Лабораторная работа
Расчет и анализ характеристик функционирования n-канальной СМО с отказами

Постановка задачи: имеется *n* каналов (линий связи), на которые поступает поток заявок с интенсивностью λ . Поток обслуживания имеет интенсивность μ (величина, обратная среднему времени обслуживания $\overline{t_{об}}$). Найти финальные вероятности состояний СМС), а также характеристики ее эффективности:

A — абсолютную пропускную способность, т. е. среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени;

Q — относительную пропускную способность, т. е. среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой;

P — вероятность отказа, т. е. того, что заявка покинет СМО не обслуженной;

$\bar{k}$ — среднее число занятых каналов.

Решение. Состояния системы (СМО) будем нумеровать по числу заявок, находящихся в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):

S_0 — в СМО нет ни одной заявки,

S_1 — в СМО находится одна заявка (один канал занят, остальные свободны),

. . . . .

S_k— в СМО находится *к* заявок (*к* каналов заняты, остальные свободны),

. . . . .

S_n — в СМО находится *n* заявок (все *n* каналов заняты),

Граф состояний СМО соответствует схеме гибели и размножения (рис 1). Разметим этот граф — проставим у стрелок интенсивности потоков событий. Из S_0 в S_1 систему переводит поток заявок с интенсивностью λ(как только приходит заявка, система перескакивает из S_0 в S_1). Тот же поток заявок переводит систему из любого левого состояния в соседнее правое (см. верхние стрелки на рис 1.

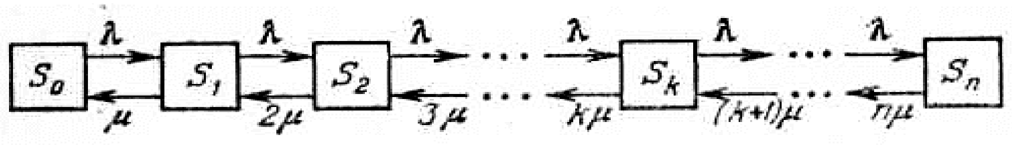

Рис1.

Проставим интенсивности у нижних стрелок. Пусть система находится в состоянии S_1 (работает один канал). Он производит μ обслуживаний в единицу времени. Проставляем у стрелки $S_1 \rightarrow S_0$ интенсивность μ. Теперь представим себе, что система находится в состоянии S_2 (работают два канала), чтобы ей перейти в S_1, нужно, чтобы либо закончил обслуживание первый канал, либо второй; суммарная интенсивность их потоков обслуживании равна 2 μ; проставляем ее у соответствующей стрелки. Суммарный поток обслуживания, даваемый тремя каналами, имеет интенсивность 3 μ, k каналами —$k\mu$. Проставляем эти интенсивности у нижних стрелок на рис 1.

А теперь, зная все интенсивности, воспользуемся уже готовыми формулами для финальных вероятностей в схеме гибели и размножения:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} + \frac{\lambda^3}{2*3\mu^3} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1} \qquad (1)$$

Члены разложения $\frac{\lambda}{\mu}, \frac{\lambda^2}{2\mu^2}, \ldots, \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ будут представлять собой коэффициенты при p_0 в выражениях для $p_1, p_2, \ldots, p_n$;

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0,\ p_2 = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} p_0, \ldots,\ p_k = \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} p_0, \ldots,\ p_n = \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 \qquad (2)$$

Заметим, что в формулы (1), (2) интенсивности λ и μ входят не но отдельности, а только в виде отношения λ/μ. Обозначим

$$\lambda/\mu = \rho \qquad (3)$$

и будем называть величину ρ «приведенной интенсивностью потока заявок». Ее смысл — <u>среднее число заявок, приходящее за среднее время обслуживания одной заявки</u>. Пользуясь этим обозначением, перепишем формулы (1), (2) в виде:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \qquad (4)$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots,\ p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \qquad (5)$$

Формулы (4), (5) для финальных вероятностей состояний называются <u>формулами Эрланга</u> — в честь основателя теории массового обслуживания. Большинство других формул этой теории (сегодня их больше, чем грибов в лесу) не носит никаких специальных имен.

Таким образом, финальные вероятности найдены. По ним мы вычислим характеристики эффективности СМО. Сначала найдем $P_{отк}$ — вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслужена). Для этого нужно, чтобы все *n* каналов были заняты, значит,

$$P_{отк} = p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0 \qquad (6)$$

Отсюда находим относительную пропускную способность — вероятность того, что заявка будет обслужена:

$$Q = 1 - P_{отк} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0 \qquad (7)$$

Абсолютную пропускную способность получим, умножая интенсивность потока заявок К на Q:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right) \qquad (8)$$

Осталось только найти среднее число занятых каналов $\bar{k}$. Эту величину можно было бы найти «впрямую», как математическое ожидание дискретной случайной величины с возможными значениями 0, 1, ... , *n* и вероятностями этих значений p_0, $p_1, \ldots, p_n$

$\bar{k} = 0 * p_0 + 1 * p_1 + 2 * p_2 + \ldots + n * p_n$

Подставляя сюда выражения (5) для p_k ($k = 0, 1, ..., n$) и выполняя соответствующие преобразования, мы, в конце концов, получили бы верную формулу для $\bar{k}$. Но мы выведем ее гораздо проще. В самом деле, нам известна абсолютная пропускная способность *A*. Это — не что иное, как интенсивность потока обслуженных системой заявок. Каждый занятый канал в единицу времени обслуживает в среднем μ заявок. Значит, среднее число занятых каналов равно

$$\bar{k} = A/\mu \tag{9}$$

или, учитывая (8),

$$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!}p_0\right) \tag{10}$$

Пример. Имеется станция связи с тремя каналами ($n = 3$), интенсивность потока заявок $\lambda = 1,5$ (заявки в минуту); среднее время обслуживания одной заявки $\overline{t_{об}} = 2$ (мин.), все потоки событий (как и во всем этом параграфе) — простейшие. Найти финальные вероятности состояний и характеристики эффективности СМО: *A, Q*, $P_{отк}$, $\bar{k}$. Ответы: $p_0 = 1/13$, $p_1 = 3/13$, $p_2 = 9/26$, $p_3 = 9/26 \approx 0,346$, $A \approx 0,981$, $Q \approx 0,654$, $P_{отк} \approx 0,346$, $\bar{k} \approx 1,96$.

Из ответов видно, что наша СМО в значительной мере перегружена: из трех каналов занято в среднем около двух, а из поступающих заявок около 35% остаются не обслуженными.

Задания:

1 Рассчитать характеристики и сделать анализ загруженности и эффективности функционирования заданной n-канальной СМО с отказами.

2 Определить сколько потребуется каналов для того, чтобы удовлетворить не менее 80% поступающих заявок.

№	n	λ	t	№	n	λ	t
1	4	2	0,5	16	4	3	1,1
2	3	2	1	17	4	1	1,3
3	3	1	0,5	18	5	2	0,8
4	4	2	1,5	19	4	1	0,4
5	2	2	1	20	3	3	1,4
6	4	1	0,5	21	5	2	1,2
7	4	2	1,5	22	4	2	1,3
8	3	2	1	23	3	2	1
9	3	2	1,5	24	4	4	1,5
10	4	2	1	25	4	1,5	1,4
11	5	3	2	26	3	1,5	1
12	5	1	2	27	4	2	1,5
13	3	2	1	28	3	2	0,6
14	4	2	1	29	5	2	1,4
15	5	2	1,2	30	4	1	1,1

Вопросы

1. Случайный марковский процесс.
2. Поток событий. Простейший поток событий или пуассоновский.
3. Понятие СМО

4. Финальные вероятности состояний.
5. Виды СМО.
6. Дисциплины обслуживания (порядок выбора заявок из очереди).
7. Основные характеристики функционирования СМО.

Литература: Вентцель Е.С. Исследование операций, гл.5-6 до стр. 142