2\}$;

5) $\{z: \ |z - 1| = |z + i|\}$;

6) $\{z: \ |z + i| = 1\}$.

7. Какие кривые задаются следующими параметрическими уравнениями?

1) $z = i + e^{it}, \ t \in [0, 2\pi]$; [Решение] [Ответ]

2) $z = 1 - it, \ t \in [0, 1$; [Ответ]

3) $z = t + 2ti, \ t \in [0, 4]$; [Ответ]

4) $z = t + \dfrac{1}{t}i, \ t \in (0, +\infty)$; [Ответ]

5) $z = t + it^2, \ t \in \mathbb{R}$; [Ответ]

6) $z = e^{it}, \ t \in [0, \pi]$. [Ответ]

1.2. Базовые индивидуальные задания

8. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$, z_1/z_2, $z_1^2 + z_2^2$, если:

1) $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 1 - i$;

2) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 2 - i$;

3) $z_1 = 2 - i$, $z_2 = i$;

4) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + i$;

5) $z_1 = i$, $z_2 = 2 + 3i$;

6) $z_1 = -2i$, $z_2 = 1 + 2i$;

7) $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 3 - i$;

8) $z_1 = -1 - i$, $z_2 = 1 - 2i$;

9) $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 4 - 5i$;

10) $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 3 + 2i$;

11) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$;

12) $z_1 = -i$, $z_2 = -1 - i$;

13) $z_1 = 1$, $z_2 = 1 - i$;

14) $z_1 = 4 - i$, $z_2 = 1 + 4i$;

15) $z_1 = 3 + i$, $z_2 = 3 - i$;

16) $z_1 = 1 - 7i$, $z_2 = 7 - i$;

17) $z_1 = 8 - i$, $z_2 = i$;

18) $z_1 = 1 - 8i,\ z_2 = 2 + 16i;$

19) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = 1 + 2i;$

20) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = 2 + i.$

9. Для комплексного числа $zx + iy$ найти модуль и главное значение аргумента ($\arg z \in (-\pi, \pi]$), если:

1) $z = \sqrt{3} + i;$

2) $z = -\sqrt{3} - i;$

3) $z = \sqrt{3} - i;$

4) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

5) $z = 3 + 4i;$

6) $z = 3 - 4i;$

7) $z = -3 + 4i;$

8) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i;$

9) $z = -1;$

10) $z = -i;$

11) $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2};$

12) $z = 1 + i\sqrt{3};$

13) $z = 1 - i\sqrt{3};$

14) $z = i;$

15) $z = 1 - 2i;$

16) $z = 2 + i$;

17) $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

18) $z = 1 + 5i$;

19) $z = -2 + +2i$;

20) $z = -\sqrt{3} + i$.

10. Представить комплексное число $z = x + iy$ в тригонометрической и показательной форме и найти z^n, если:

1) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ n = 8$;

2) $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2},\ n = 4$;

3) $z = 2 - 2\sqrt{3}i,\ n = 3$;

4) $z = -2\sqrt{3} + 2i,\ n = 6$;

5) $z = -1,\ n = 10$;

6) $z = i,\ n = 4$;

7) $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2},\ n = 6$;

8) $z = \sqrt{3} - 3i,\ n = 3$;

9) $z = 3 - \sqrt{3}i,\ n = 6$;

10) $z = \sqrt{5} - i\sqrt{5},\ n = 4$;

11) $z = \sqrt{3} + 3i,\ n = 6$;

12) $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ n = 9$;

13) $z = 1 - i,\ n = 4;$

14) $z = 3 - 3i,\ n = 8;$

15) $z = 3 + 3i,\ n = 4;$

16) $z = 1 - i\sqrt{3},\ n = 3;$

17) $z = \sqrt{3} + i\sqrt{3},\ n = 4;$

18) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ n = 10;$

19) $z = -1 - i\sqrt{3},\ n = 6;$

20) $z = 1 + i\sqrt{3},\ n = 9.$

11. Найти все значения $\sqrt[n]{z}$ и указать их расположение на комплексной плоскости, если:

1) $z = i,\ n = 5;$

2) $z = -1,\ n = 8;$

3) $z = 1,\ n = 4;$

4) $z = 1 - i,\ n = 6;$

5) $z = 1 + i\sqrt{3},\ n = 4;$

6) $z = 3 + i\sqrt{3},\ n = 8;$

7) $z = 3 - i\sqrt{3},\ n = 2;$

8) $z = -i,\ n = 5;$

9) $z = 1 + i,\ n = 4;$

10) $z = -1 - i,\ n = 6;$

11) $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2},\ n = 3;$

12) $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2},\ n = 5;$

13) $z = \sqrt{3} + 3i,\ n = 6;$

14) $z = -\sqrt{3} + i,\ n = 5;$

15) $z = -1 + i,\ n = 6;$

16) $z = -\sqrt{3} - 3i,\ n = 4;$

17) $z = -8,\ n = 3;$

18) $z = 27i,\ n = 3;$

19) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i,\ n = 6;$

20) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i,\ n = 4.$

12. Изобразите на комплексной плоскости следующие множества точек:

1) $\{z:\ 2 < |z - i| < 4\};$

2) $\{z:\ 1 < |z| < 2\};$

3) $\left\{z:\ 0 < \arg(z - i) < \dfrac{\pi}{4}\right\};$

4) $\{z:\ 0 < \mathrm{Re}(i\overline{z}) < 1\};$

5) $\{z:\ |\overline{z} - i| > 1\};$

6) $\{z:\ |z - i| = |z + i|\};$

7) $\left\{z:\ \arg z = \dfrac{\pi}{4}\right\};$

8) $\left\{z:\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\};$

9) $\{z:\ z \cdot \overline{z} = 4\};$

10) $\{z:\ (z-i)\overline{(z-i)}=16\}$;

11) $\{z:\ \operatorname{Re} z+\operatorname{Im} z>1\}$;

12) $\{z:\ 2\operatorname{Re} z+\operatorname{Im} \overline{z}=1\}$;

13) $\{z:\ |z+1|=|z-1|\}$;

14) $\{z:\ 1<\operatorname{Im} \overline{z}<4\}$;

15) $\{z:\ \operatorname{Im} z+\operatorname{Re}(z+i)<3\}$;

16) $\{z:\ \operatorname{Im}(z+i)+\operatorname{Re}(z+1)=1\}$;

17) $\left\{z:\ 0<\arg(z-i)<\dfrac{\pi}{2}\right\}$;

18) $\{z:\ \operatorname{Re} z<\operatorname{Im} \overline{z}\}$;

19) $\{z:\ \operatorname{Re} z=\operatorname{Im} z\}$;

20) $\{z:\ |z+1|=|z-i|\}$.

13. Какие кривые задаются следующими параметрическими уравнениями? Изобразите их на комплексной плоскости.

1) $z=1+2e^{it},\ t\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$;

2) $z=i+e^{it},\ t\in[0,\pi]$;

3) $z=t+i,\ t\in[0,1]$;

4) $z=(1-t)+ti,\ t\in[-1,1]$;

5) $z=t^2+ti,\ t\in[0,1]$;

6) $z=t+i\sqrt{t},\ t\in[0,4]$;

7) $z=2+(1-t)i,\ t\in[0,1]$;

8) $z = 2 + 2ti,\ t \in [0, 5];$

9) $z = \dfrac{1}{t} + ti,\ t \in (0, +\infty);$

10) $z = 2(e^{it} + e^{-it}),\ t \in [0, \pi];$

11) $z = e^{t}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\ t \in \mathbb{R};$

12) $z = t + 4t^2 i,\ t \in [0, 2];$

13) $z = 4(1 + e^{it})^{-2},\ t \in [-\pi, \pi];$

14) $z = 2e^{it} + e^{-it},\ t \in [0, \pi];$

15) $z = e^{it} + 2e^{-it},\ t \in [0, \pi];$

16) $z = -1 + e^{it},\ t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right];$

17) $z = t + it^3,\ t \in [0, 1];$

18) $z = t^3 + it,\ t \in [0, 1];$

19) $z = t + i\ln t,\ t \in [0, e];$

20) $z = t + ie^{t},\ t \in [0, 1].$

1.3. Задания для самостоятельной работы

14. Решите уравнение:

1) $iz^2 + 2z + 4 = 0$;

2) $z^4 + iz^2 + 2 = 0$;

3) $(1+i)z^2 - iz + 2 + 3i = 0$;

4) $z^6 + iz^3 - i = 0$;

5) $|z| \cdot z + \overline{z} + 1 + i = 0$;

6) $\operatorname{Re} \overline{z} + 2 \operatorname{Im} z + 3z + 1 - i = 0$;

7) $|z + 2i| + z = 4$;

8) $|z + i| = |z - i|$;

9) $(1+i)^n = (1-i)^n$, $n \in \mathbb{Z}$;

10) $z^6 - 3z^3 - 4 = 0$.

15. Пользуясь формулой Муавра, выразить $\sin kx$, $\cos kx$ через степени $\sin x$, $\cos x$, если:

1) $k = 3$;

2) $k = 4$;

3) $k = 5$;

4) $k = 6$;

5) $k = 7$.

16. Пользуясь формулой Муавра, выразить $\sin^k x$, $\cos^k x$ через тригонометрические функции кратных углов, если:

1) $k = 3$;
2) $k = 4$;
3) $k = 5$;
4) $k = 6$;
5) $k = 7$.

17. Найти суммы:

1) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$;
2) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx$;
3) $\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n-1)x$;
4) $\cos x + \cos 3x + \ldots + \cos(2n-1)x$;
5) $\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^n \sin nx$;
6) $\sin x + \sin(x+y) + \ldots + \sin(x+ny)$;
7) $\cos x + \cos(x+y) + \ldots + \cos(x+ny)$.

18. Изобразить на комплексной плоскости множества точек:

1) $\{z : \ |z| = \operatorname{Re} z + 1\}$;
2) $\{z : \ |2z| > |1+z^2|\}$;
3) $\{z : \ |z| < \arg z, 0 \leqslant \arg z < 2\pi\}$;
4) $\{z : \ |z| < \arg z, 0 < \arg z \leqslant 2\pi\}$;

5) $\{z: \ |z|^2 - \operatorname{Im} z \leqslant 0\}$;

6) $\{z: \ |z|^2 + \operatorname{Im} z = 4\}$;

7) $\left\{z: \ \operatorname{Im} \dfrac{z-1}{z-2} = 0, \operatorname{Re} \dfrac{z-1}{z-2} = 0\right\}$.

19. С помощью геометрических построений доказать следующие соотношения:

1) $\big||z_1| - |z_2|\big| \leqslant |z_1 - z_2|$;

2) $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leqslant |\arg z|$;

3) $|z-1| \leqslant \big||z|-1\big| + |z| \cdot |\arg z|$;

4) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$;

5) $|1 - \overline{z_1} z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 - |z_1|^2)(1 - |z_2|^2)$;

6) $\dfrac{1}{2}(|z_1| + |z_2|)\left|\dfrac{z_1}{|z_1|} + \dfrac{z_2}{|z_2|}\right| \leqslant |z_1 + z_2|$.

1.4. Задания творческого характера

20. Вычислить сумму

$$1 + C_n^1 \cos x + C_n^2 \cos 2x + \ldots + C_n^n \cos nx.$$

21. Доказать, что число

$$p = (n^2+1)(m^2+1)(l^2+1), \quad n, m, l \in \mathbb{Z},$$

можно представить в виде суммы двух точных квадратов.

22. Доказать, что

$$\arg z = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a+|z|},$$

если $z = a + ib \notin (-\infty, 0]$.

23. Существуют ли два неравных комплексных числа, каждое из которых равно кубу другого? Сколько таких пар чисел имеется?

24. Студент Петров рассуждает. «Очевидно, что

$$i^{21} = (i^4)^{\frac{21}{4}} = 1^{\frac{21}{4}} = 1.$$

С другой стороны

$$i^{21} = (i^4)^5 \cdot i = 1^5 \cdot i = i.$$

Следовательно $i = 1$». В чем его ошибка?

25. Доказать, что для любых $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\left|\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+c^2}\right| \leqslant |b-c|.$$

26. Задача Эйлера. Известно, что в каждом параллелограмме сумма квадратов его диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон. Насколько отличаются те же суммы в случае произвольного четырехугольника. Доказать, что справедливо следующее утверждение (теорема Эйлера о четырехугольнике). Сумма квадратов сторон любого четырехугольника больше суммы квадратов его диагоналей на учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей.

27. Пусть $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Каков геометрический смысл равенства

$$\operatorname{Im} \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = 0?$$

28. Доказать теорему Птолемея. В каждом вписанном в окружность выпуклом четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению его диагоналей.

Глава 2

Элементарные трансцендентные функции

2.1. Задания для аудиторной работы

29. Вычислить:

1) $\mathrm{Ln}(-1)$, i^i; [Решение] [Ответ]

2) $\mathrm{Ln}\, i$, $(1-i)^i$; [Ответ]

3) $\mathrm{Ln}(1+i)$, $(-1)^i$; [Ответ]

4) $\mathrm{Ln}(1-i)$, 1^{-i}; [Ответ]

5) $\mathrm{Ln}(1+i\sqrt{3})$, $(1+i)^i$; [Ответ]

6) $\mathrm{Ln}(-i)$, $(i)^{1+i}$. [Ответ]

30. Найти $\mathrm{Re}\, f(z)$ и $\mathrm{Im}\, f(z)$ функции $w = f(z)$ (в случае, если $f(z)$ многозначна, считать, что $f(z)$ — ее главная ветвь), если:

1) а) $w = iz^2$, б) $w = \mathrm{ch}\, iz$, в) $w = z^i$; [Решение] [Ответ]

2) а) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, б) $w = \mathrm{sh}\, z$, в) $w = i^z$; [Ответ]

3) а) $w = (iz)^2 - 2\overline{z}$, б) $w = \cos iz$, в) $w = (-1)^z$; [Ответ]

4) а) $w = \dfrac{1}{z} + z$, б) $w = \sin iz$, в) $w = (1+i)^z$; [Ответ]

5) а) $w = z \cdot \overline{z} + iz$, б) $w = \mathrm{sh}\, iz$, в) $w = (1-i)^z$; [Ответ]

6) а) $w = \dfrac{z}{z+1}$, б) $w = \cos z$, в) $w = z^(1+i)$. [Ответ]

31. Доказать следующие равенства:

1) $\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$; [Решение]

2) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; [Решение]

3) $\operatorname{tg} iz = i \operatorname{th} z$; [Решение]

4) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$;

5) $\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{i + z}{i - z}$;

6) $\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + z}{1 - z}$.

32. Найти все значения функций:

1) $\operatorname{Arcsin} i$; [Решение] [Ответ]

2) $\operatorname{Arccos} i$; [Ответ]

3) $\operatorname{Arccos} 2$; [Ответ]

4) $\operatorname{Arth} i$; [Ответ]

5) $\operatorname{Arch} 2i$; [Ответ]

6) $\operatorname{Arcsin} \frac{1}{2}$. [Ответ]

33. Решить уравнение:

1) $\cos z = 2$; [Решение] [Ответ]

2) $\sin z + \cos z = 2$; [Ответ]

3) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = 1$; [Ответ]

4) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2i$; [Ответ]

5) $\operatorname{th} z = i$; [Ответ]

6) $\sin z - \cos z = 3$; [Ответ]

7) $\sin z - \cos z = i$; [Ответ]

8) $\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = i$; [Ответ]

2.2. Базовые индивидуальные задания

34. Найти все значения функций:

1) $\operatorname{Ln}(-4)$, $(1-i\sqrt{3})^{i}$;

2) $\operatorname{Ln}(1-i\sqrt{3})$, i^{1-i};

3) $\operatorname{Ln}(2-3i)$, $(-1)^{1-i}$;

4) $\operatorname{Ln}2$, $(1+i\sqrt{3})^{i}$;

5) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}+i)$, $(-i)^{-i}$;

6) $\operatorname{Ln}(ie)$, $(-i)^{i}$;

7) $\operatorname{Ln}(-1-i)$, $(1+i)^{1+i}$;

8) $\operatorname{Ln}\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$, $(1+i\sqrt{3})^{-i}$;

9) $\operatorname{Ln}(-e)$, $(1-i)^{1+i}$;

10) $\operatorname{Ln}(\sqrt{3}-i)$, $(1+i)^{1-i}$;

11) $\operatorname{Ln}(-2i)$, i^{3i};

12) $\operatorname{Ln}(-1-i\sqrt{3})$, $(-i)^{1+i}$;

13) $\operatorname{Ln}(-2+3i)$, $(2i)^{1-i}$;

14) $\operatorname{Ln}(-1-i)$, $(1-i)^{1-i}$;

15) $\operatorname{Ln}(3+4i)$, $(-1)^{1+i}$;

16) $\operatorname{Ln}(-ie)$, $(1-i\sqrt{3})^{i}$;

17) $z = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

18) $\operatorname{Ln}\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, $(-1)^{1+i}$;

19) $\operatorname{Ln} 4$, 1^{1+i};

20) $\operatorname{Ln}(-\sqrt{3}+i)$, $(-i)^{2+i}$.

35. Найти $\operatorname{Re} f(z)$ и $\operatorname{Im} f(z)$ функции $w = f(z)$ (в случае, если $f(z)$ многозначна, считать, что $f(z)$ — ее главная ветвь), если:

1) а) $w = z^2 + 2z$, б) $w = \sin z$, в) $w = z^{-i}$;

2) а) $w = \dfrac{z-i}{z+i}$, б) $w = \cos(-iz)$, в) $w = (-i)^z$;

3) а) $w = z^3 + iz$, б) $w = \operatorname{ch} z$, в) $w = (-1)^{-z}$;

4) а) $w = \dfrac{2z+i}{\overline{z}-2i}$, б) $w = \operatorname{ch}(iz)$, в) $w = (1+i)^{-iz}$;

5) а) $w = z \operatorname{Im} z - z^2$, б) $w = \operatorname{th} z$, в) $w = (1-i)^{-z}$;

6) а) $w = z^2 + 2z + 1$, б) $w = \operatorname{Ln}(iz)$, в) $w = (1+i)^z$;

7) а) $w = \dfrac{1-z}{i+z}$, б) $w = \sin(-iz)$, в) $w = (-z)^{1+i}$;

8) а) $w = \overline{z}^2 - z \operatorname{Re} z$, б) $w = \operatorname{ch}(-z)$, в) $w = (-z)^i$;

9) а) $w = z \operatorname{Re} z^2 - \overline{z}^2$, б) $w = \sin(-z)$, в) $w = z^{1+i}$;

10) а) $w = (z+i)^2 \cdot \operatorname{Im} z$, б) $w = \operatorname{ch}(-iz)$, в) $w = z^{1-i}$;

11) а) $w = \dfrac{1-z}{1+iz}$, б) $w = \operatorname{sh}(-iz)$, в) $w = z^{-1-i}$;

12) а) $w = \dfrac{z-i}{1-iz} + z\operatorname{Im}\overline{z}$, б) $w = \cos(-z)$, в) $w = \operatorname{Ln}(iz)$;

13) а) $w = z + \dfrac{1}{\overline{z}} + \overline{z}^2$, б) $w = \operatorname{Ln}(-z)$, в) $w = z^{2+3i}$;

14) а) $w = (z+i)^2$, б) $w = \operatorname{Ln}(-iz)$, в) $w = 2^z$;

15) а) $w = (z-i)^3$, б) $w = \operatorname{Ln}\big((1+i)z\big)$, в) $w = e^{-z}$;

16) а) $w = \dfrac{z-i}{i+\overline{z}}$, б) $w = \operatorname{Ln}(-z)$, в) $w = e^z$;

17) а) $w = \overline{z}^2 + \operatorname{Im} z$, б) $w = i\sin z + \cos z$, в) $w = \arg z$;

18) а) $w = \overline{2z + z^2}$, б) $w = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z$, в) $w = (-1-i)^z$;

19) а) $w = z\cdot\overline{z} + \overline{z}^2$, б) $w = \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z$, в) $w = (-1+i)^z$;

20) а) $w = \dfrac{2z-i}{iz-2}$, б) $w = \cos z - i\sin z$, в) $w = \arg iz$.

36. Доказать равенства:

1) $\operatorname{Arsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right)$;

2) $\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln} i\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$;

3) $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$;

4) $\sin iz = i\operatorname{sh} z$;

5) $\cos iz = \operatorname{ch} z$;

6) $\operatorname{Arcctg} z = \dfrac{i}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z-i}{z+i}$;

7) $\operatorname{Arch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$;

8) $\operatorname{sh}(z_1+z_2)=\operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2+\operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$;

9) $\sin z=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-z\right)$;

10) $\operatorname{Arcth} z=\dfrac{1}{2}\operatorname{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}$;

11) а) $w=\dfrac{1-z}{1+iz}$, б) $w=\operatorname{sh}(-iz)$, в) $w=z^{-1-i}$;

12) а) $w=\dfrac{z-i}{1-iz}+z\operatorname{Im}\overline{z}$, б) $w=\cos(-z)$, в) $w=\operatorname{Ln}(iz)$;

13) а) $w=z+\dfrac{1}{\overline{z}}+\overline{z}^2$, б) $w=\operatorname{Ln}(-z)$, в) $w=z^{2+3i}$;

14) а) $w=(z+i)^2$, б) $w=\operatorname{Ln}(-iz)$, в) $w=2^z$;

15) а) $w=(z-i)^3$, б) $w=\operatorname{Ln}\big((1+i)z\big)$, в) $w=e^{-z}$;

16) а) $w=\dfrac{z-i}{i+\overline{z}}$, б) $w=\operatorname{Ln}(-z)$, в) $w=e^z$;

17) а) $w=\overline{z}^2+\operatorname{Im} z$, б) $w=i\sin z+\cos z$, в) $w=\arg z$;

18) а) $w=\overline{2z+z^2}$, б) $w=\operatorname{ch} z+\operatorname{sh} z$, в) $w=(-1-i)^z$;

19) а) $w=z\cdot\overline{z}+\overline{z}^2$, б) $w=\operatorname{ch} z-\operatorname{sh} z$, в) $w=(-1+i)^z$;

20) а) $w=\dfrac{2z-i}{iz-2}$, б) $w=\cos z-i\sin z$, в) $w=\arg iz$.

37. Найти все значения функций:

1) $\operatorname{Arcsin} i$;

2) $\operatorname{Arcsin} 2$;

3) $\operatorname{Arsh}(-i)$;

4) $\operatorname{Arch}(-2)$;

5) $\operatorname{Arctg} 1$;

6) $\operatorname{Arcctg}(1+i)$;

7) $\operatorname{Arth}(1+i)$;

8) $\operatorname{Arcth}(1-i)$;

9) $\operatorname{Arcsin} 2$;

10) $\operatorname{Arsh}(-2)$;

11) $\operatorname{Arcsin}(-i)$;

12) $\operatorname{Arccos} 2i$;

13) $\operatorname{Arsh} i$;

14) $\operatorname{Arch}(-i)$;

15) $\operatorname{Arctg}(-1)$;

16) $\operatorname{Arcctg}(1-i)$;

17) $\operatorname{Arth}(-1-i)$;

18) $\operatorname{Arcth}(1+i)$;

19) $\operatorname{Arccos}(1-i)$;

20) $\operatorname{Arch}(2i)$.

38. Решить уравнение:

1) $\sin z + \cos z = -2$;

2) $\operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z = -1$;

3) $\operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z = i$;

4) $\sin z + \cos z = 2i$;

5) $\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z = 2$;

6) $\operatorname{sh} z + 4\operatorname{ch} z = i$;

7) $\cos z = \operatorname{ch} z$;

8) $\sin z - \cos z = -i$;

9) $\sin z + \cos z = i$;

10) $2\operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z = -i$;

11) $\sin z - 2\cos z = 4$;

12) $\operatorname{sh} z + 2\operatorname{ch} z = i$;

13) $\sin z = i\operatorname{sh} z$;

14) $\cos z = i\operatorname{sh} 2z$;

15) $\operatorname{Arctg}(-1)$;

16) $\operatorname{Arcctg}(1-i)$;

17) $\operatorname{Arth}(-1-i)$;

18) $\operatorname{Arcth}(1+i)$;

19) $\operatorname{Arccos}(1-i)$;

20) $\operatorname{Arch}(2i)$.

2.3. Задания для самостоятельной работы

39. Найти $\operatorname{Re} f(z)$, $\operatorname{Im} f(z)$ и $|f(z)|$ функции $w = f(z)$, если:

1) $w = \operatorname{tg} z$;

2) $w = \operatorname{th} z$;

3) $w = \operatorname{cth} z$;

4) $w = 2^z$;

5) $w = i^z$;

6) $w = \operatorname{tg} iz$;

7) $w = \operatorname{th} iz$;

8) $w = \operatorname{cth}(-iz)$;

9) $w = e^z$;

10) $w = z^i$.

40. Для функции $w = f(z)$ найти множество точек z, где она принимает: 1) действительные значения, 2) чисто мнимые значения, если:

1) $w = e^z$;

2) $w = \cos z$;

3) $w = \operatorname{sh} z$;

4) $w = \operatorname{ctg} z$;

5) $w = \operatorname{cth} z$;

6) $w = \sin z$;

7) $w = \operatorname{ch} z$;

8) $w = \operatorname{tg} z$;

9) $w = \operatorname{th} z$;

10) $w = 2^z$.

41. Решить уравнение:

1) $\cos z = -\operatorname{ch} z$;

2) $\cos z = -i \operatorname{sh} 2z$;

3) $\sin z = i \operatorname{sh} z$;

4) $\sin z = -i \operatorname{sh} z$;

5) $\sin iz = \operatorname{ch} z$;

6) $i \sin z = \operatorname{sh} z$;

7) $i \operatorname{sh} z = \sin z$;

8) $\cos z = \operatorname{ch} z$;

9) $i \cos z = \operatorname{ch} z$;

10) $\cos iz = i \operatorname{sh} z$.

42. Начертить график функции:

1) $y = |\sin ix|$;

2) $y = |\cos ix|$;

3) $y = |e^{ix}|$;

4) $y = |\operatorname{th} ix|$;

5) $y = \operatorname{Re}(\operatorname{Ln} ix)$;

6) $y = |\operatorname{sh} ix|$.

2.4. Задания творческого характера

43. Доказать, что для любого значения $\operatorname{Arccos} z$ можно подобрать такое значение $\operatorname{Arcsin} z$, чтобы сумма этих значений была равна $\pi/2$. Именно в таком смысле понимается равенство

$$\operatorname{Arccos} z + \operatorname{Arcsin} z = \frac{\pi}{2}.$$

44. Доказать, что (см. замечание к задаче 1)

$$\operatorname{Arctg} z + \operatorname{Arcctg} z = \frac{\pi}{2}.$$

45. При каких z все значения функции $w = f(z)$ действительны, если:

1) $w = \operatorname{Arccos} z$;

2) $w = \operatorname{Arcsin} z$;

3) $w = \operatorname{Arctg} z$;

4) $w = i \operatorname{Arsh} z$.

46. Доказать, что

$$\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2,$$

$$\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2,$$

где под суммой и разностью двух логарифмов понимается сумма двух множеств. Например,

$$\operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2 = \{w = w_1 + w_2 : \ w_1 \in \operatorname{Ln} z_1, w_2 \in \operatorname{Ln} z_2\}.$$

47. Найти ошибку в рассуждениях, приводящих к парадоксу И. Бернулли.

$$1)\ (-z)^2 = z^2 \ \Rightarrow\ 2)\ 2\,\mathrm{Ln}(-z) = 2\,\mathrm{Ln}\,z \ \Rightarrow\ 3)\ \mathrm{Ln}(-z) = \mathrm{Ln}\,z.$$

48. Около 400 лет назад голландский ученый Меркатор предложил следующий способ построения географических карт. Земную сферу отображают на плоскость с помощью стереографической проекции, а затем плоскость подвергают отображению $w = i\ln z$. Такие карты нашли широкое распространение в навигации благодаря тому, что они получены конформными отображениями и локсодромии (пути на поверхности Земли, вдоль которых стрелка компаса сохраняет неизменное направление на них изображаются прямыми линиями).

Какие линии на карте Меркатора параллели и меридианы, в частности экватор и нулевой меридиан? Какая область будет изображена частью земной поверхности, находящаяся между 30° и 60° восточной долготы и между 40° и 60° северной широты?

49. Вычислить:

1) $\mathrm{Log}_{-2}(-8)$;

2) $\mathrm{Log}_{-10} 10$;

3) $\mathrm{Log}_{-3} 9$;

4) $\mathrm{Log}_i\, i$.

50. Пусть z_1, z_2, z_3 — произвольные комплексные числа. Справедливы ли следующие равенства:

$$1)\ z_1^{z_2}\cdot z_1^{z_3} = z_1^{z_2+z_3};$$
$$2)\ (z_1^{z_2})^{z_3} = z_1^{z_2\cdot z_3};$$
$$3)\ (z_1^{z_2})^{z_3} = (z_1^{z_3})^{z_2}?$$

В частности, верны ли равенства:

$$1)\ z_1^{2z_2} = \left(z_1^{z_2}\right)^2;$$

$$2)\ z_1^{2z_2} = \left(z_1^{2}\right)^{z_2};$$

$$3)\ \left(z_1^{z_2}\right)^2 = \left(z_1^{2}\right)^{z_2}?$$

Глава 3

Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность, дифференцируемость

3.1. Задания для аудиторной работы

51. Имеет ли функция $w = f(z)$ предел в точке z_0? Если этот предел существует, найти его:

1) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{z}$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $w = \dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{|z|}{z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

6) $w = \dfrac{z \operatorname{Im} z}{|z|}$, $z_0 = 0$. [Решение] [Ответ]

52. Доказать непрерывность функции $w = f(z)$ в каждой точке z комплексной плоскости:

1) $w = \bar{z}^2 \cdot z$; [Решение]

2) $w = \sin z$; [Решение]

3) $w = |z|\bar{z}$;

4) $w = e^z$;

5) $w = \dfrac{|z|^2}{\bar{z}}$;

6) $w = \operatorname{ch} z$.

53. Для функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, найти:
а) точки дифференцируемости;
б) точки аналитичности;
в) производную в точках дифференцируемости.

1) $w = xy + i(x^2 - y^2)$; [Решение] [Ответ]

2) $w = x^2 + iy^2$; [Ответ]

3) $w = x^3 + xy^2 + i(y^3 + x^2y)$; [Ответ]

4) $w = x^3 - 3xy^2 - i(y^3 - 2x^2y)$; [Ответ]

5) $w = x^2 - y^2 + i(x + y)^2$; [Ответ]

6) $w = y^2 - x^2 + x + i(xy + y)$. [Ответ]

54. При каких действительных значениях a, b, c функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, будет аналитической в $\mathbb{C}$?

1) $w = x + ay + i(bx + cy)$; [Решение] [Ответ]

2) $w = ax^2 + by^2 + icxy$; [Ответ]

3) $w = axy + i(cx^2 - by^2)$; [Ответ]

4) $w = x^2 + ax + by^2 + i(2xy + cy)$; [Ответ]

5) $w = cxy + i(ax^2 + by^2)$; [Ответ]

6) $w = ax + by - i(x + cy)$. [Ответ]

55. Для функции $w = f(z)$ проверить выполнение условий Коши – Римана для любых $z = x + iy \in \mathbb{C}$ и доказать справедливость в $\mathbb{C}$ соответствующего равенства:

1) $w = e^z$, $(e^z)' = e^z$; [Решение]

2) $w = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$;

3) $w = \sin z$, $(\sin z)' = \cos z$;

4) $w = \operatorname{ch} z$, $(\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z$;

5) $w = \operatorname{sh} z$, $(\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z$;

6) $w = z^3$, $(z^3)' = 3z^2$.

56. Проверить, является ли функция $u(x, y)$ гармонической в области определения:

1) $u(x, y) = x^2 + y^2 + xy$; [Решение] [Ответ]

2) $u(x, y) = \operatorname{sh} x \cos y$; [Ответ]

3) $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; [Ответ]

4) $u(x, y) = xy + x - y$; [Ответ]

5) $u(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$; [Ответ]

6) $u(x, y) = xy + x^2 - y^2$. [Ответ]

57. Пусть $\varphi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на всей действительной прямой $\mathbb{R}$, отличная от постоянной. Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (в случае существования найти их):

1) $u = \varphi(xy)$; [Решение] [Ответ]

2) $u = \varphi(ax + by)$, $a, b \in \mathbb{R}$; [Ответ]

3) $u = \varphi(x^2 + y)$; [Ответ]

4) $u = \varphi\left(\dfrac{x}{y}\right)$; [Ответ]

5) $u = \varphi(x^2 + y^2)$; [Ответ]

6) $u = \varphi\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x}\right)$. [Ответ]

58. Восстановить аналитическую функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, по известной действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ части и значению $f(z_0)$:

1) $u(x, y) = e^{-y} \cos x$, $f(-i) = e$; [Решение] [Ответ]

2) $u(x, y) = -e^{-y} \sin x$, $f(0) = i$; [Ответ]

3) $v(x, y) = x^2 - y^2 - x$, $f(1) = 0$; [Ответ]

4) $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = i$; [Ответ]

5) $v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y$, $f(0) = 0$; [Ответ]

6) $u(x, y) = \operatorname{ch} x \cos y$, $f(0) = 1$. [Ответ]

3.2. Базовые индивидуальные задания

59. Имеет ли функция $w = f(z)$ предел в точке z_0? Если этот предел существует, найти его:

1) $w = \dfrac{(\operatorname{Im} z)^2}{\operatorname{Re} z}$, $z_0 = 0$;

2) $w = \dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{|z^2|}$, $z_0 = 0$;

3) $w = \dfrac{\overline{z}}{z}$, $z_0 = 0$;

4) $w = \dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{|z^2|}$, $z_0 = 0$;

5) $w = \dfrac{\operatorname{Im} z}{z}$, $z_0 = 0$;

6) $w = \dfrac{\operatorname{Re}(z^2)}{z}$, $z_0 = 0$;

7) $w = \dfrac{\overline{z}^2}{z}$, $z_0 = 0$;

8) $w = \dfrac{|z|}{z}$, $z_0 = 0$;

9) $w = \dfrac{\overline{z}}{\operatorname{Re} z}$, $z_0 = 0$;

10) $w = \dfrac{\overline{z} + i}{|z - i|}$, $z_0 = i$;

11) $w = \dfrac{z}{z - i}$, $z_0 = \infty$;

12) $w = \dfrac{(z+i)^2}{|z+i|^2}$, $z_0 = -i$;

13) $w = \dfrac{\sin z}{z}$, $z_0 = 0$;

14) $w = \dfrac{\operatorname{Im}(z^2)}{\operatorname{Re} z}$, $z_0 = 0$;

15) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0 = \infty$;

16) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z}{z}$, $z_0 = 0$;

17) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}{z}$, $z_0 = 0$;

18) $w = \dfrac{\sin z}{z}$, $z_0 = \infty$;

19) $w = \dfrac{\operatorname{Re} \overline{z} + \operatorname{Im} \overline{z}}{\overline{z}}$, $z_0 = 0$;

20) $w = \dfrac{\operatorname{Re} \overline{z}}{\operatorname{Im} \overline{z}}$, $z_0 = 0$.

60. Доказать непрерывность функции $w = f(z)$ в каждой точке области определения:

1) $w = \operatorname{sh} z$;

2) $w = \cos z$;

3) $w = |\overline{z}|^2 + z$;

4) $w = ze^z$;

5) $w = \overline{z}^2$;

6) $w = \operatorname{th} z$;

7) $w = \operatorname{ch} z$;

8) $w = \operatorname{th} \overline{z}$;

9) $w = \dfrac{|z| + 1}{\overline{z} + 1}$;

10) $w = \operatorname{cth} z$;

11) $w = z^2 + \overline{z}^2$;

12) $w = z \cdot \overline{z} + z + \overline{z}$;

13) $w = \overline{z} \operatorname{sh} z$;

14) $w = \overline{z} e^z$;

15) $w = \overline{z} \cdot z^2$;

16) $w = \dfrac{\overline{z}^2}{z^2}$;

17) $w = \dfrac{\overline{z} + 1}{\overline{z} - 1}$;

18) $w = e^{\overline{z}}$;

19) $w = \sin \overline{z}$;

20) $w = \operatorname{ch} \overline{z}$.

61. Для функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, найти:
а) точки дифференцируемости;
б) точки аналитичности;
в) производную в точках дифференцируемости.

1) $w = x^2 - iy^2$;

2) $w = xy + i\dfrac{x}{y}$;

3) $w = x^2 - y^2 - i2xy$;

4) $w = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$;

5) $w = e^x \cos y + ie^x \sin y$;

6) $w = z \cdot \overline{z}^2$;

7) $w = z^2 \cdot \overline{z}$;

8) $w = x^2 + y^2 + i2xy$;

9) $w = x^2 + ixy$;

10) $w = xy - iy^2$;

11) $w = x + 2y + i(x - y)$;

12) $w = \overline{z}^2 + z$;

13) $w = z^2 + \overline{z}$;

14) $w = e^{x-iy}$;

15) $w = \operatorname{sh}(x - iy)$;

16) $w = \cos \overline{z}$;

17) $w = z + 2\overline{z}$;

18) $w = e^{-y+ix}$;

19) $w = z \operatorname{Re} z + iz \operatorname{Im} z$;

20) $w = \overline{z} + \operatorname{Im} z^2$.

62. При каких действительных значениях a, b, c функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, будет дифференцируемой в области определения?

1) $w = ax + y + i(cx + by)$;

2) $w = ax^2 + cy^2 + ibxy$;

3) $w = ax + x^2 - y^2 + i(by + cxy)$;

4) $w = x^3 + axy^2 + i(bx^2y + cx - y^3)$;

5) $w = a(x^2 - y^2) + x + i(by + cxy)$;

6) $w = ax + \dfrac{cx}{x^2 + y^2} + i\left(y + \dfrac{by}{x^2 + y^2}\right)$;

7) $w = ax^2 + bx + y^2 + i(2y + cxy)$;

8) $w = ae^x \cos y + i(be^x \sin y + y) + cx$;

9) $w = a \cos x \operatorname{ch} y + ib \sin x \operatorname{sh} y$;

10) $w = c \sin x \operatorname{ch} y + bx + i(a \cos x \operatorname{sh} y + y)$;

11) $w = az + b\overline{z}$;

12) $w = a \ln(x^2 + y^2) + ib \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

13) $w = a \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + cx + i(b \ln(x^2 + y^2) + y)$;

14) $w = a\overline{z}^2 + cx + ay + iy$;

15) $w = axy + cx + by + i(x^2 - y^2 + y)$;

16) $w = az^2 + c\overline{z} + b\overline{z}^2$;

17) $w = x^3 + bxy^2 + 2y + i(ax^2y - y^3 + x)$;

18) $w = axy + i(cx^2 + by^2)$;

19) $w = ax + cx^2 - y^2 + i(bxy + 2y)$;

20) $w = e^{az+b\bar{z}}$.

63. Для функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, в области ее определения проверить выполнение условий Коши – Римана и доказать справедливость соответствующего равенства:

1) $w = z^2$, $(z^2)' = 2z$;

2) $w = e^{iz}$, $(e^{iz})' = ie^{iz}$;

3) $w = \operatorname{sh} iz$, $(\operatorname{sh} iz)' = i \operatorname{ch} iz$;

4) $w = \ln z$, $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$ ($\ln z$ — главная ветвь логарифма);

5) $w = \cos az$, $(\cos az)' = -a \sin az$;

6) $w = \ln iz$, $(\ln iz)' = \dfrac{1}{z}$;

7) $w = \operatorname{ch} iz$, $(\operatorname{ch} iz)' = i \operatorname{sh} iz$;

8) $w = z^4$, $(z^4)' = 4z^3$;

9) $w = \sin az$, $(\sin az)' = a \cos az$;

10) $w = \dfrac{1}{z}$, $\left(\dfrac{1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$;

11) $w = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $w' = \dfrac{1}{z}$;

12) $w = \ln az$, $(\ln az)' = \dfrac{1}{z}$;

13) $w = -\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + i \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, $w' = \dfrac{i}{z}$;

14) $w = \cos az$, $(\cos az)' = -a \sin az$;

15) $w = e^{az}$, $(e^{az})' = ae^{az}$;

16) $w = z^4 + z$, $(z^4 + z)' = 4z^3 + 1$;

17) $w = (az)^2$, $((az)^2)' = 2az$;

18) $w = az^3$, $(az^3)' = 3az^2$;

19) $w = \dfrac{1}{z^2}$, $\left(\dfrac{1}{z^2}\right)' = -\dfrac{2}{z^3}$;

20) $w = \dfrac{z+1}{z}$, $\left(\dfrac{z+1}{z}\right)' = -\dfrac{1}{z^2}$.

64. Проверить, является ли функция $u(x, y)$ гармонической в области определения:

1) $u = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;

2) $u = x^3 + 3x^2y$;

3) $u = e^{-y} \sin x$;

4) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$;

5) $u = \sin x \operatorname{ch} y$;

6) $u = y^3 - 3xy^2$;

7) $u = \cos x \operatorname{sh} y$;

8) $u = \operatorname{sh} x \cos y$;

9) $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

10) $u = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$;

11) $u = x^3 - y^3$;

12) $u = \operatorname{ch} x \cos y$;

13) $u = x + 2y + \ln(x^2 + y^2)$;

14) $u = e^{-y} \sin x + x$;

15) $u = \sin x \operatorname{sh} y$;

16) $u = \sin x \cos y$;

17) $u = x^3 - 3xy$;

18) $u = \operatorname{ch} x - \sin y - xy$;

19) $u = \operatorname{ch} x \sin y$;

20) $u = \operatorname{sh} x \sin y$.

65. Восстановить аналитическую функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$, по известной действительной $u(x, y)$ или мнимой $v(x, y)$ части и значению $f(z_0)$:

1) $v(x, y) = y + \ln(x^2 + y^2)$, $f(1) = 1$;

2) $u(x, y) = x + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$, $f(1) = 1$;

3) $u(x, y) = 2xy + y$, $f(0) = 0$;

4) $u(x, y) = x^2 - y^2 + x^3 - 3xy^2$, $f(0) = 0$;

5) $u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$, $f(0) = 0$;

6) $v(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y$, $f(0) = -1$;

7) $u(x, y) = 4x - \dfrac{y}{x^2 + y^2}$, $f(1) = 4 - i$;

8) $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, $f(1) = 2i$;

9) $u(x, y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y$, $f(0) = 0$;

10) $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x,\ f(0) = 0;$

11) $v(x,y) = e^{-x}\sin y,\ f(0) = 1;$

12) $v(x,y) = \operatorname{sh} x \sin y,\ f(0) = 1;$

13) $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 3y,\ f(0) = 0;$

14) $v(x,y) = \operatorname{ch} x \sin y,\ f(0) = 0;$

15) $v(x,y) = 2y - \dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(1) = 3;$

16) $v(x,y) = 2x + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y,\ f(0) = 0;$

17) $v(x,y) = 2x + e^{-x}\sin y,\ f(0) = 1;$

18) $v(x,y) = xy + \operatorname{ch} x \sin y,\ f(0) = 0;$

19) $v(x,y) = x^2 - y^2 - \dfrac{y}{x^2+y^2},\ f(1) = 1 + i;$

20) $u(x,y) = 2xy + \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\ f(1) = i.$

3.3. Задания для самостоятельной работы

66. Установить, будет ли функция $w = f(z)$ в области D:
а) непрерывной,
б) равномерно непрерывной?

1) $w = \dfrac{1}{1-z}$, $D = \{z:\ |z| < 1\}$;

2) $w = e^{\frac{1}{z}}$, $D = \{z:\ 0 < |z| < 1\}$;

3) $w = \dfrac{1}{1+z^2}$, $D = \{z:\ |z| < 1\}$;

4) $w = e^{-\frac{1}{z^2}}$, $D = \left\{z:\ 0 < |z| \leqslant 1, |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{6}\right\}$;

5) $w = e^{-\frac{1}{z}}$, $D = \left\{z:\ 0 < |z| < 1, |\arg z| \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

67. Доказать следующие утверждения.

1) Если $f'(z) = 0$ в области G, то $f(z) \equiv \text{const}$ в G.

2) Если $w = f(z)$ дифференцируема в области G и в этой области $\operatorname{Im} f(z) = \big(\operatorname{Re} f(z)\big)^2$, то $f(z) \equiv \text{const}$ в G.

3) Пусть $w = f(z) = u(x) + iv(x)$. Если $f(z)$ дифференцируема в области G, то $f(z) = az + b$, причем $a \in \mathbb{R}$.

4) Если функции $f(z)$ и $\overline{f(z)}$ одновременно аналитичны в области G, то $f(z) \equiv \text{const}$ в G.

5) Если $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Im} f(z)$ в области G и функция $w = f(z)$ является дифференцируемой в этой области, то $f'(z) \equiv 0$ в G.

6) Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = |f(z)|e^{i \arg f(z)}$ аналитична в области G. Если одна из функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $|f(z)|$, $\arg f(z)$ тождественно равна постоянной в G, то $f(z) \equiv \text{const}$ в G.

68. Доказать следующие утверждения.

1) Если функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ является аналитической в области G, то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются сопряженными гармоническими функциями в G.

2) Частные производные гармонической функции в области G являются гармоническими в этой области.

3) Если функция $u(x, y) \not\equiv \text{const}$ является гармонической в области G, то функция $u^2(x, y)$ не является гармонической в этой области.

4) Если функции $u(x, y)$ и $f\big(u(x, y)\big)$ являются гармоническими в области G, то $f(u) = au + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

5) Пусть функция $w = f(z) \not\equiv \text{const}$ является аналитической в области G. Тогда
1) функция $|f(z)|$ не является гармонической в G;
2) функция $\arg f(z)$ является гармонической в G;
3) функция $\ln |f(z)|$ является гармонической в G, если $f(z) \neq 0$ в G.

69. Пусть $\varphi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция на всей действительной прямой $\mathbb{R}$, отличная от постоянной. Выяснить, существуют ли гармонические функции указанного вида (в случае существования найти их):

1) $u = \varphi(x + y^2)$;

2) $u = \varphi\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

3) $u = \varphi\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

4) $u = \varphi\left(\dfrac{x^2 + y^2}{y}\right)$;

5) $u = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$;

6) $u = \varphi(y)$;

7) $u = \varphi(x) + \varphi(y)$.

3.4. Задания творческого характера

70. Функция $w = f(z)$ определена в окрестности точки z_0 и дифференцируема в точке z_0, причем $f'(z_0) \neq 0$. Доказать, что значения $f(z)$ в окрестности z_0 не могут лежать по одну сторону от прямой, проходящей через точку $f(z_0)$.

71. Доказать существование и найти аналитическую функцию $w = f(z)$, если:

1) $|f(z)| = (x^2 + y^2)e^x$;

2) $\arg f(z) = xy$;

3) $\left|f(re^{i\varphi})\right| = e^{r^2 \cos 2\varphi}$;

4) $\arg\left(f(re^{i\varphi})\right) = \varphi + r\sin\varphi$.

72. Показать, что уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

в полярных координатах

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

73. Пусть $z = re^{i\varphi}$ и

$$w = f(z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + iv(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \\ = u_1(r,\varphi) + iv_1(r,\varphi).$$

Показать, что условия Коши – Римана в полярных координатах имеют вид

$$\begin{cases} r\dfrac{\partial u_1}{\partial r} = \dfrac{\partial v_1}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \varphi} = -r\dfrac{\partial v_1}{\partial r}. \end{cases}$$

74. Пусть $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Определим формальные производные по z и $\overline{z}$ равенствами

$$f_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad f_{\overline{z}} = \frac{\partial w}{\partial \overline{z}},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

1) Доказать, что уравнения Коши – Римана эквивалентны уравнению

$$f_{\overline{z}} = 0.$$

2) Доказать, что уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$

75. Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и $f(z_0) = c_0$. Доказать, что

1) $f(z) = 2u\left(\dfrac{z + \overline{z_0}}{2}, \dfrac{z - \overline{z_0}}{2i}\right) - \overline{c_0};$

2) $f(z) = 2iv\left(\dfrac{z + \overline{z_0}}{2}, \dfrac{z - \overline{z_0}}{2i}\right) + \overline{c_0}.$

Глава 4

Геометрический смысл модуля и аргумента производной

4.1. Задания для аудиторной работы

76. Отображение производится с помощью функции $w = z^3$. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0:

1) $z_0 = 1$; [Решение] [Ответ]

2) $z_0 = i$; [Ответ]

3) $z_0 = 1 + i$; [Решение] [Ответ]

4) $z_0 = 1 - i$; [Ответ]

5) $z_0 = -1 + i$; [Ответ]

6) $z_0 = -1 - i$. [Ответ]

77. Отображение производится с помощью функции $w = f(z)$. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0:

1) $w = z^2 + 1$, $z_0 = 1 - i$; [Ответ]

2) $w = e^{2z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $w = \ln z$, $z_0 = 1 + i$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{1 - iz}{1 + iz}$, $z_0 = 1$; [Ответ]

5) $w = \sin z$, $z_0 = i$; [Ответ]

6) $w = z^4$, $z_0 = i$. [Ответ]

78. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w = f(z)$?

1) $w = z^4$; [Решение] [Ответ]

2) $w = z^2 - z$; [Решение] [Ответ]

3) $w = \dfrac{1}{z}$; [Ответ]

4) $w = e^z$; [Ответ]

5) $w = \ln z$; [Ответ]

6) $w = \ln(z - 1)$. [Ответ]

79. Найти множество всех точек, в которых коэффициент растяжения равен 1, если отображение задано следующими функциями:

1) $w = iz^2$; [Ответ]

2) $w = z^2 + 2z$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{1}{z}$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$; [Ответ]

5) $w = e^z$; [Ответ]

6) $w = z^2 - 6z$. [Ответ]

80. Найти множество всех точек, в которых угол поворота равен нулю, если отображение задано следующими функциями:

1) $w = -z^2$; [Ответ]

2) $w = iz^3$; [Ответ]

3) $w = z^2 + iz$; [Ответ]

4) $w = z^2 - 8z$; [Ответ]

5) $w = e^z$; [Ответ]

6) $w = z^4$. [Ответ]

81. Найти угол между образами кривых γ_1 и γ_2 при отображении $w = z^2$ в точке z_0:

1) $\gamma_1: \ z = t + it, \ t \in [-1, 1], \ \gamma_2: \ z = t, \ t \in [-1, 1]$; [Решение] [Ответ]

2) $\gamma_1: \ z = t + it^2, \ t \in [-1, 2], \ \gamma_2: \ z = it, \ t \in [-2, 1]$; [Ответ]

3) $\gamma_1: \ z = it, \ t \in [0, 1], \ \gamma_2: \ z = t + it^3, \ t \in [0, 1]$; [Ответ]

4) $\gamma_1: \ z = t^2 + it, \ t \in [-1, 2], \ \gamma_2: \ z = t + it, \ t \in [-1, 1]$; [Ответ]

5) $\gamma_1: \ z = t + i\sin t, \ t \in [0, 1], \ \gamma_2: \ z = it, \ t \in [0, 1]$; [Ответ]

6) $\gamma_1: \ z = t + i\sin^2 t, \ t \in [-1, 1], \ \gamma_2: \ z = t + it^2, \ t \in [-1, 1]$. [Решение] [Ответ]

4.2. Базовые индивидуальные задания

82. Отображение производится с помощью функции $w = f(z)$. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0:

1) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$;

2) $w = z^3$, $z_0 = 1$;

3) $w = z^4$, $z_0 = 1$;

4) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$;

5) $w = z^3$, $z_0 = i$;

6) $w = z^4$, $z_0 = i$;

7) $w = z^2$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$;

8) $w = z^3$, $z_0 = 1 + i$;

9) $w = z^4$, $z_0 = 1 + i$;

10) $w = z^2$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$;

11) $w = z^3$, $z_0 = 1 - i$;

12) $w = z^4$, $z_0 = 1 - i$;

13) $w = z^2$, $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

14) $w = z^3$, $z_0 = -1 + i$;

15) $w = z^4,\ z_0 = -1 + i;$

16) $w = z^2,\ z_0 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

17) $w = z^3,\ z_0 = -1 - i;$

18) $w = z^4,\ z_0 = -1 - i;$

19) $w = z^2,\ z_0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

20) $w = z^3,\ z_0 = 2 + 2i.$

83. Отображение производится с помощью функции $w = f(z)$. Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0:

1) $w = e^z,\ z_0 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4};$

2) $w = e^z,\ z_0 = -2 + i\dfrac{\pi}{4};$

3) $w = z^3,\ z_0 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} + \dfrac{i}{\sqrt{3}};$

4) $w = \ln z,\ z_0 = 1 + i;$

5) $w = \ln z,\ z_0 = 1 - i;$

6) $w = \ln z,\ z_0 = -1 + i;$

7) $w = \ln z,\ z_0 = -1 - i;$

8) $w = \dfrac{1 - iz}{1 + iz},\ z_0 = 1;$

9) $w = e^z,\ z_0 = \ln 3 - i\dfrac{\pi}{2};$

10) $w = e^z$, $z_0 = -3 - i\dfrac{\pi}{2}$;

11) $w = z^3$, $z_0 = \dfrac{5}{\sqrt{3}} + i\dfrac{2}{\sqrt{3}}$;

12) $w = \ln z$, $z_0 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$;

13) $w = \ln z$, $z_0 = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$;

14) $w = \ln z$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{1}{2}$;

15) $w = \ln z$, $z_0 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{1}{2}$;

16) $w = \dfrac{2 - iz}{2 + iz}$, $z_0 = 2$;

17) $w = e^z$, $z_0 = \ln 4 + i\dfrac{\pi}{3}$;

18) $w = e^z$, $z_0 = -4 + i\dfrac{\pi}{3}$;

19) $w = z^3$, $z_0 = \dfrac{4}{\sqrt{3}} + i\sqrt{3}$;

20) $w = \ln z$, $z_0 = 3 + 3i$.

84. Какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается, если отображение осуществляется функцией $w = f(z)$?

1) $w = 2e^{\frac{z}{2}}$;

2) $w = 3iz^4$;

3) $w = 2iz^3$;

4) $w = 4iz^2$;

5) $w = \ln(z+2)$;

6) $w = \dfrac{1}{z+1}$;

7) $w = z^2 + 4z + 8$;

8) $w = 3e^{\frac{z}{3}}$;

9) $w = 2iz^4$;

10) $w = 4iz^3$;

11) $w = 2iz^2$;

12) $w = \ln(z+5)$;

13) $w = \dfrac{1}{z+3}$;

14) $w = z^2 + 2z + 4$;

15) $w = 5e^{\frac{z}{5}}$;

16) $w = 4iz^4$;

17) $w = 3iz^3$;

18) $w = 5iz^2$;

19) $w = \ln(z+3)$;

20) $w = \dfrac{1}{z+2}$.

85. Найти множество всех точек, в которых коэффициент растяжения равен 1, если отображение задано следующими функциями:

1) $w = 5iz^2$;

2) $w = z^2 - 6z$;

3) $w = \dfrac{1}{z+4}$;

4) $w = \dfrac{z+3i}{z-3i}$;

5) $w = 4e^{\frac{z}{4}}$;

6) $w = 3iz^2$;

7) $w = z^2 - 10z$;

8) $w = \dfrac{1}{z+2}$;

9) $w = \dfrac{z+7i}{z-7i}$;

10) $w = 3e^{\frac{z}{3}}$;

11) $w = 4iz^2$;

12) $w = z^2 - 14z$;

13) $w = \dfrac{1}{z+8}$;

14) $w = \dfrac{z+9i}{z-9i}$;

15) $w = 8e^{\frac{z}{8}}$;

16) $w = 9iz^2$;

17) $w = z^2 - 8z$;

18) $w = \dfrac{1}{z+7}$;

19) $w = \dfrac{z+7i}{z-7i}$;

20) $w = 5e^{\frac{z}{5}}$.

86. Найти множество всех точек, в которых угол поворота равен нулю, если отображение задано следующими функциями:

1) $w = 6iz^4$;

2) $w = 5z^4$;

3) $w = z^2 - 6z$;

4) $w = 4iz^3$;

5) $w = -5z^3$;

6) $w = 2iz^2$;

7) $w = -6z^2$;

8) $w = 5iz^4$;

9) $w = 3z^4$;

10) $w = z^2 - 14z$;

11) $w = 2iz^3$;

12) $w = -4z^3$;

13) $w = 8iz^2$;

14) $w = -3z^2$;

15) $w = 8iz^4$;

16) $w = 7z^4$;

17) $w = z^2 - 10z$;

18) $w = 9iz^3$;

19) $w = -6z^3$;

20) $w = 7iz^2$.

4.3. Задания для самостоятельной работы

87. Найти угол между образами кривых γ_1 и γ_2 при отображении $w = e^z$ в точке z_0:

1) $\gamma_1 : \; z = t + i\sin^2 t, \; t \in [0,1], \gamma_2 : \; z = \sin t + it, \; t \in [-1,1]$;

2) $\gamma_1 : \; z = t^5 + it, \; t \in [-1,1], \gamma_2 : \; z = \sin^3 t + it, \; t \in [-2,1]$;

3) $\gamma_1 : \; z = t + it, \; t \in [-1,1], \gamma_2 : \; z = t^2 + it, \; t \in [-2,1]$;

4) $\gamma_1 : \; z = te^t + it, \; t \in [0,1], \gamma_2 : \; z = t + i\sin t, \; t \in [-1,1]$;

5) $\gamma_1 : \; z = t^2 + it, \; t \in [0,1], \gamma_2 : \; z = t + it^4, \; t \in [0,1]$;

6) $\gamma_1 : \; z = t\cos t + it, \; t \in [-1,1], \gamma_2 : \; z = t + it^3, \; t \in [-1,1]$.

88. Найти площадь области, на которую функция $w = e^z$ отображает прямоугольник: $D = \{z = x + iy : \; x_1 \leqslant x \leqslant x_2, y_1 \leqslant y \leqslant y_2\}$.

1) $x_1 = 1, \; x_2 = 2, \; y_1 = 0, \; y_2 = 2\pi$;

2) $x_1 = -1, \; x_2 = 0, \; y_1 = \dfrac{\pi}{4}, \; y_2 = \dfrac{9\pi}{4}$;

3) $x_1 = 0, \; x_2 = 3, \; y_1 = -\pi, \; y_2 = \pi$;

4) $x_1 = 2, \; x_2 = 3, \; y_1 = -2\pi, \; y_2 = 0$;

5) $x_1 = \ln 2, \; x_2 = \ln 3, \; y_1 = \pi, \; y_2 = 3\pi$.

89. Найти длину спирали, на которую функция $w = e^z$ отображает отрезок d:

1) $d = \{z = x + iy : \; x = y, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$;

2) $d = \{z = x + iy : \; x = -y, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$;

3) $d = \{z = x + iy: \ y = 0, \pi \leqslant x \leqslant 3\pi\}$;

4) $d = \{z = x + iy: \ y = 1, 0 \leqslant x \leqslant 2\pi\}$;

5) $d = \{z = x + iy: \ x = y, -\pi \leqslant x \leqslant \pi\}$.

4.4. Задания творческого характера

90. Найти коэффициент растяжения и угол поворота лучей $\gamma_1 = \{z : \arg z = 0\}$, $\gamma_2 = \{z : \arg z = \pi/4\}$ в точке $z_0 = 0$ при недифференцируемом отображении $w = 2z + i\bar{z}$.

91. В каких точках плоскости угол поворота отображения $w = \frac{1+iz}{1-iz}$ равен нулю? В каких точках коэффициент растяжения этого отображения равен 1?

92. Пусть функция $w = f(z)$ является аналитической в замыкании области D, а G — образ области D при отображении f. Доказать, что если отображение f в области D однолистно, то для пложади $\mu(G)$ области G справедлива формула

$$\mu(G) = \iint\limits_D \left|f'(z)\right|^2 dxdy.$$

93. Доказать, что если L — произвольная кусочно-гладкая кривая в области D, а Γ — ее образ при отображении f, то длина $|\Gamma|$ кривой Γ вычисляется по формуле

$$|\Gamma| = \int\limits_L \left|f'(s)\right| ds,$$

при этом функция f предполагается аналитической в области D, но не обязательно однолистной.

94. Применяя формулы из предыдущих задач 92 и 93 для отображения $f(z) = z^3$, области $D = \left\{z : 1 < |z| < 2, |\arg z| < \frac{\pi}{4}\right\}$, $L = \partial D$, доказать, что для $G = f(D)$ и $\Gamma = f(L)$ справедливы равенства:

$$\mu(G) = \frac{189\pi}{4}, \quad |\Gamma| = 14 + \frac{27}{2}\pi.$$

Глава 5

Линейная функция

5.1. Задания для аудиторной работы

95. Представить линейное отображение $w = az + b$ в виде композиции отображений растяжения, поворота и параллельного переноса:

1) $w = iz + i$; [Ответ]

2) $w = -iz - 1 + i$; [Ответ]

3) $w = (1 + i)z + 1$; [Ответ]

4) $w = (1 - i)z - i$; [Ответ]

5) $w = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) z - 1$; [Ответ]

6) $w = (-1 - i)z + 1$. [Решение] [Ответ]

96. Найти линейное отображение треугольника ABC в плоскости (z) на подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ плоскости (w):

1) $A = 8 + 2i,\ B = 12 + 2i,\ C = 10 + 4i,\ A_1 = 0,\ B_1 = -2i,\ C_1 = 1 - i$; [Ответ]

2) $A = 0,\ B = 4,\ C = 4i,\ A_1 = 4 + 4i,\ B_1 = 0,\ C_1 = 8$; [Ответ]

3) $A = 7 + 2i,\ B = 11 + 2i,\ C = 9 + 4i,\ A_1 = 0,\ B_1 = -2i,\ C_1 = 1 - i$; [Ответ]

4) $A = 0,\ B = 6,\ C = 6i,\ A_1 = 6 + 6i,\ B_1 = 0,\ C_1 = 12$; [Ответ]

5) $A = 5 + 2i,\ B = 9 + 2i,\ C = 7 + 4i,\ A_1 = 0,\ B_1 = -2i,\ C_1 = 1 - i$; [Ответ]

6) $A = 0,\ B = 1,\ C = i,\ A_1 = 1 + i,\ B_1 = 0,\ C_1 = 2$. [Решение] [Ответ]

97. Найти линейное отображение с неподвижной точкой z^*, переводящее точку z_1 в точку w_1:

1) $z^* = 2 + 4i$, $z_1 = 2i$, $w_1 = -2i$; [Ответ]

2) $z^* = 0$, $z_1 = i$, $w_1 = -i$; [Ответ]

3) $z^* = 1$, $z_1 = 0$, $w_1 = i$; [Ответ]

4) $z^* = i$, $z_1 = -i$, $w_1 = 0$; [Ответ]

5) $z^* = -i$, $z_1 = 1$, $w_1 = -1$; [Ответ]

6) $z^* = -1$, $z_1 = i$, $w_1 = -i$. [Решение] [Ответ]

98. Для линейного отображения $w = az + b$ найти конечную неподвижную точку z^*. Если она существует, найти угол поворота φ вокруг z^* и коэффициент растяжения k в точке z^*:

1) $w = 3z - 3 + i$; [Ответ]

2) $w = z - 2 + i$; [Ответ]

3) $w = 3iz + 1$; [Решение] [Ответ]

4) $w = 3z + 3i$; [Ответ]

5) $w = -3z + 3 + 2i$; [Ответ]

6) $w = z + 3 + 3i$. [Ответ]

99. Найти линейную функцию, которая:

1) отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{4}$; [Ответ]

2) отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{4}$; [Ответ]

3) отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{3}$; [Ответ]

4) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{3}$; [Ответ]

5) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{6}$; [Ответ]

6) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w - 6 - 3i| < 3$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{6}$. [Решение] [Ответ]

100. Найти линейную функцию, которая:

1) отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 6$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w(5 + i) < 1$; [Ответ]

2) отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 8$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(6) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w(6 + i) < 1$; [Ответ]

3) отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 10$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(7) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w(7 + i) < 1$; [Ответ]

4) отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(6) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w(6 + i) < 1$; [Ответ]

5) отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 9$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(7) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im} w(7 + i) < 1$; [Ответ]

6) отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 11$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(8) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} w(8 + i) < 1$. [Решение] [Ответ]

5.2. Базовые индивидуальные задания

101. Указать геометрический смысл (сдвиг, растяжение, поворот) следующих преобразований:

1) $w = z + 5i$;

2) $w = z + 7$;

3) $w = -z + 3i$;

4) $w = iz + 4$;

5) $w = e^{i\frac{\pi}{3}}z$;

6) $w = 6z$;

7) $w = (-1)^4\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}z$;

8) $w = z + 3i$;

9) $w = z + 5$;

10) $w = -z + 6i$;

11) $w = iz + 5$;

12) $w = e^{i\frac{\pi}{4}}z$;

13) $w = 8z$;

14) $w = (-1)^3\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}z$;

15) $w = z + 8i$;

16) $w = z + 9$;

17) $w = -z + 7i$;

18) $w = iz + 6$;

19) $w = e^{i\frac{\pi}{6}}z$;

20) $w = 4z$.

102. Найти следующие линейные преобразования:

1) Преобразование с неподвижной точкой $1 + 2i$, переводящее точку $-i$ в точку i;

2) Преобразование с неподвижной точкой $2 + i$, переводящее точку i в точку $-i$;

3) Преобразование с неподвижной точкой $3 + i$, переводящее точку $2i$ в точку $-2i$;

4) Преобразование с неподвижной точкой $2 + 4i$, переводящее точку $-i$ в точку i;

5) Преобразование с неподвижной точкой $1 + 3i$, переводящее точку i в точку $-i$;

6) Преобразование с неподвижной точкой $2 + 3i$, переводящее точку $-2i$ в точку $2i$;

7) Преобразование с неподвижной точкой $1 + 4i$, переводящее точку $2i$ в точку $-2i$;

8) Преобразование с неподвижной точкой $2 + 2i$, переводящее точку $-i$ в точку i;

9) Преобразование с неподвижной точкой $2 + i$, переводящее точку $-2i$ в точку $2i$;

10) Преобразование с неподвижной точкой $2 + 4i$, переводящее точку $2i$ в точку $-2i$;

11) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 5$, $C = 5i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 5 + 5i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 10$ плоскости w;

12) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 3 + 2i$, $B = 7 + 2i$, $C = 5 + 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w;

13) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 6$, $C = 6i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 6 + 6i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 12$ плоскости w;

14) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 8+2i$, $B = 12+2i$, $C = 10+4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w;

15) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 4$, $C = 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 4 + 4i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 8$ плоскости w;

16) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 7+2i$, $B = 11+2i$, $C = 9+4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w;

17) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 3$, $C = 3i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 3 + 3i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 6$ плоскости w;

18) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 1 + 2i$, $B = 5 + 2i$, $C = 3 + 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w;

19) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 0$, $B = 8$, $C = 8i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 8 + 8i$, $B_1 = 0$, $C_1 = 16$ плоскости w;

20) Преобразование, отображающее треугольник с вершинами в точках $A = 2 + 2i$, $B = 6 + 2i$, $C = 4 + 4i$ плоскости z на подобный ему треугольник с вершинами $A_1 = 0$, $B_1 = -2i$, $C_1 = 1 - i$ плоскости w.

103. Для указанных преобразований найти конечную неподвижную точку z_0 (если она существует), угол поворота φ вокруг нее и коэффициент растяжения k:

1) $w = -3z + 2 + i$;

2) $w = z + 2 + i$;

3) $w = -2iz + 3$;

4) $w = 2z + 3i$;

5) $w = 2z + 3 + i$;

6) $w = z + 3 + 4i$;

7) $w = 2iz + 4$;

8) $w = -3z + 2i$;

9) $w = -2z - 3 + 2i$;

10) $w = z - 2 + 3i$;

11) $w = -3iz + 1$;

12) $w = -2z + i$;

13) $w = 3z + 2 + 2i$;

14) $w = z - 3 + i$;

15) $w = 3iz + 2$;

16) $w = 3z + 4i$;

17) $w = 2z + 2 + 3i$;

18) $w = z + 2 + 4i$;

19) $w = -3iz + 1$;

20) $w = 2z + i$.

104. Найти линейную функцию, обладающую следующими свойствами.

1) Отображает круг $|z - 3i| < 6$ на круг $|w - 6| < 12$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный.

2) Отображает круг $|z - 2i| < 4$ на круг $|w - 4| < 8$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный.

3) Отображает круг $|z - 4i| < 8$ на круг $|w - 8| < 16$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный.

4) Отображает круг $|z - 5i| < 10$ на круг $|w - 10| < 20$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный.

5) Отображает круг $|z-i|<2$ на круг $|w-2|<4$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный.

6) Отображает круг $|z-6i|<12$ на круг $|w-12|<24$, так чтобы горизонтальный диаметр переходил бы в горизонтальный.

7) Отображает круг $|z|<1$ на круг $|w-2-i|<1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{2}$.

8) Отображает круг $|z|<1$ на круг $|w-2-i|<1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{2}$.

9) Отображает круг $|z|<1$ на круг $|w-2-i|<1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{4}$.

10) Отображает круг $|z|<1$ на круг $|w-2-i|<1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{4}$.

11) Отображает круг $|z|<1$ на круг $|w-2-i|<1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{3}$.

12) Отображает круг $|z|<1$ на круг $|w-2-i|<1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{3}$.

13) Отображает круг $|z|<1$ на круг $|w-2-i|<1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{6}$.

14) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-2-i| < 1$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{6}$.

15) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-4-2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{2}$.

16) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-4-2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{2}$.

17) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-4-2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{4}$.

18) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-4-2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{4}$.

19) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-4-2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{3}$.

20) Отображает круг $|z| < 1$ на круг $|w-4-2i| < 2$, так чтобы центры кругов соответствовали бы друг другу и горизонтальный диаметр переходил бы в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{3}$.

105. Найти линейную функцию, обладающую следующими свойствами.

1) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 3$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(1) = 0$.

2) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 5$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(1) = 0$.

3) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(1) = 0$.

4) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 4$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(2) = 0$.

5) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 6$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(2) = 0$.

6) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 8$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(2) = 0$.

7) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 5$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = 0$.

8) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = 0$.

9) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 3$, $x = 9$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = 0$.

10) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 6$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 0$.

11) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 8$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 0$.

12) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 4$, $x = 10$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = 0$.

13) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 0$.

14) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 9$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 0$.

15) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 5$, $x = 11$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(5) = 0$.

16) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 3$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(2) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im}(2 + i) < 1$.

17) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 5$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im}(3 + i) < 1$.

18) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 1$, $x = 7$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im}(4 + i) < 1$.

19) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 4$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(3) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im}(3 + i) < 1$.

20) Отображает полосу, заключенную между прямыми $x = 2$, $x = 6$ на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$, если $w(4) = \frac{1}{2} + i$, $\operatorname{Im}(4 + i) < 1$.

5.3. Задания для самостоятельной работы

106. Найти общую форму целого линейного преобразования, переводящего

1) полосу $-8 < y < 4$ на себя; [Ответ]

2) полосу $0 < x < 3$ на себя; [Ответ]

3) правую полуплоскость на себя; [Ответ]

4) верхнюю полуплоскость на правую; [Ответ]

5) левую полуплоскость на себя; [Ответ]

6) верхнюю полуплоскость на левую; [Ответ]

7) верхнюю полуплоскость на нижнюю; [Ответ]

8) верхнюю полуплоскость на себя. [Ответ]

107. Найти линейную функцию $w = az + b$, отображающую полосу, заключенную между данными прямыми, на полосу $0 < \operatorname{Re} w < 1$ при указанной нормировке:

1) $x = 1,\ x = 4,\ w(1) = 0;$

2) $y = x,\ y = x + 2,\ w(0) = 0;$

3) $y = -2x,\ y = -2x + 2,\ w(0) = 0;$

4) $y = 4x + 3,\ y = 4x + 6,\ w(3i) = 0;$

5) $y = -3x + 1,\ y = -3x + 5,\ w(i) = 0;$

6) $x = a,\ x = a + h,\ w\left(a + \dfrac{h}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + i,\ \operatorname{Im} w\left(a + \dfrac{h}{2} + i\right) < 1;$

7) $y = kx,\ y = kx + b,\ w(0) = 0;$

8) $y = kx + b_1,\ y = kx + b_2,\ w(ib_1) = 0.$

108. Квадрат с центром в начале координат, имеющий стороны, параллельные осям координат, подвергается линейному отображению $w = iz - 3$. В какую фигуру он преобразуется? [Ответ]

109. Найти общий вид линейной функции, отображающей полосу, ограниченную прямыми $y = x+1$, $y = x-1$ на себя. [Ответ]

110. Найти линейную функцию, отображающую круг $|z - i| < 2$ на круг $|w - 1| < 1$ так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и горизонтальный диаметр переходил в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $\frac{\pi}{4}$.

111. Найти линейную функцию, отображающую полосу, заключенную между прямыми $y = kx + b_1$, $y = kx + b_2$, на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 1$ при условии, что $w(ib_1) = 0$.

112. Найти линейную функцию, отображающую полукруг

$$D_1 = \left\{ z : \ |z - i| < \frac{1}{2}, \ \operatorname{Re} z > 0 \right\}$$

на полукруг

$$D_2 = \{ z : \ |w - 2| < 1, \ \operatorname{Im} w > 0 \}.$$

[Ответ]

113. При линейном отображении

$$w = \frac{\sqrt{5}}{3} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 2\right)} z$$

найти образ полосы, заключенной между прямыми $y = 2x$, $y = 2x + 3$. [Ответ]

5.4. Задания творческого характера

114. Найти угол между двумя параллельными прямыми в бесконечно удаленной точке.

115. Доказать, что два треугольника в $\mathbb{C}$ подобны между собой тогда и только тогда, когда их можно преобразовать друг в друга с помощью суперпозиции линейного преобразования и ?????? относительно действительной оси.

116. Найти образ полосы, заключенной между прямыми $y = kx$, $y = kx + b$, при линейном отображении

$$w = \frac{\sqrt{1+k^2}}{b} e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} k\right)} z,$$

где $k, b \in \mathbb{R}$. [Ответ]

117. Доказать, что дробно-линейное преобразование превращается в линейное тогда и только тогда, когда бесконечно удаленная точка является для него неподвижной.

118. Найти группу линейных преобразований, соответствующих при стереографической проекции вращению сферы вокруг вертикального диаметра. [Ответ]

Глава 6

Дробно-линейная функция

6.1. Задания для аудиторной работы

119. Найти образ множества G при отображении $w = 1/z$, если:

1) $G = \left\{z: \ \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{5}\right\}$; [Решение] [Ответ]

2) $G = \left\{z: \ \arg z = \dfrac{\pi}{7}\right\}$; [Ответ]

3) $G = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < 6\}$; [Ответ]

4) $G = \left\{z: \ |z - i| = \dfrac{1}{4}\right\}$; [Ответ]

5) $G = \left\{z: \ \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{6}\operatorname{Re} z\right\}$; [Ответ]

6) $G = \{z: \ |z| = 4, 0 < \arg z < \pi\}$. [Ответ]

120. Найти дробно-линейную функцию $w = w(z)$, переводящую три различные точки z_1, z_2 и z_3 соответственно в три различные точки w_1, w_2 и w_3, если:

1) $z_1 = -1,\ z_2 = \infty,\ z_3 = i,\ w_1 = 0,\ w_2 = \infty,\ w_3 = 1$; [Ответ]

2) $z_1 = -1,\ z_2 = \infty,\ z_3 = i,\ w_1 = i,\ w_2 = 1,\ w_3 = 1 + i$; [Ответ]

3) $z_1 = -3,\ z_2 = \infty,\ z_3 = 3i,\ w_1 = \infty,\ w_2 = 3i,\ w_3 = 3$; [Ответ]

4) $z_1 = -1,\ z_2 = i,\ z_3 = 1 + i,\ w_1 = i,\ w_2 = \infty,\ w_3 = 1$; [Ответ]

5) $z_1 = -1,\ z_2 = \infty,\ z_3 = i,\ w_1 = \infty,\ w_2 = i,\ w_3 = 1$; [Решение] [Ответ]

6) $z_1 = 0,\ z_2 = \infty,\ z_3 = 1,\ w_1 = -1,\ w_2 = \infty,\ w_3 = i$. [Ответ]

121. Найти образ области G при заданном дробно-линейном отображении $w = w(z)$:

1) $G = \{z: \ \operatorname{Re} z < 0\}$, $w = \dfrac{z+4}{z-4}$; [Решение] [Ответ]

2) $G = \{z: \ |z| > 3\}$, $w = \dfrac{z+3i}{z-3i}$; [Ответ]

3) $G = \{z: \ \operatorname{Re} z < 0\}$, $w = \dfrac{z+1}{z-1}$; [Ответ]

4) $G = \{z: \ \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \dfrac{z-i}{z+i}$; [Ответ]

5) $G = \{z: \ \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = \dfrac{z-1}{z+1}$; [Ответ]

6) $G = \{z: \ |z| < 1\}$, $w = \dfrac{2z-1}{z-2}$. [Ответ]

122. Найти образ области G при дробно-линейном отображении $w = w(z)$, если:

1) $G = \{z = x + iy: \ x > 0, y > 0\}$, $w = \dfrac{z-i}{z+i}$; [Решение] [Ответ]

2) $G = \{z = x + iy: \ x < 0, y > 0\}$, $w = i\dfrac{z-i}{z+i}$; [Ответ]

3) $G = \{z = x + iy: \ 0 < x < 1\}$, $w = \dfrac{z-1}{z-2}$; [Ответ]

4) $G = \{z = x + iy: \ 0 < x < 1\}$, $w = \dfrac{z-1}{z}$; [Ответ]

5) $G = \left\{z: \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $w = \dfrac{z}{z-1}$; [Ответ]

6) $G = \{z: \ 1 < |z| < 2\}$, $w = \dfrac{z}{z-1}$. [Ответ]

123. Найти множества, симметричные следующим кривым относительно окружности $\{z: |z| = 1\}$:

1) $\left\{z: |z| = \dfrac{1}{2}\right\}$; [Ответ]

2) $\{z: |z-1| = 1\}$; [Ответ]

3) $\{z: |z+i| = 1\}$; [Ответ]

4) $\left\{z: |z-2| = \sqrt{3}\right\}$; [Ответ]

5) $\{z: \operatorname{Im} z = 2\}$; [Ответ]

6) $\{z: \operatorname{Re} z = 2\}$. [Решение] [Ответ]

6.2. Базовые индивидуальные задания

124. Найти дробно-линейную функцию $w = w(z)$, переводящую три различные точки z_1, z_2 и z_3 соответственно в три различные точки w_1, w_2 и w_3. Установить во что эта функция переводит область G, если:

1) $z_1 = 3,\ z_2 = \infty,\ z_3 = -3,\ w_1 = 0,\ w_2 = 3i,\ w_3 = 3+3i;\ G = \{z:\ \operatorname{Re} z > 0\}$;

2) $z_1 = 3,\ z_2 = -3,\ z_3 = 3i,\ w_1 = 3,\ w_2 = -3,\ w_3 = 0;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$;

3) $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = \infty,\ w_1 = -i,\ w_2 = 0,\ w_3 = 1;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\}$;

4) $z_1 = 0,\ z_2 = 2,\ z_3 = \infty,\ w_1 = -2,\ w_2 = 0,\ w_3 = 2;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$;

5) $z_1 = 0,\ z_2 = \infty,\ z_3 = i,\ w_1 = 0,\ w_2 = 1+i,\ w_3 = \infty;\ G = \{z:\ \operatorname{Re} z < 0\}$;

6) $z_1 = 4,\ z_2 = 4i,\ z_3 = -4,\ w_1 = 0,\ w_2 = i,\ w_3 = 1+i;\ G = \{z:\ |z| < 4\}$;

7) $z_1 = 4,\ z_2 = -4,\ z_3 = 4i,\ w_1 = 4,\ w_2 = -4,\ w_3 = 0;\ G = \{z:\ |z| < 4\}$;

8) $z_1 = 1,\ z_2 = i,\ z_3 = -1,\ w_1 = 1,\ w_2 = 0,\ w_3 = -1;\ G = \{z:\ |z| < 1\}$;

9) $z_1 = 0,\ z_2 = -1-i,\ z_3 = 1+i,\ w_1 = -1,\ w_2 = i,\ w_3 = 1;\ G = \{z:\ \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z\}$;

10) $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = \infty,\ w_1 = -2,\ w_2 = 2i,\ w_3 = 2;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\}$;

11) $z_1 = \infty,\ z_2 = i,\ z_3 = 1+i,\ w_1 = 2,\ w_2 = 1+2i,\ w_3 = 0;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 1\}$;

12) $z_1 = -1,\ z_2 = i,\ z_3 = 1,\ w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty;\ G = \{z:\ |z| < 1\}$;

13) $z_1 = 0,\ z_2 = 5,\ z_3 = \infty,\ w_1 = -5,\ w_2 = 0,\ w_3 = 5;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\}$;

14) $z_1 = 0,\ z_2 = 1,\ z_3 = \infty,\ w_1 = -1,\ w_2 = 0,\ w_3 = 1;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\}$;

15) $z_1 = 1,\ z_2 = \infty,\ z_3 = -1,\ w_1 = i,\ w_2 = 1+i,\ w_3 = 2+i;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$;

16) $z_1 = 1,\ z_2 = \infty,\ z_3 = -1,\ w_1 = 0,\ w_2 = i,\ w_3 = 1+i;\ G = \{z:\ \operatorname{Re} z < 0\}$;

17) $z_1 = 2,\ z_2 = -2,\ z_3 = 2i,\ w_1 = -2,\ w_2 = 2,\ w_3 = 0;\ G = \{z:\ |z| > 2\};$

18) $z_1 = -1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1,\ w_1 = 1,\ w_2 = i,\ w_3 = -1;\ G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\};$

19) $z_1 = 1,\ z_2 = -i,\ z_3 = i,\ w_1 = 0,\ w_2 = 1 + i,\ w_3 = \infty;\ G = \{z:\ |z| > 1\};$

20) $z_1 = 1,\ z_2 = 1 + i,\ z_3 = 1 - i,\ w_1 = 0,\ w_2 = i,\ w_3 = \infty;\ G = \{z:\ \operatorname{Re} z > 1\}.$

125. Найти дробно-линейное отображение $w = w(z)$ области G_1 на область G_2, для которого $w(z_1) = w_1$, $\arg w'(z_1) = \alpha$, где $z_1 \in G_1$, если:

1) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = \dfrac{1}{6},\ w_1 = 0,\ \alpha = 0;$

2) $G_1 = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = 3i,\ w_1 = 0,\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2};$

3) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = \dfrac{1}{9},\ w_1 = 0,\ \alpha = 0;$

4) $G_1 = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = 5i,\ w_1 = 0,\ \alpha = 0;$

5) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\},\ z_1 = 0,\ w_1 = 0,\ \alpha = \dfrac{\pi}{2};$

6) $G_1 = \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = -9i,\ w_1 = 0,\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2};$

7) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = \dfrac{1}{7},\ w_1 = 0,\ \alpha = 0;$

8) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = \dfrac{1}{2},\ w_1 = 0,\ \alpha = \dfrac{\pi}{2};$

9) $G_1 = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = 5i,\ w_1 = 1,\ \alpha = -\dfrac{\pi}{2};$

10) $G_1 = \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = 2i,\ w_1 = 1,\ \alpha = 0.$

11) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\},\ z_1 = \dfrac{1}{6},\ w_1 = 0,\ \alpha = 0;$

12) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

13) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

14) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

15) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

16) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

17) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

18) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

19) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

20) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$.

126. Найти дробно-линейное отображение $w = w(z)$ верхней полуплоскости на полуплоскость G при указанной нормировке:

1) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(0) = 1$, $w(1) = 2$, $w(2) = \infty$;

2) $G = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, $w(1) = 1$, $w(2) = 2$, $w(3) = \infty$;

3) $G = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $w(0) = 0$, $w(1) = i$, $w(2) = \infty$;

4) $G = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, $w(-1) = -i$, $w(0) = 0$, $w(1) = i$;

5) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(0) = 1$, $w(i) = 2i$;

6) $G = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, $w(0) = 1$, $w(i) = -i$;

7) $G = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $w(1) = 1$, $w(\infty) = i$, $w(-1) = -i$;

8) $G = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, $w(0) = \infty$, $w(1) = 1$, $w(2) = 2$;

9) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $w(0) = 2$, $w(1) = 1$, $w(2) = \infty$;

10) $G = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, $w(0) = 1$, $w(i) = -2i$.

11) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

12) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

13) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

14) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

15) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

16) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

17) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

18) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

19) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$;

20) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $z_1 = \dfrac{1}{6}$, $w_1 = 0$, $\alpha = 0$.

127. Выяснить, во что преобразуется область G при дробно-линейном отображении $w = w(z)$:

1) $G = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \dfrac{z-i}{z+i}$;

2) $G = \{z : \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z < 0\}$, $w = \dfrac{z-i}{z+i}$;

3) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z < 0\}$, $w = \dfrac{z-i}{z+i}$;

4) $G = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = \dfrac{2z-i}{iz+2}$;

5) $G = \left\{z : 0 \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $w = \dfrac{z}{z+1}$;

6) $G = \left\{z : 0 \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$, $w = \dfrac{iz}{z-1}$;

7) $G = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$, $w = \dfrac{z-1}{z}$;

8) $G = \{z : \operatorname{Re} z > 1\}$, $w = \dfrac{z-1}{z-2}$;

9) $G = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, $w = \dfrac{z-1}{z}$;

10) $G = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, $w = \dfrac{z-1}{z-2}$;

11) $G = \{z : |z| < 1\}$, $w = \dfrac{z}{z-1}$;

12) $G = \{z : |z| > 2\}$, $w = \dfrac{z}{z-1}$;

13) $G = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, $w = \dfrac{z+3}{z-3}$;

14) $G = \{z :\ |z| > 8\},\ w = \dfrac{z+8i}{z-8i};$

15) $G = \{z :\ \operatorname{Re} z > 0\},\ w = \dfrac{z+6}{z-6};$

16) $G = \{z :\ |z| < 7\},\ w = \dfrac{z-7}{z+7i};$

17) $G = \{z :\ |z| > 5\},\ w = \dfrac{z+5i}{z-5i};$

18) $G = \{z :\ 1 < |z| < 2\},\ w = \dfrac{z}{z+1};$

19) $G = \{z :\ 1 < |z| < 2\},\ w = \dfrac{iz}{iz-1};$

20) $G = \{z :\ \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z < 0\},\ w = \dfrac{z+i}{z-i}.$

6.3. Задания для самостоятельной работы

128. Найти общий вид дробно-линейного отображения $w = w(z)$, переводящего область G_1 в область G_2:

1) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

2) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$;

3) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$;

4) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w < 0\}$;

5) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

6) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

7) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

8) $G_1 = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

9) $G_1 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

10) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$.

129. Найти дробно-линейное отображение $w = w(z)$ области G_1 в область G_2, удовлетворяющее заданным условиям нормировки:

1) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $w(i) = 0$, $w'(i) > 0$;

2) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : |w - i| < 2\}$, $w(i) = 0$, $w'(i) > 0$;

3) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $w(-i) = 0$, $\arg w'(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$;

4) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = 0$;

5) $G_1 = \{z : |z| < 2\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$, $w(0) = 1$, $\arg w'(0) = \dfrac{\pi}{2}$;

6) $G_1 = \{z : |z - 4i| < 2\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > \operatorname{Re} w\}$, $w(4i) = -4$, $w(2i) = 0$;

7) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, $w(i) = -i$, $\arg w'(i) = -\dfrac{\pi}{2}$;

8) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$, $w\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$, $\arg w'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$;

9) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w - 1| < 1\}$, $w(0) = \dfrac{1}{2}$, $w(1) = 0$;

10) $G_1 = \{z : |z - 2| < 1\}$, $G_2 = \{w : |w - 2i| < 2\}$, $w(2) = i$, $\arg w'(2) = 0$.

130. Отобразить круг $G = \{z : |z| < 1\}$ в себя так, чтобы отрезок действительной оси

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < a\}, \quad a < 1,$$

перешел в отрезок действительной оси, симметричный относительно начала координат.

131. Найти общий вид дробно-линейного отображения $w = w(z)$, отображающего круг $\{z : |z| < R\}$ на себя, при следующих условиях:

1) $w(a) = 0$, где $|a| < R$;

2) $w(a) = b$, где $|a| < R$, $|b| < R$;

3) $w(R) = R$.

132. Круг $\{z : |z| < R\}$ отображается на себя так, что точка $z_0 \neq 0$ переходит в центр круга. Доказать, что при этом единичная полуокружность отображается на полуокружность тогда и только тогда, когда ее концы лежат на диаметре, проходящем через точку z_0.

133. Построить дробно-линейное отображение круга $\{z : |z| < 1\}$ на себя, при котором прообраз центра находится на действительной оси, а дуга

$$\left\{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}, |z| = 1\right\}$$

единичной окружности отображается в следующие дуги:

1) $\left\{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2}, |z| = 1\right\}$;

2) $\left\{z : 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{3}, |z| = 1\right\}$;

3) $\left\{z : \frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{7\pi}{6}, |z| = 1\right\}$.

6.4. Задания творческого характера

134. Показать, что дробно-линейное преобразование имеет одну неподвижную точку z_0 (такое преобразование называется параболическим) тогда и только тогда, когда оно представимо в канонической форме

$$\frac{1}{w-z_0} = \frac{1}{z-z_0} + h, \quad z_0 \neq \infty$$

или

$$w = z + h, \quad z_0 = \infty.$$

135. Дробно-линейное преобразование с двумя различными неподвижными точками z_1 и z_2 в канонической форме имеет вид

$$\frac{w-z_1}{w-z_2} = k\frac{z-z_1}{z-z_2}, \quad z_1 \neq \infty, z_2 \neq \infty$$

$$w - z_1 = k(z-z_1), \quad z_2 = \infty.$$

Это преобразование называется гиперболическим, если $k > 0$, эллиптическим, если $k = e^{i\alpha}$, $\alpha \neq 0$, и локсодромическим, если $k = ae^{i\alpha}$, $a \neq 1$, $\alpha \neq 0$ ($a, \alpha \in \mathbb{R}$ и $a > 0$). Доказать следующие утверждения.

1) Общее дробно-линейное отображение

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

можно привести к виду

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 1.$$

2) Если $\alpha + \delta$ — действительное число, то преобразование является эллиптическим, когда $|\alpha + \delta| < 2$, гиперболическим, когда $|\alpha + \delta| > 2$, и параболическим, когда $|\alpha + \delta| = 2$.

3) Если $\operatorname{Im}(\alpha + \delta) \neq 0$, то преобразование является локсодромическим.

4) Дробно-линейное преобразование

$$w = e^{i\lambda} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}, \quad a = |a|e^{i\alpha}, \ |a| < 1,$$

переводящее круг $\{z : \ |z| < 1\}$ в себя может быть только либо эллиптическим, либо параболическим, либо гиперболическим. Выяснить, при каких значениях a имеет место каждый из указанных случаев. Найти неподвижные точки этого преобразования и привести его к каноническому виду.

136. Доказать следующие свойства гиперболического преобразования.

1) Любая окружность, проходящая через две неподвижные точки, переходит сама в себя.

2) Любая окружность, ортогональная к окружности, проходящей через неподвижные точки, переходит в окружность, обладающую этим же свойством.

137. Доказать, что при локсодромическом преобразовании $w = a\,e^{i\alpha}z$ логарифмическая спираль

$$r = A\,e^{\frac{\ln a}{\alpha}\varphi}, \quad A > 0,$$

переходит в себя.

138. Проверить, что множество всех дробно-линейных отображений, переводящих круг $D = \{z : \ |z| < 1\}$ в себя, является подгруппой всех дробно-линейное преобразований $\widehat{\mathbb{C}}$ на $\widehat{\mathbb{C}}$. Ее элементы представляются в виде

$$w = e^{i\theta} \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha}z}, \quad \operatorname{Im}\theta = 0, \ |\alpha| < 1.$$

Присоединим к ним преобразования вида

$$\overline{w} = e^{-i\theta} \frac{z - \overline{\alpha}}{1 - \alpha\overline{z}}$$

и полученную таким образом совокупность обозначим через Λ. Проверить, что Λ также является группой.

А. Пуанкаре предложил рассматривать круг D как плоскость Лобачевского, а отображения группы Λ — как движение в плоскости Лобачевского. Для этой модели все аксиомы геометрии Лобачевского выполняются, если за модели прямых Лобачевского принять дуги окружностей и отрезки прямых (диаметры окружностей), содержащихся в D и ортогональных к единичной окружности. Угол между двумя прямыми в этой модели измеряется (по определению) тем же числом, что и угол в евклидовой геометрии. Это полностью согласуется со свойством конформности дробно-линейного отображения.

Доказать, что в геометрии Лобачевского сумма углов любого треугольника меньше π.

139. Пусть даны два произвольных треугольника на модели Пуанкаре геометрии Лобачевского с попарно равными углами. Доказать, что они конгруэнтны, т.е. их можно совместить посредством некоторого движения.

Глава 7

Функция Жуковского

7.0. Некоторые предварительные замечания

Функция

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

называется *функцией Жуковского*.

При этом

$$w(0) = \infty, \quad w(\infty) = \infty.$$

Так как

$$w(z) = w\left(\frac{1}{z}\right),$$

то множества значений, принимаемые функцией Жуковского внутри и вне единичного круга, одинаковы.

Функция Жуковского взаимно однозначно отображает как внутренность, так и внешность круга $|z| < 1$ на внешность отрезка $-1 \leqslant u \leqslant 1$ действительной оси.

Окружности $|z| = r$ отображаются на эллипсы с фокусами ± 1 и полуосями $\frac{1}{2}\left(r \pm \frac{1}{r}\right)$.

Пары диаметров, симметричных относительно координатных осей, составленных из радиусов $z = \pm r\, e^{i\alpha}$, $0 \leqslant r < 1$, отображаются на гиперболы с фокусами ± 1 и полуосями $|\cos\alpha|$, $|\sin\alpha|$ с исключением вершин этих гипербол.

Отображение функцией Жуковского является конформным во всей расширенной комплексной плоскости за исключением точек ± 1.

7.1. Задания для аудиторной работы

140. Найти образ множества E при отображении с помощью функции Жуковского, если:

1) $E = \{z: \ \arg z = \pi\}$; [Ответ]

2) $E = \{z: \ |z| = R < 1\}$; [Ответ]

3) $E = \left\{z: \ \arg z = \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

4) $E = \{z: \ |z| = R > 1\}$; [Ответ]

5) $E = \left\{z: \ \arg z = \dfrac{\pi}{4}\right\}$; [Ответ]

6) $E = \{z: \ |z| = 1\}$. [Решение] [Ответ]

141. Найти область, на которую функция Жуковского отображает множество G:

1) $G = \left\{z: \ |z| < \dfrac{1}{2}\right\}$; [Ответ]

2) $G = \{z: \ |z| > 2\}$; [Ответ]

3) $G = \{z: \ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

4) $G = \{z: \ \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

5) $G = \{z: \ |z| < 1\}$; [Ответ]

6) $G = \{z: \ |z| > 1\}$. [Решение] [Ответ]

142. Найти образ области G при отображении с помощью функции Жуковского, если:

1) $G = \{z:\ |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

2) $G = \{z:\ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

3) $G = \{z:\ |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

4) $G = \{z:\ 1 < |z| < R, \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

5) $G = \{z:\ R < |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

6) $G = \left\{z:\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}\right\}$. [Решение] [Ответ]

143. Найти образ области G при отображении с помощью функции Жуковского, если:

1) $G = \{z:\ |z| < 1\} \setminus \left[-\dfrac{1}{5}, 1\right]$; [Ответ]

2) $G = \left\{z:\ \dfrac{1}{4} < |z| < 1\right\} \setminus \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

3) $G = \{z:\ 1 < |z| < 5\} \setminus \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

4) $G = \{z:\ 1 < |z| < 2\} \setminus \{z:\ \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

5) $G = \{z:\ |z| > 1\} \setminus \big\{z:\ z \in [-6, -1] \cup [1, +\infty)\big\}$; [Ответ]

6) $G = \{z:\ |z| < 1\} \setminus \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$. [Решение] [Ответ]

144. Используя свойства функции Жуковского отобразить область G_1 на область G_2, если:

1) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\} \setminus \left\{[-1, 0] \cup \left[\dfrac{1}{4}, 1\right]\right\}$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

2) $G_1 = \{z:\ |z| < 1\} \setminus \left[-1, -\dfrac{1}{4}\right]$, $G_2 = \{w:\ |w| < 1\}$; [Ответ]

3) $G_1 = \{z:\ |z|<1\} \setminus \left\{[-1,0] \cup \left[\frac{1}{3}, 1\right]\right\}$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

4) $G_1 = \{z:\ |z|<1\} \setminus \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, $G_2 = \{w:\ \operatorname{Re} w > 0\}$; [Ответ]

5) $G_1 = \{z:\ |z|<1\} \setminus \left[-1, -\frac{1}{10}\right]$, $G_2 = \{w:\ |w|<1\}$; [Ответ]

6) $G_1 = \{z:\ |z|<1\} \setminus \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $G_2 = \{w:\ |w|<1\}$. [Решение] [Ответ]

7.2. Базовые индивидуальные задания

145. Найти образ множества G при отображении с помощью функции Жуковского, если:

1) $G = \left\{z : \dfrac{1}{2} < |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\right\}$;

2) $G = \{z : |z| < 1\} \setminus \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$;

3) $G = \{z : |z| > 1\} \setminus \{[-4, -1] \cup [1, +\infty)\}$;

4) $G = \{z : |z| < 1\} \setminus \left[-\dfrac{1}{2}, 1\right]$;

5) $G = \{z : |z| > 5\}$;

6) $G = \{z : |z| = 3\}$;

7) $G = \left\{z : \dfrac{1}{3} < |z| < 3, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\right\}$;

8) $G = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$;

9) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$;

10) $G = \left\{z : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

11) $G = \left\{z : |z| > 1, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

12) $G = \left\{z : \dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}\right\}$;

13) $G = \left\{z : \dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{5\pi}{6}\right\}$;

14) $G = \left\{z: \ \frac{1}{8} < |z| < 8, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\right\}$;

15) $G = \left\{z: \ |z| = \frac{1}{4}\right\}$;

16) $G = \{z: \ 1 < |z| < 5, \operatorname{Im} z < 0\}$;

17) $G = \left\{z: \ \frac{1}{5} < |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\right\}$;

18) $G = \left\{z: \ \arg z = -\frac{\pi}{3}\right\}$;

19) $G = \left\{z: \ \arg z = -\frac{\pi}{2}\right\}$;

20) $G = \left\{z: \ \frac{1}{3} < |z| < 3, \operatorname{Im} z < 0, \operatorname{Re} z < 0\right\}$.

146. Используя свойства функции Жуковского отобразить область G_1 на область G_2, если:

1) $G_1 = \{z: \ |z| < 1\} \setminus \left[\frac{1}{3}, 1\right]$, $G_2 = \{w: \ \operatorname{Im} w > 0\}$;

2) $G_1 = \{z: \ |z| < 1\} \setminus \left\{[-1, 0] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$, $G_2 = \{w: \ \operatorname{Im} w > 0\}$;

3) $G_1 = \{z: \ |z| > 1\} \setminus \{[-4, -1] \cup [1, +\infty)\}$, $G_2 = \{w: \ \operatorname{Im} w > 0\}$;

4) $G_1 = \{z: \ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z: \ |z| < \frac{1}{6}\right\}$, $G_2 = \{w: \ |w| < 1\}$;

5) $G_1 = \{z: \ |z| < 1\} \setminus \left[-1, -\frac{1}{5}\right]$, $G_2 = \{w: \ |w| < 1\}$;

6) $G_1 = \{z: \ |z| > 1\} \setminus \{[-8, -1] \cup [1, +\infty)\}$, $G_2 = \{w: \ \operatorname{Im} w > 0\}$;

7) $G_1 = \{z: \ |z| > 1\} \setminus [1, 2]$, $G_2 = \{w: \ \operatorname{Im} w < 0\}$;

8) $G_1 = \{z : |z| < 1\} \setminus \left\{\left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

9) $G_1 = \{z : |z| < 1\} \setminus \left\{\left[-1, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, 1\right]\right\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

10) $G_1 = \{z : |z| > 1\} \setminus [-4, -1]$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$;

11) $G_1 = \mathbb{C} \setminus [-8, 8]$, $G_2 = \{w : |w| > 1\}$;

12) $G_1 = \{z : |z| > 1\} \setminus \{[-5, -1] \cup [1, +\infty)\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$;

13) $G_1 = \{z : |z| < 1\} \setminus \left[-1, -\frac{1}{8}\right]$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

14) $G_1 = \mathbb{C} \setminus [-4, 1]$, $G_2 = \{w : |w| > 1\}$;

15) $G_1 = \mathbb{C} \setminus [-5, 5]$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

16) $G_1 = \{z : |z| < 10\} \setminus \{[-10, 1] \cup [5, 10]\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

17) $G_1 = \{z : |z| < 6\} \setminus \{[-6, 1] \cup [3, 6]\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$;

18) $G_1 = \{z : |z| < 1\} \setminus \left[-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right]$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

19) $G_1 = \{z : |z| < 20\} \setminus \{[-20, 1] \cup [10, 20]\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$;

20) $G_1 = \{z : |z| > 1\} \setminus [-10, -1]$, $G_2 = \{w : |w| > 1\}$.

7.3. Задания для самостоятельной работы

147. Используя свойства функции Жуковского отобразить область G_1 на область G_2, если:

1) $G_1 = \{z :\ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left[\frac{1}{2}\, i, i\right]$, $G_2 = \{w :\ \operatorname{Im} w > 0\}$;

2) $G_1 = \{z :\ |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\} \setminus \left[-\frac{1}{3}\, i, i\right]$, $G_2 = \{w :\ \operatorname{Im} w > 0\}$;

3) $G_1 = \{z :\ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left[\frac{1}{4}\, i, i\right]$, $G_2 = \{w :\ \operatorname{Im} w < 0\}$;

4) $G_1 = \{z :\ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left[0, \frac{1}{2}\, i\right]$, $G_2 = \{w :\ \operatorname{Im} w > 0\}$;

5) $G_1 = \{z :\ |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\} \setminus \left[0, -\frac{1}{3}\, i\right]$, $G_2 = \{w :\ \operatorname{Im} w > 0\}$;

6) $G_1 = \{z :\ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, \alpha i]$, $0 < \alpha < 1$, $G_2 = \{w :\ \operatorname{Im} w > 0\}$;

7) $G_1 = \{z :\ |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [\alpha i, i]$, $0 < \alpha < 1$, $G_2 = \{w :\ \operatorname{Im} w < 0\}$;

8) $G_1 = \{z :\ |z| < 1\} \setminus \left[\frac{1}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right]$, $G_2 = \{w :\ |w| < 1\}$;

9) $G_1 = \{z :\ |z| < 1\} \setminus \left[\frac{1}{4}\, e^{i\frac{\pi}{3}}, e^{i\frac{\pi}{3}}\right]$, $G_2 = \{w :\ |w| < 1\}$;

10) $G_1 = \{z :\ |z| > 1\} \setminus \left[e^{i\frac{\pi}{6}}, 4e^{i\frac{\pi}{6}}\right]$, $G_2 = \{w :\ |w| > 1\}$;

11) $G_1 = \{z :\ |z| < 1\} \setminus \left[(1-h)e^{i\alpha}, e^{i\alpha}\right]$, $G_2 = \{w :\ |w| < 1\}$ $(0 < h < 1)$;

12) $G_1 = \{z :\ |z| > 1\} \setminus \left[e^{i\alpha}, h\, e^{i\alpha}\right]$, $G_2 = \{w :\ |w| < 1\}$ $(h > 1)$;

13) $G_1 = \{z : |z| < 1\} \setminus \{[-1, -b] \cup [a, 1]\}$ $(0 < a < 1,\ 0 < b < 1)$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$;

14) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z = x + iy : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \leqslant 1, y > 0\right\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

15) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z = x + iy : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1, y > 0\right\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

16) $G_1 = \mathbb{C} \setminus [-c, c]$ $(c > 0)$, $G_2 = \{w : |w| > 1\}$;

17) $G_1 = \left\{z = x + iy : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} > 1\right\}$, $G_2 = \{w : |w| > 1\}$;

18) $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \mathbb{C} \setminus \left\{\left(-\infty, -\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)\right\}$;

19) $G_1 = \{z : |z| > 1\} \setminus \{[-a, -1] \cup [1, +\infty)\}$ $(a > 1)$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

20) $G_1 = \{z : |z| < 1\} \setminus \{[-1, 0] \cup [a, 1]\}$ $(0 < a < 1)$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

7.4. Задания творческого характера

148. Область

$$G = \{z : |z| < 1\} \setminus \{[-1, -b] \cup [a, 1]\} \quad (0 < a < 1,\ 0 < b < 1)$$

отобразить на круг $\{w : |w| < 1\}$ так, чтобы $w(0) = 0$, $w'(0) > 0$. Определить $w'(0)$ и длины дуг, соответствующих разрезам.

149. Представив функцию Жуковского в виде

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2,$$

найти:

1) образ окружности Γ, проходящей через точки $z = \pm 1$ и образующей угол α $(-\pi < \alpha < \pi)$ с действительной осью в точке $z = 1$. Определить область, на которую отображается внешность такой окружности;

2) образ окружности Γ_1, проходящей через точку $z = 1$ под углом α $(-\pi < \alpha < \pi)$ к действительной оси и содержащей внутри точку -1. Определить область, на которую отображается внешность такой окружности.

150. Отобразить внешность единичного круга $G_1 = \{z : |z| < 1\}$ на область

$$G_2 = \mathbb{C} \setminus \left\{w : \arg\frac{w-1}{w+1} = \beta\right\} \quad (0 < |\beta| < \pi)$$

так, чтобы $w(\infty) = \infty$, $\arg w'(\infty) = \alpha$.

151. Отобразить на верхнюю полуплоскость и на внешность единичного круга область

$$G = \mathbb{C} \setminus \{[-a, b] \cup [-ci, ci]\} \quad (a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ c \geqslant 0,\ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0).$$

152. Отобразить на верхнюю полуплоскость внешность единичного круга с разрезами по отрезкам: $[i, bi]$, $[-bi, i]$, $[1, a]$, $[-a, -1]$ $(a > 1,\ b > 1)$.

153. Отобразить на верхнюю полуплоскость внутренность правой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

154. Отобразить на верхнюю полуплоскость внешность правой ветви гиперболы

$$\frac{x^2}{\cos^2\alpha} - \frac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1.$$

155. Отобразить на верхнюю полуплоскость область, заключенную между ветвями гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

156. Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезами по лучу $[-a, +\infty)$ $(a > 0)$ и по отрезку $[-ci, ci]$ $(c > 0)$.

157. Отобразить на верхнюю полуплоскость плоскость с разрезами по отрезку $[-1, b]$ $(b > -1)$ и по дуге окружности с концами в точках $e^{\pm i\alpha}$, проходящей через точку $z = -1$ (см. рисунок 7.1).

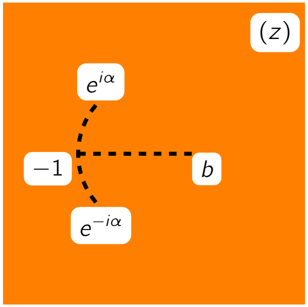


Рис. 7.1

Глава 8

Отображение с помощью элементарных функций. Интеграл Кристоффеля – Шварца. Отображение полуплоскости на треугольник.

8.1. Задания для аудиторной работы

158. Найти образы $w_1(D_1)$, $w_2(D_1)$, $w_3(D_3)$, если $w_1 = z^2$, $w_2 = z^3$, $w_3 = z^4$, а области D_i, $i = 1, 2, 3$, определены следующими равенствами:

1) $D_1 = \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left[\frac{3}{2}i, 2i\right]$, $D_2 = \left\{z : -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}, |z| < 4\right\}$, $D_3 = \left\{z : -\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4}, |z| < 2\right\}$; [Решение] [Ответ]

2) $D_1 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\} \setminus [-6, -3]$, $D_2 = \left\{z : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{15}, 5 < |z| < 10\right\}$, $D_3 = \left\{z : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$. [Ответ]

159. Найти образы $w_1(D_1)$, $w_2(D_1)$, если $w_1 = e^z$, $w_2 = \ln z$ (главная ветвь логарифма, т.е. $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$), а области D_i, $i = 1, 2$, определены следующими равенствами:

1) $D_1 = \left\{z : 2 < \operatorname{Re} z < 4, \dfrac{\pi}{6} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}\right\}$, $D_2 = \{z : 1 < |z| < e, 0 < \arg z < \pi\}$; [Решение] [Ответ]

2) $D_1 = \left\{z : \ln 4 < \operatorname{Re} z < \ln 8, \dfrac{\pi}{12} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}\right\}$, $D_2 = \left\{z : e < |z| < 6, 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

3) $D_1 = \left\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \ln 2, \dfrac{\pi}{6} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3}\right\}$, $D_2 = \left\{z : 1 \leqslant |z| \leqslant e, 0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$. [Ответ]

160. Найти образы $w(D_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, где $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ — функция Жуковского, а области D_i, $i = 1, 2, 3, 4$, заданы следующими равенствами:

1) $D_1 = \{z : |z| < 2\}$, $D_2 = \left\{z : |z| < \dfrac{1}{2}\right\}$, $D_3 = \{z : |z| < 1\}$, $D_4 = \{z : |z| > 1\}$; [Ответ]

2) $D_1 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_2 = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z < 0\}$, $D_3 = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_4 = \{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

3) $D_1 = \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$, $D_2 = \left\{z : \frac{1}{2} < |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $D_3 = \left\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0, \operatorname{Re} z > 0\right\}$, $D_4 = \left\{z : \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\right\}$. [Решение] [Ответ]

161. Найти образ области D при отображении $w = f(z)$:

1) $w = \cos z,\ D = \left\{z:\ -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2},\ \operatorname{Im} z > 0\right\}$; [Решение] [Ответ]

2) $w = \cos z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \pi,\ \operatorname{Im} z < 0\}$; [Ответ]

3) $w = \operatorname{tg} z,\ D = \left\{z:\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$; [Ответ]

4) $w = \operatorname{ch} z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$; [Ответ]

5) $w = \operatorname{sh} z,\ D = \left\{z:\ \operatorname{Re} z > 0,\ |\operatorname{Im} z| < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

6) $w = \cos z,\ D = \{z:\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$. [Ответ]

162. Найти конформное и однолистное отображение области G_1 на область G_2:

1) $G_1 = \{z:\ 6 < \operatorname{Re} z < 12\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$; [Решение] [Ответ]

2) $G_1 = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{6}\right\},\ G_2 = \left\{w:\ 0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

3) $G_1 = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}} z:\ 0 < \operatorname{Im} z < 2\right\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$; [Ответ]

4) $G_1 = \{z:\ |z| = 3\},\ G_2 = \left\{w = u + iv:\ \dfrac{u^2}{\left(\frac{5}{3}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(\frac{4}{3}\right)^2} = 1\right\}$; [Ответ]

5) $G_1 = \left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\},\ G_2 = \{w:\ |w| < 1\}$; [Ответ]

6) $G_1 = \{z:\ 1 < |z| < e,\ 0 < \arg z < e\},\ G_2 = \{w:\ 2 < \operatorname{Re} w < 3,\ 0 < \operatorname{Im} w < e\}$. [Ответ]

163. Отобразить с помощью интеграла Кристоффеля – Шварца верхнюю полуплоскость на треугольник с вершинами в точках A, B и C:

1) $A(0,0),\ B(1,0),\ C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; [Ответ]

2) $A(2,0)$, $B(3,0)$, $C\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$; [Ответ]

3) $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$; [Ответ]

4) $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$; [Ответ]

5) $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$; [Ответ]

6) $A(1,1)$, $B(3,3)$, $C(-1,3)$. [Решение] [Ответ]

8.2. Базовые индивидуальные задания

164. Найти образ $w(D)$ при отображении $w = f(z)$ области D:

1) $w = z^2$, $D = \{z: \ |z| < 1, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$;

2) $w = z^3$, $D = \left\{z: \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{15}, \ 5 < |z| < 10\right\}$;

3) $w = z^2$, $D = \{z: \ \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [3, 6]$;

4) $w = z^4$, $D = \left\{z: \ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4}, \ |z| < 4\right\}$;

5) $w = z^2$, $D = \{z: \ |z| < 4, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus [0, 2]$;

6) $w = z^5$, $D = \left\{z: \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{20}, \ 4 < |z| < 8\right\}$;

7) $w = z^2$, $D = \{z: \ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, 10i]$;

8) $w = z^5$, $D = \left\{z: \ 2 < \arg z < 2 + \dfrac{2\pi}{5}\right\}$;

9) $w = z^2$, $D = \{z: \ |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [i, 2i]$;

10) $w = z^2$, $D = \{z: \ |z| < 5, \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \left[0, \dfrac{5}{2}\right]$;

11) $w = z^4$, $D = \left\{z: \ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{12}, \ 3 < |z| < 6\right\}$;

12) $w = z^2$, $D = \{z: \ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, 2i]$;

13) $w = z^3$, $D = \left\{z: \ 0 < \arg z < \dfrac{2\pi}{3}\right\}$;

14) $w = z^2$, $D = \{z:\ 4 < |z| < 8,\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [6i, 8i]$;

15) $w = z^3$, $D = \left\{z:\ \dfrac{\pi}{3} < \arg z < \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right\}$;

16) $w = z^3$, $D = \left\{z:\ \dfrac{\pi}{6} < \arg z < \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2\pi}{3}\right\}$;

17) $w = z^2$, $D = \{z:\ \operatorname{Re} z < 0\} \setminus [-10, -5]$;

18) $w = z^4$, $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{8},\ 2 < |z| < 4\right\}$;

19) $w = z^4$, $D = \left\{z:\ -\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{4},\ |z| < 2\right\}$;

20) $w = z^5$, $D = \left\{z:\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{30},\ 1 < |z| < 2\right\}$.

165. Найти образ $w(D)$ при отображении $w = f(z)$ области D ($\ln z = \ln|z| + i\arg z$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$):

1) $w = \ln z$, $D = \{z:\ e^3 < |z| < e^4,\ 0 < \arg z < \pi\}$;

2) $w = \ln z$, $D = \left\{z:\ 1 < |z| < e^2,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

3) $w = e^z$, $D = \{z:\ 1 < \operatorname{Re} z < 3,\ -1 < \operatorname{Im} z < 0\}$;

4) $w = e^z$, $D = \left\{z:\ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{3} + \pi\right\}$;

5) $w = i\ln z$, $D = \left\{z:\ 1 < |z| < e,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

6) $w = e^z$, $D = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < 1,\ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

7) $w = e^z$, $D = \left\{z:\ \ln 2 < |z| < \ln 4,\ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

8) $w = \ln z$, $D = \{z:\ 0 < \arg z < \pi\}$;

9) $w = \ln z,\ D = \left\{ z:\ |z| < 1,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \right\};$

10) $w = e^z,\ D = \left\{ z:\ \dfrac{\pi}{3} < \operatorname{Im} z < \pi \right\};$

11) $w = e^z,\ D = \left\{ e^{i\frac{\pi}{4}} z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \right\};$

12) $w = \ln z,\ D = \left\{ z:\ |z| < 1,\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{\pi}{2} \right\};$

13) $w = \ln z,\ D = \{ z:\ 1 < |z| < 2 \} \setminus [1, 2];$

14) $w = e^z,\ D = \left\{ z:\ \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{2} \right\};$

15) $w = e^z,\ D = \{ z:\ \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi \};$

16) $w = \ln z,\ D = \{ z:\ 1 < |z| < e \} \setminus [1, e];$

17) $w = \ln z,\ D = \left\{ z:\ |z| = e,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4} \right\};$

18) $w = e^{2z},\ D = \left\{ z:\ \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \dfrac{\pi}{4} \right\};$

19) $w = e^z,\ D = \{ z:\ \operatorname{Re} z > 1,\ 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \};$

20) $w = i \ln z,\ D = \left\{ z:\ 1 < |z| < e,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{3} \right\}.$

166. Для функции Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ найти образ области D.

1) $D = \{ z:\ |z| < 1 \} \setminus \left[\dfrac{1}{2}, 1 \right);$

2) $D = \left\{ z:\ |z| < \dfrac{1}{6} \right\} \setminus \left[\dfrac{1}{12}, \dfrac{1}{6} \right);$

3) $D = \left\{ z:\ \dfrac{1}{3} < |z| < 3,\ \operatorname{Re} z > 0 \right\};$

4) $D=\left\{z:\ \dfrac{1}{2}<|z|<2,\ \operatorname{Im} z>0\right\};$

5) $D=\left\{z:\ \dfrac{1}{2}<|z|<2,\ \operatorname{Re} z>0,\ \operatorname{Im} z>0\right\};$

6) $D=\left\{z:\ \dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{5\pi}{6}\right\};$

7) $D=\left\{z:\ \dfrac{\pi}{3}<\arg z<\dfrac{2\pi}{3}\right\};$

8) $D=\{z:\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\};$

9) $D=\{z:\ |z|<1,\ \operatorname{Im} z<0\};$

10) $D=\left\{z:\ \dfrac{1}{2}<|z|<1,\ \operatorname{Im} z>0\right\};$

11) $D=\left\{z:\ \dfrac{1}{2}<|z|<1,\ \operatorname{Re} z>0\right\};$

12) $D=\{z:\ |z|<1\}\setminus\left[-\dfrac{1}{3},1\right);$

13) $D=\{z:\ 1<|z|<2,\ \operatorname{Im} z>0\};$

14) $D=\{z:\ |z|>2,\ \operatorname{Im} z>0\};$

15) $D=\left\{z:\ |z|<\dfrac{1}{2},\ \operatorname{Im} z>0\right\};$

16) $D=\{z:\ 1<|z|<7,\ \operatorname{Im} z>0\};$

17) $D=\left\{z:\ |z|<\dfrac{1}{3}\right\};$

18) $D=\{z:\ |z|>3\};$

19) $D = \{z: \ |z| > 1\} \setminus \{[-2, -1] \cup [1, +\infty)\}$;

20) $D = \left\{z: \ \dfrac{1}{6} < |z| < 1, \ \operatorname{Im} z > 0\right\}$.

167. Найти образ $w(D)$ при отображении $w = f(z)$ области D:

1) $w = \cos z, \ D = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \ \operatorname{Im} z < 0\}$;

2) $w = \cos z, \ D = \left\{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, \ \operatorname{Im} z > 0\right\}$;

3) $w = \cos z, \ D = \left\{z: \ -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, \ \operatorname{Im} z > 0\right\}$;

4) $w = \cos z, \ D = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$;

5) $w = \cos z, \ D = \left\{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \ -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Im} z > \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

6) $w = \operatorname{ch} z, \ D = \{z: \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

7) $w = \operatorname{ch} z, \ D = \{z: \ \operatorname{Re} z > 0, \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

8) $w = \operatorname{ch} z, \ D = \{z: \ \operatorname{Re} z < 0, \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

9) $w = \sin z, \ D = \left\{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

10) $w = \operatorname{tg} z, \ D = \{z: \ \operatorname{Im} z = 5\}$;

11) $w = \operatorname{tg} z, \ D = \left\{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{4}\right\}$;

12) $w = \operatorname{th} z, \ D = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$;

13) $w = \operatorname{tg} z, \ D = \{z: \ \operatorname{Re} z = 4\}$;

14) $w = \operatorname{tg} z, \ D = \{z: \ 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \ \operatorname{Im} z > 0\}$;

15) $w = \operatorname{cth} z, \ D = \{z: \ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

16) $w = \operatorname{cth} z,\ D = \{z:\ \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;

17) $w = \sin z,\ D = \left\{z:\ \operatorname{Re} z = \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

18) $w = \sin z,\ D = \{z:\ \operatorname{Re} z = \pi\}$;

19) $w = \sin z,\ D = \{z:\ \operatorname{Im} z = 0\}$;

20) $w = \sin z,\ D = \left\{z:\ \operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

168. Найти конформное и однолистное отображение области G_1 на область G_2:

1) $G_1 = \{z:\ |z| > 1\} \setminus [1, 10],\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Re} w > 0\}$;

2) $G_1 = \{z:\ |z - 10i| < 10,\ |z - 5i| > 5\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Re} w > 0\}$;

3) $G_1 = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{6}\right\},\ G_2 = \left\{w:\ 0 < \arg w < \dfrac{\pi}{2}\right\}$;

4) $G_1 = \{z:\ |z - 2| < 2,\ |z - 1| > 1\},\ G_2 = \{w:\ 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$;

5) $G_1 = \{z:\ |z| > 1\} \setminus \{[-2, -1] \cup [1, +\infty)\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w < 0\}$;

6) $G_1 = \{z:\ |z - 2i| < 2,\ |z - 2| < 2\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$;

7) $G_1 = \left\{z:\ |z| < 8,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Re} w > 0\}$;

8) $G_1 = \left\{z:\ 0 < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{3}\right\},\ G_2 = \left\{w:\ -\dfrac{\pi}{2} < \arg w < 0\right\}$;

9) $G_1 = \{z:\ |z - 4| < 4,\ |z - 2| > 2\},\ G_2 = \{w:\ 0 < \operatorname{Re} w < 1\}$;

10) $G_1 = \{z:\ 1 < \operatorname{Re} z < 2\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Re} w < 0\}$;

11) $G_1 = \{z:\ |z| < 2,\ |z - 1| > 1\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$;

12) $G_1 = \{z:\ |z| < 6\} \setminus \{[-6, 1] \cup [3, 6]\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Im} w > 0\}$;

13) $G_1 = \left\{z:\ |z| < 2,\ 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}\right\},\ G_2 = \{w:\ \operatorname{Re} w > 0\}$;

14) $G_1 = \{z : |z| < 2\}$, $G_2 = \mathbb{C} \setminus (0, +\infty)$;

15) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, 3i]$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$;

16) $G_1 = \{z : |z| < 1\} \setminus \left\{[-1, 0] \cup \left[\frac{1}{6}, 1\right]\right\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

17) $G_1 = \{z : |z| < 3, \operatorname{Im} z > 0\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$;

18) $G_1 = \left\{z : |z| < 2, 0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$;

19) $G_1 = \left\{e^{i\frac{\pi}{4}} z : 0 < \operatorname{Im} z < 8\right\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$;

20) $G_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z : |z| < \frac{1}{7}\right\}$, $G_2 = \{w : |w| < 1\}$.

169. С помощью интеграла Кристоффеля – Шварца отобразить верхнюю полуплоскость на треугольник с вершинами в точках A, B и C:

1) $A(0, 1)$, $B(0, 5)$, $C(2, 3)$;

2) $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-3, 2)$;

3) $A(2, 2)$, $B(3, 3)$, $C(2, 3)$;

4) $A(2, 0)$, $B(6, 0)$, $C(2, 4)$;

5) $A(-1, 0)$, $B(-1, 1)$, $C\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$;

6) $A(1, -1)$, $B(2, 0)$, $C(2, 1)$;

7) $A(1, -1)$, $B(3, -3)$, $C(3, 1)$;

8) $A(1, 1)$, $B(2, 1)$, $C\left(\frac{3}{2}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

9) $A(0,-1)$, $B(1,-1)$, $C\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right)$;

10) $A(0,-2)$, $B(2,-2)$, $C(3,-1)$;

11) $A(1,-1)$, $B(3,-1)$, $C(4,0)$;

12) $A(-1,-1)$, $B(-1,-3)$, $C(0,-4)$;

13) $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(0,4)$;

14) $A(-1,1)$, $B(0,2)$, $C(-1,2)$;

15) $A(0,2)$, $B(1,3)$, $C(0,3)$.

8.3. Задания для самостоятельной работы

170. Найти конформное и однолистное отображение области G на полуплоскость $\{w: \operatorname{Im} w > 0\}$. Сделать чертеж.

1) $G = \{z: |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

2) $G = \{z: \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [0, ih]$, $h > 0$; [Ответ]

3) $G = \{z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi\} \setminus \left\{z: \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z \leqslant 0\right\}$; [Ответ]

4) $G = \{z: \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z: |z| < 1\}$; [Ответ]

5) $G = \left\{z: |z - i| < 1, \left|z - \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}\right\}$; [Ответ]

6) $G = \mathbb{C} \setminus [0, 1]$; [Ответ]

7) $G = \mathbb{C} \setminus \{\{z: \operatorname{Re} z = 0\} \setminus [0, i]\}$; [Ответ]

8) $G = \{z: \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{z: |z - 1| = 1\}$; [Ответ]

9) $G = \{z: |z| < 2, \operatorname{Im} z > 1\}$; [Ответ]

10) Область G изображена на рисунке 8.1. Центры окружностей находятся в точках $A(\sqrt{2} - 1, 0)$, $B(1 - \sqrt{2}, 0)$. [Ответ]

11) $G = \mathbb{C} \setminus \{z: |z| = 1, \operatorname{Im} z > 0\}$; [Ответ]

12) $G = \mathbb{C} \setminus [-i, i]$; [Ответ]

13) $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$; [Ответ]

14) $G = \mathbb{C} \setminus \left\{e^{i\frac{\pi}{4}} z + i: z \in [0, +\infty)\right\}$; [Ответ]

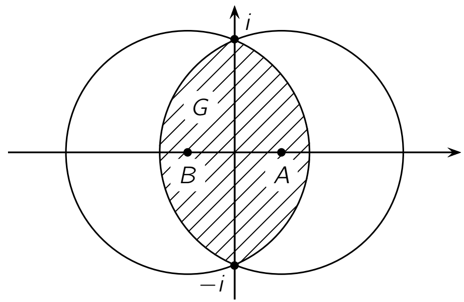


Рис. 8.1

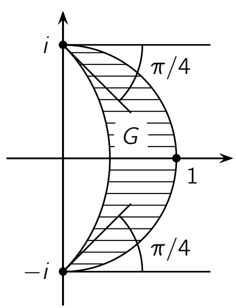


Рис. 8.2

15) $G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{z:\ z = it,\ 0 < h \leqslant t < +\infty\}$; [Ответ]

16) Область G изображена на рисунке 8.2. [Ответ]

17) $G = \{z:\ |z| < 1\} \setminus [0, 1]$; [Ответ]

18) $G = \mathbb{C} \setminus \big\{(-\infty, -R] \cup [R, +\infty)\big\}$; [Ответ]

19) $G = \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z:\ |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right\}$; [Ответ]

20) $G = \{z:\ |z| < 1\} \setminus \left\{[-1, 0] \cup \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]\right\}$. [Ответ]

8.4. Задания творческого характера

171. Найти образ $w(G)$ области D при отображении $w = f(z)$:

1) $w = \dfrac{z}{z^2+1}$, $G = \{z : |z| < 1\}$;

2) $w = \dfrac{1}{z^2+1}$, $G = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$;

3) $w = \dfrac{1}{2}\left(z^n + \dfrac{1}{z^n}\right)$, $G = \left\{z : 0 < \arg z < \dfrac{\pi}{n}\right\}$;

4) $w = \dfrac{z}{(1+z^n)^{\frac{2}{n}}}$, $w(1) > 0$, $G = \left\{z : |z| < 1, -\dfrac{\pi}{n} < \arg z < \dfrac{\pi}{n}\right\}$.

172. Отобразить конформно и однолистно область G_1 на область G_2:

1) $G_1 = \mathbb{C} \setminus \big\{[-1,1] \cup [-i,i]\big\}$, $G_2 = \{w : |w| > 1\}$;

2) $G_1 = \mathbb{C} \setminus \big\{(-\infty,-1] \cup [1,+\infty) \cup \{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\big\}$, $G_2 = \{w : |w| > 1\}$;

3) $G_1 = \mathbb{C} \setminus \big\{\{z : \operatorname{Re} z = 0, \operatorname{Im} z \leqslant 0\} \cup \{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leqslant 0\}\big\}$, $G_2 = \{w : |w| > 1\}$;

4) $G_1 = \mathbb{C} \setminus \big\{\{z : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leqslant 0\} \cup [-2i, 0]\big\}$, $G_2 = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

173. Отобразить конформно и однолистно на верхнюю полуплоскость $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ следующие области:

1) внутренность правой ветви гиперболы $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1$;

2) внешность правой ветви гиперболы $\dfrac{x^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{y^2}{\sin^2\alpha} = 1$;

3) область, заключенную между ветвями гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Глава 9

Интегральная теорема и формула Коши

9.1. Задания для аудиторной работы

174. С помощью формулы замены переменной вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz,$$

если

1) $f(z) = z$, а Γ является:
а) прямолинейным отрезком, соединяющим точки -1 и 1;
б) нижней половиной окружности $\{z : |z| = 1\}$
(начальная точка пути интегрирования $z = -1$); [Ответ]

2) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ (выбирается та ветвь $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{1} = 1$), а Γ является:
а) верхней половиной окружности $\{z : |z| = 1\}$;
б) нижней половиной окружности $\{z : |z| = 1\}$
(начальная точка пути интегрирования $z = 1$); [Ответ]

3) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$, а Γ является:
а) ломаной с вершинами в точках 0, 1, $1 + 2i$;
б) отрезком с концами в точках 0, $1 + 2i$
(начальная точка пути интегрирования $z = 0$); [Ответ]

4) $f(z) = z$, а Γ является:
а) дугой параболы $y = 1 - x^2$, соединяющей точки -1 и 1;
б) отрезком, соединяющим точки -1 и 1
(начальная точка пути интегрирования $z = -1$); [Ответ]

5) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ (выбирается та ветвь $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{-1} = i$), а Γ является:
а) правой половиной единичной окружности $\{z : \ |z| = 1\}$;
б) ломаной, соединяющий точки i, 1, $-i$
(начальная точка пути интегрирования $z = i$); [Ответ]

6) $f(z) = \overline{z}$, а Γ соединяет точки $z_1 = 0$, $z_2 = 1 + i$ и является:
а) параболой $y = x^2$;
б) ломаной, соединяющий точки z_1, $z_3 = i$ и z_2
(начальная точка пути интегрирования $z = 0$). [Решение] [Ответ]

175. Используя интегральную теорему Коши и интегральную формулу Коши, вычислить интеграл

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$$

(здесь и далее γ — спрямляемая жорданова замкнутая кривая (контур)):

1) $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$, и
а) точка $3i$ лежит внутри γ, а точка $-3i$ вне его;
б) точка $3i$ лежит вне γ, а точка $-3i$ внутри его;
в) точки $\pm 3i$ лежат внутри γ;
г) точки $\pm 3i$ лежат вне γ. [Ответ]

2) $f(z) = \frac{1}{z(z+3i)(z+5i)}$, и
а) γ — окружность $\left\{z : \ |z| = \frac{5}{2}\right\}$;
б) γ — окружность $\{z : \ |z| = 4\}$;
в) γ — окружность $\{z : \ |z| = 6\}$;
г) γ — окружность $\left\{z : \ |z - 2| = \frac{1}{2}\right\}$. [Ответ]

3) $f(z) = \frac{1}{z(z+7)(z+9)}$, и
а) γ — окружность $\{z : \ |z| = 5\}$;
б) γ — окружность $\{z : \ |z| = 8\}$;

в) γ — окружность $\{z: \ |z| = 10\}$;
г) γ — окружность $\{z: \ |z-2| = \frac{1}{2}\}$. [Ответ]

4) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, и
а) точка i лежит внутри γ, а точка $-i$ вне его;
б) точка i лежит вне γ, а точка $-i$ внутри его;
в) точки $\pm i$ лежат внутри γ;
г) точки $\pm i$ лежат вне γ. [Ответ]

5) $f(z) = \frac{1}{z(z+2i)(z+4i)}$, и
а) γ — окружность $\{z: \ |z| = 1\}$;
б) γ — окружность $\{z: \ |z| = 3\}$;
в) γ — окружность $\{z: \ |z| = 5\}$;
г) γ — окружность $\{z: \ |z-6i| = 1\}$. [Ответ]

6) $f(z) = \frac{e^z}{z(z-1)}$, и
а) точка 0 лежит внутри γ, а точка 1 вне его;
б) точка 0 лежит вне γ, а точка 1 внутри его;
в) точки 0 и 1 лежат внутри γ;
г) точки 0 и 1 лежат вне γ. [Решение] [Ответ]

176. Используя обобщенную интегральную формулу Коши,

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{g(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}},$$

где точка z_0 лежит внутри γ, а $g(z)$ является аналитической в односвязной области, лежащей внутри контура γ, вычислить

$$\int_\gamma f(z)\,dz,$$

если:

1) $f(z) = \frac{\sin z}{z(z-\pi)^3}$, и

а) точка 0 лежит внутри γ, а точка π вне его;
б) точка 0 лежит вне γ, а точка π внутри его;
в) точки 0 и π лежат внутри γ;
г) точки 0 и π лежат вне γ. [Ответ]

2) $f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}$, и
а) точка 0 лежит внутри γ, а точка 1 вне его;
б) точка 0 лежит вне γ, а точка 1 внутри его;
в) точки 0 и 1 лежат внутри γ;
г) точки 0 и 1 лежат вне γ. [Ответ]

3) $f(z) = \frac{z+1}{(z-1)z^3}$, и
а) точка 0 лежит внутри γ, а точка 1 вне его;
б) точка 0 лежит вне γ, а точка 1 внутри его;
в) точки 0 и 1 лежат внутри γ;
г) точки 0 и 1 лежат вне γ. [Ответ]

4) $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$, и
а) точка i лежит внутри γ, а точка $-i$ вне его;
б) точка i лежит вне γ, а точка $-i$ внутри его;
в) точки $\pm i$ лежат внутри γ;
г) точки $\pm i$ лежат вне γ. [Ответ]

5) $f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)^3(z+3)}$, и
а) точка 1 лежит внутри γ, а точка -3 вне его;
б) точка 1 лежит вне γ, а точка -3 внутри его;
в) точки 1 и -3 лежат внутри γ;
г) точки 1 и -3 лежат вне γ. [Ответ]

6) $f(z) = \frac{e^z}{z^2(z+1)^3}$, и
а) точка 0 лежит внутри γ, а точка -1 вне его;
б) точка 0 лежит вне γ, а точка -1 внутри его;
в) точки 0 и -1 лежат внутри γ;

г) точки 0 и -1 лежат вне γ. [Решение] [Ответ]

177. Вычислить все возможные значения интеграла

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz,$$

при различных положениях контура γ, предполагая, что этот контур не проходит ни через одну из точек, в которых $f(z)$ теряет аналитичность:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$; [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{z+4}{z^2(z+1)^2}$; [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2+9}$; [Ответ]

5) $f(z) = \dfrac{z+1}{z(z^2+4)}$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+4)(z-1)}$. [Решение] [Ответ]

9.2. Базовые индивидуальные задания

178. С помощью формулы замены переменной вычислить интеграл

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz,$$

если:

1) $f(z) = z\bar{z}$, а Γ — отрезок, соединяющий точки 0 и $1+2i$;

2) $f(z) = z - 3\bar{z}$, а Γ — дуга параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$, пробегаемая от точки 0 до точки $2+2i$;

3) $f(z) = \bar{z}\operatorname{Re} z$, а Γ — дуга окружности $\{z : |z| = 2\}$, пробегаемая против часовой стрелки от точки 2 до точки -2;

4) $f(z) = z\operatorname{Re} z$, а Γ — дуга параболы $y = \dfrac{1}{3}x^2$, пробегаемая от точки 0 до точки $-3+3i$;

5) $f(z) = e^{\bar{z}}$, а Γ — ломаная, соединяющая последовательно точки 0, 3 и $3+4i$;

6) $f(z) = z\operatorname{Im} z$, а Γ — дуга параболы $y = x^2$, пробегаемая от точки $1+i$ до точки $2+4i$;

7) $f(z) = \bar{z} + 3z$, а Γ — ломаная, соединяющая последовательно точки 0, 4 и $4+4i$;

8) $f(z) = 2z + \bar{z} + \operatorname{Im} z$, а Γ — окружность $\{z : |z| = 1\}$, пробегаемая против часовой стрелки;

9) $f(z) = z$, а Γ — замкнутый контур, образованный дугой параболы $y = -x^2 + 1$ и отрезком оси абсцисс (контур Γ обходится против часовой стрелки);

10) $f(z) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$, а Γ — ломаная, соединяющая последовательно точки 0, 1 и $1+2i$;

11) $f(z) = z - |z|$, а Γ — замкнутый контур, состоящий из правой половины окружности $\{z : |z| = 1\}$ и вертикального диаметра (контур Γ обходится против часовой стрелки);

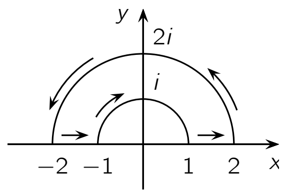


Рис. 9.1

12) $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z}$, а Γ — контур, изображенный на рисунке 9.1;

13) $f(z) = \frac{z}{\overline{z}}$, а Γ — контур квадрата с вершинами в точках ±1, $\pm i$ (контур Γ обходится против часовой стрелки);

14) $f(z) = \overline{z}$, а Γ — астроида, задаваемая параметрическим уравнением $z = \cos^3 t + i\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$;

15) $f(z) = \overline{z}$, а Γ — замкнутый контур, состоящий из одной арки синусоиды и отрезка оси абсцисс (контур Γ обходится по часовой стрелке);

16) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ (выбирается та ветвь, для которой $\sqrt{-1} = i$), а Γ — правая половина окружности $\{z : |z| = 1\}$. Начальная точка пути интегрирования i;

17) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ (выбирается та ветвь, для которой $\sqrt{1} = -1$), а Γ — нижняя полуокружность $\{z : |z| = 1\}$. Начальная точка пути интегрирования 1;

18) $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$, а Γ — прямоугольник с вершинами в точках 1, $1+3i$, $-1+3i$, -1 (контур Γ обходится против часовой стрелки);

19) $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+4}$, а Γ — треугольник с вершинами в точках 4, $-4+i$, $-4-i$ (контур Γ обходится против часовой стрелки);

20) $f(z) = e^z$, а Γ — дуга параболы $y = x^2$, пробегаемая от точки 0 до точки $1+i$.

179. Используя интегральную теорему Коши, интегральную формулу Коши и обобщенную интегральную формулу Коши, вычислить интеграл

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$$

где γ — спрямляемая жорданова замкнутая кривая (контур), в случаях, когда:
1) точка z_1 лежит внутри γ, а точка z_2 — вне его;
2) точка z_2 лежит внутри γ, а точка z_1 — вне его;
3) точки z_1 и z_2 лежат внутри γ;
4) точки z_1 и z_2 лежат вне γ.

1) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^3(z+1)}$; $z_1 = 0$, $z_2 = -1$;

2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z(z-\pi)^3}$; $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$;

3) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z+1)^3}$; $z_1 = 0$, $z_2 = -1$;

4) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^2}$; $z_1 = i$, $z_2 = -i$;

5) $f(z) = \dfrac{\cos z}{(z+\pi)z^2}$; $z_1 = -\pi$, $z_2 = 0$;

6) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z-1)^2 z^3}$; $z_1 = 1$, $z_2 = 0$;

7) $f(z) = \dfrac{z-1}{(z+1)^3(z+i)}$; $z_1 = -1$, $z_2 = -i$;

8) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z(z-\pi)^3}$; $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$;

9) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$; $z_1 = i$, $z_2 = -i$;

10) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)^2}$; $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$;

11) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-5)^3(z+1)}$; $z_1 = 5$, $z_2 = -1$;

12) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+25)^2}$; $z_1 = 5i$, $z_2 = -5i$;

13) $f(z) = \dfrac{z}{(z+i)^3(z+4)}$; $z_1 = -i$, $z_2 = -4$;

14) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} iz}{(z^2+1)^2}$; $z_1 = -i$, $z_2 = i$;

15) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} iz}{z^3(z-i)}$; $z_1 = 0$, $z_2 = i$;

16) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z+\pi)^2(z-i\pi)}$; $z_1 = -\pi$, $z_2 = i\pi$;

17) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)^3(z-1)}$; $z_1 = -1$, $z_2 = 1$;

18) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)^4}$; $z_1 = -3i$, $z_2 = 3i$;

19) $f(z) = \dfrac{1}{z^5(z+1)}$; $z_1 = 0$, $z_2 = -1$;

20) $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)^3(z+1)}$; $z_1 = 2$, $z_2 = -1$.

180. Вычислить все возможные значения интеграла

$$\int_\gamma f(z)\,dz,$$

при различных положениях контура γ, предполагая, что этот контур не проходит ни через одну из точек, в которых $f(z)$ теряет аналитичность, если:

1) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z+1)}$;

2) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+1)^2}$;

3) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^3(z+i)}$;

4) $f(z) = \dfrac{z+2}{(z^2+9)(z+1)^2}$;

5) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2+\pi^2}$;

6) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2+1)}$;

7) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2-\pi^2}$;

8) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2-1)}$;

9) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2+4)}$;

10) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z-2)(z+i)}$;

11) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z}{z\left(z+\frac{\pi}{4}i\right)}$;

12) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$;

13) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2 - 1}$;

14) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)^3}$;

15) $f(z) = \dfrac{1}{z^3 - 1}$;

16) $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2 + 9}$;

17) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)}$;

18) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+i)^2}$;

19) $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$;

20) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 + \pi^2}$.

9.3. Задания для самостоятельной работы

181. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{\sqrt{z}},$$

если контур γ:

1) полуокружность $\{z: \ |z| = 1\}$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$; $\sqrt{1} = 1$;

2) полуокружность $\{z: \ |z| = 1\}$, $\operatorname{Im} z \geqslant 0$; $\sqrt{1} = -1$;

3) полуокружность $\{z: \ |z| = 1\}$, $\operatorname{Im} z \leqslant 0$; $\sqrt{1} = 1$;

4) окружность $\{z: \ |z| = 1\}$; $\sqrt{1} = 1$;

5) окружность $\{z: \ |z| = 1\}$; $\sqrt{-1} = i$.

182. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{\gamma} \operatorname{Ln} z \, dz,$$

где:

1) $\gamma = \{z: \ |z| = 1\}$; $\operatorname{Ln} 1 = 0$;

2) $\gamma = \{z: \ |z| = 1\}$; $\operatorname{Ln} i = \dfrac{\pi i}{2}$;

3) $\gamma = \{z: \ |z| = R\}$; $\operatorname{Ln} R = \ln R$;

4) $\gamma = \{z: \ |z| = R\}$; $\operatorname{Ln} R = \ln R + 2\pi i$;

5) $\gamma = \{z: \ |z| = 1\}$; $\operatorname{Ln} 1 = -2\pi i$.

183. Применяя интегральную теорему Коши, доказать равенства:

1) $$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2x\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2e};$$

2) $$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}};$$

3) $$\int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}};$$

4) $$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-b^2};$$

5) $$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2};$$

6) $$\int_0^\infty x^{s-1}\cos x\,dx = \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2},$$ где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера;

7) $$\int_0^\infty x^{s-1}\sin x\,dx = \Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2},$$ где $\Gamma(s)$ — гамма-функция Эйлера.

184. Вычислить интеграл

$$\int_\gamma f(z)\,dz,$$

если:

1) $f(z) = z\,e^{z^2}$, а γ — произвольный контур, соединяющий точки $-i$ и i (точка $-i$ — начало пути интегрирования);

2) $f(z) = (z-i)e^{-z}$, а γ — произвольный контур, соединяющий точки 0 и i (точка 0 — начало пути интегрирования);

3) $f(z) = \frac{\ln z}{z}$, а γ — отрезок, соединяющий точки i и $e\,i$ (точка i — начало пути интегрирования). Здесь $\ln z = \ln|z| + i\arg_0 z$, $\arg_0 z \in (-\pi, \pi]$;

4) $f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$ (через $\sqrt{z}$ обозначена однозначная ветвь, для которой $\sqrt{1} = 1$), а γ — полуокружность $\{z:\ |z| = 4,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, пробегаемая от точки -4 до точки 4;

5) $f(z) = z\sin z$, а γ — отрезок, соединяющий точки 1 и i (точка 1 — начало пути интегрирования);

6) $f(z) = z^2\ln\dfrac{z+1}{z-1}$, где $\ln z = \ln|z| + i\arg_0 z$, $\arg_0 z \in (-\pi, \pi]$, а γ — окружность $\{z:\ |z| = 2\}$.

185. Вычислить интеграл

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)^n(z-b)^n} \quad (n \in \mathbb{N},\ |a| < |b|),$$

если:

1) $|a| < |b| < 1$;

2) $|a| < 1 < |b|$;

3) $1 < |a| < |b|$.

186. Согласно теореме Лиувилля функция, аналитическая и ограниченная во всей плоскости $\mathbb{C}$, является постоянной. Доказать эту теорему, вычислив интеграл

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)} \quad (|a| < R,\ |b| < R).$$

187. Доказать равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi(\xi-2)(\xi-z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{z-2}, & |z|<1,\\[2mm] \dfrac{1}{z}, & |z|>1.\end{cases}$$

188. Вычислив интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)},$$

доказать, что при $0<a<1$

$$\int\limits_0^{\pi}\frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta}=\frac{2\pi}{1-a^2}.$$

189. Вычислив соответствующие интегралы, доказать равенства:

1) $\displaystyle\int\limits_{\gamma}\frac{\operatorname{sh}(z+1)\,dz}{z^2+1}=2\pi i\cdot\sin 1\cdot\operatorname{ch}1$, где $\gamma=\{z=x+iy:\ x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{2}{3}}\}$;

2) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2}\frac{\sin z\sin(z-1)}{z^2-z}\,dz=0$;

3) $\displaystyle\int\limits_{\gamma}\frac{\sin\frac{\pi z}{4}\,dz}{z^2-1}=\frac{\pi\sqrt{2}}{2}\,i$, где $\gamma=\{z=x+iy:\ x^2+y^2-2x=0\}$;

4) $\displaystyle\int\limits_{\gamma}\frac{e^{\pi z}\,dz}{(z^2+1)^2}=\frac{\pi}{2}(\pi i-1)$, где $\gamma=\{z=x+iy:\ 4x^2+y^2-2y=0\}$.

9.4. Задания творческого характера

190. Пусть G — односвязная область и функции f и g аналитичны в G. Доказать аналог формулы Ньютона – Лейбница:

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi = \Phi(z) - \Phi(z_0)$$

и формулы интегрирования по частям

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)g'(\xi)\,d\xi = \big(f(z)g(z)\big)\Big|_{z_0}^{z} - \int_{z_0}^{z} g(\xi)f'(\xi)\,d\xi,$$

где $z_0, z \in G$, $\Phi(z)$ — некоторая функция, являющаяся в G первообразной для $f(z)$, т.е. $\Phi'(z) = f(z)$ для любого $z \in G$. Показать, что указанные интегралы зависят только от начальной и конечной точки пути интегрирования.

191. Пусть Γ — спрямляемая жорданова кривая (замкнутая или незамкнутая), а $f(z)$ — функция определенная и непрерывная на Γ. Тогда функцию

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}, \quad \xi \in \Gamma,$$

называют интегралом типа Коши. Доказать, что $F(z)$ является аналитической функцией во всякой области G, не содержащей точек кривой Γ, и

$$F^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)\,d\xi}{(\xi - z)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

192. Пусть A_k, a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$ — действительные числа, причем $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k = 0$, а $a_k > 0$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Доказать равенства

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \cos a_k x}{x}\, dx = -\sum_{k=1}^{n} A_k \ln a_k,$$

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin a_k x}{x}\, dx = 0.$$

193. Пусть Γ — спрямляемая замкнутая жорданова кривая, D^+ — ее внутренность, а D^- — внешность, функция $f(z)$ является аналитической в D^-, непрерывной в $\overline{D^-}$ и существует конечный предел

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = A.$$

Доказать формулу Коши для бесконечной области

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)\, d\xi}{\xi - z} = \begin{cases} A - f(z), & z \in D^-, \\ A, & z \in D^+. \end{cases}$$

194. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в круге $\{z : \ |z| \leqslant R\}$. Доказать интегральную формулу Пуассона:

$$\operatorname{Re} F(r\, e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \operatorname{Re} F(r\, e^{i\varphi}) \frac{(R^2 - r^)\, d\varphi}{R^2 - 2Rr\cos(\varphi - \theta) + r^2},$$

где $r < R$ и $\theta \in [0, 2\pi]$.

195. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в области, ограниченной контуром Γ, а $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — произвольные различные точки внутри Γ и

$$\omega_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n).$$

Показать, что функция

$$P(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\omega_n(\xi)} \cdot \frac{\omega_n(\xi) - \omega_n(z)}{\xi - z}\, dz$$

есть многочлен степени $(n-1)$, который интерполирует функцию $f(z)$ в точках $\{z_k\}_{k=1}^{n}$, т.е.

$$f(z_k) = P(z_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Многочлен $P(z)$ называется интерполяционным многочленом Лагранжа.

Глава 10

Степенные ряды

10.1. Задания для аудиторной работы

196. Определить радиус сходимости R и круг сходимости $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ следующих степенных рядов:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n \cdot 2^n}$; [Ответ]

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2+(-1)^n\right)^n \frac{(z+1)^n}{n}$; [Ответ]

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^3}(z-1-i)^n$; [Ответ]

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{3^n}$; [Ответ]

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin in \cdot (z+i)^n$; [Ответ]

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(3+(-1)^n\right)^n n^2 (z-i)^n$. [Решение] [Ответ]

197. Радиус сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

равен R $(0 < R < \infty)$. Определить радиус сходимости следующих степенных рядов:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 3^n c_n z^n$; [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^5 c_n z^n$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^4 z^n$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n c_n z^n$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+z_0)^n c_n z^n$. [Решение] [Ответ]

198. В круге сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

найти его сумму:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n z^n$; [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^n$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)(n+2) z^n$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)z^{2n}$. [Решение] [Ответ]

199. Исследовать поведение степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

на границе круга сходимости:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$; [Ответ]

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; [Ответ]

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$; [Ответ]

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n})z^n$; [Ответ]

5) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n\ln n}$; [Ответ]

6) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{n\ln^2 n}$. [Решение] [Ответ]

10.2. Базовые индивидуальные задания

200. Определить радиус сходимости R и круг сходимости $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ следующих степенных рядов:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 (z+1)^n$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (z-i)^n$;

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n} z^n$;

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \cos in (z-2)^n$;

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(4 + (-1)^n\right)^{2n} z^n$;

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} (z+1)^n$;

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-n^2} z^n$;

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! e^{-\sqrt{n}} z^n$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{3n}} z^{2n-1}$;

10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+2^n)(z+1)^n$;

12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(2+(-1)^n\right)^n z^n$;

13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (z-1)^{3^n}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{ch} n \cdot z^n$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{sh} n \cdot z^n$;

16) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n \ln^2 n}$;

17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} (z+i)^n$;

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n z^{n^3}$;

19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 z^{3^n}$;

20) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+in}$.

201. Радиус сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

равен R $(0 < R < \infty)$. Определить радиус сходимости следующих степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} c_n z^n$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3^n + 1) c_n z^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1 + 2^{\sqrt{n}}) c_n z^n$;

4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (3 + 4^n) c_n z^n$;

5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n^4 z^n$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n z^{2n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n c_n z^n$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n$;

9) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_{3n} z^{3n}$;

10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2^n} c_n z^n$;

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^n} z^n$;

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{4^n} z^n$;

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{3n}$;

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{2n}$;

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln^2 n \, c_n z^n$;

16) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{\ln^2 n} z^n$;

17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_{2^n} z^{2^n}$;

18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n! \, c_n z^n$;

19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + (-1)^n\right)^n c_n z^n$;

20) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(3+(-1)^n\right)^n c_n z^n.$

202. Просуммировать в круге сходимости следующие степенные ряды:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n;$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+2)z^n;$

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(z+1)^{n+1};$

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z+i)^n;$

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1)^{n+1}}{n};$

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-i)^{n+1}\frac{(z-i)^n}{n};$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-i)^{n+1}\frac{(z-2)^n}{n};$

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2)(z+1)^n;$

9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z+i)^{2n};$

10) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^{2n}$;

11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(z+1)^{n+1}}{n}$;

12) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(z-1)^{2n+1}$;

13) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)(z+1)^{n+1}$;

14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} i^n n z^n$;

15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{i^n}{n}(z+1)^n$;

16) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-i)^n(n+1)z^{n+1}$;

17) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-i)^{n+1}(n+1)(n+2)z^n$;

18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-i)^n\dfrac{z^n}{n}$;

19) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n n(n-1)z^{n-2}$;

20) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{z^{2n}}{n}$.

203. Исследовать поведение степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

на границе круга сходимости:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n}$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1} z^n$;

3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n \ln n}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z+i)^n$;

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{n \ln^3 n}$;

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{n^2} (z+1)^n$;

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n}$;

8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n^2}$;

9) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}$;

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1)^{3n}}{n}$;

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+i)^{n}}{n^4}$;

12) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{\ln n} z^{2n-1}$.

10.3. Задания для самостоятельной работы

204. Найти радиус сходимости и круг сходимости следующих степенных рядов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!e^{-n^{\alpha}}(z+i)^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{2n}}{(n!)^2} z^n$;

3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n!)^2 e^{-n^2}(z+1)^n$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{th} n \cdot (z+i)^n$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n z^{n!}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z^{n^n}$.

205. Пользуясь второй теоремой Абеля (см. задания творческого характера из этой работы) и решением задач 198, доказать следующие равенства:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos n\varphi}{n} = -\ln\left|2\sin\dfrac{\varphi}{2}\right|$, $0 < |\varphi| \leqslant \pi$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\varphi}{n} = \dfrac{\pi-\varphi}{2}$, $0 < \varphi < 2\pi$;

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\varphi}{2n+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}\right|,\ 0<|\varphi|<\pi;$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)\varphi}{2n+1}=\frac{\pi}{4},\ 0<\varphi<\pi;$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos n\varphi}{n}=\ln\left(2\cos\frac{\varphi}{2}\right),\ -\pi<\varphi<\pi;$

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n\varphi}{n}=\frac{\varphi}{2},\ -\pi<\varphi<\pi.$

206. Используя известные представления элементарных функций в виде степенного ряда доказать равенства:

1) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{2};$

2) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{e^z-1}{z}=1;$

3) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z}=1;$

4) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\ln(1+z)}{z}=1;$

5) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sh} z}{z}=1;$

6) $\displaystyle\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{ch} z-1}{z^2}=\frac{1}{2}.$

207. Доказать, что в круге $\{z:\ |z|<1\}$ справедливы тождества:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2z^n=\frac{z(z+1)}{(1-z)^3};$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^3 z^n = \frac{z(1+4z+z^2)}{(1-z)^4}$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n = \frac{z(z^3+6z^2-z-2)}{(1-z)^5}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) z^n = \frac{2z}{(1-z)^3}$;

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 z^n = \frac{1+z}{(1-z)^3}$;

6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)\ldots(n+k-1) z^n = \frac{(k-1)!}{(1-z)^k}$;

7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+m}}{n+m} = \ln(1-z) - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{z^n}{n}$;

8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+m)!}{n!} z^n = \frac{m!}{(1-z)^{m+1}}$.

208. Доказать, что при любых $z \in \mathbb{C}$ справедливы равенства:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+1)} z^{n+1} = e^z - 1$;

2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+2)} z^{n+2} = (z-1)e^z + 1$;

3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+1}}{(4n+1)!} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} z + \sin z)$;

4) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+3}}{(4n+3)!} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} z - \sin z);$$

5) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n+2}}{(4n+2)!} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z - \cos z);$$

6) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} z + \cos z);$$

7) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(4n+2)!} z^{4n+2} = \sin \frac{z}{\sqrt{2}} \cdot \operatorname{sh} \frac{z}{\sqrt{2}}.$$

10.4. Задания творческого характера

209. Доказать вторую теорему Абеля: если ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

сходится, то:

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n, \quad 0 < r < 1.$$

210. Показать, что теорема, обратная второй теореме Абеля, не имеет места, т.е. привести пример расходящегося ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n,$$

для которого существует предел

$$\lim_{r\to 1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n.$$

211. Пусть все числа a_n положительны и

$$a_0 > a_n > a_2 > \ldots; \quad a_n \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Доказать, что степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

сходится во всех точках окружности $\{z : \ |z| = 1\}$, исключая, быть может, точку $z = 1$.

212. Исследовать ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n} z^n$$

на сходимость во всех точках границы круга сходимости.

213. Доказать, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\cos z \cdot e^{z \operatorname{ctg} \alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{\sin^n \alpha} \frac{z^n}{n!}, \quad \alpha \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi.$$

214. Найти радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_n \cdot (\beta)_n}{(\gamma)_n \cdot n!} z^n,$$

где $(a)_n = a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)$ — символ Похгаммера.

215. Доказать, что в круге $\{z : \ |z| < 1\}$ справедливо тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n+m}}{n(n+m)} = \frac{1}{m}(1-z^m)\ln(1-z) + \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} \frac{z^n}{n}.$$

Глава 11

Ряды Тейлора

11.1. Задания для аудиторной работы

216. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$ и найти круг сходимости $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ полученного степенного ряда:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z+4}$, $z_0 = -1$; [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{1}{z+1}$, $z_0 = i$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{2}{z-1}$, $z_0 = i$; [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{1}{z^2+4}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, $z_0 = 1$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{6z}{z-1}(z-3)$, $z_0 = 2$. [Решение] [Ответ]

217. Разложить в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$ функцию $f(z)$ и найти круг сходимости полученного степенного ряда:

1) $f(z) = e^{z+3}$, $z_0 = -1$; [Ответ]

2) $f(z) = \sin z \cos z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $f(z) = e^z$, $z_0 = -1$; [Ответ]

4) $f(z) = \operatorname{ch}^2 z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $f(z) = \cos z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$; [Ответ]

6) $f(z) = \cos(3z - i)$, $z_0 = 0$. [Решение] [Ответ]

218. Используя известные разложения и применяя почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда, разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z. Определить круг сходимости полученного степенного ряда:

1) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$; [Ответ]

2) $f(z) = \ln \dfrac{1+z}{1-z}$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{2}{(1-z)^3}$; [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1-z^3)^2}$; [Ответ]

5) $f(z) = (z+1)\ln(z+1) - z$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)^2}$. [Решение] [Ответ]

219. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z, а также круг сходимости полученного ряда:

1) $f(z) = \dfrac{z}{\cos z}$; [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{\ln(1-z)}{1-z}$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{z}{\ln(1-z)}$; [Ответ]

4) $f(z) = \sqrt{1-4z}$ $(f(0) = 1)$; [Ответ]

5) $f(z) = e^{z \sin z}$; [Ответ]

6) $f(z) = \operatorname{tg} z$. [Решение] [Ответ]

11.2. Базовые индивидуальные задания

220. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$ и найти круг сходимости $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ полученного степенного ряда:

1) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)(z-2)}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{2z+1}{z^2+1)}$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{6z+5}{(z+3)(z+5)}$, $z_0 = -3$;

4) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+9}$, $z_0 = 3i$;

5) $f(z) = \dfrac{2z}{(z+2)(z+3)}$, $z_0 = 1$;

6) $f(z) = \dfrac{2z^2}{z^2+4}$, $z_0 = -i$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-9}$, $z_0 = 4$;

8) $f(z) = \dfrac{2z+6}{(z-1)(z+4)}$, $z_0 = 0$;

9) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-4z+13}$, $z_0 = 0$;

10) $f(z) = \dfrac{z}{z+2}$, $z_0 = 1$;

11) $f(z) = \dfrac{z}{z^2-2z+5}$, $z_0 = 1$;

12) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2-6z+12}$, $z_0 = 3$;

13) $f(z) = \dfrac{2z-5}{z^2-5z+6}$, $z_0 = 0$;

14) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z)(1+z^2)(1+z^4)}$, $z_0 = 0$;

15) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z^2)(1+z^4)}$, $z_0 = 0$;

16) $f(z) = \dfrac{2z}{(1+z^2)(1+z^4)}$, $z_0 = 0$;

17) $f(z) = \dfrac{z}{(1-2z)(1+4z^2)}$, $z_0 = 0$;

18) $f(z) = \dfrac{1}{(1+3z)(1+9z^2)(1+81z^4)}$, $z_0 = 0$;

19) $f(z) = \dfrac{z+1}{(z+5)(z+4)}$, $z_0 = -1$;

20) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)}$, $z_0 = 0$.

221. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$ и найти круг сходимости $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ полученного степенного ряда:

1) $f(z) = z^2 e^{2z}$, $z_0 = 1$;

2) $f(z) = z \cdot e^{4z}$, $z_0 = 2$;

3) $f(z) = (z^2 + 2z - 8)e^z$, $z_0 = -1$;

4) $f(z) = \sin(2z - z^2)$, $z_0 = 1$;

5) $f(z) = \int\limits_0^z \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi,\; z_0 = 0;$

6) $f(z) = \int\limits_0^z e^{-\xi^2}\,d\xi,\; z_0 = 0;$

7) $f(z) = e^z \sin z,\; z_0 = 0;$

8) $f(z) = e^z \cos z,\; z_0 = 0;$

9) $f(z) = e^{2z} \sin 2z,\; z_0 = 0;$

10) $f(z) = \sin 2z \cos 4z,\; z_0 = 0;$

11) $f(z) = \cos z \cos 3z,\; z_0 = 0;$

12) $f(z) = \operatorname{ch} 2z \cdot \operatorname{sh} 4z,\; z_0 = 0;$

13) $f(z) = \int\limits_0^z \frac{1-\cos\xi}{\xi}\,d\xi,\; z_0 = 0;$

14) $f(z) = \sin^2 z,\; z_0 = 0;$

15) $f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z,\; z_0 = 0;$

16) $f(z) = \cos 2z\, e^{2z},\; z_0 = 0;$

17) $f(z) = \sin 3z \cdot 3z,\; z_0 = 0;$

18) $f(z) = \frac{z^2}{z+1},\; z_0 = 1;$

19) $f(z) = \cos(4z + z^2),\; z_0 = -2;$

20) $f(z) = \operatorname{ch}^2 z,\; z_0 = 0.$

222. Используя известные разложения и применяя почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда, разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-z_0$. Определить круг сходимости полученного степенного ряда:

1) $f(z)=\ln z$, $z_0=1$;

2) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0=1$;

3) $f(z)=\operatorname{Arctg} z$ $(\operatorname{Arctg} 0=0)$, $z_0=0$;

4) $f(z)=\operatorname{Arth} z$ $(\operatorname{Arth} 0=0)$, $z_0=0$;

5) $f(z)=\operatorname{Arcth} z$ $(\operatorname{Arcth} 0=\pi/2)$, $z_0=0$;

6) $f(z)=\operatorname{Arcctg} z$ $(\operatorname{Arcctg} 0=-\pi/2)$, $z_0=0$;

7) $f(z)=\operatorname{Arsh} z$ $(\operatorname{Arsh} 0=0)$, $z_0=0$;

8) $f(z)=\ln(z^2-3z+2)$, $z_0=0$;

9) $f(z)=\ln\dfrac{z-i}{z+i}$, $z_0=0$;

10) $f(z)=\dfrac{z}{(1+z^3)^2}$, $z_0=0$;

11) $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$, $z_0=0$;

12) $f(z)=\ln(z^2-2z+2)$, $z_0=1$;

13) ???????????;

14) $f(z)=z\ln(z+2)$, $z_0=-1$;

15) $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^4}$, $z_0=0$;

16) $f(z)=\dfrac{z}{(z+2)^2}$, $z_0=-1$;

17) $f(z) = (z+2)\ln(z^2+2z+2)$, $z_0 = -1$;

18) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z^3)^2}$, $z_0 = 0$;

19) $f(z) = z\ln z$, $z_0 = 1$;

20) $f(z) = (1-z)\ln(1-z) + z$, $z_0 = 0$.

223. Найти три первых отличных от нуля члена разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$, а также круг сходимости полученного ряда:

1) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z}$, $z_0 = 0$;

2) $f(z) = \dfrac{z}{\ln(1+z)}$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z^2)\sin z}$, $z_0 = 0$;

4) $f(z) = \sqrt{\cos z}$ $(f(0) = 1)$, $z_0 = 0$;

5) $f(z) = e^{z\ln(1+z)}$, $z_0 = 0$;

6) $f(z) = e^{e^z}$, $z_0 = 0$;

7) $f(z) = e^z\ln(1+z)$, $z_0 = 0$;

8) $f(z) = \ln(1+e^z)$, $z_0 = 0$;

9) $f(z) = \sin^2 z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$;

10) $f(z) = e^{z^2}$, $z_0 = 1$;

11) $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\sin\xi}{\xi}\,d\xi$, $z_0 = 0$;

12) $f(z) = \operatorname{ch} z \cos z,\ z_0 = 0;$

13) $f(z) = z \operatorname{Ln} z\ (f(1) = 2\pi i),\ z_0 = 1;$

14) $f(z) = \sin(z^2 - 2z),\ z_0 = 1;$

15) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(\ln \dfrac{1}{1-z}\right)^2,\ z_0 = 0;$

16) $f(z) = \operatorname{Arcsin} z\ (f(0) = 4\pi),\ z_0 = 0;$

17) $f(z) = \sqrt{z+3}\ (f(1) = -2),\ z_0 = 1;$

18) $f(z) = \operatorname{Ln} \dfrac{z+1}{1-z}\ (f(0) = 2\pi i),\ z_0 = 0;$

19) $f(z) = (z+2)\sin 2z,\ z_0 = 1;$

20) $f(z) = \cos^2 z,\ z_0 = \dfrac{\pi}{4}.$

224. Найти разложение в ряд Тейлора по степеням z аналитической в окрестности точки $z_0 = 0$ функции $f(z)$, удовлетворяющей условию:

1) $zf''(z) + (1+z)f'(z) = -e^{-z},\ f(0) = -1;$

2) $(1+z^2)f'(z) = 1,\ f(0) = 0;$

3) $f''(z) + \lambda^2 f(z) = 0,\ f(0) = 0,\ f'(0) = \lambda;$

4) $f''(z) + zf(z) = 0,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0;$

5) $zf''(z) + (1+4z)f(z) = \sin 2z,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 2;$

6) $(1+z)^2 f''(z) - (1+z)f'(z) = 2,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1.$

11.3. Задания для самостоятельной работы

225. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$ и найти круг сходимости $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ полученного степенного ряда:

1) $f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z,\ z_0 = 0;$повторяется

2) $f(z) = e^z \sin z,\ z_0 = 0;$повторяется

3) $f(z) = \operatorname{ch} z \cdot \cos z,\ z_0 = 0;$

4) $f(z) = \dfrac{2z - 1}{4z^2 - 2z + 1},\ z_0 = 0;$

5) $f(z) = \sqrt[3]{z}\ (\sqrt[3]{1} = 1),\ z_0 = i;$

6) $f(z) = \ln z,\ z_0 = i;$

7) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}},\ z_0 = 0;$

8) $f(z) = \ln^2(1 - z),\ z = 0.$

226. Найти разложение в ряд Тейлора по степеням z функции $f(z)$, аналитической в окрестности точки $z_0 = 0$ и удовлетворяющей условию:

1) $(1 + z^2)f'(z) = 1,\ f(0) = 0;$

2) $f''(z) + zf(z) = 0,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0;$

3) $(1 - z^2)f''(z) - 5zf(z) - 4f(z) = 0,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0;$

4) $(1 - z^2)f''(z) - 4zf(z) - 2f(z) = 0,\ f(0) = 0,\ f'(0) = 1;$

5) $zf'(z) + (1 - z)f(z) = e^z,\ f(0) = 1;$

6) $zf''(z) + (1 + z)f(z) = \cos z,\ f(0) = 1,\ f'(0) = 0.$

227. Найти пять первых членов разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням z:

1) $f(z) = \mathrm{Ln}^2(1-z)$ $(f(1) = 2\pi i)$;

2) $f(z) = \mathrm{Arctg}^2\, z$ $(f(0) = 0)$;

3) $f(z) = \mathrm{Arctg}\, z \cdot \ln(1+z^2)$ $(\mathrm{Arctg}\, 0 = 0)$;

4) $f(z) = \ln\cos z$;

5) $f(z) = \ln\dfrac{\sin z}{z}$;

6) $f(z) = \mathrm{tg}^2\, z$.

228. Разложить в ряд Тейлора указанные ветви многозначной функции $f(z)$ по степеням $z - z_0$, если:

1) $f(z) = \sqrt[3]{z}$ $(f(i) = -i)$, $z_0 = i$;

2) $f(z) = \mathrm{Ln}\, z$ $(f(i) = \pi/2)$, $z_0 = i$;

3) $f(z) = \mathrm{Arcsin}\, z$ $(f(0) = 4\pi)$, $z_0 = 0$;

4) $f(z) = \sqrt{1+z^3}$ $(f(0) = 1)$, $z_0 = 0$;

5) $f(z) = \mathrm{Ln}\,\dfrac{1+z}{1-z}$ $(f(0) = 2\pi n i)$, $z_0 = 0$.

11.4. Задания творческого характера

229. Доказать, что только одна ветвь функции

$$f(z) = \frac{1}{z} \operatorname{Ln} \frac{1}{1-z}$$

доопределяется в точке $z_0 = 0$ так, что становится аналитической в окрестности этой точки. Найти разложение полученной функции в ряд Тейлора по степеням z.

230. Доказать, что функция

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2-z}+1}$$

допускает в окрестности точки $z_0 = 0$ выделение двух однозначных аналитических ветвей, разлагающихся в степенные ряды по степеням z. Найти эти ряды и показать, что их радиусы сходимости $R = 1$ и $R = 2$.

231. Доказать, что функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-z)^2}$$

является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Разложить эту функцию в ряд Тейлора по степеням z.

232. Доказать, что функция

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n-z}$$

является аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$. Разложить эту функцию в ряд Тейлора по степеням z.

233. Если в круге $\{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < R\}$ имеет место равенство

$$F(\xi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\xi^n,$$

то функцию $F(\xi, z)$ называют производящей функцией для последовательности $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$.

Доказать, что функция

$$F(\xi, z) = \frac{4 - \xi^2}{4 - 4\xi z + \xi^2}$$

является производящей функцией для полиномов Чебышёва:

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos z).$$

Пользуясь интегральными формулами для коэффициентов ряда Тейлора, показать, что

$$4T_{n+1}(z) - 4zT_n(z) + T_{n-1}(z) = 0 \quad \text{при } n \geqslant 2.$$

234. Функция

$$F(\xi, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi z + \xi^2}}$$

является производящей для полиномов Лежандра $P_n(z)$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\xi z + \xi^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\xi^n.$$

Дифференцируя производящую функцию по ξ и по z, доказать тождества:

1) $(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0;$ [Ответ]

2) $(2n+1)P_n(z) = P'_{n+1}(z) - P'_{n-1}(z);$ [Ответ]

3) $P_n(z) = P'_{n+1}(z) - 2zP'_n(z) + P'_{n-1}(z).$ [Ответ]

235. Разложить в ряд Тейлора по степеням z функцию

$$f(z) = \cos(m \arcsin z) \quad (\arcsin 0 = 0),$$

составив дифференциальное уравнение, одним из решений которого оно является.

236. Дифференциальное уравнение

$$z(1-z)f''(z) + \big(c - (a+b+1)z\big)f'(z) - abf(z) = 0$$

называется гипергеометрическим. Найти аналитическое в точке $z_0 = 0$ решение $f(z)$ гипергеометрического уравнения, удовлетворяющее условию $f(0) = 1$, предполагая, что $c \notin \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Показать, что искомая функция представима в виде ряда Тейлора

$$f(z) = f(a, b, c, z) = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2! c(c+1)} z^2 + \ldots + \\ + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n! c(c+1)\dots(c+n-1)} z^n + \dots,$$

радиус сходимости которого $R = 1$.

Глава 12

Нули аналитической функции. Теорема единственности

12.1. Задания для аудиторной работы

237. Найти все нули z_k аналитической функции $w = f(z)$. Для каждого нуля найти его порядок, используя критерий

$$\begin{cases} f(z_k) = f'(z_k) = \ldots = f^{(n-1)}(z_k) = 0, \\ f^{(n)}(z_k) \neq 0. \end{cases}$$

1) $w = z \sin z$; [Решение] [Ответ]

2) $w = (z^2 + 1)^2$; [Ответ]

3) $w = 1 - \cos z$; [Ответ]

4) $w = \sin^2 z$; [Ответ]

5) $w = (z^2 - 4)^3$; [Ответ]

6) $w = \dfrac{(z^2 - 1)^2}{z}$. [Ответ]

238. Найти порядок n нуля z_0 функции $w = f(z)$, аналитической в точке z_0, представив ее в окрестности z_0 в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и отлична от нуля в некоторой окрестности z_0:

1) $w = z^2(e^{z^2} - 1)$, $z_0 = 0$; [Решение] [Ответ]

2) $w = 1 - \cos z^2$, $z_0 = 0$; [Ответ]

3) $w = \sin z^3$, $z_0 = 0$; [Ответ]

4) $w = (z - 1)\sin^2(z - 1)$, $z_0 = 1$; [Ответ]

5) $w = 1 - \cos(z + 1)$, $z_0 = -1$; [Ответ]

6) $w = (z - 1)(e^{z-1} - 1)$, $z_0 = 1$. [Ответ]

239. Найти все нули z_k аналитической функции $w = f(z)$. Для каждого нуля найти его порядок n_k:

1) $w = \dfrac{z^2+9}{z^4}$; [Решение] [Ответ]

2) $w = \cos^3 z$; [Ответ]

3) $w = \dfrac{\sin^3 z}{z}$; [Ответ]

4) $w = \dfrac{(z^2-\pi^2)^2 \sin z}{z}$; [Ответ]

5) $w = (\sqrt{z} - 2)^3$; [Ответ]

6) $w = (1 - e^z)(z^2 - 4)^3$. [Ответ]

240. Существует ли функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $D = \{z : |z| < 2\}$, для которой выполняются следующие условия?

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ 1, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$ [Решение] [Ответ]

2) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 2k+1, \\ \dfrac{1}{n}, & n = 2k,\ k \in \mathbb{N}; \end{cases}$ [Ответ]

3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n}{n+1},\ n \in \mathbb{N}$; [Ответ]

4) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 1, \\ \dfrac{1}{n^2}, & n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$ [Ответ]

5) $f\left(\pm\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2},\ n \in \mathbb{N}$; [Ответ]

6) $f\left(\pm\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$. [Ответ]

241. Существует ли функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $D = \{z : |z| < 2\}$, для которой выполняются следующие условия?

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n + \cos^2 \frac{n\pi}{2}}$, $n \in \mathbb{N}$; [Решение] [Ответ]

2) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \sin^2 \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$; [Ответ]

3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \cos n\pi$, $n \in \mathbb{N}$; [Ответ]

4) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2n} \cos^2 \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$; [Ответ]

5) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{2n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$; [Ответ]

6) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n^2} \cos^2 \dfrac{n\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. [Ответ]

12.2. Базовые индивидуальные задания

242. Используя критерий

$$\begin{cases} f(z_k) = f'(z_k) = \ldots = f^{(n-1)}(z_k) = 0, \\ f^{(n)}(z_k) \neq 0, \end{cases}$$

найти порядок n нуля z_0 аналитической функции $w = f(z)$.

1) $w = (z^2+1)^2$, $z_0 = i$;

2) $w = (1-\cos z)^2$, $z_0 = 0$;

3) $w = (1+\cos z)^2$, $z_0 = \pi$;

4) $w = (e^z - 1)^2$, $z_0 = 0$;

5) $w = z - \sin z$, $z_0 = 0$;

6) $w = \cos z - \cos 2z$, $z_0 = 0$;

7) $w = \sin z - \sin 2z$, $z_0 = 0$;

8) $w = z^2 \cos\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_0 = 0$;

9) $w = (z^2 - 1)\sin \pi z$, $z_0 = 0$;

10) $w = (1+\cos \pi z)^2$, $z_0 = 1$;

11) $w = (z^2+\pi^2)^2$, $z_0 = i\pi$;

12) $w = (z^2-\pi^2)\sin z$, $z_0 = \pi$;

13) $w = \cos z - \cos^2 z$, $z_0 = 0$;

14) $w = \sin z \cos\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_0 = 0$;

15) $w = (z^2 - 1)\sin \pi z$, $z_0 = 1$;

16) $w = \sin \pi z \cos \dfrac{\pi}{2} z$, $z_0 = 1$;

17) $w = z(e^z - 1)$, $z_0 = 1$;

18) $w = (z^2 + 1)^8$, $z_0 = i$;

19) $w = (z^4 - 1)^2$, $z_0 = 1$;

20) $w = z \sin z \cos\left(z + \dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_0 = 0$.

243. Найти порядок n нуля z_0 функции $w = f(z)$, аналитической в точке z_0, представив ее в окрестности z_0 в виде

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z),$$

где функция $\varphi(z)$ аналитична в точке z_0 и отлична от нуля в некоторой окрестности z_0:

1) $w = z \sin z^2$, $z_0 = 0$;

2) $w = \sin z^2 - z^2$, $z_0 = 0$;

3) $w = 1 - \cos z^3$, $z_0 = 1$;

4) $w = z^2(1 - \cos z^2)$, $z_0 = 0$;

5) $w = (z - \pi)^2(1 - \cos 2z)$, $z_0 = \pi$;

6) $w = (e^{z^3} - 1)z$, $z_0 = 0$;

7) $w = e^{z^2} - e^z$, $z_0 = 0$;

8) $w = 1 - \cos^2 \pi z$, $z_0 = 1$;

9) $w = e^{z^4} - e^{z^2}$, $z_0 = 0$;

10) $w = z^4(e^{z^2} - e^z)$, $z_0 = 0$;

11) $w = z^2(\sin z^2 - \sin z)$, $z_0 = 0$;

12) $w = z^3(\cos z^2 - \cos z^3)$, $z_0 = 0$;

13) $w = (e^{z^2} - 1)z^5$, $z_0 = 0$;

14) $w = z^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + z^2\right)$, $z_0 = 0$;

15) $w = z(z - \sin z)$, $z_0 = 0$;

16) $w = z^2\left(1 - \frac{z^2}{2} - \cos z\right)$, $z_0 = 0$;

17) $w = z\left(z - \frac{z^3}{6} - \sin z\right)$, $z_0 = 0$;

18) $w = (z-1)^2(1 - \cos \pi z)$, $z_0 = 1$;

19) $w = (z-i)^2 \sin(z-i)^3$, $z_0 = i$;

20) $w = e^{z^2} - \cos z^2$, $z_0 = 0$.

244. Найти все нули z_k аналитической функции $w = f(z)$. Для каждого нуля найти его порядок n_k:

1) $w = e^z - 1$;

2) $w = z^2 \sin^2 z$;

3) $w = (z^2\pi^2) \sin z$;

4) $w = \dfrac{1 - \operatorname{ctg} z}{z}$;

5) $w = e^{\sin z} - 1$;

6) $w = e^{1-\cos z} - 1$;

7) $w = \dfrac{\sin^2 z}{z}$;

8) $w = z\sin^2 z$;

9) $w = z(1-\cos z)$;

10) $w = (z^4+1)^2$;

11) $w = \left(z - \dfrac{\pi}{2}\right)\cos z$;

12) $w = \dfrac{\sin^3 z}{z}$;

13) $w = z(z^3-1)$;

14) $w = (z-\pi)\sin \pi z$;

15) $w = e^z + 1$;

16) $w = \sin z + 2$;

17) $w = 3 - \cos z$;

18) $w = (z^2+4)^3$;

19) $w = 1 - \operatorname{ch} z$;

20) $w = \operatorname{sh} z$.

12.3. Задания для самостоятельной работы

245. Найти порядок нуля z_0 аналитической функции $w = f(z)$:

1) $w = 6\sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$, $z_0 = 0$;

2) $w = e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$, $z_0 = 0$;

3) $w = \dfrac{(z^2 - 4\pi^2)\sin z}{z^2}$, $z_0 = 0$;

4) $w = z^3(e^{z^3} - e^z)$, $z_0 = 0$;

5) $w = (z-1)^2 \sin^2(z-1)^2$, $z_0 = 1$;

6) $w = \left(1 - \sqrt{2 - 2\cos z}\right)^2$, $z_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

7) $w = \left(\sqrt{z} - 2\right)^3$, $z_0 = 4$;

8) $w = \cos z^3$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

9) $w = \cos^3 z$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

10) $w = \left(1 - \sqrt{2 - 2\sin z}\right)^2$, $z_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

246. Существует ли функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $D = \{z : |z - z_0| < 2\}$, для которой выполняются следующие условия?

1) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$;

2) $f\left(\dfrac{n}{n+1}\right) = -f\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) = -\dfrac{1}{(n+1)^3}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 1$;

3) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$;

4) $\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right| < 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$;

5) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{3n}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$;

6) $f(z) = f(3z)$, $z \in D$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $z_0 = 0$;

7) $f(z) = f\left(\dfrac{z}{2}\right)$, $z \in D$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $z_0 = 0$;

8) $f(z) = f(z^2)$, $z, z^2 \in D$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $z_0 = 0$;

9) $f(z) = f\left(\sqrt{z}\right)$, $z \in D$, $f(z) \not\equiv \mathrm{const}$, $z_0 = 0$, $\sqrt{1} = 1$;

10) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = 3^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, $z_0 = 0$.

12.4. Задания творческого характера

247. Функция $f(z) = \cos\frac{1}{z}$ имеет бесконечную последовательность нулей $z_n = \frac{2}{(2n+1)\pi}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к нулю. Однако $f(z) \not\equiv 0$. Нет ли здесь противоречия с теоремой единственности?

248. Точка z_0 называется A-точкой аналитической функции $w = f(z)$, если $f(z) = A$. Может ли последовательность A точек функции, отличной от тождественно равной постоянной и аналитической в $\mathbb{C}$, иметь предельную точку?

249. С помощью теоремы единственности доказать, что для всех $z \in \mathbb{C}$ выполняются равенства.

1) $\sin 2z = 2\sin z\cos z$;

2) $\operatorname{ch} 2z = \operatorname{sh}^z + \operatorname{ch}^2 z$;

3) $\sin^z + \cos^2 z = 1$;

4) $e^z \cdot e^{-z} = 1$.

250. Пусть функция $w = f(z)$ является аналитической в окрестности некоторой точки и множество E, принимаемой ею в этой окрестности значений, конечно. Доказать, что E состоит из одной точки.

251. Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в односвязной области $D(f)$, принимает только целые значения. Доказать, что $f(z) = \mathrm{const}$ в $D(f)$.

252. Пусть функция $w = f(z)$ является аналитической в области G и некоторая точка $z_0 \in G$ является ее нулем бесконечного порядка, т.е. $f(z_0) = 0$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ все производные $f^{(n)}(z_0) = 0$. Доказать, что $f(z) \equiv 0$ в G.

253. Пусть $p \in \mathbb{N}$ и $p \geqslant 2$. Существует ли отличная от тождественно равной постоянной и аналитическая в некоторой окрестности точки z_0 функция $w = f(z)$, удовлетворяющая в этой окрестности условию $f(z) = f(z^p)$?

254. Доказать, что если функция $w = f(z)$ является аналитической в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ и в каждой точке его границы, то она аналитически продолжается и в некоторый круг $D_\rho = \{z : |z| < \rho\}$, $\rho > 1$.

255. Пусть функция $w = f(z)$ аналитична в некоторой окрестности точки z_0 и $f(z_0) = 0$. Доказать, что если $f(z)$ тождественно не равна нулю, то найдется окрестности точки z_0, в которой нет нулей $f(z)$, отличных от z_0.

256. Используя теорему единственности доказать, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z}, \quad \text{если } \operatorname{Re} z > 0.$$

Глава 13

Ряд Лорана

13.1. Задания для аудиторной работы

257. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце K:

1) $f(z) = \frac{z}{z^2-4z+3}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 3\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-1| < 2\}$;
в) $K = \{z : 3 < |z| < +\infty\}$; [Ответ]

2) $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z+3)}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 3\}$;
б) $K = \{z : \sqrt{2} < |z-1| < 4\}$;
в) $K = \{z : 3 < |z| < +\infty\}$; [Ответ]

3) $f(z) = \frac{3}{z^2+z-2}$;
а) $K = \{z : |z| < 1\}$;
б) $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;
в) $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$; [Ответ]

4) $f(z) = \frac{1}{z^2-z}$;
а) $K = \{z : 0 < |z| < 1\}$;
б) $K = \{z : 1 < |z+1| < 2\}$;
в) $K = \{z : 1 < |z| < +\infty\}$; [Ответ]

5) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$;
а) $K = \{z : |z| < 1\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-i| < 2\}$;
в) $K = \{z : 1 < |z| < +\infty\}$; [Ответ]

6) $f(z) = \frac{1}{z^2-3z+2}$;
а) $K = \{z : |z| < 1\}$;
б) $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;
в) $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$. [Решение] [Ответ]

258. Применяя почленное дифференцирование рядов, найти разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в кольце K:

1) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-i| < 2\}$; [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z+2)}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$, $K = \{z : 1 < |z-1| < 2\}$; [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$; [Ответ]

5) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$, $K = \{z : 1 < |z-1| < 2\}$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{1}{z(z+3)^2}$, $K = \{z : 1 < |z+1| < 2\}$. [Решение] [Ответ]

259. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце K:

1) $f(z) = z^4 \cos\dfrac{1}{z}$, $K = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$; [Ответ]

2) $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{z}}$, $K = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$; [Ответ]

3) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{1-z}}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$; [Ответ]

4) $f(z) = z^2 \sin\dfrac{1}{z-1}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$; [Ответ]

5) $f(z) = \sin\dfrac{z}{1-z}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$; [Ответ]

6) $f(z) = \cos\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-2| < +\infty\}$. [Решение] [Ответ]

260. Выяснить, допускает ли функция $f(z)$ разложение в ряд Лорана в некоторой проколотой окрестности точки z_0:

1) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{z}{\sin z - 2}$, $z_0 = \infty$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{z^3}{\sin\frac{1}{2}}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

4) $f(z) = \operatorname{ctg} z$, $z_0 = \infty$; [Ответ]

5) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}$, $z_0 = \infty$. [Решение] [Ответ]

13.2. Базовые индивидуальные задания

261. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце K:

1) $f(z) = \frac{1}{z^2-3z}$;
а) $K = \{z : 0 < |z| < 3\}$;
б) $K = \{z : 1 < |z-1| < 2\}$;
в) $K = \{z : 3 < |z| < +\infty\}$;

2) $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$;
а) $K = \{z : 2 < |z| < 3\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-2| < 1\}$;
в) $K = \{z : 3 < |z| < +\infty\}$;

3) $f(z) = \frac{1}{z^2-z-6}$;
а) $K = \{z : 2 < |z| < 3\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-3| < 5\}$;
в) $K = \{z : 3 < |z| < +\infty\}$;

4) $f(z) = \frac{1}{z^2+z-12}$;
а) $K = \{z : 3 < |z| < 4\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+4| < 7\}$;
в) $K = \{z : 4 < |z| < +\infty\}$;

5) $f(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 3\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+1| < 2\}$;
в) $K = \{z : 3 < |z| < +\infty\}$;

6) $f(z) = \frac{z+3}{z^2+z-2}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+2| < 3\}$;
в) $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

7) $f(z) = \frac{z+3}{z^2+z-12}$;
а) $K = \{z : 3 < |z| < 4\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-3| < 7\}$;
в) $K = \{z : 4 < |z| < +\infty\}$;

8) $f(z) = \frac{z+4}{z^2-z-2}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+1| < 3\}$;
в) $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

9) $f(z) = \frac{z}{z^2+3z+2}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+2| < 1\}$;
в) $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

10) $f(z) = \frac{z+5}{z^2-2z-3}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 3\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+1| < 4\}$;
в) $K = \{z : 3 < |z| < +\infty\}$;

11) $f(z) = \frac{z-1}{z^2+8z+15}$;
а) $K = \{z : 3 < |z| < 5\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-3| < 2\}$;
в) $K = \{z : 5 < |z| < +\infty\}$;

12) $f(z) = \frac{1}{z^2+12z+11}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 11\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+1| < 10\}$;
в) $K = \{z : 11 < |z| < +\infty\}$;

13) $f(z) = \frac{1}{z(1-z)}$;
а) $K = \{z : 0 < |z| < 1\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-1| < 1\}$;
в) $K = \{z : 1 < |z| < +\infty\}$;

14) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$;
а) $K = \{z : 0 < |z-i| < 2\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+i| < 2\}$;
в) $K = \{z : 1 < |z| < +\infty\}$;

15) $f(z) = \frac{1}{z^2+9}$;
а) $K = \{z : 0 < |z-3i| < 6\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+3i| < 6\}$;
в) $K = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$;

16) $f(z) = \frac{z}{(z-i)(z-1)}$;
а) $K = \{z : 0 < |z-1| < \sqrt{2}\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-i| < \sqrt{2}\}$;
в) $K = \{z : 1 < |z| < +\infty\}$;

17) $f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+2i)}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-i| < 3\}$;
в) $K = \{z : 3 < |z| < +\infty\}$;

18) $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+i\sqrt{3})}$;
а) $K = \{z : 0 < |z+1| < 2\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+i\sqrt{3}| < 2\}$;
в) $K = \{z : \sqrt{3} < |z| < +\infty\}$;

19) $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-1+i)}$;
а) $K = \{z : 1 < |z| < \sqrt{2}\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z-1| < 1\}$;

в) $K = \{z : \sqrt{2} < |z| < +\infty\}$;

20) $f(z) = \frac{1}{(z+1+i)(z+2+2i)}$;
а) $K = \{z : \sqrt{2} < |z| < 2\sqrt{2}\}$;
б) $K = \{z : 0 < |z+1+i| < \sqrt{2}\}$;
в) $K = \{z : 2\sqrt{2} < |z| < +\infty\}$.

262. Применяя, где это необходимо, почленное дифференцирование рядов, найти разложение в ряд Лорана функции $f(z)$ в кольце K:

1) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)^2}$, $K = \{z : 0 < |z+3i| < 6\}$;

2) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-3)^2}$, $K = \{z : 0 < |z| < 3\}$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2(z+i)}$, $K = \{z : 0 < |z+i| < 2\}$;

4) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2(z-i)}$, $K = \{z : 0 < |z-i| < 2\}$;

5) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^2(z-2)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-2| < 3\}$;

6) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+4)^2}$, $K = \{z : 0 < |z+2i| < 4\}$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2(z-2i)^2}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

8) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)^2}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

9) $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^2(z+3i)^2}$, $K = \{z : 0 < |z+3i| < 2\}$;

10) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-4)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-2| < 4\}$;

11) $f(z) = \dfrac{z}{(z-i)^2(z+1)}$, $K = \{z : 0 < |z+1| < \sqrt{2}\}$;

12) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+1)^2}$, $K = \{z : 0 < |z| < 1\}$;

13) $f(z) = \dfrac{1}{(z-i)^2(z+2i)^2}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

14) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+16)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-4i| < 8\}$;

15) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^4}$, $K = \{z : 0 < |z| < 1\}$;

16) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^4}$, $K = \{z : 1 < |z| < +\infty\}$;

17) $f(z) = \dfrac{1}{(z+2)^3}$, $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

18) $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^3}$, $K = \{z : 0 < |z| < 1\}$;

19) $f(z) = \dfrac{1}{(z+i)^3}$, $K = \{z : 1 < |z| < +\infty\}$;

20) $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)^3(z-1)}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < 2\}$.

263. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце K:

1) $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z-1}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$;

2) $f(z) = \sin\dfrac{z}{z-1}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$;

3) $f(z) = ze^{\frac{z}{z-1}}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$;

4) $f(z) = (z-1)e^{\frac{1}{(1-z)^2}}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$;

5) $f(z) = \sin\dfrac{z^2+2z}{(z+1)^2}$, $K = \{z : 0 < |z+1| < +\infty\}$;

6) $f(z) = \cos\dfrac{z^2-2z}{(z-1)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$;

7) $f(z) = \operatorname{ch}\dfrac{z}{z-1}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$;

8) $f(z) = z\operatorname{ch}\dfrac{1}{z+2}$, $K = \{z : 0 < |z+2| < +\infty\}$;

9) $f(z) = \operatorname{sh}\dfrac{z}{z+1}$, $K = \{z : 0 < |z+1| < +\infty\}$;

10) $f(z) = \operatorname{ch}\dfrac{z^2-4z}{(z-2)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-2| < +\infty\}$;

11) $f(z) = z\operatorname{sh}\dfrac{1}{z+1}$, $K = \{z : 0 < |z+1| < +\infty\}$;

12) $f(z) = \sin\dfrac{z}{z-i}$, $K = \{z : 0 < |z-i| < +\infty\}$;

13) $f(z) = e^{\frac{z^2+2z}{(z+1)^2}}$, $K = \{z : 1 < |z+1| < +\infty\}$;

14) $f(z) = e^{\frac{z}{z+1}}$, $K = \{z : 0 < |z+1| < +\infty\}$;

15) $f(z) = \dfrac{ze^{2z}}{z-1}$, $K = \{z : 0 < |z-1| < +\infty\}$;

16) $f(z) = \dfrac{ze^{z}}{z+1}$, $K = \{z : 0 < |z+1| < +\infty\}$;

17) $f(z) = \ln\dfrac{z+i}{z+2i}$, $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

18) $f(z) = \dfrac{\operatorname{ch} z}{z+1}$, $K = \{z : 0 < |z+1| < +\infty\}$;

19) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh}(z+2)}{z}$, $K = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$;

20) $f(z) = \ln \dfrac{z-1}{z-2}$, $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$.

13.3. Задания для самостоятельной работы

264. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце K:

1) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)^2(z^2-1)}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

2) $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)^2(z^2-1)}$, $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

3) $f(z) = \dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

4) $f(z) = \dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

5) $f(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-i| < 2\}$;

6) $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2(z-2i)}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

7) $f(z) = \dfrac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

8) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$, $K = \{z : 0 < |z-i| < 2\}$;

9) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)^3}$, $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

10) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2+9)^3}$, $K = \{z : 0 < |z+3i| < 6\}$.

265. Разложить функцию $f(z)$ в ряд Лорана в кольце K:

1) $f(z) = \sin \dfrac{z}{1+z}$, $K = \{z : 0 < |z+1| < +\infty\}$;

2) $f(z) = \ln \dfrac{z-1}{z+1}$, $K = \{z : 1 < |z| < +\infty\}$;

3) $f(z) = \ln \dfrac{z-a}{z-b}$, $K = \{z : \max\{|a|, |b|\} < |z| < +\infty\}$;

4) $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^2(z-b)^2}$ $(0 < |a| < |b|)$, $K = \{z : |a| < |z| < |b|\}$;

5) $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)^2(z-b)^2}$ $(0 < |a| < |b|)$, $K = \{z : 0 < |z-a| < |b-a|\}$;

6) $f(z) = \dfrac{1}{z-2} \ln \dfrac{z-i}{z+i}$, $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{z-2} \ln \dfrac{z-i}{z+i}$, $K = \{z : 2 < |z| < +\infty\}$;

8) $f(z) = \dfrac{ze^{2z}}{z-a}$, $K = \{z : 0 < |z-a| < +\infty\}$;

9) $f(z) = \cos \dfrac{z^2-2az}{(z-a)^2}$, $K = \{z : 0 < |z-a| < +\infty\}$;

10) $f(z) = z^2 \sin \dfrac{z}{z-a}$, $K = \{z : 0 < |z-a| < +\infty\}$.

266. Выяснить, допускает ли функция $f(z)$ разложение в ряд Лорана в некоторой проколотой окрестности точки z_0:

1) $f(z) = \ln \dfrac{z-1}{z+i}$, $z_0 = \infty$;

2) $f(z) = \ln \dfrac{z}{(z+1)^2}$, $z_0 = \infty$;

3) $f(z) = z^{\pi} := e^{\pi \ln z}$, $z_0 = 0$;

4) $f(z) = \dfrac{z}{\sin^2 z}$, $z_0 = 0$;

5) $f(z) = \dfrac{z}{2 + \sin z}$, $z_0 = \infty$;

6) $f(z) = \ln \dfrac{1}{1 - z}$, $z_0 = \infty$;

7) $f(z) = \operatorname{th} \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$;

8) $f(z) = \operatorname{sh} \dfrac{1}{z - 1}$, $z_0 = 1$;

9) $f(z) = z^{\alpha} := e^{\alpha \ln z}$, $z_0 = 0$;

10) $f(z) = \sin \dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$.

267. Выяснить, имеет ли многозначная функция $F(z)$ однозначную ветвь $f(z)$, допускающую разложение в ряд Лорана в окрестности точки z_0:

1) $F(z) = \sqrt{z}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

2) $F(z) = \sqrt{z(z-1)}$, $z_0 = \infty$; [Ответ]

3) $F(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$, $z_0 = 0$; [Ответ]

4) $F(z) = \operatorname{Arcsin} z$, $z_0 = 0$; [Ответ]

5) $F(z) = \operatorname{Arsh}(z + i)$, $z_0 = 0$; [Ответ]

6) $F(z) = \sqrt{1 + \sqrt{z}}$, $z_0 = 1$; [Ответ]

7) $F(z) = \operatorname{Ln}\big((z+1)(z+2)\big)$, $z_0 = \infty$; [Ответ]

8) $F(z) = \operatorname{Arctg}(z + 1)$, $z_0 = 0$. [Ответ]

13.4. Задания творческого характера

268. Разложить в ряд Лорана функцию $\operatorname{ctg} z$:

1) в кольце $K = \{z : 0 < |z| < \pi\}$;

2) в кольце $K = \{z : \pi < |z| < 2\pi\}$.

269. Найти противоречие с ???теоремой единственности для рядов Лорана??? в следующей цепочке равенств:

$$0 = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{1-z} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z^n.$$

270. При $t > 0$ и всех z из кольца $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ получить разложение функции

$$f(z) = \exp\left(\frac{t}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$$

в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n,$$

где

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

271. Доказать, что разложение в ряд Лорана функции

$$f(z) = \operatorname{ch}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

в кольце $K = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$ имеет вид:

$$\operatorname{ch}\left(z + \frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),$$

где

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ch}(2\cos\theta)\cos n\theta \, d\theta.$$

272. Используя замену $z = e^{it}$ и разложение в ряд Лорана в кольце $K = \{z : 0 < |z| < \infty\}$ функции

$$f(z) = \frac{1}{2i}\left(e^z - e^{\frac{1}{z}}\right),$$

доказать, что при $t \in (0, 2\pi)$:

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n!} = e^{\cos t} \sin(\sin t);$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$

Глава 14

Изолированные особые точки аналитической функции

14.1. Задания для аудиторной работы

273. Найти конечные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип:

1) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$; [Ответ]

2) $f(z) = z^2 \cos \dfrac{\pi}{z}$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{z}{1-\cos z}$; [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2}$; [Ответ]

5) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{\sin^2 z}$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{1}{z^3(2-\cos z)}$. [Решение] [Ответ]

274. Найти все особые точки функции $f(z)$ и исследовать их характер (включая бесконечность):

1) $f(z) = z\, e^{-1/z}$; [Ответ]

2) $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{1}{z+z^3}$; [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z^2)^2}$; [Ответ]

5) $f(z) = z^2 + 1e^z$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{e^z}{z(1-e^{-z})}$. [Решение] [Ответ]

275. Найти все особые точки функции $f(z)$ и исследовать их характер (включая бесконечность):

1) $f(z) = \dfrac{\operatorname{tg} z}{z}$; [Ответ]

2) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$; [Ответ]

3) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$; [Ответ]

4) $f(z) = e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$; [Ответ]

5) $f(z) = \operatorname{tg}^2 z$; [Ответ]

6) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$. [Решение] [Ответ]

276. Определить, является ли точка $z = \infty$ изолированной особой точкой функции $f(z)$:

1) $f(z) = \operatorname{tg}\dfrac{1}{z}$; [Ответ]

2) $f(z) = \operatorname{th} z$; [Ответ]

3) $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 1}$; [Ответ]

4) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$; [Ответ]

5) $f(z) = \dfrac{1 - e^z}{1 + e^z}$; [Ответ]

6) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z + \cos z}$. [Решение] [Ответ]

14.2. Базовые индивидуальные задания

277. Найти конечные особые точки функции $f(z)$ и определить их тип:

1) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z - z^3}$;

2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$;

3) $f(z) = z e^{\frac{1}{z}}$;

4) $f(z) = \dfrac{z^4}{1 + z^4}$;

5) $f(z) = \dfrac{z}{1 + \cos z}$;

6) $f(z) = e^{\frac{z}{1-z}}$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{e^z + 1}$;

8) $f(z) = \dfrac{1}{z(2 + \cos z)}$;

9) $f(z) = \dfrac{z^3}{(1 + z)^4}$;

10) $f(z) = z\, e^{-z^2}$;

11) $f(z) = \dfrac{1}{z + z^3}$;

12) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2 + 1)^2}$;

13) $f(z) = z^3 \sin \dfrac{1}{z}$;

14) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$;

15) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z}$;

16) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z - \cos z}$;

17) $f(z) = \dfrac{1 + e^z}{1 - e^z}$;

18) $f(z) = \dfrac{e^z}{(1 + z^2)^3}$;

19) $f(z) = \dfrac{z}{2 + \sin z}$;

20) $f(z) = \dfrac{z + \frac{\pi}{4}}{\sin z + \cos z}$.

278. Найти все особые точки функции $f(z)$ и исследовать их характер (включая бесконечность):

1) $f(z) = z^2 e^{-\frac{1}{z}}$;

2) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^3}$;

3) $f(z) = \dfrac{z + \frac{\pi}{4}}{\sin z - \cos z}$;

4) $f(z) = \dfrac{2 - e^z}{2 + e^z}$;

5) $f(z) = e^{\frac{z}{z+1}}$;

6) $f(z) = \dfrac{z}{1 + z^3}$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 - z^5}$;

8) $f(z) = \dfrac{z^2}{e^z + 1}$;

9) $f(z) = \dfrac{\cos^2 z}{z^2}$;

10) $f(z) = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z}$;

11) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z^3}$;

12) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2 + 1)^2}$;

13) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z - \operatorname{ch} z}$;

14) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z}$;

15) $f(z) = \dfrac{i + e^z}{i - e^z}$;

16) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z^4}$;

17) $f(z) = \dfrac{z}{1 + \operatorname{ch} z}$;

18) $f(z) = z^5 e^{-z^4}$;

19) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z + 1)^3}$;

20) $f(z) = \dfrac{z^8}{(z^2 + 1)^4}$.

279. Определить, является ли точка $z = \infty$ для функции $f(z)$ изолированной особой точкой. В случае положительного ответа указать ее тип:

1) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^5 - 1}$;

2) $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2 z}$;

3) $f(z) = \operatorname{th}\dfrac{1}{z}$;

4) $f(z) = \operatorname{cth}\dfrac{1}{z}$;

5) $f(z) = e^z \sin\dfrac{1}{z}$;

6) $f(z) = z^6 e^{\frac{1}{z}}$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{e^z + e}$;

8) $f(z) = \cos z - \sin z$;

9) $f(z) = \dfrac{z^4 + 1}{e^z}$;

10) $f(z) = \dfrac{z^6 + 1}{z^2 + z}$;

11) $f(z) = \dfrac{z^2}{1 + z^4}$;

12) $f(z) = e^{-z}\cos\dfrac{1}{z}$;

13) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z}{(z-1)^3}$;

14) $f(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{z^2+4}$;

15) $f(z) = \dfrac{z^2+2}{z^10+2}$;

16) $f(z) = z^4 \cos\dfrac{1}{z^2}$;

17) $f(z) = z^3 e^{-3z}$;

18) $f(z) = z^2 \operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$;

19) $f(z) = \dfrac{\sin\frac{1}{2}}{1+z}$;

20) $f(z) = \sin z \sin\dfrac{1}{z}$.

14.3. Задания для самостоятельной работы

280. Найти все особые точки функции $f(z)$ и исследовать их характер (включая бесконечность):

1) $f(z) = \sin\left(\dfrac{1}{\cos\frac{1}{z}}\right)$;

2) $f(z) = \dfrac{1}{\cos z + \cos a}$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{\sin z - \sin a}$;

4) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{z^2}$;

5) $f(z) = e^{\operatorname{tg}\frac{1}{z}}$;

6) $f(z) = \dfrac{z^7}{(z^2-4)^2\cos\frac{1}{z-2}}$;

7) $f(z) = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z}$;

8) $f(z) = \operatorname{ctg}\dfrac{1}{z} - \dfrac{2}{z}$;

9) $f(z) = \operatorname{tg}^2 z$;

10) $f(z) = \dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^z - 1}$;

11) $f(z) = \dfrac{1-e^{2z}}{1+e^{2z}}$;

12) $f(z) = \sin z + \cos\dfrac{1}{z}$.

281. Доказать, что точка z_0 является существенно особой точкой для функции $f(z)$:

1) $f(z) = e^{-z^3}$, $z_0 = \infty$;

2) $f(z) = \sin \dfrac{\pi}{z^2 + z}$, $z_0 = 0$;

3) $f(z) = \sin(e^z)$, $z_0 = \infty$;

4) $f(z) = z^3 \cos \dfrac{\pi}{z}$, $z_0 = 0$;

5) $f(z) = e^{\operatorname{tg} z}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

6) $f(z) = \cos \dfrac{\pi}{z^2 + 1}$, $z_0 = i$;

7) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}$, $z_0 = 0$;

8) $f(z) = \cos z - \sin z$, $z_0 = \infty$;

9) $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{e^z}$, $z_0 = \infty$;

10) $f(z) = \sin \dfrac{\pi}{z}$, $z_0 = 0$;

11) $f(z) = \cos(e^z)$, $z_0 = \infty$;

12) $f(z) = \cos \dfrac{z}{z - 1}$, $z_0 = 1$.

282. Определить характер особой точки $z_0 = 0$ функции $f(z)$:

1) $f(z) = \exp \dfrac{\sin z}{z}$;

2) $f(z) = \dfrac{e^z}{\sin z - z + \frac{z^3}{6}}$;

3) $f(z) = (e^z - 1 - z) \operatorname{ctg}^3 z$;

4) $f(z) = \dfrac{\sin 2z}{\cos z - 1 + \frac{z^2}{2}}$;

5) $f(z) = e^{\frac{1}{z^2 - z}}$;

6) $f(z) = \dfrac{1 + e^{z^2}}{1 - e^{z^2}}$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{z - \sin z}$;

8) $f(z) = z^2 \operatorname{ctg} \dfrac{1}{z}$.

283. Выяснить, является ли точка z_0 правильной или особой для каждой из однозначных ветвей многозначной функции $f(z)$. В случае, если она является особой, указать характер особенности:

1) $f(z) = \dfrac{z}{1 + \sqrt{z - 2}}$, $z_0 = 3$;

2) $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z} + \sqrt[3]{z}}$, $z_0 = 1$;

3) $f(z) = \dfrac{2z + 1}{1 + z - 2\sqrt{z}}$, $z_0 = 1$;

4) $f(z) = \cos \dfrac{1}{1 + \sqrt{z}}$, $z_0 = 1$;

5) $f(z) = \dfrac{z + 1}{1 + \sqrt{z - 3}}$, $z_0 = 4$;

6) $f(z) = \dfrac{1}{\sin \frac{\operatorname{Ln} z}{2i}}$, $z_0 = 1$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{1 + \sqrt{\frac{z}{z-2}}}$, $z_0 = \infty$;

8) $f(z) = \operatorname{ctg} \dfrac{1}{1+\sqrt{z}}$, $z_0 = \left(1 + \dfrac{1}{\pi}\right)^2$.

284. Пусть $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — полиномы степеней n и m соответственно. Охарактеризовать поведение при $z \to \infty$ следующих функций:

1) $P_n(z) + Q_m(z)$;
2) $\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$;
3) $P_n(z) \cdot Q_m(z)$;
4) $\big(P_n(z)\big)^k$, $k \in \mathbb{Z}$;
5) $\exp(P_n(z))$;
6) $\sin \dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}$;
7) $P_n\big(Q_m(z)\big)$;
8) $\exp\left(\dfrac{P_n(z)}{Q_m(z)}\right)$.

14.4. Задания творческого характера

285. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая функция, не имеющая в области G других особенностей, кроме полюсов. Доказать, что функция $f'(z)/f(z)$ (логарифмическая производная функции $f(z)$) имеет простые полюсы во всех полюсах функции $f(z)$ и во всех нулях этой функции и не имеет в G никаких других особых точек.

286. Какую особенность имеет в точке $z = z_0$ функции $F(z) = f(\varphi(z))$, если φ в этой точке аналитична или имеет полюс, а точка $\xi_0 = \varphi(z_0)$ является для функции f:
а) устранимой точкой;
б) полюсом порядке n;
в) существенно особой точкой?

287. Пусть z_0 — изолированная особая точка для функции $f(z)$ и $\operatorname{Re} f(z) > 0$ в некоторой окрестности этой точки. Доказать, что z_0 является устранимой особой точкой для функции $f(z)$.

288. Показать, что функция обратная к целой, не может быть также целой, кроме случая линейной функции.

289. Пусть z_0 — изолированная особая точка для функции $f(z)$, удовлетворяющей в некоторой окрестности этой точки неравенству $|f(z)| < M|z - z_0|^{-m}$, где m и M — положительные постоянные. Доказать, что z_0 не может быть существенно особой точкой функции $f(z)$.

290. Пусть z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$. Чем является точка z_0 для функции

$$\frac{1}{f(z)\big(f(z) - a\big)},$$

где $a \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$?

291. Теорема Пикара утверждает, что в окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает бесконечно много раз всякое конечное значение, за исключением, быть может, одного, которое называется пикаровским исключительным значением. Если рассматривать мероморфные функции, то возможное число исключительных значений (включая и ∞ не превосходит двух.
Найти исключительные значения для каждой из следующих функций $f(z)$ и показать, что эти значения (если они существуют) являются асимптотическими, т.е. что можно указать хотя бы одну линию оканчивающуюся в существенно особой точке, вдоль которой функция стремится к исключительному значению:

1) $f(z) = e^z$;

2) $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$;

3) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$;

4) $f(z) = \operatorname{tg} z$;

5) $f(z) = \operatorname{tg}^2(z)$.

Глава 15

Вычисление вычетов

15.1. Задания для аудиторной работы

15.2. Базовые индивидуальные задания

15.3. Задания для самостоятельной работы

15.4. Задания творческого характера

Глава 16

Вычисление интегралов с помощью вычетов

16.1. Задания для аудиторной работы

16.2. Базовые индивидуальные задания

16.3. Задания для самостоятельной работы

16.4. Задания творческого характера

Глава 17

Вычисление определенных интегралов

17.1. Задания для аудиторной работы

17.2. Базовые индивидуальные задания

17.3. Задания для самостоятельной работы

17.4. Задания творческого характера

Глава 18

Вычисление несобственных интегралов

18.1. Задания для аудиторной работы

18.2. Базовые индивидуальные задания

18.3. Задания для самостоятельной работы

18.4. Задания творческого характера

Глава 19

Вычисление интегралов от многозначных функций

19.1. Задания для аудиторной работы

19.2. Базовые индивидуальные задания

19.3. Задания для самостоятельной работы

19.4. Задания творческого характера

Решения и указания

Глава 1. Комплексные числа и действия над ними

Решение задачи 1.1

Арифметические действия над комплексными числами осуществляются по обычным правилам с учетом того, что $i^2 = -1$. Поэтому,

$$z_1 + z_2 = 1 - i + 1 + i = 2,$$
$$z_1 \cdot z_2 = (1-i)(1+i) = 1^2 - i^2 = 1 + 1 = 2.$$

При делении комплексных чисел числитель и знаменатель дроби следует умножить на число, сопряженное знаменателю, т.е.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-2i-1}{2} = -i.$$

Осталось выполнить последнее действие:

$$z_1^2 + z_2^2 = (1-i)^2 + (1+i)^2 = 1 - 2i - 1 + 1 + 2i - 1 = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 2.1

Изобразим число $z = 1 + i$ на комплексной плоскости Найдем модуль

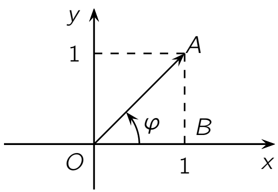


Рис. Р.1

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Ясно, что $\arg z = \varphi = \angle AOB$. Поэтому

$$\operatorname{tg} \angle AOB = \frac{1}{1} = 1,$$

и

$$\arg z = \frac{\pi}{4}.$$

Модули и аргументы комплексных чисел $\overline{z} = 1 - i$, $-\overline{z} = -1 + i$ и $-z = -1 - i$ находятся аналогично. Здесь изобразим лишь их на комплексной плоскости. [Вернуться к условию]

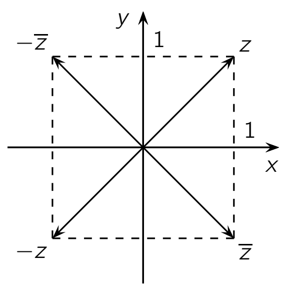


Рис. P.2

Решение задачи 3.1

Сначала найдем модуль и аргумент данного комплексного числа. Изобразим его на комплексной плоскости.

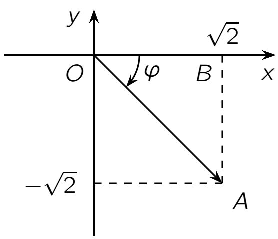


Рис. Р.3

В этом случае

$$|z| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = 2.$$

$$\arg z = \varphi = -\angle AOB = -\frac{\pi}{4}.$$

Поэтому в тригонометрической форме

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

данное число запишется следующим образом

$$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right),$$

а в показательной форме

$$z = |z|e^{i\varphi}$$

так

$$z = 2\, e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Для возведения числа в требуемую степень воспользуемся формулой Муавра

$$z^6 = |z|^6(\cos 6\varphi + i \sin 6\varphi) = 2^6 \left(\cos\left(-6 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-6 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 64 \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)\right) = 64(0 + i) = 64i.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 4.1

Сначала найдем модуль и аргумент комплексного числа $z = 1$. Очевидно,

$$|z| = 1, \quad \arg z = 0.$$

Все значения корня находим по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{i\frac{\arg z + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

В данном случае

$$w_k = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1}e^{i\frac{2k\pi}{4}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Подставляя все требуемые значения k, получаем

$$\begin{aligned}
w_0 &= e^0 = 1;\\
w_1 &= e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;\\
w_2 &= e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1;\\
w_3 &= e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.
\end{aligned}$$

Все значения $\sqrt[4]{1}$ лежат в вершинах квадрата, вписанного в окружность радиуса 1 с центром в начале координат (рисунок Р.4). [Вернуться к условию]

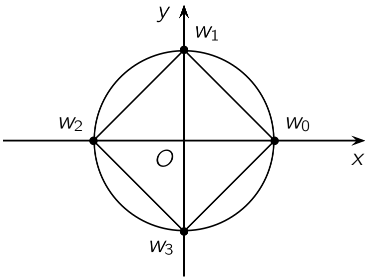


Рис. Р.4

Решение задачи 5.1

Пусть $z = x + iy$. Тогда уравнение можно переписать в виде

$$(x + iy)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0.$$

Выполним несложные преобразования,

$$x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} + 2ixy = 0.$$

Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. Поэтому, последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0, \\ 2xy = 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание второе уравнение, возможны две ситуации. Если $x = 0$, то

$$-y^2 + \sqrt{y^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = |y|,$$

т.е. $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$. Так как $z = x + iy$, то в этом случае решениями исходного уравнения будут числа $z_1 = 0$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$.

Если же $y = 0$, то

$$x^2 + \sqrt{x^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = -|x|,$$

т.е. $x = 0$. В этом случае получим, что решением уравнения будет $z_1 = 0$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 6.1

Пусть $z = x + iy$. Тогда

$$\operatorname{Re}(iz) = \operatorname{Re}(i(x+iy)) = \operatorname{Re}(ix - y) = -y$$

и поэтому

$$\{z : \ 0 < \operatorname{Re}(iz) < 1\} = \{z = x + iy : \ 0 < -y < 1\} = \\ = \{z = x + iy : \ -1 < y < 0\}.$$

Полученная область изображена на рисунке Р.5. [Вернуться к условию]

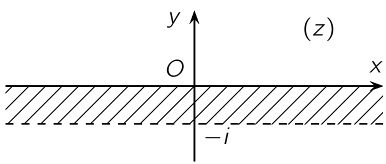


Рис. Р.5

Решение задачи 7.1

Пусть $z = x + iy$. Выделив действительную и мнимую часть в правой часть исходного уравнения, получим

$$x + iy = i + \cos t + i \sin t = \cos t + i(1 + \sin t).$$

Комплексные числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части. Поэтому, последнее уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = 1 + \sin t \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y - 1 = \sin t. \end{cases}$$

Возведем в квадрат оба уравнения и сложим. Получим

$$x^2 + (y-1)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t,$$

т.е.

$$x^2 + (y-1)^2 = 1? \quad t \in [0, 2\pi].$$

Значит, исходное уравнение задает на плоскости окружность с центром в точке $(0, 1)$ и радиусом 1 (рисунок Р.6).
[Вернуться к условию]

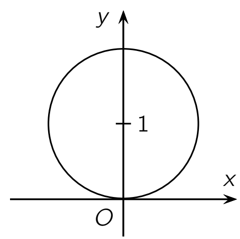


Рис. Р.6

Глава 2. Элементарные трансцендентные функции

Решение задачи 29.1

По определению

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

где главное значение аргумента $\arg z \in (-\pi, \pi]$. Так как $|-1| = 1$, а $\arg(-1) = \pi$, то

$$\operatorname{Ln}(-1) = \ln 1 + i\pi + i2k\pi = i(\pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

При возведении в степень поступим следующим образом. Так как

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z},$$

то

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i}.$$

Из определения логарифма следует, что

$$\operatorname{Ln} i = \ln|i| + i\arg i + i2k\pi = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + i2k\pi = i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому,

$$i^i = e^{i\cdot i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = e^{-\frac{\pi}{2}+2m\pi},$$

где $m = -k \in \mathbb{Z}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 30.1

а) Положим $z = x + iy$. Тогда

$$w = iz^2 = i(x+iy)^2 = i(x^2 + i2xy - y^2) = -2xy + i(x^2 - y^2).$$

Отсюда

$$\operatorname{Re} w = -2xy, \quad \operatorname{Im} w = x^2 - y^2.$$

б) Положим $z = x + iy$. Учитывая формулы для гиперболических функций, получаем

$$w = \operatorname{ch} iz = \operatorname{ch} i(x+iy) = \operatorname{ch}(ix - y) = \operatorname{ch} ix \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} ix \operatorname{sh} y.$$

Осталось применить формулы связи гиперболических и тригонометрических функций

$$\operatorname{ch} ix = \cos x, \quad \operatorname{sh} ix = i \sin x.$$

Окончательно,

$$w = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y,$$

т.е.

$$\operatorname{Re} w = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \operatorname{Im} w = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

в) Пусть $z = |z|e^{i \arg z}$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$. По определению показательной функции

$$w = z^i = e^{i \operatorname{Ln} z} = e^{i(\ln|z| + i \arg z)} = e^{-\arg z + i \ln|z|} =$$
$$= e^{-\arg z} e^{i \ln|z|} = e^{-\arg z}(\cos(\ln|z|) + i \sin(\ln|z|)).$$

Тогда

$$\operatorname{Re} w = e^{-\arg z} \cos(\ln|z|), \quad \operatorname{Im} w = e^{-\arg z} \sin(\ln|z|).$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 31.1

Воспользуемся определением. $\operatorname{Arccos} z$ — это такое число w, что

$$\cos w = z.$$

Учитывая определение $\cos w$ последнее равенство перепишем в виде

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = z.$$

Выразим w из этого уравнения. Сделаем замену

$$e^{iw} = t.$$

Получим и решим уравнение относительно t:

$$t + \frac{1}{t} = 2z, \quad t^2 - 2zt + 1 = 0.$$

Поскольку дискриминант этого уравнения $D = 4z^2 - 4$, то его решениями будут

$$t = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Здесь корень принимает два значения и правая часть может быть переписана в виде

$$t = z \pm \sqrt{z^2 - 1}.$$

Но обычно это не делают. Далее, учитывая замену, получаем

$$e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}.$$

Откуда следует, что

$$iw = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right), \quad w = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

т.е.

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

что и требовалось доказать. [Вернуться к условию]

Решение задачи 31.2

По определению

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

Возведем оба равенства квадрат,

$$\sin^2 z = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4}, \quad \cos^2 z = \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4},$$

и сложим

$$\sin^2 z + \cos^2 z = \frac{1}{4}\left(-e^{2iz} + 2 - e^{-2iz} + e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}\right) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1.$$

Что и требовалось доказать. [Вернуться к условию]

Решение задачи 31.3

Воспользуемся определением тригонометрических функций

$$\operatorname{tg} iz = \frac{\sin iz}{\cos iz} = \frac{e^{i\cdot iz} - e^{i\cdot(-iz)}}{2i} : \frac{e^{i\cdot iz} + e^{i\cdot(-iz)}}{2} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} : \frac{e^{-z} + e^{z}}{2}.$$

Осталось вспомнить, что

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^{z} + e^{z}}{2}.$$

Тогда

$$\operatorname{tg} iz = -\frac{1}{i}\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = i \operatorname{th} z,$$

что и требовалось доказать.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 32.1

Воспользуемся формулой

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln} i \left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Получим,

$$\operatorname{Arcsin} i = -i \operatorname{Ln} i(i + \sqrt{-2}) = -i \operatorname{Ln} i(i \pm i\sqrt{2}) = -i \operatorname{Ln}(-1 \pm \sqrt{2}).$$

Заметим, что

$$\operatorname{Ln}(\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} - 1) + i2k\pi,$$

$$\operatorname{Ln}(-\sqrt{2} - 1) = \ln(\sqrt{2} + 1) + i\pi + i2k\pi.$$

Поэтому,

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\big(\ln(\sqrt{2} - 1) + i2k\pi\big) = 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} - 1)$$

или

$$\operatorname{Arcsin} i = -i\big(\ln(\sqrt{2} + 1) + i\pi + i2k\pi\big) = \pi + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} + 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 33.1

Очевидно,

$$z = \operatorname{Arccos} 2.$$

Для нахождения этих значений воспользуемся формулой

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right).$$

Получим,

$$\operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}\left(2 + \sqrt{3}\right) =$$
$$= -i(\ln(2 + \sqrt{3}) + i2k\pi) = 2k\pi - i\ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z},$$

т.е.

$$z = 2k\pi - i\ln(2 + \sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 3. Функции комплексного переменного

Решение задачи 51.1

Покажем, что предел

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} z}{z}$$

не существует. Для этого воспользуемся определением предела на языке последовательностей. Пусть

$$z_n=\frac{1}{n},\quad \text{а}\quad \widetilde{z}_n=\frac{i}{n}.$$

Обе эти последовательности сходятся к нулю, т.е.

$$z_n\to 0\quad \text{и}\quad \widetilde{z}_n\to 0.$$

При этом

$$f(z_n)=1,\quad \text{а}\quad f(\widetilde{z}_n)=0\quad \text{при любых } n\in\mathbb{N}$$

Это означает, что

$$f(z_n)\to 1,\quad \text{а}\quad f(\widetilde{z}_n)\to 0\quad \text{при } n\to\infty.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{Re} z}{z}$$

не существует.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 51.6

Покажем, что предел

$$\lim_{z\to 0} \frac{z \operatorname{Im} z}{|z|} = 0.$$

Действительно,

$$0 \leqslant |f(z)| = \left| \frac{z \operatorname{Im} z}{z} \right| = |\operatorname{Im} z| \leqslant z.$$

Но

$$\lim_{z\to 0} |z| = 0.$$

Тогда и

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{z\to 0} f(z) = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 52.1

Так как

$$w = \overline{z}^2 \cdot z = (x - iy)^2(x + iy) = (x^2 - y^2)x + 2xy^2 + i\big((x^2 - y^2)y - 2x^2y\big),$$

то

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = (x^2 - y^2)x + 2xy^2,$$
$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = (x^2 - y^2)y - 2x^2y.$$

Функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в каждой точке (x, y), поэтому функция $w = \overline{z}^2 \cdot z$ непрерывна в каждой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости. [Вернуться к условию]

Решение задачи 52.2

По определению

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \frac{e^{x+iy} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y.$$

Следовательно,

$$u(x, y) = \operatorname{Re}(\sin z) = \sin x \operatorname{ch} y,$$

$$u(x, y) = \operatorname{Im}(\sin z) = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Так как функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в каждой точке (x, y), то функция $w = \sin z$ непрерывна в каждой точке $z = x + iy$ комплексной плоскости. [Вернуться к условию]

Решение задачи 53.1

По критерию дифференцируемости функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке $z = x + iy$ тогда и только тогда, когда $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) как функции двух действительных переменных и выполняются условия Коши – Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

В нашем случае $u(x, y) = xy$, $v(x, y) = x^2 - y^2$. Так как частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = x, \ \frac{\partial v}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial v}{\partial y} = -2y$$

непрерывны для любых (x, y), то u и v дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Условия Коши – Римана имеют вид:

$$\begin{cases} y = -2y, \\ x = -2x. \end{cases}$$

Они выполняются только в точке $(0, 0)$. Поэтому данная функция $w = f(z)$ дифференцируема только в точке $z = 0$.

Для аналитичности в точке z_0 требуется дифференцируемость $f(z)$ в некоторой ее окрестности. Следовательно, точек аналитичности $f(z)$ не имеет.

Производную функции $w = f(z)$ в точке дифференцируемости $z_0 = x_0 + iy_0$ будем находить по формуле

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0).$$

В нашем случае $z_0 = 0 = 0 + i0$,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x$$

и, следовательно,

$$f'(0) = 0.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 54.1

Проведем те же рассуждения, что и при решении задачи 3.1. Имеем

$$w = x + ay + i(bx + cy),$$

$$u(x, y) = x + ay, \quad v(x, y) = bx + cy.$$

Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial u}{\partial y} = a, \ \frac{\partial v}{\partial x} = b, \ \frac{\partial v}{\partial y} = c$$

непрерывны для любых (x, y), то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Условия Коши – Римана имеют вид:

$$\begin{cases} 1 = c, \\ a = -b. \end{cases}$$

Поэтому функция $w = f(z)$ будет дифференцируемой, а, значит, и аналитической в $\mathbb{C}$ при условиях $a = -b$ и $c = 1$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 55.1

Проведем те же рассуждения, что и при решении задач 3.1, 4.1. Имеем

$$w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y),$$

$$u(x,y) = e^x\cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y.$$

Частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x\sin y, \ \frac{\partial v}{\partial x} = e^x\sin y, \ \frac{\partial v}{\partial y} = e^x\cos y$$

непрерывны для любых (x, y), то $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в $\mathbb{R}^2$. Условия Коши – Римана выполняются при любых (x, y). Значит функция $w = e^z$ дифференцируема в $\mathbb{C}$. Теперь найдем производную

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^{x+iy} = e^z.$$

Итак,

$$(e^z)' = e^z.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 56.1

Функция $u(x,y)$, имеющая в области G непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

называется гармонической. В данном случае $u(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 1,$$

т.е. все частные производные второго порядка непрерывны. Однако, функция $u(x,y)$ не удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому $u(x,y)$ не является гармонической в области определения.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 57.1

Найдем частные производные функции $u(x,y) = \varphi(xy)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(xy)\cdot(xy)'_x = \varphi'(xy)\cdot y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(xy)\cdot x,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi'(xy)\cdot y^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi'(xy)\cdot x^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \varphi'(xy) + \varphi''(xy)xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \varphi'(xy) + \varphi''(xy)xy.$$

Все частные второго порядка функции $u(x,y)$ непрерывны. Уравнение Лапласа имеет вид:

$$\varphi''(xy)(x^2+y^2) = 0.$$

Отсюда следует, что $u(x,y)$ является гармонической в $\mathbb{R}^2$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi''(t) = 0,$$

т.е. в случае, когда $\varphi(t)$ представляет собой линейную функцию:

$$\varphi(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, гармонические функции такого вида заданы равенством

$$u(x,y) = axy + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 58.1

Первый способ. Находим функцию $v(x, y)$ по формуле

$$v(x,u) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + a, \quad a \in \mathbb{R},$$

где криволинейный интеграл берется по любой кривой, лежащей в $\mathbb{C}$ и соединяющей точку (x_0, y_0) с (x, y). Положим $(x_0, y_0) = (0, 0)$, а в качестве кривой интегрирования L возьмем ломаную $L = L_1 \cap L_2$ (см. рис. P.7),

$$L_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : \ z(t) = t, t \in [0, x]\right\}, \ L_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : \ z(t) = x + it, t \in [0, y]\right\}.$$

В данном случае

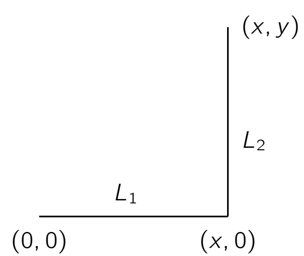


Рис. P.7

$$u(x, y) = e^{-y} \cos x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y} \cos x, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -e^{-y} \sin x.$$

Поэтому,

$$v(x,y)=\int_0^x(-\cos t)\,dt+\int_0^y(-e^{-t}\sin x)\,dt+a=\sin x+\sin x\cdot e^{-t}\Big|_0^y+a=$$
$$=\sin x+e^{-y}\sin x-\sin x+a=e^{-y}\sin x+a.$$

Тогда искомая функция примет вид

$$f(z)=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x+a=e^{i(x+iy)}+a=e^{iz+a}.$$

Так как $f(-i)=e$, то $a=0$. Следовательно, $f(z)=e^{iz}$.

Второй способ. Так как функции $u(x,y)$и $v(x,y)$связаны условиями Коши – Римана, то $v(x,y)$ найдем из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=e^{-y}\cos x,\\ \frac{\partial v}{\partial y}=-e^{-y}\sin x.\end{cases}$$

Интегрируя первое уравнение по переменной x, получаем

$$v(x,y)=e^{-y}\sin x+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ — некоторая функция одной действительной переменной. Функция $v(x,y)$ удовлетворяет второму уравнению системы. Поэтому справедливо равенство

$$-e^{-y}\sin x+\varphi'(y)=-e^{-y}\sin x,$$

т.е. $\varphi'(y)=0$. Отсюда следует, что

$$\varphi(y)\equiv\text{const}=a\in\mathbb{R}.$$

Итак,

$$f(z)=e^{-y}\cos x+ie^{-y}\sin x+a.$$

Далее, поступая также как и в первом способе решения, окончательно получаем

$$f(z) = e^{iz}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Решение задачи 76.1

Найдем производную данной функции

$$w' = 3z^2.$$

Коэффициент растяжения в точке равен модулю значения производной в этой точке, т.е.

$$k = |f'(z_0)| = |3 \cdot 1^2| = 3.$$

В свою очередь, угол поворота равен аргументу производной, т.е.

$$\theta = \arg f'(z_0) = \arg 3 = 0.$$

Таким образом, все кривые, проходящие через точку $z_0 = 1$ при отображении $w = z^3$ будут растягиваться с коэффициентом $k = 3$ и не будут поворачиваться. [Вернуться к условию]

Решение задачи 76.3

Найдем значение производной функции в данной точке

$$f'(z_0) = 3(1+i)^2 = 3(1+2i-1) = 6i.$$

Поэтому,

$$k = |f'(z_0)| = 6, \quad \theta = \arg f'(z_0) = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, все кривые, проходящие через точку $z_0 = 1 + i$ при отображении $w = z^3$ будут растягиваться с коэффициентом $k = 6$ и будут поворачиваться на один и тот же угол $\theta = \pi/2$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 78.1

Найдем производную данной функции

$$w' = 4z^3.$$

Линейное растяжение характеризуется величиной $k = |f'(z)|$. При этом, если $k > 1$, то происходит растяжение, если же $k < 1$ — сжатие. Следовательно, в данном случае сжатие происходит при выполнении условия

$$|4z^3| < 1,$$

т.е. в круге

$$|z| < \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

Растяжение происходит при выполнении условия

$$|4z^3| > 1,$$

т.е. вне круга

$$|z| > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 78.2

Найдем производную данной функции $w' = 2z - 1$. В данном случае сжатие происходит при выполнении условия

$$|2z - 1| < 1,$$

а растяжение —

$$|2z - 1| > 1.$$

Выясним, что представляют собой эти области. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$|2(x + iy) - 1| < 1,$$

$$|2x - 1 + 2iy| < 1,$$

$$\sqrt{(2x - 1)^2 + 4y^2} < 1,$$

$$(2x - 1)^2 + 4y^2 < 1,$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{4}.$$

Таким образом, сжатие происходит в круге с центром в точке $(1/2, 0)$ радиуса $1/2$, а растяжение — вне его.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 81.1

Если кривая γ задается параметрическим уравнением

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

т.е.

$$\gamma: \; z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

то угол φ между касательной к кривой γ в точке $z = z(t_0)$ и положительным направлением оси Ox равен $\arg z'(t_0)$. Отображение $w = z^2$ конформно в точке $z_0 = 0$, поэтому оно сохраняет углы между кривыми.

В данном примере касательная к кривой γ_1 в точке $z_0 = 0$ наклонена к оси Ox под углом $\varphi_1 = \arg(1+i) = \frac{\pi}{4}$ (т.к. $z'(0) = 1+i$). Аналогично, для кривой γ_2 соответствующий угол равен $\varphi_2 = \arg 1 = 0$. Поэтому угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке $z_0 = 0$ равен $\frac{\pi}{4}$. В силу конформности отображения $w = z^2$ угол между образами кривых γ_1 и γ_2 равен углу между кривыми γ_1 и γ_2. Поэтому искомый угол равен $\frac{\pi}{4}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 81.6

Сохраняя обозначения, введенные при решении задачи 1), получаем

$$\varphi_1 = \arg(1 + i2\sin t\cos t)\big|_{t=0} = \arg 1 = 0,$$
$$\varphi_2 = \arg(1 + it)\big|_{t=0} = \arg 1 = 0.$$

Поэтому угол между образами кривых γ_1 и γ_2 равен 0.

[Вернуться к условию]

Глава 5. Линейная функция

Решение задачи 95.6

Так как

$$|-1-i| = \sqrt{2}, \quad \arg(-1-i) = -\frac{3\pi}{4},$$

то

$$w = \sqrt{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}z + 1.$$

Это отображение может быть представлено в виде композиции трех отображений:

$$\tau = \sqrt{2}z, \quad \xi = e^{-i\frac{3\pi}{4}}\tau, \quad w = \xi + 1.$$

Первое из указанных отображений является растяжением в $\sqrt{2}$ раз, второе — поворотом на угол $3\pi/4$ по часовой стрелке вокруг нуля, третье — параллельным переносом на 1 в направлении оси Ox.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 96.6

Для нахождения коэффициентов a и b линейной функции $w = az + b$, переводящей A в A_1 и B в B_1, запишем систему

$$\begin{cases} b = 1 + i, \\ a + b = 0, \end{cases}$$

откуда $a = -1(1 + i)$, $b = 1 + i$. Тогда искомое отображение имеет вид

$$w = -(1 + i)z + 1 + i.$$

Заметим, что это отображение точку C переводит в точку C_1. [Вернуться к условию]

Решение задачи 97.6

Искомая функция имеет вид $w = az + b$. Тогда, учитывая условие задачи, получаем:

$$\begin{cases} -a + b = -1, \\ ia + b = -i, \end{cases}$$

откуда $a = -i$, $b = -1 - i$. Поэтому искомое отображение имеет вид

$$w = -iz - 1 - i.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 98.3

Для неподвижной точки z^* выполняется условие $w(z^*) = z^*$, т.е.

$$3iz^* + 1 = z^*,$$

откуда

$$z^* = \frac{1}{1-3i}$$

или

$$z^* = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i.$$

Так как $w' = 3i$, то по свойству модуля и аргумента производной, $k = |3i| = 3$, $\varphi = \arg 3i = \frac{\pi}{2}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 99.6

Искомое отображение $w = az + b$ является композицией трех отображений

$$\begin{cases} \tau = 3z, \\ \xi = e^{-i\frac{\pi}{6}}\tau, \\ w = \xi + 6 + 3i. \end{cases}$$

Первое из них растягивает круг $|z| < 1$ в 3 раза, второе — поворачивает круг $|\xi| < 3$ на угол $-\frac{\pi}{6}$, третье — круг $|\xi| < 3$ параллельно переносит в круг $|w - 6 - 3i| < 3$. Ясно, что при этом горизонтальный диаметр переходит в диаметр, образующий с направлением действительной оси угол $-\frac{\pi}{6}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 100.6

Отображение $\tau = 11 - z$ переносит заданную полосу на полосу $0 < \operatorname{Re}\tau < 6$, которая отображением $\xi = \frac{\tau}{6}$ сжимается в полосу $0 < \operatorname{Re}\xi < 1$. Таким образом, отображение $\xi = (11 - z)/6$ переводит полосу $5 < \operatorname{Re} z < 11$ в полосу $0 < \operatorname{Re}\xi < 1$ и

$$\xi(8) = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}, \quad \xi(8 + i) = \frac{3 - i}{6}.$$

Заметим, что параллельный перенос вдоль мнимой оси полосу $0 < \operatorname{Re}\xi < 1$ переводит саму в себя. Поэтому, подберем $t \in \mathbb{R}$ так, чтобы для отображения $w = \xi + it = (11 - z)/6 + it$ выполнялись условия:

$$\begin{cases} w(8) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}, \\ \operatorname{Im} w(8 + i) < 1. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + it = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}, \\ t - \frac{1}{6} < 1, \end{cases} \qquad \text{т.е.} \quad t = \frac{1}{2}.$$

Окончательно получим, что искомое отображение имеет вид

$$w = \frac{11 - z}{6} + \frac{i}{2}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 6. Дробно-линейная функция

Решение задачи 119.1

Так как $\operatorname{Im} z = 1/5$, то кривая G задается параметрическим уравнением

$$z = t + \frac{i}{5}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда ее образом является кривая $(w = u + iv)$

$$w = \frac{1}{t + \frac{i}{5}}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Отсюда следует, что

$$u + iv = \frac{t - \frac{i}{5}}{t^2 + \frac{1}{25}} = \frac{t}{t^2 + \frac{1}{25}} - i\frac{1}{5\left(t^2 + \frac{1}{25}\right)},$$

т.е.

$$\begin{cases} u = \frac{t}{t^2 + \frac{1}{25}}, \\ v = -\frac{1}{5\left(t^2 + \frac{1}{25}\right)}. \end{cases}$$

Тогда переменные u и v удовлетворяют соотношению

$$u^2 + v^2 + 5v = 0,$$

которое является уравнением окружности.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 120.5

Искомое дробно-линейное отображение задается формулой

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}.$$

Подставив заданные значения, получим

$$\frac{1}{w-i}:\frac{1}{1-i}=\frac{z+1}{1}:\frac{1+i}{1}.$$

Заметим, что разность в которой встретился знак ∞ была заменена на 1. Тогда

$$w-i=\frac{2}{z+1},$$

т.е.

$$w=\frac{iz+2+i}{z+1}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 121.1

Границей области $G = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ является прямая $\operatorname{Re} z = 0$. Так как $w(0) = -1$, $w(4i) = -i$, $w(\infty) = 1$, то мнимая ось (прямая $\operatorname{Re} z = 0$) переходит в окружность $\{w : |w| = 1\}$. Эта окружность является границей образа области G. Поэтому, образом G может быть либо круг $\{w : |w| < 1\}$, либо его внешность. В силу того, что $w(-1) = -3/5$ и $|w(-1)| < 1$, то образ G есть единичный круг.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 122.1

Найдем образы осей координат, т.е. прямых $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Im} z = 0$. Так как

$$w(0) = -1, \quad w(1) = -i, \quad w(\infty) = 1,$$

то действительная ось переходит в единичную окружность с центром в нуле.

Аналогично, так как

$$w(0) = -1, \quad w(i) = 0, \quad w(\infty) = 1,$$

то мнимая ось переходит в действительную ось $\operatorname{Im} w = 0$ (см. рисунок Р.8). Поэтому, образом G может

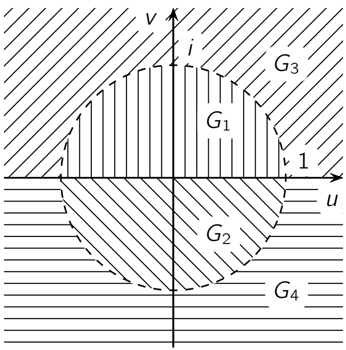


Рис. Р.8

быть только одна из четырех областей, изображенных на рисунке Р.8 (это следует из того, что граница области G переходит в границу образа $w(G)$). Но

$$w(1+i) = \frac{1}{5} - i\frac{2}{5}.$$

Значит, $w(G) = G_2$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 123.6

Преобразование симметрии относительно окружности $\{z : |z| = 1\}$ задается функцией $z^* = 1/\overline{z}$. Кривая $\{z : \operatorname{Re} z = 2\}$ является прямой

$$z = 2 + it, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Поэтому, ее образ задается параметрически в виде

$$z^* = \frac{1}{2 - it} = \frac{2 + it}{t^2 + 4} = \frac{2}{t^2 + 4} + i\frac{t}{t^2 + 4}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Легко проверить, что при $t \in (-\infty, +\infty)$ точка z^* пробегает окружность

$$\left| z^* - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 7. Функция Жуковского

Решение задачи 140.6

Множество E является окружностью, задаваемой параметрическим уравнением

$$z = e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Тогда ее образ задается параметрическим уравнением

$$w = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} = \cos\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

При изменении φ от 0 до 2π точка $w = \cos\varphi$ пробегает отрезок $[-1, 1]$ действительной оси дважды. Итак, образом E является отрезок $[-1, 1]$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 141.6

Образами окружностей $\{z: \ |z| = R > 1\}$ являются эллипсы

$$\frac{u^2}{a_R^2} + \frac{v^2}{b_R^2} = 1,$$

где $a_R = \frac{1}{2}\left(R + \frac{1}{R}\right)$, $b_R = \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{R}\right)$ и с фокусами в точках $w = \pm 1$ (см. ответ к задаче 140.4). При изменении R от 1 до ∞ эти эллипсы заполняют всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ (в отрезок $[-1, 1]$ отображается граница области G, т.е. $\partial G = \{z: \ |z| = 1\}$, см. ответ к задаче 140.6). Итак, образом G является $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 142.6

Из задачи 140.5 следует, что луч $\left\{z:\ \arg z = \frac{\pi}{4}\right\}$ отобразится в гиперболу, уравнение которой имеет вид

$$\frac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

Рассмотрим луч

$$z = R\,e^{i\varphi}, \quad 0 < R < +\infty.$$

При при отображении с помощью функции Жуковского образом этого луча является кривая

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left(R + \dfrac{1}{R}\right)\cos\varphi, \\ v = \dfrac{1}{2}\left(R - \dfrac{1}{R}\right)\sin\varphi, \end{cases} \qquad 0 < R < +\infty.$$

Исключая параметр R, при $\varphi \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ и $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$ получаем

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi} = 1.$$

Это уравнение гиперболы с фокусами в точках $w = \pm 1$. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ луч переходит в прямую $\{w:\ \operatorname{Re} w = 0\}$. Заметим, что при $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ луч переходит в одну и ту же гиперболу. При изменении R от 0 до $+\infty$ все остальные гиперболы заполняют всю область, лежащую между ветвями гиперболы (см. рисунок Р.9)

$$\frac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1.$$

[Вернуться к условию]

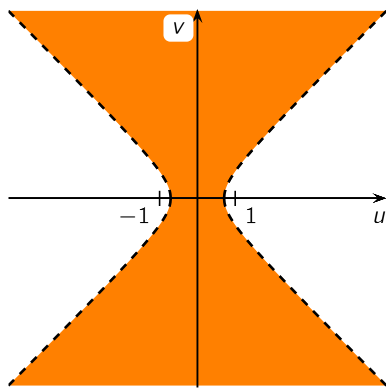


Рис. Р.9

Решение задачи 143.6

Функция Жуковского отображает круг $\{z : |z| < 1\}$ в область $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Выясним, что является образом отрезка $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$. В этом случае

$$w = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \quad x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right].$$

Ясно, что отрезок $[0, 1]$ переходит в $[1, +\infty]$, а полуинтервал $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$ в $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right]$. Тогда в целом область G перейдет в плоскость с разрезом по $\left(-\infty, -\frac{5}{4}\right] \cup [-1, 1] \cup [1, +\infty)$, т.е. в $\mathbb{C} \setminus \left\{w : w \in \left(-\infty, -\frac{5}{4}\right] \cup [-1, +\infty)\right\}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 144.6

Функция Жуковского $xi = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает $\{z : \ |z| < 1\} \setminus \left[\frac{1}{3}, 1\right]$ на всю плоскость с разрезом по отрезку $\left[-1, \frac{5}{3}\right]$. Линейная функция $\tau = \frac{3}{4}\left(\xi - \frac{1}{3}\right)$ отображает $\mathbb{C} \setminus \left[-1, \frac{5}{3}\right]$ в область $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Одна из ветвей обратной функции к функции Жуковского

$$w = \tau + \sqrt{\tau^2 - 1}$$

отображает $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ на $\{w : \ |w| < 1\}$. Таким образом, искомая функция имеет вид

$$w = \tau + \sqrt{\tau^2 - 1}, \quad \tau = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{3}\right).$$

[Вернуться к условию]

Глава 8. Отображение с помощью элементарных функций

Решение задачи 158.1

Найдем, например, образ $w_3(D_3)$. Очевидно,

$$w_3 = z^4 = \left(|z|e^{i \arg z}\right)^4 = |z|^4 e^{4i \arg z}.$$

Если $|z| < 2$, то $|z^4| < 16$, а если

$$-\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{\pi}{4},$$

то

$$-\pi < 4 \arg z < \pi.$$

Поэтому,

$$w_3(D_3) = \{w : |w| < 16\} \setminus [-16, 0].$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 159.1

Найдем $w_1(D_1)$. Так как,

$$w_1 = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy},$$

то $|e^z|e^x$, а $\arg e^x = y$. Если $z \in D_1$, то $2 < x < 4$, $\pi/6 < y < \pi/3$. Тогда $w \in w_1(D_1)$ только в том случае, когда $e^2 < |w| < e^4$, а $\pi/6 < \arg w < \pi/3$, т.е.

$$w_1(D_1) = \left\{ w:\ e^2 < |w| < e^4,\ \frac{\pi}{6} < \arg w < \frac{\pi}{3} \right\}.$$

Найдем $w_2(D_2)$. По определению

$$w_2 = \ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Если $z \in D_2$, то $1 < |z| < e$, а $0 < \arg z < \pi$. В этом случае $0 < \ln|z| < 1$, $0 < \arg z < \pi$. Поэтому,

$$w_2(D_2) = \{z:\ 1 < |z| < e,\ 0 < \arg z < \pi\}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 160.3

Пусть $|z| = r$, $\arg z = \varphi$. Тогда

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\varphi + i\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi = u + iv.$$

Если r фиксировано, а $\varphi \in [0, 2\pi)$, то

$$\frac{4u^2}{\left(r + \frac{1}{r}\right)^2} + \frac{4v^2}{\left(r - \frac{1}{r}\right)^2} = 1,$$

т.е. окружность $|z| = r \neq 1$ переходит в эллипс (при $r = 1$ — в отрезок $[-1, 1]$, так как $v \equiv 0$).

Пусть теперь $z \in D_1$. Тогда $1 < |z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$, т.е. $1 < r < 2$, $\varphi \in (0, \pi)$. Поскольку при $1 < r < 2$ все эллипсы, являющиеся образами окружностей $|z| = r$, принадлежат внутренности эллипса ($r = 2$)

$$\frac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} = 1, \tag{P.1}$$

и при $r \to 1$ стягиваются к отрезку $[-1, 1]$, то $w \in w(D_1)$ только в том случае, когда $\operatorname{Im} w = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi > 0$ и w лежит во внутренности эллипса (**??**), т.е.

$$w(D_1) = \left\{w = u + iv : \ \operatorname{Im} w > 0,\ \frac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} < 1\right\}.$$

Если $z \in D_2$, то $1/2 < r < 1$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ и $\operatorname{Im} w(z) = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\varphi < 0$, а $w(z)$ лежит во внутренности эллипса (**??**), т.е.

$$w(D_2) = \left\{w = u + iv : \ \operatorname{Im} w < 0,\ \frac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} < 1\right\}.$$

Области $w(D_1)$ и $w(D_2)$ изображены рисунке Р.10. [Вернуться к условию]

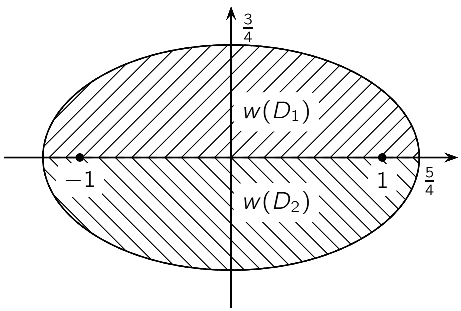


Рис. Р.10

Решение задачи 161.1

По определению

$$w_3 = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}}{2} = \\ = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x + i\frac{1}{2}(e^{-y} - e^y) \sin x.$$

Если $z \in D$, то $-\pi/2 < x < \pi/2$, $y > 0$. Поэтому,

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x > 0,$$

а

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(e^{-y} - e^y) \sin x$$

пробегает все значения из $\mathbb{R}$. При этом $v(x, y) = 0$ только в том случае, когда $x = 0$ и

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}).$$

Но при $y > 0$

$$u(x, y) = \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) > 1.$$

Поэтому, $w \in w(D)$ только в том случае, когда $\operatorname{Re} w > 0$ и $w \neq [0, 1]$, т.е.

$$w(D) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\} \setminus [0, 1].$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 162.1

Отображение $\tau = z - 6$ переводит полосу G_1 в полосу $G_1^* = \{\tau : 0 < \operatorname{Re}\tau < 6\}$ τ-плоскости (рисунок Р.11).

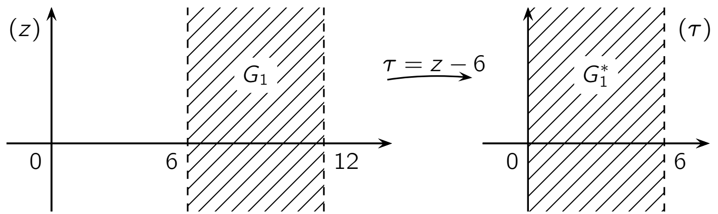


Рис. Р.11

Отображение $\xi = \pi/6\tau$ переводит полосу G_1^* τ-плоскости в полосу $G_2^* = \{\xi : 0 < \operatorname{Re}\xi < \pi\}$ ξ-плоскости (рисунок Р.12).

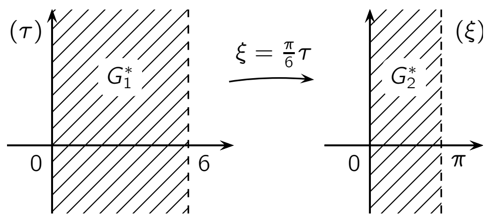


Рис. Р.12

Отображение $w = e^{i\xi}$ переводит полосу G_2^* ξ-плоскости в верхнюю полуплоскость w-плоскости (рисунок Р.13).

Искомое отображение является композицией указанных трех отображений, т.е.

$$w = e^{i\frac{\pi(z-6)}{6}} : \ G_1 \to G_2.$$

[Вернуться к условию]

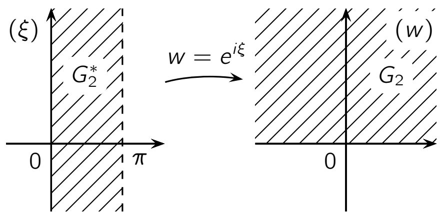


Рис. Р.13

Решение задачи 163.6

Отображение полуплоскости $\{z: \operatorname{Im} z > 0\}$ на треугольник с вершинами в точках $A_1(0,0)$, $B_1(1,0)$ и $C_1(x_0, y_0)$, где $y_0 > 0$, $0 < \alpha_k < 1$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ (рисунок Р.14). задается интегралом Кристоффеля – Шварца

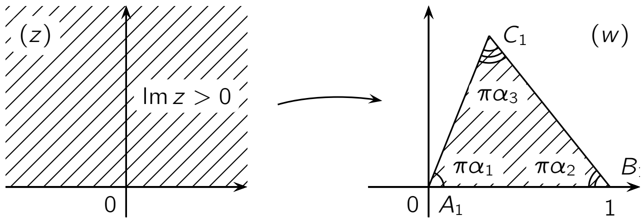


Рис. Р.14

$$w = \frac{1}{B(\alpha_1, \alpha_2)} \int\limits_0^z \xi^{\alpha_1 - 1}(1-\xi)^{\alpha_2 - 1}\, d\xi,$$

где $B(x,y)$ — бета-функция Эйлера, т.е.

$$B(x,y) = \int\limits_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt.$$

Отобразим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ указанного вида (рисунок Р.15).
Для этого используем последовательность элементарных преобразований:
1) $\tau = w - 3 - 3i$ — параллельный перенос;
2) $u = e^{i\pi}\tau$ — поворот на угол π;

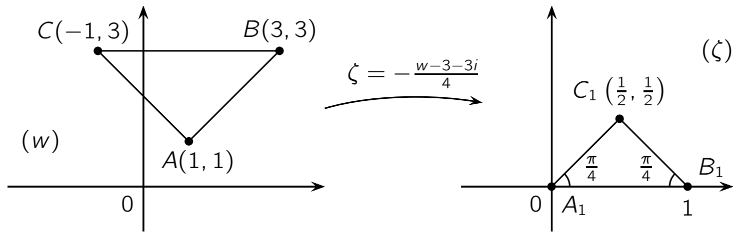


Рис. Р.15

3) $\zeta = u/4$ — подобие.

Тогда искомое отображение является линейным и имеет вид

$$\zeta = -\frac{w-3-3i}{4}.$$

Так как

$$\zeta(1+i) = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2},$$

то $C_1(1/2, 1/2)$, т.е. треугольник $A_1B_1C_1$ — равнобедренный и углы при основании A_1B_1 равны $\pi/4$.

Тогда отображение верхней полуплоскости на треугольник $A_1B_1C_1$ имеет вид:

$$\zeta = \frac{1}{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{3}{4}}(1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\,d\xi. \tag{Р.2}$$

Найдем отображение $\Delta A_1B_1C_1$ на ΔABC. Для этого найдем обратное отображение к линейному отображению $\zeta = -(w-3-3i)/4$, т.е. выразим w через ζ. В результате получим

$$w = -4\zeta + 3 + 3i. \tag{Р.3}$$

Тогда искомое отображение полуплоскости на ΔABC является композицией отображений (Р.2) и (Р.3), т.е.

$$w = \frac{-4}{B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{3}{4}}(1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\,d\xi + 3 + 3i.$$

[Вернуться к условию]

Глава 9. Интегральная теорема и формула Коши

Решение задачи 174.6

Уравнение кривой в каждом из рассматриваемых случаев можно записать следующим образом:
а) $z = t + it^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$;
б) $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, где $\Gamma_1: \; z = it$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\Gamma_2: \; z = t + i$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.
Поэтому, воспользовавшись формулой

$$I = \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt,$$

получим:

$$\text{а)} \quad I = \int\limits_0^1 (1 - it^2)(1 + i2t)\,dt = 1 + \frac{i}{3};$$

$$\text{б)} \quad I = \int\limits_0^1 (-it)i\,dt + \int\limits_0^1 (t - i)\,dt = 1 - i.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 175.6

Интегральная формула Коши имеет вид

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{g(z)\,dz}{z - z_0},$$

где точка z_0 лежит внутри γ, а $g(z)$ является аналитической в односвязной области, ограниченной γ.

В случае а)

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z(z-1)} = \int\limits_{\gamma} \frac{\frac{e^z}{z-1}\,dz}{z} = 2\pi i\,g(0) = -2\pi i,$$

где $z_0 = 0$, а $g(z) = \frac{e^z}{z-1}$.

В случае б)

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z(z-1)} = \int\limits_{\gamma} \frac{\frac{e^z}{z}\,dz}{z-1} = 2\pi i\,g(1) = 2\pi\, e\, i,$$

где $z_0 = 1$, а $g(z) = \frac{e^z}{z}$.

В случае в), учитывая равенство

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z},$$

получаем

$$\int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z(z-1)} = \int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z-1} - \int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z} =$$

$$= 2\pi i\,g_1(1) - 2\pi i\,g_2(0) = 2\pi\, e\, i - 2\pi i = 2\pi(e-1),$$

где для первого интеграла $z_0 = 1$, $g_1(z) = e^z$, а для второго — $z_0 = 0$, $g_2(z) = e^z$.

В случае г)

$$\int_\gamma \frac{e^z\,dz}{z(z-1)} = 0$$

по интегральной теореме Коши.

Замечание Р.1. В случае в) можно не прибегать к разложению рациональной функции $\frac{1}{z(z-1)}$ на простые дроби, а воспользоваться равенством

$$\int_\gamma \frac{e^z\,dz}{z(z-1)} = \int_{\gamma_1} \frac{e^z\,dz}{z(z-1)} + \int_{\gamma_2} \frac{e^z\,dz}{z(z-1)},$$

где контуры γ_1 и γ_2 описаны в случаях а) и б) соответственно (см. рисунок Р.16), а γ^* — разрез, проходящий

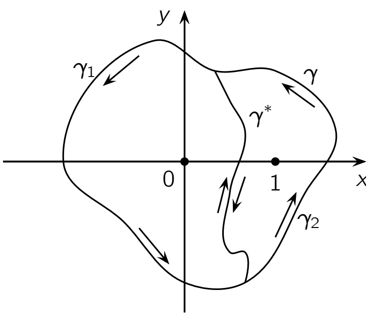


Рис. Р.16

при интегрировании два раза в противоположных направлениях.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 176.6

В случае а) представим данный интеграл в виде:

$$I = \int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z^2(z+1)^3} = \int\limits_{\gamma} \frac{g(z)\,dz}{z^2},$$

где $g(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3}$. Тогда к этому интегралу можно применить обобщенную интегральную формулу Коши ($z_0 = 0$ и $n = 1$). В результате получим, что

$$I = \frac{2\pi i}{1!} g'(0) = 2\pi i \cdot (-2) = -4\pi i.$$

Аналогично, в случае б)

$$I = \int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z^2(z+1)^3} = \int\limits_{\gamma} \frac{g(z)\,dz}{(z+1)^3},$$

где $g(z) = \frac{e^z}{z^2}$. Применив обобщенную интегральную формулу Коши ($z_0 = -1$, $n = 2$), получим

$$I = \frac{2\pi i}{2!} g^{(2)}(-1) = 2\pi i \cdot (-2) = \frac{11\pi i}{e}.$$

В случае в) воспользуемся равенством

$$I = \int\limits_{\gamma} \frac{e^z\,dz}{z^2(z+1)^3} = \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^z\,dz}{z^2(z+1)^3} + \int\limits_{\gamma_2} \frac{e^z\,dz}{z^2(z+1)^3},$$

где контуры γ_1 и γ_2 описаны в случаях а) и б) соответственно (см. рисунок Р.17), а γ^* — разрез, проходящий при интегрировании два раза в противоположных направлениях. Поэтому,

$$I = \frac{11\pi i}{e} - 4\pi i = \left(\frac{11}{e} - 4\right)\pi i.$$

В случае г) интеграл равен нулю по интегральной теореме Коши. [Вернуться к условию]

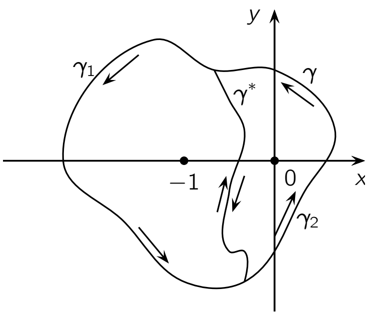


Рис. Р.17

Решение задачи 177.6

Функция

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z-1)}$$

теряет аналитичность в точках 1, $\pm 2i$. Рассмотрим всевозможные положения контура γ по отношению к этим точкам.

Пусть контур γ содержит внутри себя ровно одну из указанных точек (см. рисунок Р.18).

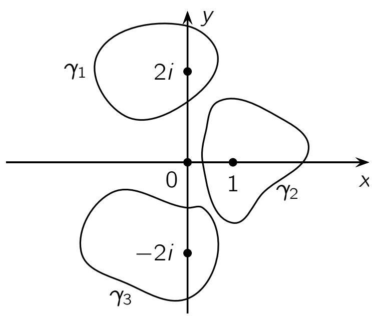


Рис. Р.18

В каждом случае применим интегральную формулу Коши. Если γ совпадает с контуром γ_1, то

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_1} \frac{dz}{(z+2i)(z-2i)(z-1)} = \left[\begin{array}{c} z_0 = 2i \\ g(z) = \dfrac{1}{(z+2i)(z-1)} \end{array} \right] = 2\pi i \cdot g(2i) =$$

$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{4i(2i-1)} = -\frac{\pi}{10}(1+2i).$$

Если $\gamma = \gamma_2$, то

$$I_2 = \int\limits_{\gamma_2} \frac{dz}{(z+2i)(z-2i)(z-1)} = \left[\begin{array}{c} z_0 = 1 \\ g(z) = \dfrac{1}{z^2+4} \end{array} \right] = 2\pi i \cdot g(1) = \frac{2\pi}{5}\, i.$$

Таким же образом, если $\gamma = \gamma_3$, то

$$I_3 = \int\limits_{\gamma_3} \frac{dz}{(z+2i)(z-2i)(z-1)} = \left[\begin{array}{c} z_0 = -2i \\ g(z) = \dfrac{1}{(z-2i)(z-1)} \end{array} \right] = 2\pi i \cdot g(-2i) =$$
$$= 2\pi i \cdot \frac{1}{-4i(-1-2i)} = \frac{\pi}{10}(1-2i).$$

Пусть теперь контур γ содержит внутри себя только точки $2i$ и 1. Тогда, произведя разрез по кривой γ^* (см. рисунок Р.19) и используя рассуждения из решения задачи 176.6, получим

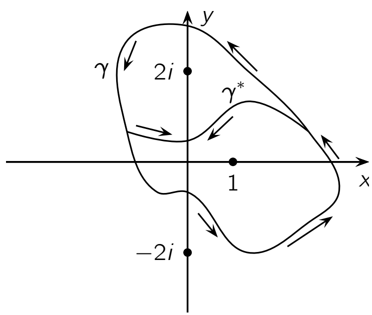


Рис. Р.19

$$I_4 = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+4)(z-1)} = I_1 + I_2 = -\frac{\pi}{10}(1+2i) + \frac{2\pi}{5}\, i = -\frac{\pi}{10}(1-2i).$$

Аналогично, если контур γ содержит внутри себя только точки $\pm 2i$, то

$$I_5 = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+4)(z-1)} = I_1 + I_3 = -\frac{\pi}{10}(1+2i) + \frac{\pi}{10}(1-2i) = -\frac{2\pi}{5}\, i.$$

Если же внутри γ находятся только точки $-2i$ и 1, то

$$I_6 = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+4)(z-1)} = I_2 + I_3 = \frac{2\pi}{5}\, i + \frac{\pi}{10}(1-2i) = \frac{\pi}{2}(1+2i).$$

Осталось рассмотреть еще два случая расположения контура γ. Если контур γ содержит внутри себя точки $\pm 2i$ и 1, то

$$I_7 = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+4)(z-1)} = I_1 + I_2 + I_3 = -\frac{\pi}{10}(1+2i) + \frac{2\pi}{5}\, i + \frac{\pi}{10}(1-2i) = \frac{\pi}{2}(1+2i) = 0.$$

Если контур γ не содержит внутри себя ни одной из точек $\pm 2i$ и 1, то функция $f(z)$ является аналитической в замыкании области, ограниченной γ и по интегральной теореме Коши

$$I_8 = \int\limits_{\gamma} \frac{dz}{(z^2+4)(z-1)} = 0.$$

Итак, данный интеграл может принимать семь различных значений:

$$-\frac{\pi}{10}(1+2i),\ \frac{2\pi}{5}i,\ \frac{\pi}{10}(1-2i),\ -\frac{\pi}{10}(1-2i),\ -\frac{2\pi}{5}i,\ \frac{\pi}{2}(1+2i),\ 0.$$

[Вернуться к условию]

Глава 10. Степенные ряды

Решение задачи 196.6

Радиус сходимости R степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

будем находить по формуле Коши – Адамара:

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

В нашем случае $\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{n^2} \cdot \left(3 + (-1)^n\right)$. Поскольку верхний предел последовательности является наибольшей ее предельной точкой и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1,$$

то

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = 4.$$

Следовательно, радиус сходимости $R = \frac{1}{4}$. Тогда круг сходимости D совпадает с кругом , центр которого в точке $z_0 = i$, а радиус равен $\frac{1}{4}$, т.е.

$$D = \left\{ z : \ |z - i| < \frac{1}{4} \right\}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 197.6

Обозначим искомый радиус сходимости через R^*.
Если $|z_0| > 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1 + {z_0}^n|} = \lim_{n\to\infty} |z_0| \sqrt[n]{\left|\frac{1}{{z_0}^n} + 1\right|} = |z_0|.$$

Заметим, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1 + {z_0}^n|} = 1 \quad \text{при } |z_0| \leqslant 1.$$

Поэтому,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|1 + {z_0}^n||c_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1 + {z_0}^n|} \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{R} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|1 + {z_0}^n|}.$$

Отсюда и из формулы Коши – Адамара следует, что

$$R^* = \frac{R}{|z_0|}, \quad \text{если } |z_0| > 1,$$

и

$$R^* = R, \quad \text{если } |z_0| \leqslant 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 198.6

Радиус сходимости ряда равен 1. Поскольку при

$$\frac{1}{(1+z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad \text{при } |z| < 1,$$

то для этих z

$$\frac{1}{(1+z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Дифференцируя этот степенной ряд при $|z| < 1$, приходим к равенству

$$\frac{-2z}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n z^{2n-1}.$$

Сокращая обе части последнего разложения на $-2z$ и вводя новую переменную суммирования, получаем

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) z^{2n}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 199.6

Радиус сходимости ряда равен 1. Поэтому границей круга сходимости является единичная окружность $\{z : |z| = 1\}$. Каждую точку z этой окружности представим в виде

$$z = \cos\varphi + \sin\varphi,$$

где φ — угол, принадлежащий промежутку $[0, 2\pi)$. Тогда, принимая во внимание формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + \sin\varphi,$$

получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n\ln^2 z} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n\ln^2 n} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n\ln^2 n}.$$

Поэтому сходимость нашего ряда равносильна сходимости двух действительных рядов

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n\ln^2 n}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n\ln^2 n}.$$

Поскольку последовательность

$$a_n = \frac{1}{n\ln^2 n},$$

монотонно убывает, стремится к нулю и при $\varphi \neq 0$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \cos n\varphi\right| \leqslant \left|\frac{\sin\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi + \sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|},$$

$$\left|\sum_{n=0}^{N} \sin n\varphi\right| \leqslant \left|\frac{\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)\varphi}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|},$$

а значит и

$$\left|\sum_{n=2}^{N}\cos n\varphi\right| \leqslant 2+\frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|}, \qquad \left|\sum_{n=2}^{N}\sin n\varphi\right| \leqslant 2+\frac{1}{\left|\sin\frac{\varphi}{2}\right|},$$

то по признаку Дирихле оба ряда сходятся для $\varphi \neq 0$.

Пусть $\varphi = 0$, т.е. $z = 1$. Данный ряд в этой точке имеет вид

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}.$$

К исследованию его сходимости применим интегральный признак Коши. Рассмотрим первообразную

$$F(x)=\int_2^x \frac{dt}{t\ln^2 t} = -\frac{1}{\ln t}\Big|_2^x = -\frac{1}{\ln x}+\frac{1}{\ln 2}.$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{\ln 2},$$

то несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty}\frac{dt}{t\ln^2 t}$$

сходится, а следовательно, сходится и ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 11. Ряды Тейлора

Решение задачи 216.6

С помощью метода неопределенных коэффициентов легко показать, что

$$\frac{6z}{(z-1)(z-3)} = \frac{-3}{z-1} + \frac{9}{z-3}.$$

Поэтому, нужно разложить по степени $(z-2)$ в окрестности точки $z_0 = 2$ функции $-3/(z-1)$ и $9/(z-3)$.

Так как при $|z-2| < 1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^n,$$

то

$$\frac{-3}{z-1} = -3\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-2)^2.$$

Аналогично, при $|z-2| < 1$

$$\frac{9}{z-3} = \frac{-9}{1-(z-2)} = -9\sum_{n=0}^{\infty} (z-2)^n.$$

Поэтому, при $|z-2| < 1$

$$\frac{6z}{(z-1)(z-3)} = 3\sum_{n=0}^{\infty} \big((-1)^{n+1} - 3\big)(z-2)^n, \quad D = \{z : |z-2| < 1\}.$$

Так как точки $z = 1$ и $z = 3$ для функции $f(z) = 6z/((z-1)(z-3))$ являются единственными конечными особыми точками, то по теореме Тейлора полученный степенной ряд сходится в круге сходимости $D = \{z : |z-2| < 1\}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 217.6

Применим известную формулу тригонометрии и получим

$$\cos(3z - i) = \cos i \cos 3z + \sin i \sin 3z.$$

Разложение в ряд Тейлора функций $\cos\xi$ и $\sin\xi$ имеют вид:

$$\cos\xi = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\xi^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin\xi = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\xi^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

Поэтому,

$$\cos 3z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}}{(2n)!}z^{2n},$$

$$\sin 3z = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}.$$

Учитывая эти разложения, получим:

$$\cos(3z - i) = \cos i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{3^{2n}}{(2n)!}z^{2n} + \sin i\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1}.$$

Так как конечных особых точек у функции $\cos(3z-1)$ нет, то радиус круга сходимости $R = \infty$, т.е. $D = \{z : |z| < +\infty\}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 218.6

Будем опираться на известное разложение

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1. \tag{P.4}$$

В круге сходимости $\{z : |z| < 1\}$ ряд (P.4) можно почленно дифференцировать. Поэтому,

$$\frac{-1}{(1+z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n z^{n-1}.$$

Подставим в это разложение z^2 вместо z, получим

$$\frac{1}{(1+z^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} n z^{2n-2}.$$

Так как для функции $1/(1+z^2)^2$ конечными особыми точками является $z = -i$ и $z = i$, то по теореме Тейлора кругом сходимости полученного ряда является $D = \{z : |z| < 1\}$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 219.6

Функция tgz является аналитической во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, кроме точек $z_k = \pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Поэтому, в круге $D = \{z : |z| < \pi/2\}$ она разлагается в ряд Тейлора, т.е. справедливо равенство

$$\frac{\sin z}{\cos z} = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad |z| < \frac{\pi}{2},$$

где $a_0 = \operatorname{tg} 0 = 0$, а $a_1, a_2, a_3, \ldots$ — неизвестные коэффициенты.

Отсюда для $|z| < \pi/2$ имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right).$$

Перемножая ряды в правой части последнего равенства, будем иметь:

$$\begin{aligned} &z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots = \\ &\qquad = a_1 z + a_2 z^2 + \left(a_3 - \frac{a_1}{2!}\right) z^3 + \left(a_4 - \frac{a_2}{2}\right) z^4 + \left(a_5 - \frac{a_3}{2} + \frac{a_1}{24}\right) z^5 + \ldots \end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1/3$, $a_4 = 0$, $a_5 = 2/15$, и, следовательно

$$\operatorname{tg} z = z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \ldots, \qquad D = \left\{z : |z| < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

[Вернуться к условию]

Глава 12. Нули аналитической функции. Теорема единственности

Решение задачи 237.1

Нулями функции $w = z \sin z$ являются точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Так как

$$f'(z) = \sin z + z \cos z$$

и $f'(z_k) \neq 0$ при $k \neq 0$, то порядок нулей $z_k = k\pi$ при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ равен $n = 1$. Далее,

$$f''(z) = 2\cos z - z \sin z, \quad f''(0) \neq 0.$$

Поэтому порядок нуля $z_0 = 0$ равен $n = 2$. [Вернуться к условию]

Решение задачи 238.1

Разложим данную функцию в ряд Тейлора по степеням z. Для этого воспользуемся известным разложением для e^{ξ}, положив $\xi = z^2$. В результате получим

$$z^2(e^{z^2} - 1) = z^2\left(\frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \ldots\right) =$$

$$= z^4\left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \ldots\right) = z^4\varphi(z),$$

где $\varphi(0) = 1 \neq 0$ и функция $\varphi(z)$ аналитична в точке 0 (как сумма степенного ряда). Отсюда следует, что $n = 4$, т.е. $z_0 = 0$ — нуль четвертого порядка. Решение этой задачи с помощью вычисления производных является более громоздким. [Вернуться к условию]

Решение задачи 239.1

Данная функция имеет нули в точках $z_1 = 3i$, $z_2 = -3i$. Так как

$$f'(z) = -\frac{2(z^2+18)}{z^5},$$

то $f'(z_1) \neq 0$ и $f'(z_2) \neq 0$. Это значит, что порядок этих нулей совпадает и равен 1. [Вернуться к условию]

Решение задачи 240.1

Предположим, что такая функция $w = f(z)$ существует. Рассмотрим множество $E = \{1/(2k+1)\}_{k=1}^{\infty}$ и функцию $g_1(z) \equiv 0$. Так как E в D имеет предельную точку $a = 0$, и $f(z) = g_1(z)$ для всех $z \in E$, то по теореме единственности $f(z) = g_1(z) = 0$ для всех $z \in D$. Рассмотрим теперь множество $E_1 = \{1/(2k)\}_{k=2}^{\infty}$ и функцию $g_2(z) \equiv 1$. E_1 имеет в D предельную точку $a = 0$, и аналитические функции $f(z)$ и $g_2(z)$ совпадают на E_1, т.е. $f(z) = g_2(z)$ для всех $z \in E_1$. По теореме единственности $f(z) = g_2(z) = 1$ для всех $z \in D$. Итак, одновременно $f(z)$ тождественно равна 0 и 1 в D. Полученное противоречие показывает, что функции с указанными свойствами не существует. [Вернуться к условию]

Решение задачи 241.1

Предположим, что такая функция $w = f(z)$ существует. Рассмотрим множество $E = \{1/(2k+1)\}_{k=1}^{\infty}$. Это множество имеет в D предельную точку $a = 0$. Функция $g(z) = z$ является аналитической в D и

$$f\left(\frac{1}{2k+1}\right) = g\left(\frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2k+1}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

По теореме единственности $f(z) = z$ для всех $z \in D$. В частности,

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Но по условию

$$f\left(\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{2k + \cos^2 k\pi} = \frac{1}{2k+1} \neq \frac{1}{2k} = f\left(\frac{1}{2k}\right).$$

Полученное противоречие показывает, что функции с указанными свойствами не существует.

[Вернуться к условию]

Глава 13. Ряд Лорана

Решение задачи 257.6

а) Функция $f(z)$ аналитична в круге $\{z : |z| < 1\}$. Ряд Лорана является рядом Тейлора, который находится следующим образом:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \quad (|z| < 2),$$

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1).$$

Поэтому в круге $\{z : |z| < 1\}$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

б) Аналогично, как и в случае а):

$$f(z) = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1},$$

$$\frac{1}{z-2} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} \quad (|z| < 2),$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n} \quad (|z| > 1).$$

Поэтому в конце $K = \{z : 1 < |z| < 2\}$

$$f(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}.$$

в) В кольце $K = \{z : |z| > 2\}$:

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n,$$

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{z^n}.$$

Поэтому, в этом случае

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} z^n - \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{z^n}{2^{n-1}} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)z^n,$$

или, в другой записи,

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-2^{n-1})\frac{1}{z^n}.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 258.6

У функции $f(z) = 1/(z(z+3)^2)$ имеется две особые точки $z_1 = 0$ и $z_2 = -3$. Разложим ее на сумму простых дробей

$$\frac{1}{z(z+3)^2} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+3} + \frac{C}{(z+3)^2}.$$

Приводя члены в правой части равенства к общему знаменателю, получим:

$$\frac{1}{z(z+3)^2} = \frac{A(z+3)^2 + Bz(z+3) + Cz}{z(z+3)^2}.$$

Отсюда следует, что $A = 1/9$, $B = -1/9$, $C = -3/9$, т.е.

$$f(z) = \frac{1}{9}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z+3} - \frac{3}{(z+3)^2}\right].$$

Далее имеем:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{z+1-1} = \frac{1}{z+1}\frac{1}{1-\frac{1}{z+1}} = \frac{1}{z+1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} \quad (1 < |z+1|),$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{2+z+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z+1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} \quad (|z+1| < 2).$$

Дифференцируя при $|z+1| < 2$ предыдущее равенство, получаем, что

$$-\frac{1}{(z+3)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1}.$$

Учитывая предыдущие равенства, при $1 < |z+1| < 2$ будем иметь

$$f(z) = \frac{1}{9}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z+1)^n}{2^{n+1}} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2^{n+2}}(z+1)^n\right] =$$

$$= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}} + \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(3n+5)(z+1)^n.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 259.6

Заметим, что

$$f(z) = \cos\frac{(z-2)^2-4}{(z-2)^2} = \cos\left(1-\frac{4}{(z-z)^2}\right) =$$

$$= \cos 1\cos\frac{4}{(z-2)^2} + \sin 1\sin\frac{4}{(z-2)^2}.$$

Воспользуемся далее разложениями

$$\cos\xi = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\xi^{2n}, \quad \xi\in\mathbb{C},$$

$$\sin\xi = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\xi^{2n-1} \quad \xi\in\mathbb{C}.$$

Тогда при $0<|z-2|<+\infty$

$$\cos\frac{4}{(z-2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{4^{2n}}{(z-2)^{4n}},$$

$$\sin\frac{4}{(z-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\frac{4^{2n-1}}{(z-2)^{4n-2}}.$$

Поэтому в кольце $K=\{z: 0<|z-2|<+\infty\}$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4^{2n}\cos 1}{(2n)!(z-2)^{4n}} + \frac{(-1)^{n-1}4^{2n-1}\sin 1}{(2n-1)!(z-2)^{4n-2}}\right] + \cos 1.$$

[Вернуться к условию]

Решение задачи 260.6

Найдем все особые точки данной функции. Они совпадают с корнями уравнения $\cos z = 1$ и, следовательно, является значениями $\operatorname{Arccos} 1$. Поскольку

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right),$$

то

$$z_k = -i \operatorname{Ln} 1 = -i(\ln|1| + i \arg 1 + 2k\pi i) = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому, если взять любую проколотую окрестность $U(\infty, \varepsilon) = \{z : \varepsilon < |z|\}$ точки $z_0 = \infty$, то в ней всегда найдутся особые точки $f(z)$. Это следует из того, что при $k \to \infty$ последовательность $z_k \to +\infty$.

Значит, данная функция не допускает разложение в ряд Лорана ни в какой проколотой окрестности точки z_0. [Вернуться к условию]

Глава 14. Изолированные особые точки аналитической функции

Решение задачи 273.6

Рассмотрим функцию

$$\frac{1}{f(z)} = z^3(2 - \cos z).$$

Она имеет нули в точке $z = 0$ и точках, которые являются корнями уравнения

$$\cos z = 2,$$

т.е.

$$z_k = \operatorname{Arccos} 2 = -i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}) = -i\big(\pm \ln(2+\sqrt{3}) + i2k\pi\big) = 2k\pi \pm i \ln(2+\sqrt{3}), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$.

Поскольку в окрестности точки $z = 0$

$$\frac{1}{f(z)} = z^3 \cdot \varphi(z), \quad \varphi(z) = 2 - \cos z, \quad \varphi(0) \neq 0,$$

то $z = 0$ — ноль третьего порядка для функции $1/f(z)$. Тогда из критерия для полюса следует, что $z = 0$ является полюсом третьего порядка для функции $f(z)$.

Аналогично, для функции $1/f(z)$ каждая из точек $z_k = 2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$ является полюсом первого порядка. Действительно, так как

$$\frac{1}{f(z_k)} = 0,$$
$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\bigg|_{z=z_k} = 3z_k^2(2-\cos z_k) + z_k^3 \sin z_k = z_k^3 \sin z_k \neq 0,$$

то z_k является нулем первого порядка для функции $1/f(z)$ и, следовательно, полюсом первого порядка функции $f(z)$. Заметим, что $\sin z_k \neq 0$, так как известно, что все нули $\sin z$ имеют вид: $m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 274.6

Особыми точками функции

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-e^{-z})}$$

являются точка $z = 0$ и корни уравнения $e^{-z} = 1$, т.е.

$$z_k = -\operatorname{Ln} 1 = i\,2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots .$$

Так как

$$\frac{1}{f(z)} = z\,e^{-z}(1-e^{-z}),$$

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)' = (e^{-z} - ze^{-z})(1-e^{-z}) + ze^{-2z},$$

и

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Bigg|_{z=z_k} = z_k\,e^{-2z_k} \neq 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

то z_k является нулем первого порядка для $1/f(z)$, а, следовательно, полюсом первого порядка для $f(z)$. Заметим, что

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)'\Bigg|_{z=0} = 0,$$

а

$$\left(\frac{1}{f(z)}\right)''\Bigg|_{z=0} \neq 0.$$

Значит, точка $z = 0$ — ноль второго порядка для $1/f(z)$. Тогда $z = 0$ является полюсом второго порядка для $f(z)$.

Поскольку $|z_k| = 2k\pi \to \infty$ при $k \to +\infty$, то точка $z = \infty$ является предельной точкой полюсов, т.е. не является изолированной особой точкой. [Вернуться к условию]

Решение задачи 275.6

У функции

$$f(z) = \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right)$$

особыми точками являются $z = 0$, $z = \infty$ и решения уравнения

$$\frac{1}{z} = k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

т.е.

$$z_k = \frac{1}{k\pi}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots.$$

Выясним характер особых точек $z_k = 1/(k\pi)$. Для этого при фиксированном $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ исследуем предел

$$I = \lim_{z \to \frac{1}{k\pi}} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right) = \lim_{z \to 0} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z + \frac{1}{k\pi}}}\right) = (-1)^k \lim_{z \to 0} \sin\frac{1}{\sin(\frac{1}{z+\frac{1}{k\pi}} - k\pi)}.$$

Здесь мы воспользовались формулой приведения. Заметим, что

$$\sin\frac{1}{\sin(\frac{1}{z+\frac{1}{k\pi}} - k\pi)} = \sin\frac{-k\pi z}{z + \frac{1}{k\pi}}.$$

Полагая по определению

$$g(z) = -\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{k\pi z}{z+\frac{1}{k\pi}}}\right),$$

получаем, что

$$I = (-1)^k \lim_{z \to 0} g(z).$$

Покажем, что предел $\lim\limits_{z \to 0} g(z)$ не существует.

По определению это означает, что $z_k = 1/(k\pi)$ — существенно особая точка функции $f(z)$.
Для этого с помощью следующих равенств определим две последовательности $(z_n^1)_{n=1}^{\infty}$, $\{z_n^2\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\frac{z_n^1 k\pi}{z_n^1 + \frac{1}{k\pi}} = \arcsin\frac{1}{2\pi n},$$
$$\frac{z_n^2 k\pi}{z_n^2 + \frac{1}{k\pi}} = \arcsin\frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Тогда при $n \to \infty$

$$z_n^1 = \frac{\frac{1}{k\pi}\cdot\arcsin\frac{1}{2\pi n}}{k\pi - \arcsin\frac{1}{2\pi n}} \to 0,$$
$$z_n^2 = \frac{\frac{1}{k\pi}\cdot\arcsin\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}}{k\pi - \arcsin\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} \to 0.$$

Остается заметить, что при $n \to \infty$

$$g(z_n^1) = \sin 2\pi n = 0 \to 0,$$
$$g(z_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \to 1,$$

т.е. предел I не существует по определению предела на языке последовательностей.

Итак, $z_k = 1/(k\pi)$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — существенно особые точки $f(z)$.

Так как $z_k \to 0$ при $k \to \infty$, то точка $z = 0$ является предельной точкой для существенно особых точек.

Точка $z = \infty$ является существенно особой точкой для $f(z)$, так как не существует предел

$$\lim_{z\to 0} \sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}\right).$$

Чтобы доказать это, рассмотрим две последовательности:

$$z_n^1 = \frac{1}{\arcsin \frac{1}{2\pi n}} \to \infty, \quad n \to \infty,$$
$$z_n^2 = \frac{1}{\arcsin \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}} \to \infty, \quad n \to \infty.$$

Тогда

$$f(z_n^1) = \sin 2\pi n = 0,$$
$$f(z_n^2) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Отсюда и следует нужное утверждение.

[Вернуться к условию]

Решение задачи 276.6

По условию

$$f(z) = \frac{1}{\sin z + \cos z}.$$

Конечными особыми точками являются корни уравнения:

$$\sin z + \cos z = 0. \qquad (P.5)$$

Так как $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ (доказать это самостоятельно), то одновременно $\sin z$ и $\cos z$ не могут обратиться в ноль.

Пусть $\cos z \neq 0$ (аналогично рассматривается другой случай). Тогда разделим уравнение (P.5) на $\cos z$, получим:

$$\operatorname{tg} z = -1 \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно, точки $z_n = -\pi/4 + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ являются особыми точками $f(z)$. Это нули знаменателя $f(z)$ кратности один (доказать это самостоятельно). Поэтому точки z_n, $n \in \mathbb{Z}$, являются полюсами $f(z)$ первого порядка. Но $z_n \to +\infty$ при $n \to +\infty$. Поэтому $z = \infty$ не является изолированной особой точкой, а является предельной точкой полюсов $f(z)$. [Вернуться к условию]

Ответы

Глава 1. Комплексные числа и действия над ними

Ответ к задаче 1.1

$2,\ 2,\ -i,\ 0.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.2

2, 2, i, 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.3

$3 - i$, $4 - 3i$, $-i$, 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.4

$1+2i,\ -1+i,\ 1-i,\ -1+2i..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.5

$1,\ 1+i,\ -1-i,\ -1-2i.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 1.6

2, 10, $-4/5 - 3/5i$, -16..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.1

$\sqrt{2}$, $\pi/4$, $\sqrt{2}$, $-\pi/4$, $\sqrt{2}$, $3\pi/4$, $\sqrt{2}$, $-3\pi/4$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.2

$2,\ \pi/3,\ 2,\ -\pi/3,\ 2,\ 2\pi/3,\ 2,\ -2\pi/3.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.3

2, $\pi/6$, 2, $-\pi/6$, 2, $5\pi/6$, 2, $-5\pi/6$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.4

$1,\ \pi/2,\ 1,\ -\pi/2,\ 1,\ \pi/2,\ 1,\ -\pi/2.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.5

$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \pi,\ 1,\ \pi.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 2.6

$1,\ -\pi/4,\ 1,\ \pi/4,\ 1,\ -3\pi/4,\ 1,\ 3\pi/4.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.1

$2e^{-\pi i/4}$, $64i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.2

$2e^{-\pi i/3}$, 64..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.3

$2e^{\pi i/6}$, -64..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.4

$\sqrt{2}e^{3\pi i/4}$, $8i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.5

$e^{-\pi i/2}$, -1..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 3.6

$e^{\pi i/2}$, -1..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.1

$1,\ i,\ -1,\ -i.$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.2

$\sqrt{3}/2 - i/2$, i, $-\sqrt{3}/2 - i/2$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.3

$1/2 + i\sqrt{3}/2,\ -1,\ 1/2 - i\sqrt{3}/2..$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.4

$\sqrt{2}/2(1+i)$, $\sqrt{2}/2(-1+i)$, $\sqrt{2}/2(-1-i)$, $\sqrt{2}/2(1-i)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.5

$\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2i.$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 4.6

$\sqrt{6}/2+i\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{6}/2-i\sqrt{2}/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.1

$0, -i, i.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.2

$4 + 3i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.3

$-1/3 - 2/3i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.4

$-1 - i$, $2 - i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.5

$-1+3/2i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 5.6

0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.1

Окружность $x^2 + (y-1)^2 = 1$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.2

Отрезок с концами в точках $z_1 = 0$, $z_2 = 4 + 8i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.3

Гипербола $y = 1/x$, $x > 0$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.4

Парабола $y = x^2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.5

$-1+3/2i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 7.6

Полуокружность $x^2 + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$.. [Вернуться к условию]

Глава 2. Элементарные трансцендентные функции

Ответ к задаче 29.1

$i(\pi + 2k\pi)$, $e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.2

$i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ e^{\frac{\pi}{4}+2k\pi},\ k\in\mathbb{Z}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.3

$\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $e^{-\pi+2k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.4

$\ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ e^{2k\pi},\ k \in \mathbb{Z}..$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.5

$\ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $e^{-\frac{\pi}{3}+2k\pi+i\ln\sqrt{2}}$, $k \in \mathbb{Z}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 29.6

$i\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, $e^{(-1+i)\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$, $k\in\mathbb{Z}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 30.1

А) $-2xy$, $x^2 - y^2$; б) $\cos x \operatorname{ch} y$, $-\sin x \operatorname{sh} y$; в) $e^{-\arg z}\cos(\ln|z|)$, $e^{-\arg z}\sin(\ln|z|)$, $\arg z \in (-\pi, \pi]$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 30.2

А) $\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y-1)^2}$, $\dfrac{2x}{x^2+(y-1)^2}$; б) $\cos y \operatorname{sh} x$, $\sin y \operatorname{ch} x$; в) $e^{-\frac{\pi}{2}y}\cos\dfrac{\pi x}{2}$, $e^{-\frac{\pi}{2}y}\sin\dfrac{\pi x}{2}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 30.3

А) $y^2 - x^2 - 2x$, $-2xy + 2y$; б) $\cos y \operatorname{ch} x$, $\sin y \operatorname{sh} x$; в) $e^{-\pi y} \cos \pi x$, $e^{-\pi y} \sin \pi x$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 30.4

А) $\dfrac{x}{x^2+y^2}+x,\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}+y$; б) $-\sin y \operatorname{ch} x,\ \cos y \operatorname{sh} x$; в) $e^{-\frac{\pi}{4}x}\cos\dfrac{\pi y}{4},\ e^{-\frac{\pi}{4}x}\sin\dfrac{\pi y}{4}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 30.5

А) $x^2 + y^2 - y$, x; б) $-\cos x \operatorname{sh} y$, $\sin x \operatorname{ch} y$; в) $e^{\frac{\pi}{4}y} \cos \frac{\pi x}{4}$, $-e^{\frac{\pi}{4}y} \sin \frac{\pi x}{4}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 30.6

А) $\dfrac{x^2+y^2+x}{(x+1)^2+y^2}$, $\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$; б) $-\cos x \operatorname{sh} y$, $\sin x \operatorname{ch} y$; в) $e^{\ln|z|-\arg z}\cos(\arg z + \ln|z|)$, $e^{\ln|z|-\arg z}\sin(\arg z+\ln|z|)$, $\arg z \in (-\pi,\pi]$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 32.1

$2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $\pi + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$, $k \in \mathbb{Z}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 32.2

$\pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \pm i\ln(\sqrt{2} \pm 1)..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 32.3

$2k\pi \pm i \ln(2+\sqrt{3})$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 32.4

$i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 32.5

$\ln(\sqrt{5} \pm 2) + i\pi \left(2k \pm \dfrac{1}{2}\right)..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 32.6

$\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$, $\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33.1

$2k\pi \pm i \ln(2+\sqrt{3})$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33.2

$\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i\ln(\sqrt{2} \pm 1)$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33.3

$2k\pi - i\ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi - i\ln(\sqrt{2}+1)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33.4

$$\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+(2k+1)\pi\right)+\frac{i}{4}\ln 5..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33.5

$i\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33.6

$2k\pi \pm \dfrac{\pi}{3}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33.7

$2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 33.8

$i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$..

[Вернуться к условию]

Глава 3. Функции комплексного переменного

Ответ к задаче 51.1

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.2

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.3

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.4

Да, 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.5

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 51.6

Да, 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.1

А) $z = 0$, б) $\varnothing$, в) $w'(0) = 0$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.2

А) $z = x + ix$, $x \in \mathbb{R}$, б) $\varnothing$, в) $w'(z) = 2z$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.3

А) $z = 0$, б) $\varnothing$, в) $w'(0) = 0$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.4

А) $\forall z \in \mathbb{C}$, б) $\forall z \in \mathbb{C}$, в) $w'(z) = 3x^2 - 3y^2 + i6xy$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.5

А) $z = 0$, б) $\varnothing$, в) $w'(0) = 0$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 53.6

А) $z = 0$, б) $\varnothing$, в) $w'(0) = 1$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.1

А) $a = -b$, $c = 1$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.2

А) $c = 2a = -2b$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.3

А) $a = -2b = -2c$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.4

А) $a = c,\ b = -1$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.5

А) $c = 2b = -2a$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 54.6

А) $a = -c$, $b = 1$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.1

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.2

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.3

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.4

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.5

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 56.6

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.1

Да, $u = axy + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.2

Да, $u = \alpha(ax + by) + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.3

Не существует..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.4

Да, $u = a \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.5

Да, $u = a\ln(x^2 + y^2) + b$, $a, b \in \mathbb{R}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 57.6

Да, $u = \dfrac{ax}{x^2 + y^2} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.1

$f(z) = e^{iz}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.2

$f(z) = ie^{iz}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.3

$f(z) = i(z^2 - z)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.4

$f(z) = \dfrac{i}{z}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.5

$f(z) = \sin z$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 58.6

$f(z) = \operatorname{ch} z$..

[Вернуться к условию]

Глава 4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Ответ к задаче 76.1

$k = 3$, $\varphi = 0$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.2

$k = 3$, $\varphi = \pi$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.3

$k = 6$, $\varphi = \pi/2$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.4

$k = 6$, $\varphi = -\pi/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.5

$k = 6$, $\varphi = -\pi/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 76.6

$k = 6$, $\varphi = \pi/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.1

$k = 2\sqrt{2}$, $\varphi = -\pi/4$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.2

$k = 2$, $\varphi = 0$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.3

$k = \sqrt{2}/2$, $\varphi = -\pi/4$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.4

$k = 1$, $\varphi = \pi$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.5

$k = \operatorname{ch} 2$, $\varphi = 0$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 77.6

$k = 4$, $\varphi = -\pi/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.1

$|z| < 1/\sqrt[3]{4}$ сжимается, $|z| > 1/\sqrt[3]{4}$ растягивается..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.2

$(x-1/2)^2+y^2<1/4$ сжимается, $(x-1/2)^2+y^2>1/4$ растягивается.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.3

$|z| > 1$ сжимается, $|z| < 1$ растягивается..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.4

$|\operatorname{Re} z| < 1$ сжимается, $|\operatorname{Re} z| > 1$ растягивается..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.5

$|z| > 1$ сжимается, $|z| < 1$ растягивается..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 78.6

$|z-1|>1$ сжимается, $|z-1|<1$ растягивается..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.1

$|z| = 1/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.2

$|z+1| = 1/2.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.3

$|z| = 1.$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.4

$|z - i| = \sqrt{2}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.5

$\operatorname{Re} z = 0.$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 79.6

$|z-3| = 1/2$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.1

$\arg z = \pi$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.2

$\arg z = -\pi/4$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.3

$\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Im} z = 1/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.4

$\operatorname{Re} z > 4$ и $\operatorname{Im} z = 2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.5

$\operatorname{Im} z = 0$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 80.6

$\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Im} z = 0$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.1

$\pi/4$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.2

$\pi/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.3

$\pi/2$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.4

$\pi/4$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.5

$\pi/4$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 81.6

0..

[Вернуться к условию]

Глава 5. Линейная функция

Ответ к задаче 95.1

$\tau = iz$ — поворот на угол $\pi/2$, $w = \tau + i$ — параллельный перенос..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.2

$\tau = -iz$ — поворот на угол $-\pi/2$, $w = \tau - 1 + i$ — параллельный перенос.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.3

$\tau = \sqrt{2}z$ — растяжение, $\xi = e^{i\frac{\pi}{4}}\tau$ — поворот на угол $\pi/4$, $w = \xi + 1$ — параллельный перенос..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.4

$\tau = \sqrt{2}z$ — растяжение, $\xi = e^{-i\frac{\pi}{4}}\tau$ — поворот на угол $-\pi/4$, $w = \xi - i$ — параллельный перенос..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.5

$\tau = e^{i\frac{\pi}{6}} z$ — поворот на угол $\pi/6$, $w = \tau - 1$ — параллельный перенос.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 95.6

$\tau = \sqrt{2}z$ — растяжение, $\xi = e^{-i\frac{3\pi}{4}}\tau$ — поворот на угол $-3\pi/4$, $w = \xi + 1$ — параллельный перенос..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 96.1

$w = -\dfrac{iz}{2} + 4i - 1.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 96.2

$w = -(1+i)z + 4(1+i)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 96.3

$w = -\frac{iz}{2} + i\frac{7}{2} - 1..$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 96.4

$w = (1 + i)z + 6(1 + i)..$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 96.5

$w = -\frac{iz}{2} + i\frac{5}{2} - 1..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 96.6

$w = -(1+i)z + 1 + i..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 97.1

$w = (2 + i)z + 2 - 6i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 97.2

$w = -z$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 97.3

$w = (1 - i)z + i..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 97.4

$w = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 97.5

$w = iz - 1 - i.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 97.6

$w = -iz - 1 - i.$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.1

$z^* = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i,\ \varphi = 0,\ k = 3..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.2

Нет неподвижной точки..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.3

$z^* = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $k = 3$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.4

$z^* = -\dfrac{3}{2}i,\ \varphi = 0,\ k = 3.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.5

$z^* = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}i$, $\varphi = \pi$, $k = 3$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 98.6

Нет неподвижной точки..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 99.1

$w = 3e^{i\frac{\pi}{4}}z + 6 + 3i.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 99.2

$w = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}z + 6 + 3i..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 99.3

$w = 3e^{i\frac{\pi}{3}}z + 6 + 3i..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 99.4

$w = 3e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 6 + 3i.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 99.5

$w = 3e^{i\frac{\pi}{6}}z + 6 + 3i.$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 99.6

$w = 3e^{-i\frac{\pi}{6}}z + 6 + 3i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 100.1

$$w = \frac{6-z}{2} + i..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 100.2

$w = \dfrac{8 - z}{4} + i..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 100.3

$w = \dfrac{10 - z}{6} + i..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 100.4

$$w = \frac{7 - z}{2} + i..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 100.5

$$w = \frac{9 - z}{4} + i..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 100.6

$w = \dfrac{11 - z}{6} + \dfrac{i}{2}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106.1

$w = z + b,\ w = -z + b - 4i,\ b \in \mathbb{R};.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106.2

$w = z + bi$, $w = -z + 3 + bi$, $b \in \mathbb{R}$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106.3

$w = az + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0;$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106.4

$w = -i(az + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$;. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106.5

$w = az + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$;. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106.6

$w = i(az + b),\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0;.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106.7

$w = -az + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0;.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 106.8

$w = az + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a > 0;.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 108

Квадрат с центром в точке -3 и сторонами, параллельными осям координат.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 109

$w = \pm z + b(1+i),\ b \in \mathbb{R}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 112

$w = 2iz + 4.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 113

Полоса $0 < \operatorname{Re} w < 1$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 116

Полоса $0 < \operatorname{Re} w < 1$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 118

$w = e^{i\alpha}z,\ \alpha \in \mathbb{R}$..

[Вернуться к условию]

Глава 6. Дробно-линейная функция

Ответ к задаче 119.1

Окружность $u^2 + v^2 + 5v = 0$, где $w = u + iv$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.2

$\left\{w : \ \arg w = -\dfrac{\pi}{7}\right\}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.3

$$\left\{w : \left|w - \frac{1}{12}\right| > \frac{1}{12}, \operatorname{Re} w > 0\right\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.4

Окружность $u^2 + \left(v + \frac{4}{3}\right)^2 + = \frac{4}{9}$, где $w = u + iv$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.5

$$\left\{w:\ \operatorname{Im} w = -\frac{1}{6}\operatorname{Re} w\right\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 119.6

$\{w : \operatorname{Im} w < 0\} \setminus \left\{w : |w| < \frac{1}{2}\right\}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.1

$$w = \frac{1-i}{2}(z+1)..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.2

$$w = \frac{z(-1+i)-1+3i}{z(-1+i)+1+i}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.3

$$w = \frac{3iz + 9i + 18}{z + 3}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.4

$$w = \frac{(1+2i)z + 6 - 3i}{5(z-i)}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.5

$w = \dfrac{iz + 2 + i}{z + 1}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 120.6

$w = (1 + i)z - 1.$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 121.1

$\{w : |w| < 1\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 121.2

$\{w: \operatorname{Re} w > 0\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 121.3

$\{w: \ |w| < 1\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 121.4

$\{w : |w| < 1\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 121.5

$\{w: \operatorname{Im} w < 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 121.6

$\{w : |w| < 1\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 122.1

$\{w : \ |w| < 1, \operatorname{Im} w < 0\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 122.2

$\{w : |w| < 1, \operatorname{Re} w < 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 122.3

Область, ограниченная касающимися друг друга окружностями $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$ и $\left|w - \dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 122.4

Область, ограниченная прямой $\operatorname{Re} w = 1$ и касающейся ее окружностью $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 122.5

$\{w : \operatorname{Im} w < 0\} \setminus \left\{w : \left|w - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right| < \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 122.6

Двусвязная область, граница которой состоит из прямой $\left\{w: \operatorname{Re} w = \frac{1}{2}\right\}$ и окружности $\left|w - \frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 123.1

$\{z : \ |z| = 2\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 123.2

$\left\{z : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}\right\}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 123.3

$$\left\{ z : \ \operatorname{Im} z = \frac{1}{2} \right\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 123.4

$\left\{z : \ |z-2| = \sqrt{3}\right\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 123.5

$$\left\{ z : \left| z - \frac{i}{4} \right| = \frac{1}{4} \right\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 123.6

$$\left\{ z : \left| z - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} \right\}..$$

[Вернуться к условию]

Глава 7. Функция Жуковского

Ответ к задаче 140.1

$\{w : \operatorname{Re} w \leqslant 1, \operatorname{Im} w = 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.2

Эллипс $\dfrac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ в комплексной плоскости $w=u+iv$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.3

$\{w : \operatorname{Re} w = 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.4

Эллипс $\dfrac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ в комплексной плоскости $w=u+iv$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.5

Гипербола $\dfrac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \dfrac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ в комплексной плоскости $w = u + iv$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 140.6

Отрезок $\{w : \operatorname{Im} w = 0, -1 \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 1\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.1

Внешность эллипса $\dfrac{4u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + \dfrac{4v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} = 1$ в комплексной плоскости $w = u + iv$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.2

Внешность эллипса $\dfrac{4u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$ в комплексной плоскости $w=u+iv$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.3

$\mathbb{C} \setminus \{w : w \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.4

$\mathbb{C} \setminus \{w : \ w \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.5

$\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 141.6

$\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.1

$\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.2

$\{w : \operatorname{Re} w < 0\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.3

$\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.4

Верхняя половина внутренности эллипса $\frac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ комплексной плоскости $w=u+iv$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.5

Нижняя половина внутренности эллипса $\dfrac{4u^2}{\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\dfrac{4v^2}{\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1$ комплексной плоскости $w=u+iv$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 142.6

Область, ограниченная ветвями гиперболы $\dfrac{u^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \dfrac{v^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ комплексной плоскости $w = u + iv$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 143.1

$\mathbb{C} \setminus \left\{ w : \ w \in \left(-\infty, -\frac{13}{5} \right] \cup [-1, +\infty) \right\}.$.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 143.2

Нижняя половина внутренности эллипса $\frac{u^2}{\left(\frac{17}{8}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{15}{8}\right)^2} = 1$ комплексной плоскости $w = u + iv$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 143.3

Верхняя половина внутренности эллипса $\dfrac{u^2}{\left(\frac{13}{5}\right)^2} + \dfrac{v^2}{\left(\frac{12}{5}\right)^2} = 1$ комплексной плоскости $w = u + iv$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 143.4

Нижняя половина внутренности эллипса $\dfrac{u^2}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}+\dfrac{v^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=1$ комплексной плоскости $w=u+iv$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 143.5

$\mathbb{C} \setminus \left[-\frac{37}{6}, +\infty\right)..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 143.6

$$\mathbb{C} \setminus \left\{ w : \ w \in \left(-\infty, -\frac{5}{4} \right] \cup [-1, +\infty) \right\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 144.1

$$w = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{17}{4} - \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 144.2

$w = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$, где $\xi = \frac{8}{21} \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + \frac{13}{21}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 144.3

$$w = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{10}{3} - \left(z + \frac{1}{z}\right)\right)}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 144.4

$w = \sqrt{\dfrac{\xi + \frac{17}{8}}{\frac{17}{8} - \xi}}$, где $\xi = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 144.5

$w = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1}$, где $w(i) = (1 - \sqrt{2})i$, $\xi = \dfrac{20}{111} \cdot \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right) + \dfrac{91}{111}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 144.6

$w = \tau + \sqrt{\tau^2 - 1}$, где $\tau = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{1}{4}$ и выбирается одна из однозначных ветвей корня..

[Вернуться к условию]

Глава 8. Отображение с помощью элементарных функций

Ответ к задаче 158.1

$w_1(D_1) = \{w : 1 < |w| < 4\} \setminus [-4, -9/4]$, $w_2(D_2) = \{w : |w| < 64\} \setminus [-64, 0]$ $w_3(D_3) = \{w : |w| < 16\} \setminus [-16, 0]$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 158.2

$w_1(D_1) = \mathbb{C} \setminus \{w : w \in [9, 36]\}$, $w_2(D_2) = \{w : 0 < \arg w < \frac{\pi}{5}, 25 < |w| < 100\}$ $w_3(D_3) = \mathbb{C} \setminus \{w : \arg w = 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.1

$w_1(D_1) = \{w: \ e^2 < |w| < e^4, \ \pi/6 < \arg w < \pi/3\}$, $w_1(D_2) = \{w: \ 0 < \operatorname{Re} w < 1, \ 0 < \operatorname{Im} w < \pi\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.2

$w_1(D_1) = \{w : 4 < |w| < 8, \pi/12 < \arg w < \pi/3\}$, $w_1(D_2) = \{w : 1 < \operatorname{Re} w < \ln 6, 0 < \operatorname{Im} w < \pi/2\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 159.3

$w_1(D_1) = \{w : 1 < |w| < 2, \pi/6 < \arg w < \pi/3\}$, $w_1(D_2) = \{w : 0 \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 1, 0 \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant \pi/2\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.1

$w(D_1)$ — внешность эллипса $u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 = 1$, $w(D_2)$ — внешность эллипса $u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 = 1$, $w(D_3) = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, $w(D_4) = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.2

$w(D_1) = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$, $w(D_2) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(D_3) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(D_4) = \{w : \operatorname{Im} w < 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 160.3

$w(D_1) = \{w = u + iv : \operatorname{Im} w > 0,\ u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 < 1\}$, $w(D_2) = \{w = u + iv : \operatorname{Im} w < 0,\ u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 < 1\}$, $w(D_3) = \{w = u + iv : \operatorname{Re} w > 0,\ u^2/(5/4)^2 + v^2/(3/4)^2 < 1\} \setminus [1, 5/4]$, $w(D_4) = \{w = u + iv : \operatorname{Im} w > 0,\ u^2/(\sqrt{2}/2)^2 - v^2/(\sqrt{2}/2)^2 < 1\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.1

$w(D) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\} \setminus [0, 1]$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.2

$w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\};.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.3

$w(D) = \{w : |w| < 1\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.4

$w(D) = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.5

$w(D) = \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 161.6

$w(D) = \mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup (1, +\infty)\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.1

$w = \exp\big(i\pi(z-6)/6\big)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.2

$w = e^{i3z}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.3

$w = \exp\left((1 - i)z\pi/2\right)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.4

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.5

$w = -(1 + iz^4)/(i + z^4)$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 162.6

$w = \ln z + 2.$. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.1

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{2}{3}} (1-\xi)^{-\frac{2}{3}}\, d\xi..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.2

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} \int_0^z \xi^{-\frac{3}{4}} (1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\, d\xi + 2..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.3

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)} \int_0^z \xi^{-\frac{1}{2}} (1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\, d\xi..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.4

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{3}{4}} (1-\xi)^{-\frac{1}{2}}\, d\xi..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.5

$$w = \frac{1}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{3}{4}} (1-\xi)^{-\frac{3}{4}} \, d\xi + i..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 163.6

$$w = \frac{-4}{B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)} \int\limits_0^z \xi^{-\frac{3}{4}} (1-\xi)^{-\frac{3}{4}}\, d\xi + 3 + 3i..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.1

$w = (z+1)^2/(z-1)^2$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.2

$w = i\sqrt{-z^2 - h^2};.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.3

$w = i\sqrt{-e^{2z} - 1};.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.4

$w = (z-1)^2/(z+1)^2;.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.5

$w = e^{-2\pi(1/z+i/2)}$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.6

$w = i\sqrt{\dfrac{z-1}{z}};.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.7

$w = i\sqrt{i(1/z + i)};.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.8

$w = e^{2\pi i/z}$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.9

$w = (z - \sqrt{3} - i)^2/(z + \sqrt{3} - i)^2;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.10

$w = i\big((z+i)/(z-i)\big)^2$;. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.11

$w = i\sqrt{i(z-1)/(z+1)}$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.12

$w = \sqrt{(z+i)/(i-z)}$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.13

$w = \sqrt{(z+1)/(1-z)};.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.14

$w = e^{-i\pi/8}\sqrt{z-i};.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.15

$w = \sqrt{z^2 + h^2}/z;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.16

$$w = \frac{4}{\pi}\left(\ln\frac{z+i}{z-i} - i\frac{\pi}{2}\right);.$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.17

$w = i\big((\sqrt{z}+1)/(\sqrt{z}-1)\big)^2$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.18

$w = \sqrt{(z+1)/(z-1)};.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.19

$w = \sqrt{\left((z-1)/(z+1)\right)^2+1};.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 170.20

$$w = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - z - \frac{1}{z}\right)};.$$

[Вернуться к условию]

Глава 9. Интегральная теорема и формула Коши

Ответ к задаче 174.1

А) 1; б) 2..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 174.2

А) $2(i-1)$; б) $-2(1+i)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 174.3

А) $\dfrac{1}{2} + 4i$; б) $\dfrac{3}{2} + 3i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 174.4

А) 0; б) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 174.5

А) $-2i\sqrt{2}$; б) $-2i\sqrt{2}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 174.6

А) $1 + \dfrac{i}{3}$; б) $1 - i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 175.1

А) $\dfrac{\pi}{3}$; б) $-\dfrac{\pi}{3}$; в) 0; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 175.2

А) $-\dfrac{2\pi}{15}i$; б) $\dfrac{\pi}{5}i$; в) 0; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 175.3

А) $\dfrac{2\pi}{63}i$; б) $-\dfrac{\pi}{9}i$; в) 0; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 175.4

А) π; б) $-\pi$; в) 0; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 175.5

А) $-\dfrac{\pi}{4}i$; б) $\dfrac{\pi}{4}i$; в) 0; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 175.6

А) $-2\pi i$; б) $2\pi\, e\, i$; в) $2\pi(e-1)$; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 176.1

А) 0; б) $\dfrac{2i}{\pi}$; в) $\dfrac{2i}{\pi}$; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 176.2

А) 1; б) $-\dfrac{e}{2}$; в) $1-\dfrac{e}{2}$; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 176.3

А) $-4\pi i$; б) $4\pi i$; в) 0; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 176.4

А) 0; б) 0; в) 0; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 176.5

А) $-\dfrac{\pi i}{32}(7\sin 1 + 4\cos 1)$; б) $\dfrac{\pi i}{32}\sin 3$; в) $-\dfrac{\pi i}{32}(7\sin 1 + 4\cos 1 - \sin 3)$; г) 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 176.6

А) $-4\pi i$; б) $\dfrac{11\pi i}{e}$; в) $\left(\dfrac{11}{e}-4\right)\pi i$; г) 0.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 177.1

$-2\pi i$, $-\pi i$, 0, πi, $2\pi i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 177.2

$-2\pi i$, $-\pi i$, 0, πi, $2\pi i$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 177.3

$18\pi i$, $-14\pi i$, $4\pi i$, 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 177.4

$\dfrac{\pi}{3}\,e^{3i},\ -\dfrac{\pi}{3}\,e^{-3i},\ \dfrac{\pi i}{6}\sin 3,\ 0..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 177.5

$\frac{\pi}{4}(2-i)$, $-\frac{\pi}{4}(2+i)$, $\frac{\pi}{2}i$, $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}i$, $-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}i$, $-\frac{\pi}{2}i$, 0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 177.6

$-\dfrac{\pi}{10}(1+2i),\ \dfrac{2\pi}{5}i,\ \dfrac{\pi}{10}(1-2i),\ -\dfrac{\pi}{10}(1-2i),\ -\dfrac{2\pi}{5}i,\ \dfrac{\pi}{2}(1+2i),\ 0..$

[Вернуться к условию]

Глава 10. Степенные ряды

Ответ к задаче 196.1

$R = 2,\ D = \{z :\ |z - i| < 2\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 196.2

$R = \frac{1}{3}$, $D = \left\{ z : \ |z+1| < \frac{1}{3} \right\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 196.3

$R = \frac{1}{5}$, $D = \left\{z : \ |z - 1 - i| < \frac{1}{5}\right\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 196.4

$R = 1,\ D = \{z :\ |z| < 1\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 196.5

$R = \dfrac{1}{e}$, $D = \left\{ z : \ |z+i| < \dfrac{1}{e} \right\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 196.6

$R = \frac{1}{4}$, $D = \left\{ z : \ |z - i| < \frac{1}{4} \right\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 197.1

$\dfrac{R}{3}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 197.2

R..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 197.3

∞..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 197.4

R^4..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 197.5

0..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 197.6

R, если $|z_0| \leqslant 1$ и $\dfrac{R}{z_0}$, если $|z_0| > 1$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 198.1

$$\frac{z}{(1-z)^2}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 198.2

$$\frac{1}{(1+z)^2}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 198.3

$-\ln(1-z)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 198.4

$$\frac{2}{(1+z)^3}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 198.5

$\ln(1+z)$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 198.6

$$\frac{1}{(1+z^2)^2}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 199.1

Расходится во всех точках..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 199.2

Сходится во всех точках кроме $z = 1$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 199.3

Сходится во всех точках..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 199.4

Сходится во всех точках кроме $z = -1$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 199.5

Сходится во всех точках кроме $z = 1$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 199.6

Сходится во всех точках..

[Вернуться к условию]

Глава 11. Ряды Тейлора

Ответ к задаче 216.1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^{n+1}},\ D=\{z:|z+1|<3\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 216.2

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(2i)^{n+1}},\ D=\{z:|z-i|<2\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 216.3

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{(1-i)^{n+1}},\ D=\{z:|z-i|<\sqrt{2}\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 216.4

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^2n}{(2i)^{2n}},\ D=\{z : |z|<2\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 216.5

$$\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{3^n},\ D=\{z:|z-1|<3\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 216.6

$3\sum_{n=0}^{\infty}\big((-1)^n-3\big)(z-2)^n$, $D=\{z:|z-2|<1\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.1

$$e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{n!},\ D=\{z:|z|<+\infty\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.2

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^{n-1}}{(2n-1)!}z^{2n-1},\ D=\{z:|z|<+\infty\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.3

$$\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty},\ D=\{z:|z|<+\infty\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.4

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}z^{2n},\ D=\{z:|z|<+\infty\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.5

?????????????..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 217.6

$\cos i \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{3^{2n}}{(2n)!} z^{2n} + \sin i \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} \frac{3^{2n-1}}{(2n-1)!} z^{2n-1}$, $D = \{z : |z| < +\infty\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.1

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,\ D=\{z:|z|<1\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.2

$$2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{2n+1},\ D=\{z:|z|<1\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.3

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)z^n,\ D=\{z:|z|<1\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^{3n-1},\ D = \{z : |z| < 1\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.5

$$z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{z^{n+1}}{n} + \frac{z^n}{n} \right),\ D = \{z : |z| < 1\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 218.6

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nz^{2n-2},\ D=\{z:|z|<1\}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.1

$z + \frac{1}{2}z^3 + \frac{5}{24}z^5 + \ldots$, $D = \left\{z : |z| < \frac{\pi}{2}\right\}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.2

$z + \frac{3}{2}z^2 + \frac{11}{6}z^3 + \ldots,\ D = \{z : |z| < 1\}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.3

$-1+\frac{1}{2}z+\frac{1}{12}z^2+\ldots,\ D=\{z:|z|<1\}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.4

$1 - 2z - 2z^2 + \ldots,\ D = \left\{ z : |z| < \dfrac{1}{4} \right\}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.5

$1 + z^2 + \dfrac{z^4}{3} + \ldots,\ D = \{z : |z| < +\infty\}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 219.6

$z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{2}{15}z^5 - \ldots,\ D = \left\{z : |z| < \dfrac{\pi}{2}\right\}..$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.1

.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.2

. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 234.3

.

[Вернуться к условию]

Глава 12. Нули аналитической функции. Теорема единственности

Ответ к задаче 237.1

$z_0 = 0$, $n = 2$, $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $n = 1$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.2

$z_1 = i$, $z_2 = -i$, $n = 2$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.3

$z_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ n = 2;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.4

$z_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z},\ n = 2;.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.5

$z_1 = 2,\ z_2 = -2,\ n = 3;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 237.6

$z_1 = 1,\ z_2 = -1,\ n = 2;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 238.1

$n = 4$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 238.2

$n = 4$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 238.3

$n = 3;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 238.4

$n = 3;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 238.5

$n = 2;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 238.6

$n = 2;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.1

$z_1 = 3i,\ n_1 = 1,\ z_2 = -3i,\ n_2 = 1;.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.2

$z_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ n_k = 3,\ k \in \mathbb{Z};.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.3

$z_0 = 0,\ n_0 = 2,\ z_k = k\pi,\ n_k = 3,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\};.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.4

$z_1 = \pi,\ n_1 = 3,\ z_{-1} = -\pi,\ n_{-1} = 3,\ z_k = k\pi,\ n_k = 1,\ k \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 0, 1\};.$ [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.5

$z_0 = 4$ — нуль ветви, для которой $\sqrt{1} = 1$, $n_0 = 3$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 239.6

$z_1^* = 2,\ n_1^* = 3,\ z_2^* = -2,\ n_2^* = 3,\ z_k = 2k\pi i,\ n_k = 1,\ k \in \mathbb{Z};.$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.1

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.2

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.3

Существует, $f(z) = 1/(z+1)$;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.4

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.5

Существует, $f(z) = z^2$;. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 240.6

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 241.1

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 241.2

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 241.3

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 241.4

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 241.5

Такими функциями являются только константы;.

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 241.6

Не существует;.

[Вернуться к условию]

Глава 13. Ряд Лорана

Ответ к задаче 257.1

А) $-\dfrac{1}{2}\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+1}}\right)$; б) $-\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n}$; в) $\dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(3^n-1)\frac{1}{z^{n+1}}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 257.2

А) $\dfrac{1+3i}{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{i^n}{z^{n+2}} + \dfrac{9-3i}{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^{n-1}}{3^{n+1}}$; б) $\dfrac{3-i}{10}\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(1-i)^n}{(z-1)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(z-1)^n}{4^{n+1}}\right]$; в) $\dfrac{3-i}{10}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(i^n-(-1)^n 3^n\right)\dfrac{1}{z^n}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 257.3

А) $-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)z^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{z^{n+1}}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 257.4

А) $-\sum\limits_{n=-1}^{\infty} z^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z+1)^n$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 257.5

А) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^{n-1}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{2n+2}}$..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 257.6

А) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$; б) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-2^{n-1})\frac{1}{z^n}$.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.1

$$-\frac{i}{4(z-i)}-\frac{1}{4(z-i)^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+3)i^n(z-i)^n}{2^{n+4}}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.2

$$\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{9}\sum_{n=-1}^{\infty}\frac{3n+2}{z^{n+2}}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.3

$$\frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(z-1)^n}+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{2^{n+2}}(z-1)^n..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.4

$$\frac{1}{9}\left[-\frac{2}{z}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{3n-4}{z^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}\right]..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.5

$$\frac{1}{54}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}}-\frac{1}{2^{n+1}}\right](z-1)^{n}-\frac{1}{9}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{(z-1)^{n}}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 258.6

$$\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+1)^{n+1}}+\frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+2}}(3n+5)(z+1)^{n}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.1

$$z^4 - \frac{z^2}{2!} + \frac{1}{4!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n-4}}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.2

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!z^n}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.3

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(z-1)^{n-1}}+(z-1)..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.4

$$(z-1)+2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{(2n-1)!}-\frac{1}{(2n+1)!}\right)}{(z-1)^{2n-1}}+\frac{2(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n}}\right]..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.5

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(1+\frac{n\pi}{2}\right)}{n!(z-1)^n}..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 259.6

$$\cos 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4^{2n}\cos 1}{(2n)!(z-2)^{4n}} + \frac{(-1)^{n-1}4^{2n-1}\sin 1}{(2n-1)!(z-2)^{4n-2}}\right]..$$

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.1

Нет (в любом кольце, окружающем точку $z_0 = 0$, функция не является непрерывной)..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.2

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.3

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.4

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.5

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 260.6

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.1

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.2

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.3

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.4

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.5

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.6

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.7

Нет..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 267.8

Да..

[Вернуться к условию]

Глава 14. Изолированные особые точки аналитической функции

Ответ к задаче 273.1

$z = 0$ — устранимая особая точка.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.2

$z = 0$ — существенно особая точка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.3

$z_k = 2k\pi,\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы второго порядка; $z = 0$ — полюс первого порядка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.4

$z = 0$ — полюс второго порядка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.5

$z_k = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ — устранимые особые точки; $z_k = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ — полюсы второго порядка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 273.6

$z_k = 2k\pi \pm i\ln(2+\sqrt{3})$, $k \in \mathbb{Z}$ — полюсы первого порядка; $z = 0$ — полюс третьего порядка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.1

$z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — полюс первого порядка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.2

$z = \pm i$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — существенно особая точка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.3

$z = 0$, $z = \pm i$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — устранимая особая точка.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.4

$z = \pm i$ — полюсы второго порядка, $z = \infty$ — устранимая особая точка.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.5

$z = \infty$ — существенно особая точка.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 274.6

$z = 0$ — полюс второго порядка, $z = i\,2k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — полюсы первого порядка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.1

$z = 0$ — устранимая особая точка, $z_k = \dfrac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ — полюсы первого порядка, $z = \infty$ — предельная точка для полюсов..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.2

$z = 1$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — устранимая особая точка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.3

$z = 0$ — существенно особая точка, $z = \infty$ — устранимая особая точка.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.4

$z_k = \dfrac{2}{(2k+1)\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ — существенно особые точки, $z = 0$ — предельная точка для существенно особых точек, $z = \infty$ — устранимая особая точка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.5

$z_k = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ — полюсы второго порядка, $z = \infty$ — предельная точка для полюсов..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 275.6

$z_k = \dfrac{1}{k\pi}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — существенно особые точки, $z = 0$ — точка, предельная для существенно особых точек, $z = \infty$ — существенно особая точка..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.1

Да..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.2

Нет, $z = \infty$ — предельная точка полюсов..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.3

Нет, $z = \infty$ — предельная точка полюсов..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.4

Нет, $z = \infty$ — предельная точка полюсов..

[Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.5

Нет, $z = \infty$ — предельная точка полюсов.. [Вернуться к условию]

Ответ к задаче 276.6

Нет, $z = \infty$ — предельная точка полюсов..

[Вернуться к условию]