Раздел 5 **Теория рядов**

Тема 1 Ряды с неотрицательными членами

1.1 Определение числового ряда, необходимый признак сходимости
1.2 Простейшие свойства числовых рядов, критерий Коши сходимости ряда
1.3 Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами

Пусть $(a_n)=(a_1,a_2,...,a_n,...)$ – числовая последовательность. Выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k + ...$$

называется *числовым рядом*, числа a_1, a_2, …, a_k, … – членами ряда, а число a_k – k-м или *общим членом* ряда.

Сумма конечного числа n первых членов

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

называется n-й *частичной суммой* данного ряда.

В частности,

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

……………………,

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$ и т. д.

Если для последовательности (S_n) частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ называется *сходящимся*, а число S – *суммой* данного ряда:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k .$$

Если предел последовательности (S_n) не существует или равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

16 Дайте определение векторной функции и годографа.
17 Дайте определение предела и непрерывности векторной функции.
18 Дайте определение производной векторной функции.
19 Какая вектор-функция называется дифференцируемой?
20 Что называется дифференциалом векторной функции?
21 Дайте определение кривой, кривизны и радиуса кривизны кривой.
22 Дайте определение радиуса, круга и центра кривизны плоской кривой.
23 Что называется эволютой и эвольвентой плоской кривой?

Формулировки теорем и формулы

1 Сформулируйте правила нахождения производной постоянной функции, производной суммы и разности функций, производной произведения функций, производной частного функций
2 Как найти производную функции, заданной параметрическими уравнениями?
3 Как найти производную неявной функции?
4 Какой вид имеет формула Маклорена?
5 Запишите основные разложения по формуле Маклорена функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^{\alpha}$.
6 Какие условия должны выполнятся, чтобы функция: а) возрастала, б) убывала, в) была неубывающей и невозрастающей?
7 Сформулируйте достаточные условия экстремума.
8 Как находится глобальный экстремум функции на отрезке?
9 Перечислите основные этапы исследования функции.
10 Как найти асимптоты графика функции, заданной параметрическими уравнениями?
11 Как исследовать и использовать симметрию функции, заданной параметрическими уравнениями?
12 Сформулируйте необходимое условие локального экстремума функции, заданной параметрическими уравнениями.
13 Приведите примерную схему исследования функции, заданной параметрическими уравнениями.
14 Как исследовать функцию, заданную неявно?
15 Как исследовать функцию, заданную в полярных координатах**?**
16 Перечислите свойства предела вектор-функции.
17 Чему равен дифференциал дуги?
18 Какое уравнение называется натуральным уравнением гладкой кривой?
19 Чему равна длина единичного вектора касательной? Какие координаты он имеет?

20 Как вычисляется кривизна в случаях векторного, параметрического представления кривой?

Доказательство теорем

1 Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании обратной функции?

2 Сформулируйте и докажите теорему о дифференцировании сложной функции.

3 Сформулируйте и докажите теорему Ролля.

4 Сформулируйте и докажите теорему Лагранжа.

5 Сформулируйте и докажите теорему Коши.

6 Сформулируйте и докажите теорему Лопиталя.

7 Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом: а) в виде Лагранжа; б) в виде Пеано.

8 Сформулируйте и докажите необходимое условие локального экстремума.

9 Сформулируйте и докажите достаточное условие выпуклости и вогнутости.

10 Сформулируйте и докажите необходимое и достаточное условия точки перегиба.

Вопросы и задачи на понимание

1 При нахождении производных каких функций желательно использовать логарифмическую производную?

2 В чем состоит геометрический смысл производной?

3 Какая связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной?

4 В чем состоит геометрический смысл дифференциала.

5 Где используются понятия производной и дифференциала в физике?

6 Может ли существовать вторая производная $f''(x_0)$, если не существует первая? Приведите пример функции, у которой существует $f'(x_0)$, но не существует $f''(x_0)$.

7 В чем состоит геометрический и физический смысл теоремы Ролля.

8 Почему формула Лагранжа называется формулой конечных приращений?

9 В чем состоит геометрический и физический смысл теоремы Лагранжа?

10 При раскрытии каких неопределенностей используется правило Лопиталя?

11 Справедливо ли правило Лопиталя в случае $x_0 = \infty$?

12 Можно ли применять правило Лопиталя несколько раз?

13 В чем состоит геометрический и физический смысл производной вектор-функции?

Вопросы и задачи на понимание

1 Приведите примеры функций, имеющих и не имеющих первообразных.

2 Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции $f(x)$.

3 Имеет ли функция $f(x)=\begin{cases}1 \text{ при } & x>0,\\ -2 \text{ при } & x\le 0\end{cases}$ первообразную?

4 Найдите первообразную для функции $f(x)=\sin x$, которая в точке $x=\dfrac{\pi}{2}$ принимает значение, равное 10.

5 Известно, что две первообразные для функции $f(x)=e^x$ в точке $x=1$ отличаются на 2. На сколько отличаются эти же первообразные в точке $x=100$?

6 График какой первообразной для функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ проходит через точку с координатами $(1;2\pi)$?

7 Требуется найти $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ для $x\in[-2,2]$. Допустима ли для этой цели замена переменной: а) $x=\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; б) $x=\cos t$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; в) $x=2\sin t$, $-\dfrac{\pi}{2}\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; г) $x=2\cos t$; $0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$; д) $x=2\cos t$, $\pi\le t\le 2\pi$?

Теорема (об интегрируемости монотонной функции) Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Определенный интеграл обладает следующими свойствами:

– если нижний и верхний пределы интегрирования равны $(a=b)$, то интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0\,;$$

– если $f(x)=1$, то $\int_a^b dx = b-a$;

– при перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx\,;$$

– постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx \quad \forall c \in \mathbb{R}\,;$$

– определенный интеграл от суммы (разности) конечного числа интегрируемых на $[a;b]$ функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ равен сумме (разности) определенных интегралов от слагаемых:

$$\int_a^b \left(f_1(x) \pm \ldots \pm f_n(x)\right)dx = \int_a^b f_1(x)\,dx \pm \ldots \pm \int_a^b f_n(x)\,dx\,;$$

– *(аддитивность)* если существуют интегралы $\int_a^c f(x)dx$ и $\int_c^b f(x)dx$, то существует также интеграл $\int_a^b f(x)dx$ и справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx\,,\ a \le c \le b\,.$$

Геометрический смысл свойства аддитивности состоит в том, что площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна

***Раздел 4* Интегральное исчисление функции действительной переменной**

Тема 1 Первообразная и неопределенный интеграл

Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной $f'(x)$ или дифференциала $df = f'(x)dx$ функции $f(x)$. В интегральном исчислении решается обратная задача: по заданной функции $f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$.

Таким образом, *основной задачей интегрального исчисления* является восстановление функции $F(x)$ по известной производной или дифференциалу этой функции. Интегральное исчисление имеет многочисленные приложения в геометрии, механике, физике и технике. Оно дает общий метод нахождения площадей, объемов, центров тяжести и т. д.

Функция $F(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R}$, называется *первообразной* для функции $f(x)$ на множестве X, если она дифференцируема для любого $x \in X$ и имеет место соотношение:

$$F'(x) = f(x) \text{ или } dF(x) = f(x)dx\,.$$

Любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную $F(x)$.

Если $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на множестве X, то все первообразные этой функции определяются выражением $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная.

Операция отыскания первообразной $F(x)$ функции $f(x)$ называется *интегрированием*.

Совокупность $F(x)+C$ всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* и обозначается

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C\,.$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной* функцией, x – *переменной интегрирования*, а C – *постоянной интегрирования*.

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y = F(x) + C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: *все касательные к кривым в точках с абсциссой* $x = x_0$ *параллельны между собой*:

$$\left(F(x)+C\right)'\Big|_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0).$$

На рисунке 4. 1 изображен неопределенный интеграл $x^2 + C$ от функции $f(x) = 2x$:

$$\int 2xdx = x^2 + C,$$

который представляет собой семейство парабол $\{ y = x^2 + C \}$.

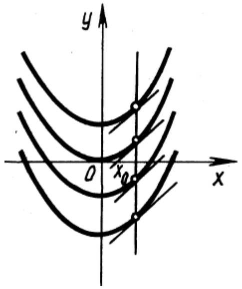

Рисунок 4. 1 – Интегральные кривые $\{ F(x) + C \}$

Кривые семейства $\{ F(x) + C \}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси Oy.

Неопределенный интеграл обладает *свойствами*:

– производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

Формулировки теорем и формулы

21 Перечислите свойства первообразной.

22 Перечислите свойства неопределенного интеграла.

23 В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

24 Перечислите свойства неопределенного интеграла.

25 Как осуществляется интегрирование с помощью замены переменной?

26 Как осуществляется интегрирование с помощью интегрирования по частям?

27 Какие подынтегральные функции удобно интегрировать по частям?

28 Как интегрируются простейшие рациональные дроби?

29 Какой вид имеет разложение правильной рациональной дроби в сумму простейших дробей?

30 В чем суть метода неопределенных коэффициентов?

31 Какая замена переменной используется при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \sqrt[n_2]{x^{m_2}}, \ldots\right)dx$?

32 Какая замена переменной используется при вычислении интегралов вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \ldots\right)dx$?

33 Какие подстановки называются подстановками Эйлера?

34 Для вычисления каких интегралов удобно применять тригонометрические подстановки?

35 В каких случаях можно вычислить интеграл от дифференциального бинома?

36 Приведите примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции.

37 Как вычисляются интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$? Какие возможны частные случаи?

38 Как вычисляются интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m xdx$, $\int \mathrm{tg}^n\, xdx$, $\int \mathrm{ctg}^n\, xdx$?

39 Какие формулы используются при вычислении интегралов вида $\int \sin mx \cos nxdx$, $\int \cos mx \cos nxdx$, $\int \sin mx \sin nxdx$?

40 Какая подстановка применяется при вычислении интегралов вида $\int R(e^x)dx$?

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2}|f(x)|dx\right|<\varepsilon .$$

Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ абсолютно сходится, то он сходится. Обратное верно не всегда.

Теорема (признак Дирихле) Пусть на промежутке $[a;b)$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную, и функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема и* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$. *Тогда интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Теорема (признак Абеля) Пусть на промежутке $[a;b)$ *функция* $f(x)$ *непрерывна и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится и функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема, ограничена и монотонна. Тогда интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ *сходится.*

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Сформулируйте определение первообразной функции.
2 Сформулируйте определение неопределенного интеграла.
3 Что называется рациональной дробью?
4 Какая рациональная дробь называется простейшей?
5 Какая функция называется интегрируемой на отрезке?
6 Сформулируйте определение интеграла Римана.
7 Дайте определения верхних и нижних сумм Дарбу.
8 Дайте определения верхних и нижних интегралов.
9 Что называется определенным интегралом с переменным верхним пределом?
10 Какой интеграл называется несобственным интегралом первого рода? Когда несобственный интеграл первого рода сходится, расходится?
11 Какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода? Когда несобственный интеграл второго рода сходится, расходится?

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x),$$
$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx ;$$

– неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x)=F(x)+C ;$$

– постоянный множитель $a\in\mathbb{R}$, $a\neq0$, можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int af(x)dx=a\int f(x)dx ;$$

– неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left(f_1(x)\pm\ldots\pm f_n(x)\right)dx=\int f_1(x)dx\pm\ldots\pm\int f_n(x)dx ;$$

– (*инвариантность формул интегрирования*) любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x)dx=F(x)+C \text{ или } \int f(u)du=F(u)+C ,$$

где u – дифференцируемая функция.

Каждая из нижеследующих формул верна на каждом промежутке, принадлежащем области определения подынтегральной функции:

1 $\int u^n du=\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq-1)$.

2 $\int a^u du=\dfrac{a^u}{\ln a}+C \quad (a>0, a\neq1)$.

3 $\int e^u du=e^u+C$.

4 $\int \dfrac{du}{u}=\ln|u|+C$.

5 $\int \sin u du=-\cos u+C$.

6 $\int \cos u du=\sin u+C$.

7 $\displaystyle\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8 $\displaystyle\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$, $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

9 $\displaystyle\int \operatorname{sh} u\, du = \operatorname{ch} u + C$.

10 $\displaystyle\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$.

11 $\displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$.

12 $\displaystyle\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C$.

13 $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C$, $a \neq 0$.

14 $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a-u}{a+u}\right| + C$, $a \neq 0$.

15 $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$, $|u| > |a|$, $a \neq 0$.

16 $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$, $|u| < |a|$, $a \neq 0$.

17 $\displaystyle\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$, $a \neq 0$

18 $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$, $a \neq 0$

Некоторые из приведенных формул таблицы интегралов, не имеющие аналога в таблице производных, проверяются дифференцированием их правых частей.

Если первообразная $F(x)$ функция $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что *интеграл* $\int f(x)dx$ *выражается в элементарных функциях или функция* $f(x)$ *интегрируема в конечном виде*. Однако не всякий интеграл от элементарной функции выражается в элементарных функциях. Используя основные правила интегрирования, можно находить интегралы от более сложных функций.

В отличие от дифференциального исчисления, где, пользуясь

теграла $\int_a^b f(x)dx$, *2) из расходимости интеграла* $\int_a^b f(x)dx$ *следует расходимость интеграла* $\int_a^b g(x)dx$.

Следствие (предельный признак сравнения) Пусть на промежутке $[a;b)$ *определены две неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *интегрируемые на каждом конечном отрезке* $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, *причем* $\forall x \in [a;b)$ $g(x) \neq 0$, *и существует конечный предел*

$$\lim_{x \to b}\frac{f(x)}{g(x)} = A > 0.$$

Тогда 1) если интеграл $\int_a^b g(x)dx$ *сходится и* $0 \le A < +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится,2) если интеграл* $\int_a^b g(x)dx$ *расходится и* $0 < A \le +\infty$, *то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *расходится,3) если* $\lim\limits_{x \to b}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, *то интегралы* $\int_a^b g(x)dx$ *и* $\int_a^b f(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_a^b |f(x)|dx$.

Теорема (критерий Коши абсолютной сходимости интеграла) Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует такое* η, *что для всех* η_1 *и* η_2, *удовлетворяющих условию* $\eta < \eta_1 < b$, $\eta < \eta_2 < b$, *выполняется неравенство*

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx;$$

– *(монотонность)* если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся и для всех $x \in [a;b)$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$;

– *(замена переменной)* если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$, функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[\alpha;\beta)$, $-\infty < \alpha < \beta \le +\infty$, и выполняются условия $\varphi([\alpha;\beta)) = [a;b)$, $\varphi(\alpha) = a$, $\lim\limits_{t \to \beta} \varphi(t) = b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt;$$

– *(интегрирование по частям)* пусть $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на промежутке $[a;b)$, а их производные $u'(x)$ и $v'(x)$ кусочно-непрерывны на любом отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$. Тогда

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

Будем рассматривать случай несобственного интеграла от функций, определенных на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемых по Риману на любом отрезке $[a;\eta)$, $a \le \eta < b$ (несобственный интеграл 1-го или 2-го рода).

Теорема (признак сравнения) Пусть на промежутке $[a;b)$ определены две неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$, интегрируемые на каждом конечном отрезке $[a;\eta]$, $a \le \eta < b$, причем $\forall x \in [a;b)$ справедливо $0 \le f(x) \le g(x)$. Тогда

1) из сходимости интеграла $\int_a^b g(x)dx$ следует сходимость ин-

таблицей производных, можно найти производную или дифференциал любой заданной функции, в интегральном исчислении нет общих приемов вычисления неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие свести данный интеграл к табличному.

Тема 2 Общие методы интегрирования

Вычисление интегралов, основанное на приведении подынтегрального выражения к табличной форме и использовании свойств неопределенного интеграла, называется *непосредственным интегрированием*.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$, который не является табличным.

Теорема (замена переменной) Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T. И пусть X – множество значений функции $x = \varphi(t)$, на котором определена функция $f(x)$. Тогда если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула замены переменной:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Суть метода замены переменной состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную x заменяют переменной t по формуле $x = \varphi(t)$, учитывая $dx = \varphi'(t)dt$.

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения» подынтегральной функции под знак дифференциала. По определению дифференциала функции имеем $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют *«подведением» множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала*. Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx.$$

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $\varphi(x)=u$

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\int f(\varphi(x))d(\varphi(x))=\int f(u)du .$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляют непосредственным интегрированием.

Вычисление некоторых типов неопределенных интегралов основывается на теореме 2.

Теорема 2(интегрирование по частям) *Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ – две дифференцируемые функции переменной x на промежутке X. И пусть функция $u'(x)v(x)$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $v'(x)u(x)$ также имеет производную и справедлива формула интегрирования по частям:*

$$\int udv=uv-\int vdu .$$

С помощью формулы интегрирования по частям отыскание интеграла $\int udv$ сводится к вычислению другого интеграла $\int vdu$. Применять ее целесообразно, когда интеграл $\int vdu$ более прост для вычисления, чем исходный.

Методом интегрирования по частям вычисляются интегралы:

– $\int P_n(x)e^{kx}dx$, $\int P_n(x)\sin kxdx$, $\int P_n(x)\cos kxdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in$ □, $k\in$ □. Чтобы найти эти интегралы, достаточно положить $u=P_n(x)$ и применить формулу интегрирования по частям n раз;

– $\int P_n(x)\ln xdx$, $\int P_n(x)\arcsin xdx$, $\int P_n(x)\arccos xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg}xdx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg}xdx$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $n\in\mathbf{N}$. Данные интегралы вычисляются по частям, принимая за u функцию, являющуюся множителем при $P_n(x)$;

– $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$, где a, $b\in$ □. Они вычисляются двукратным интегрированием по частям и решением уравнения относительно искомого интеграла.

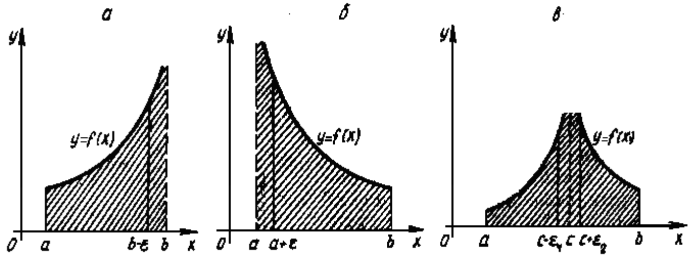

Рисунок 4. 20 – Геометрический смысл несобственного интеграла от неограниченных функций

С *геометрической* точки зрения сходящийся несобственный интеграл 2-го рода означает, что фигура, ограниченная кривой $y=f(x)$, прямыми $x=a$ $x=b$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Oy при $x\to b-0$ (рисунок 4.20, а), ($x\to a+0$, рисунок 4.20, б; $x\to c\pm 0$ рисунок 4.20, в), имеет конечную площадь S.

В силу свойств предела функции и определения несобственного интеграла как предела функции, являющейся интегралом Римана с переменным пределом интегрирования, многие свойства определенного интеграла предельным переходом переносятся на несобственные интегралы.

Не ограничивая общности, ниже приводятся свойства несобственного интеграла от функции, определенной на полуинтервале $[a;b)$ и интегрируемой по Риману на любом отрезке $[a;\eta]$, $a\le\eta<b$:

– *(формула Ньютона-Лейбница)* если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b)$ и $F(x)$ какая-либо ее первообразная, то

$$\int_a^b f(x)dx=F(b-0)-F(a);$$

– *(линейность)* если несобственные интегралы $\int_a^b f(x)dx$ и $\int_a^b g(x)dx$ сходятся, то для любых чисел α и β несобственный интеграл $\int_a^b[\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)]dx$ также сходится и

Интегралом в смысле главного значения называется интеграл:

$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{-b}^{+b} f(x)dx,\ b>0.$$

Очевидно, что, если существует интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$, то и существует интеграл в смысле главного значения. Обратное верно не всегда: интеграл в смысле главного значения может существовать, а соответствующий ему несобственный интеграл – нет.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограничена в левосторонней окрестности точки b (b – точка бесконечного разрыва), т. е. $\lim\limits_{x\to b-\varepsilon} f(x)=\infty$. Будем считать, что функция $f(x)$ интегрируема на $[a;b-\varepsilon]$ для любого $\varepsilon>0$.

Несобственным интегралом от функции $f(x)$ непрерывной на промежутке $[a;b)$ и имеющей бесконечный разрыв в точке $x=b$ называется при $\varepsilon\to 0$ предел:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $(a;b]$:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx,\ \varepsilon>0.$$

Если же функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода в некоторой внутренней точке c отрезка $[a;b]$, то интеграл необходимо представить в виде суммы двух интегралов:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Если пределы в правых частях формул существуют и конечны, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ является *сходящимся*, в противном случае – *расходящимся*.

Несобственные интегралы от неограниченных функций называются *несобственными интегралами второго рода*.

Тема 3 Интегрирование рациональных функций

3.1 Интегрирование простейших рациональных дробей
3.2 Разложение правильной рациональной дроби на простейшие дроби
3.3 Интегрирование рациональных функций

Рациональной дробью $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m},\ n,\ m\in\mathbb{N}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n\ge m$), то дробь называется *неправильной*. Если степень $n<m$, то дробь называется *правильной*.

Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$ $(n\ge2)$;

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$; 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n\ge2)$.

Здесь A, a, p, q, M, N – действительные числа, а квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $\dfrac{p^2}{4}-q<0$.

Интегрирование простейших дробей видов 1-3 проводится с помощью несложных преобразований и подстановок. Для вычисления интеграла вида 4 используется рекуррентная формула

$$\int\frac{(Mx+N)dx}{(x^2+px+q)^n}=M\,I_0+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n,$$

где

$$I_0=\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n}=\frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+C,$$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где

$$Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \left(x^2+px+q\right)^s,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \ldots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_s x + N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s},$$

где A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_i, M_1, N_1, M_2, M_2, …, M_s, N_s – некоторые действительные числа.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Для определения коэффициентов разложения используется *метод неопределенных коэффициентов:*

– раскладывается правильная рациональная дробь на простейшие дроби;

– простейшие дроби приводятся к общему знаменателю $Q_m(x)$;

– многочлен, получившийся в числителе, приравнивается к многочлену $P_n(x)$;

– приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества. В результате получается система m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_k, M_1, N_1, …, M_s, N_s.

ным нижним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; b]$.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty;\infty)$ называется интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx, \quad c \in (-\infty;\infty),$$

то по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.$$

Этот несобственный интеграл называется *сходящимся*, если оба предела существуют. Если хотя бы один из пределов не существует или бесконечен, то несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называется *расходящимся*.

Интегралы $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ называются также *несобственными интегралами первого рода*.

<u>*С геометрической*</u> точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$, $y = 0$ и бесконечно вытянутая в направлении оси Ox, имеет конечную площадь S (рисунок 4.19).

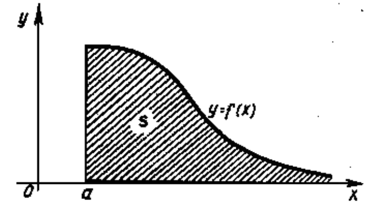

Рисунок 4. 19 – Геометрический смысл несобственного интеграла 1-го рода

Тема 9 Несобственные интегралы

9.1 Несобственный интеграл с бесконечными пределами интегрирования
9.2 Несобственный интеграл от неограниченных функций
9.3 Формулы для несобственных интегралов
9.4 Признаки сходимости несобственных интегралов

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы предполагалось, что пределы интегрирования a и b являются конечными и подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода. В этом случае определенные интегралы называются *собственными*.

Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то интегралы называются *несобственными*. При этом определение интеграла Римана теряет смысл. Действительно, в случае бесконечного отрезка интегрирования его нельзя разбить на n частичных отрезков конечной длины, а в случае неограниченной функции интегральная сумма не имеет конечного предела.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;\infty)$. Тогда она будет непрерывной на любом конечном отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для функции $f(x)$ непрерывной на $[a;b]$, существует определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, зависящий от верхнего предела b.

Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной на промежутке $[a;\infty)$ функции $f(x)$ называется предел $b\to+\infty$:

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ называется *сходящимся*, если этот предел не существует или равен ∞, то *расходящимся*.

Аналогично определяется несобственный интеграл с бесконеч-

Если корни знаменателя рациональной дроби $Q_m(x)$ просты и действительны, вместо того, чтобы сравнивать коэффициенты переменной x даются несколько частных значений (последовательно полагают x равным каждому из корней знаменателя).

Всякая рациональная функция $R(x)$ представима в виде суммы многочлена $T_k(x)$ (целой части) и правильной рациональной дроби $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$:

$$R(x)=T_k(x)+\frac{P_n(x)}{Q_m(x)},\ k,\ n,\ m\ \in\square$$

Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

Тема 4 Интегрирование иррациональностей

4.1 Интегралы вида $\int R\left(x,\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2},\ldots\right)dx$

4.2 Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$

4.3 Интеграл от дифференциального бинома $\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$

4.4 Интегралы, не выражающиеся через элементарные функции

В интегралах $\int R\left(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},\ldots\right)dx$ (m_i, n_i $\in\square$, $i=1,2,\ldots$) подынтегральная функция рациональна относительно переменной интегрирования x и радикалов $\sqrt[n_i]{x^{m_i}}$, $i=1,2,\ldots$. Через $R(u,v,w,\ldots)$ обозначается *рациональная функция* относительно переменных $u,v,w,\ldots$, т. е. выражение, которое получено из величин $u,v,w,\ldots$, а также действительных чисел с помощью четырех арифметических действий. Для вычисления интегралов вводится замена

$$x=t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\dfrac{m_1}{n_1}$, $\dfrac{m_2}{n_2}$, …. При такой замене переменной все отношения $\frac{m_1}{n_1}=r_1$, $\frac{m_2}{n_2}=r_2$, … являются целыми числами, и имеет место интеграл от рациональной функции переменной t:

$$\int R\left(x,\sqrt[n_1]{x^{m_1}},\sqrt[n_2]{x^{m_2}},\ldots\right)dx=\int R\left(t^s,t^{r_1},t^{r_2},\ldots\right)s\,t^{s-1}dt\,.$$

Интегралы $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1/n_1},\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_2/n_2},\ldots\right)dx$ вычисляются с помощью замены

$$\frac{ax+b}{cx+d}=t^s,$$

где s – общий знаменатель дробей $\frac{m_1}{n_1}$, $\frac{m_2}{n_2}$, ….

В результате получается интеграл от рациональной функции переменной t.

В общем случае интегралы $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ сводятся к интегралам от рациональных функций подстановками Эйлера:

– если дискриминант трехчлена ax^2+bx+c отрицательный, то используется первая подстановка Эйлера

$$t=\sqrt{ax^2+bx+c}\pm x\sqrt{a}\,;$$

– если дискриминант трехчлена ax^2+bx+c положительный и $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, то используется вторая подстановка Эйлера

$$t=\pm\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}.$$

Подстановки Эйлера часто приводят к громоздким выкладкам, поэтому в некоторых случаях удобнее применять другие методы интегрирования.

Для вычисления интеграла $I_1=\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ выделяется полный квадрат под знаком радикала:

элементарная фигура D_k вырезана. При нахождении координат центра масс используется также свойство симметрии фигуры: если фигура имеет плоскость, ось или центр симметрии, то центр тяжести лежит в этой плоскости, на этой оси или в этом центре.

Таблица 4. 3 – Формулы для вычисления массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской фигуры

Параметрическое задание $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in[\alpha;\beta]$	Полярное задание $r=r(\varphi),\ \varphi\in[\alpha;\beta]$
Масса	
$M=\int_\alpha^\beta\rho\left(x(t)\right)y(t)x'(t)dt$	$M=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)r^2(\varphi)d\varphi$
Статические моменты	
$M_x=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho\left(x(t)\right)y^2(t)x'(t)dt$, $M_y=\int_\alpha^\beta\rho\left(x(t)\right)x(t)x'(t)dt$	$M_x=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta\rho r^3(\varphi)\sin\varphi d\varphi$, $M_y=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta\rho r^3(\varphi)\cos\varphi d\varphi$, $\rho=\rho\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)$
Моменты инерции	
$I_x=\frac{1}{3}\int_\alpha^\beta\rho\left(x(t)\right)y^3(t)x'(t)dt$, $I_y=\int_\alpha^\beta\rho\left(x(t)\right)x^2(t)y(t)x'(t)dt$,	$I_x=\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta\rho r^4(\varphi)\sin^2\varphi d\varphi$, $I_y=\frac{1}{4}\int_\alpha^\beta\rho r^4(\varphi)\cos^2\varphi d\varphi$, $\rho=\rho\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)$

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right)$$

и применяется замена $x+\dfrac{b}{2a}=u$, $dx=du$.

Для вычисления интеграла $I_2=\int\dfrac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в числителе выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала. Тогда интеграл I_2 представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$
$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=$$
$$=\frac{A}{2a}\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

Вычисление интеграла $I_3=\int\dfrac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к вычислению интеграла I_1 заменой: $x=\dfrac{1}{u}$, $dx=-x=\dfrac{1}{u^2}du$.

При вычислении интеграла $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ с помощью тригонометрических подстановок квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной представляется в виде $u^2\pm k^2$. В результате исходный интеграл приводится к одному из следующих интегралов:

$$I_4=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du,\ I_5=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du,$$
$$I_6=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du.$$

Интеграл $I_4=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du$ заменой $u=k\sin t$ (или

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right)$$

и применяется замена $x+\dfrac{b}{2a}=u$, $dx=du$.

Для вычисления интеграла $I_2=\int\dfrac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в числителе выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала. Тогда интеграл I_2 представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$
$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=$$
$$=\frac{A}{2a}\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

Вычисление интеграла $I_3=\int\dfrac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к вычислению интеграла I_1 заменой: $x=\dfrac{1}{u}$, $dx=-x=\dfrac{1}{u^2}du$.

При вычислении интеграла $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ с помощью тригонометрических подстановок квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной представляется в виде $u^2\pm k^2$. В результате исходный интеграл приводится к одному из следующих интегралов:

$$I_4=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du,\ I_5=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du,$$
$$I_6=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du.$$

Интеграл $I_4=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du$ заменой $u=k\sin t$ (или

111

$u = k\cos t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_5 = \int R\left(u, \sqrt{k^2 + u^2}\right) du$ заменой $u = k\,\mathrm{tg}\,t$ (или $u = k\,\mathrm{ctg}\,t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интеграл $I_6 = \int R\left(u, \sqrt{u^2 - k^2}\right) du$ заменой $u = k\sec t$ (или $u = k\,\mathrm{cosec}\,t$) сводится к интегралу от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$.

Интегралы вида

$$\int x^m \left(a + bx^n\right)^p dx \ \ (m, n, p \in \Box \ , \ a,\ b \in \Box \ ).,\ a,\ b \in \Box \ )$$

называются *интегралами от дифференциального бинома* $x^m\left(a + bx^n\right)^p$. Эти интегралы выражаются через элементарные функции только в следующих трех случаях:

– если $p \in \Box$, то используется подстановка $x = t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n ;

– если $\dfrac{m+1}{n} \in \Box$, то используется подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \dfrac{k}{s}$;

– если $\dfrac{m+1}{n} + p \in \Box$, то используется подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \dfrac{k}{s}$.

Во всех остальных случаях, как было показано П. Л. Чебышевым, интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

Известно, что любая непрерывная на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, т. е. существует такая функция $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$. Однако не всякую первообразную $F(x)$ можно выразить через конечное число элементарных функций. Ниже приводятся примеры интегралов, которые не выражаются через элементарные функции:

$$I_x = \int_a^b \rho y^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx\ ,\ I_y = \int_a^b \rho x^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx\ ,\ I_0 = I_x + I_y\ .$$

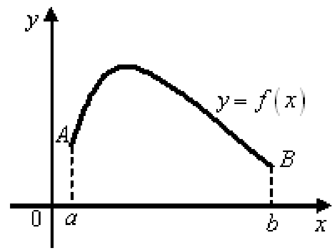

Рисунок 4. 17 – Кривая AB

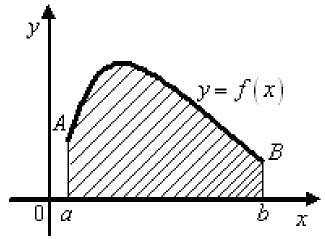

Рисунок 4. 18 – Криволинейная трапеция $aABb$

Для параметрического и полярного задания плоской линии AB соответствующие формулы приводятся в таблице 4. 2.

Таблица 4. 2 – Формулы для вычисления массы, статических моментов, координат центра масс и моментов инерции плоской линии

Параметрическое задание $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha; \beta]$	Полярное задание $r = r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha; \beta]$
Масса	
$M = \int_\alpha^\beta \rho\left(x(t)\right)\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$	$M = \int_\alpha^\beta \rho\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$
Статические моменты	
$M_x = \int_\alpha^\beta \rho\left(x(t)\right) y(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, $M_y = \int_\alpha^\beta \rho\left(x(t)\right) x(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$	$M_x = \int_\alpha^\beta \rho\, r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$, $M_y = \int_\alpha^\beta \rho\, r(\varphi)\cos\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$, $\rho = \rho\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)$
Моменты инерции	
$I_x = \int_\alpha^\beta \rho\left(x(t)\right) y^2(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, $I_y = \int_\alpha^\beta \rho\left(x(t)\right) x^2(t)\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$, $I_0 = I_x + I_y$	$I_x = \int_\alpha^\beta \rho\, r^2(\varphi)\sin^2\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$, $I_y = \int_\alpha^\beta \rho\, r^2(\varphi)\cos^2\varphi\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi$, $\rho = \rho\left(r(\varphi)\cos\varphi\right)$

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\right).$$

Правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где

$$Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l (x^2+px+q)^s,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \ldots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{(x^2+px+q)^s},$$

где A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_i, M_1, N_1, M_2, M_2, …, M_s, N_s – некоторые действительные числа.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Для определения коэффициентов разложения используется *метод неопределенных коэффициентов:*

– раскладывается правильная рациональная дробь на простейшие дроби;

– простейшие дроби приводятся к общему знаменателю $Q_m(x)$;

– многочлен, получившийся в числителе, приравнивается к многочлену $P_n(x)$;

– приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества. В результате получается система m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_k, M_1, N_1, …, M_s, N_s.

$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-x^2}dx$ – *интеграл Пуассона,*

$Si(x) = \int \frac{\sin x}{x}dx$ – *интегральный синус,*

$\int \frac{\cos x}{x}dx$ – *интегральный косинус,*

$li(x) = \int \frac{dx}{\ln x}$ – *интегральный логарифм,*

$\int \cos(x^2)dx$, $\int \sin(x^2)dx$ – *интегралы Френеля,*

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-k^2\sin^2 x}}$ – *эллиптический интеграл первого рода,*

$\int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,dx$ – *эллиптический интеграл второго рода.*

Каждый из приведенных интегралов представляет собой функцию, не являющуюся элементарной.

Тема 5 Интегрирование трансцендентных функций

5.1 Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$

5.2 Интегралы вида $\int \sin^n x \cos^m x dx$, $\int \mathrm{tg}^n\, x dx$, $\int \mathrm{ctg}^n\, x dx$

5.3 Интегралы вида $\int \sin mx \cos nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \sin nx dx$

5.4 Интегралы вида $\int R(e^x)dx$, $\int R(\mathrm{sh}\, x, \mathrm{ch}\, x)dx$

Вычислить интегралы $\int R(\sin x, \cos x)dx$ можно различными методами: преобразованием подынтегрального выражения с помощью тригонометрических формул, применением методов замены переменной или интегрирования по частям.

Существует общая универсальная схема вычисления таких интегралов, основанная на универсальной тригонометрической подстановке $t = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Этой подстановкой интеграл преобразуется в

$$ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(\frac{c}{a}-\frac{b^2}{2a^2}\right)\right)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right)$$

и применяется замена $x+\frac{b}{2a}=u$, $dx=du$.

Для вычисления интеграла $I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ в числителе выделяется дифференциал выражения, стоящего под знаком радикала. Тогда интеграл I_2 представляется в виде суммы двух интегралов:

$$I_2=\int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\int\frac{\frac{A}{2a}(2ax+b)+\left(B-\frac{A}{2a}\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=$$

$$=\frac{A}{2a}\int\frac{d\left(ax^2+bx+c\right)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1=$$

$$=\frac{A}{2a}\sqrt{\left(ax^2+bx+c\right)}+\left(B-\frac{Ab}{2a}\right)I_1,$$

где I_1 – вычисленный выше интеграл.

Вычисление интеграла $I_3=\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$ сводится к вычислению интеграла I_1 заменой: $x=\frac{1}{u}$, $dx=-x=\frac{1}{u^2}du$.

При вычислении интеграла $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ с помощью тригонометрических подстановок квадратный трехчлен ax^2+bx+c путем выделения полного квадрата и замены переменной представляется в виде $u^2\pm k^2$. В результате исходный интеграл приводится к одному из следующих интегралов:

$$I_4=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du,\ I_5=\int R\left(u,\sqrt{k^2+u^2}\right)du,$$

$$I_6=\int R\left(u,\sqrt{u^2-k^2}\right)du.$$

Интеграл $I_4=\int R\left(u,\sqrt{k^2-u^2}\right)du$ заменой $u=k\sin t$ (или

ление жидкости – сила давления на единицу площади – изменяется с глубиной погружения. По закону Паскаля давление в жидкости передается одинаково по всем направлениям, в том числе и на вертикальную пластинку.

Выберем систему координат так, как показано на рисунке 4.15. Пусть уравнение кривой AB имеет вид $y=f(x)$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Сила давления жидкости на всю пластинку определяется интегралом:

$$P=g\int_a^b\rho\,x\,f(x)\,dx.$$

Если в жидкость вертикально погружена пластинка $A_1B_1B_2A_2$ (рисунок 4.16), ограниченная прямыми $x=a$, $x=b$ и кривыми $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$, то сила давления на эту пластинку вычисляется по формуле:

$$P=g\int_a^b\rho x(y_2-y_1)dx.$$

С т а т и ч е с к и е м о м е н т ы, м о м е н т ы и н е р ц и и и к о о р д и н а т ы ц е н т р а. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат Oxy. *Статическим моментом* материальной точки $A(x;y)$, в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и расстояния до оси Ox (оси Oy): $M_x=my$ ($M_y=mx$).

Моментом инерции материальной точки $A(x;y)$ в которой сосредоточена масса m, относительно оси Ox (оси Oy, точки O) называется величина, численно равная произведению массы этой точки и квадрата расстояния до оси Ox (оси Oy, точки O):

$$I_x=my^2,\ I_y=mx^2,\ I_0=I_x+I_y=m\left(x^2+y^2\right).$$

Если дана система материальных точек $A_1(x_1;y_1)$, $A_2(x_2;y_2)$, …, $A_n(x_n;y_n)$, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, …, m_n, то статические моменты находятся по формулам:

$$M_x=\sum_{k=1}^n m_k y_k,\ M_y=\sum_{k=1}^n m_k y_k,$$

а моменты инерции – по формулам:

абсциссы a и b ($a<b$) соответственно. В каждой точке отрезка $[a;b]$ модуль силы принимает определенное значение и является некоторой функцией абсциссы, т. е $|\vec{F}|=F(x)$. Будем считать функцию $F(x)$ непрерывной. Тогда работа A переменной силы на прямолинейном пути от a до b задается формулой:

$$A=\int_a^b F(x)dx\ .$$

Работа электродвигателя переменной мощности. Пусть мощность электродвигателя в момент времени t равна $N(t)$. Работа A, совершаемая двигателем за промежуток времени $[a;b]$ выражается формулой:

$$A=\int_a^b N(t)dt\ .$$

Сила давления жидкости. Пусть пластинка, имеющая вид криволинейной трапеции, погружена вертикально в жидкость таким образом, что ее боковые стороны параллельны поверхности жидкости и находятся ниже ее уровня на расстояниях a и b соответственно (рисунок 4. 15).

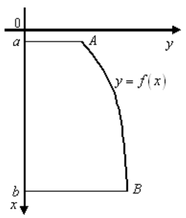

Рисунок 4.15 –Пластинка $aABb$, погруженная вертикально в жидкость

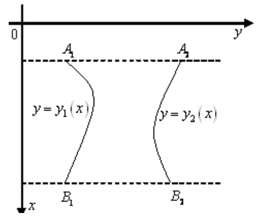

Рисунок 4.16 – Пластинка $A_1B_1B_2A_2$, погруженная вертикально в жидкость

Если пластинка находится в горизонтальном положении на глубине h от поверхности жидкости, то сила давлений P жидкости на эту пластинку будет равна весу столба жидкости, основанием которого является данная пластинка, а высотой – глубина h: $P=g\rho hS$, где $g=9{,}8$ м/с^2; ρ – плотность жидкости, S – площадь пластинки.

Если же пластинка погружена в жидкость вертикально, то дав-

Если m, $n\in\mathbb{N}$, то подстановками $t=\sin x$ или $t=\cos x$ интеграл $\int\sin^n x\cos^m x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Интегралы вида $\int\operatorname{tg}^n xdx$, $\int\operatorname{ctg}^n xdx$, $n\in\mathbb{N}$, $n>1$, вычисляются подстановками $\operatorname{tg}x=t$ и $\operatorname{ctg}x=t$ соответственно.

Если $t=\operatorname{tg}x$, то $x=\operatorname{arctg}t$, $dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$. Тогда

$$\int\operatorname{tg}^n xdx=\int\frac{t^n}{1+t^2}dt\ .$$

Последний интеграл при $n\geq 2$ является интегралом от неправильной рациональной дроби, которая вычисляется по правилу интегрирования рациональных дробей.

Аналогично если

$$t=\operatorname{ctg}x\text{, то } x=\operatorname{arcctg}t\text{, } dx=-\frac{dx}{1+t^2}\text{,}$$

поэтому

$$\int\operatorname{ctg}^n xdx=-\int\frac{t^n}{1+t^2}dt\ .$$

Интегралы вида $\int\sin mx\cos nxdx$, $\int\cos mx\cos nxdx$, $\int\sin mx\sin nxdx$, $m,n\in\mathbb{N}$, вычисляются путем разложения подынтегральной функции на слагаемые по формулам:

$$\sin mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)x\right),$$

$$\cos mx\cos nx=\frac{1}{2}\left(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right),$$

$$\sin mx\sin nx=\frac{1}{2}\left(-\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\right),\ m,n\in\mathbb{N}$$

и сводятся к табличным.

Интегралы вида $\int R(e^x)dx$ сводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $t=e^x$. При этом $x=\ln t$, $dx=\dfrac{dt}{t}$.

Интегралы $\int R\left(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x\right)dx$ всегда можно свести к интегралам от рациональных функций с помощью подстановки $t = \operatorname{th}\dfrac{x}{2}$. В этом случае

$$\operatorname{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \ \operatorname{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \ dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

Интегралы вида $\int \operatorname{ch}^n x \operatorname{sh}^m x dx$ ($m \ge 0$, $n \ge 0$, $m,n \in \square$) в случае, если хотя бы одно из чисел m или n – *нечетное*, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к табличному интегралу. Если же m и n – *четные* числа, то степени понижаются посредством перехода к двойному аргументу с помощью формул:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1+\operatorname{ch} 2x}{2}, \ \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \ \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x.$$

Если m, $n \in \square$, то подстановками $t = \operatorname{sh} x$ или $t = \operatorname{ch} x$ интеграл $\int \operatorname{ch}^n x \operatorname{sh}^m x dx$ сводится к интегралу от дифференциального бинома.

Тема 6 Определенный интеграл и формула Ньютона-Лейбница

6.1 Определение интеграла Римана
6.2 Критерий интегрируемости Дарбу
6.3 Основные свойства определенного интеграла
6.4 Формула Ньютона-Лейбница

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a;b]$, $a < b$. И пусть τ_n – разбиение отрезка $[a;b]$ на n частичных отрезков $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$, точками $x_0, x_1, ..., x_n$ (рисунок 4. 2): $a = x_0 < x_1 ... < x_{n-1} < x_n = b$. Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – длина частичного отрезка $[x_{k-1};x_k]$, $k = \overline{1,n}$. На каждом частичном отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму:

$$\sigma_n(f;\xi_k) = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

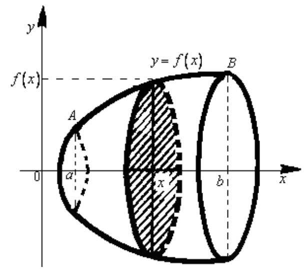

Рисунок 4.13 – Тело, образованное вращением $aABb$ вокруг оси $0x$

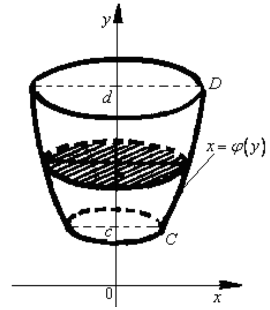

Рисунок 4.14 – Тело, образованное вращением $cCDd$ вокруг оси $0y$

Если тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции $cCDd$ (рисунок 4.14), то его объем вычисляется по формуле

$$V = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d (\varphi(y))^2 dy,$$

где $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, – уравнение кривой CD.

Если криволинейный сектор, ограниченный кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \frac{2}{3}\pi\int_\alpha^\beta r^3 \sin\varphi \, d\varphi.$$

Тема 8 Физические приложения определенного интеграла

8.1 Работа переменной силы
8.2 Работа электродвигателя переменной мощности
8.3 Сила давления жидкости
8.4 Статические моменты, моменты инерции и координаты центра масс

Р а б о т а п е р е м е н н о й с и л ы. Пусть материальная точка движется по прямой линии под действием некоторой переменной силы $\vec{F}$. За ось Ox примем прямую, вдоль которой движется материальная точка. Пусть начальная и конечная точки пути имеют

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной* функцией, x – *переменной интегрирования*, а C – *постоянной интегрирования*.

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y=F(x)+C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: *все касательные к кривым в точках с абсциссой $x=x_0$ параллельны между собой*:

$$\left(F(x)+C\right)'\Big|_{x=x_0}=F'(x_0)=f(x_0).$$

На рисунке 4. 1 изображен неопределенный интеграл x^2+C от функции $f(x)=2x$:

$$\int 2xdx=x^2+C,$$

который представляет собой семейство парабол $\{\, y=x^2+C \,\}$.

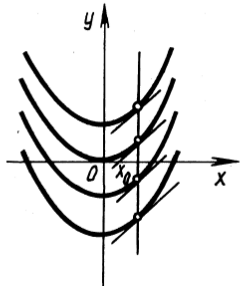

Рисунок 4. 1 – Интегральные кривые $\{\,F(x)+C\,\}$

Кривые семейства $\{\,F(x)+C\,\}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси Oy.

Неопределенный интеграл обладает *свойствами*:

– производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

Сумма $\sigma_n(f;\xi_k)$ называется *интегральной суммой Римана* для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ соответствующей данному разбиению τ_n отрезка $[a;b]$ и выбору промежуточных точек ξ_k, $k=\overline{1,n}$.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения τ_n, называемая *диаметром разбиения* $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$.

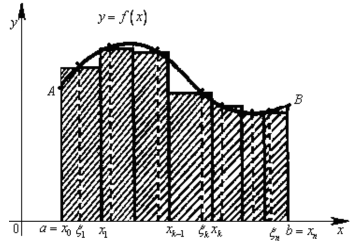

Рисунок 4. 2 – Определение интеграла Римана

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на отрезке $[a;b]$ (или *интегрируемой по Риману*), если существует конечный предел при $\lambda\to 0$ интегральной суммы $\sigma_n(f;\xi_k)$:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k=I.$$

Число I называется *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, x – *переменной интегрирования*, a и b – соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Класс всех функций $f(x)$, интегрируемых по Риману на отрезке $[a;b]$, обозначается $\mathrm{R}_{[a;b]}$.

Определение интеграла Римана на языке ε - δ формулируется следующим образом.

Число I называется *определенным интегралом* (или *интегралом Римана*) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что каково бы ни было разбиение

τ_n отрезка $[a;b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1};x_k]$, $k=\overline{1,n}$, диаметр которого $\lambda<\delta$, и каковы бы ни были точки ξ_k, $k=\overline{1,n}$, выполняется неравенство

$$\left|\sigma_n(f;\xi_k)-I\right|<\varepsilon .$$

Интегральная сумма не зависит от того, какой буквой обозначен аргумент данной функции. Следовательно, и ее предел, т. е. определенный интеграл, не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=\int_a^b f(y)dy .$$

Обозначение определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ похоже на обозначение неопределенного интеграла от той же функции $\int f(x)dx$. Вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла от той же подынтегральной функции. Однако между определенным и неопределенным интегралами имеется существенное различие: *определенный интеграл* от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ есть некоторое число, в то время как *неопределенный интеграл* представляет собой множество всех первообразных функций $F(x)+C$ данной функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Теорема (необходимое условие интегрируемости) Если $\int_a^b f(x)dx$ существует, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, $a<b$. Для произвольного разбиения τ_n отрезка $[a;b]$ обозначим $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$ и $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1};x_k]} f(x)$.

Нижней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n называется сумма $s_n(f;\xi_k)=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\Delta x_k$.

Верхней суммой Дарбу, соответствующей разбиению τ_n назы-

$$S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx \text{, если } f(x)\ge g(x)\ \forall x\in[a;b],$$

$$S=\int_a^b (g(x)-f(x))dx \text{, если } g(x)\ge f(x)\ \forall x\in[a;b].$$

Площадь поверхности вращения в декартовой системе координат. Пусть функция $f(x)$ не отрицательна и непрерывна вместе со своей первой производной $f'(x)$ на отрезке $[a;b]$, графиком которой является дуга AB. Тогда поверхность, образованная вращением дуги AB вокруг оси Ox, имеет площадь S, которая может быть вычислена по формуле:

$$S_x=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx ;$$

Для параметрического и полярного задания дуги AB соответствующие формулы приводятся в таблице 4.1.

Таблица 4. 1 – Формулы для вычисления длины дуги, площади криволинейной трапеции и площади поверхности вращения

Параметрическое задание $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha;\beta]$	Полярное задание $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$
Длина дуги	
$\int_\alpha^\beta \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}dt$	$l=\int_\alpha^\beta \sqrt{r^2+(r')^2}d\varphi$
Площадь криволинейной трапеции	
$S=\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt$	$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$
Площадь поверхности вращения	
$S_x=2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$, $y(t)\ge 0$	$S=2\pi\int_\alpha^\beta r(\varphi)\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$

Объем пространственного тела с известным поперечным сечениям. Пусть дано тело T, ограниченное замкнутой поверхностью. И пусть известна площадь любого его сечения плоскостью, перпендикулярной к оси абсцисс (рису-

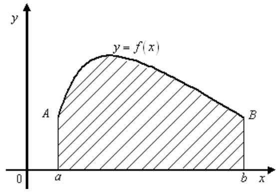

Рисунок 4. 9 –Криволинейная трапеция *aABb*

Если $f(x)<0 \quad \forall x\in[a;b]$, то и $\int_a^b f(x)dx\le 0$, $a<b$. Следовательно, площадь вычисляется по формуле:

$$S=\left|\int_a^b f(x)dx\right|=-\int_a^b f(x)dx=-\int_a^b ydx.$$

Если же криволинейная трапеция ограничена кривой $x=\varphi(y)$, осью ординат Oy и прямыми $y=c$, $y=d$ (рисунок 4.10), то ее площадь определяется формулами:

$$S=\int_c^d \varphi(y)dy=\int_c^d xdy\text{, если } \varphi(y)\ge 0 \quad \forall y\in[c;d],$$

$$S=\left|\int_c^d \varphi(y)dy\right|=-\int_c^d xdy\text{, если } \varphi(y)\le 0 \quad \forall y\in[c;d],$$

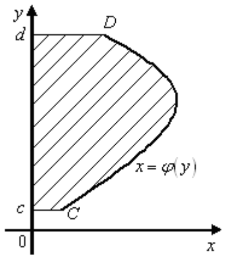

Рисунок 4.10 – Криволинейная трапеция для функции $x=\varphi(y)$

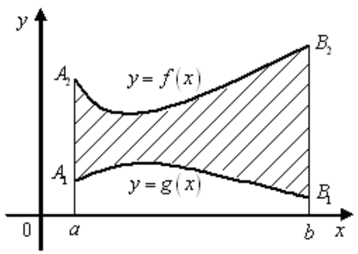

Рисунок 4.11 – Криволинейная трапеция: $g(x)\le y\le f(x)$, $a\le x\le b$

Если надо вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=f(x)$, $y=g(x)$, $x=a$, $x=b$, то эту площадь рассматривают как разность площадей двух криволинейных трапеций aA_2B_2b и aA_1B_1b (рисунок 4.11). В этом случае можно воспользоваться одной из формул:

вается сумма $S_n(f;\xi_k)=\sum_{k=1}^{n} M_k\Delta x_k$.

Если функция $f(x)$ ограничена, то нижние m_k и верхние M_k грани конечны. Тогда суммы Дарбу $s_n(f;\xi_k)$ и $S_n(f;\xi_k)$ при любом разбиении τ_n принимают конечные значения.

Нижним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I_* грань возможных ее нижних сумм Дарбу $s_n(f;\xi_k)$:

$$I_*=\sup_{\xi_1;\xi_2;...;\xi_n} s_n(f;\xi_k).$$

Верхним интегралом функции $f(x)$ называется верхняя I^* грань возможных ее верхних сумм Дарбу $S_n(f;\xi_k)$:

$$I^*=\inf_{\xi_1;\xi_2;...;\xi_n} S_n(f;\xi_k).$$

Очевидно, что $I_*\le I^*$.

Теорема (Критерий Дарбу) Для того чтобы функция $y=f(x)$, ограниченная на отрезке $[a;b]$, была интегрируема по Риману на нем, необходимо и достаточно, чтобы суммы Дарбу удовлетворяли условию

$$\lim_{\lambda\to 0}(S_n-s_n)=0.$$

Следствия. *1* Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ была на нем интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\omega_k(f)\Delta x_k=0,$$

где $\omega_k(f)=\left|f(x_k)-f(x_{k-1})\right|$ – колебание функции $f(x)$ на частичном отрезке $[x_{k-1};x_k]$ разбиения τ_n, $k=\overline{1,n}$.

2 Если функция $y=f(x)$ была интегрируема по Риману на отрезке $[a;b]$ и $s_n(f;\xi_k)$, $S_n(f;\xi_k)$ – ее суммы Дарбу, то

$$\lim_{\lambda\to 0}s_n=\lim_{\lambda\to 0}S_n=\int_a^b f(x)dx.$$

Теорема (об интегрируемости непрерывной функции) Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)\left(t^2+a^2\right)^{n-1}}\right).$$

Правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где

$$Q_m(x) = (x-\alpha)^k (x-\beta)^l \left(x^2+px+q\right)^s,$$

можно единственным образом разложить на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1}{(x-\beta)} + \ldots + \frac{B_l}{(x-\beta)^l} +$$

$$+ \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots + \frac{M_sx+N_s}{\left(x^2+px+q\right)^s},$$

где A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_i, M_1, N_1, M_2, M_2, …, M_s, N_s – некоторые действительные числа.

Согласно данному разложению, линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби первого и второго типов, а квадратным множителям – третьего и четвертого типов. При этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю (линейному или квадратному), равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби. Формула разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби остается справедливой для любого конечного числа линейных и квадратных множителей, входящих в разложение знаменателя $Q_m(x)$.

Для определения коэффициентов разложения используется *метод неопределенных коэффициентов:*

– раскладывается правильная рациональная дробь на простейшие дроби;

– простейшие дроби приводятся к общему знаменателю $Q_m(x)$;

– многочлен, получившийся в числителе, приравнивается к многочлену $P_n(x)$;

– приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях переменной x в левой и правой частях полученного тождества. В результате получается система m линейных алгебраических уравнений для нахождения m неизвестных коэффициентов A_1, A_2, …, A_k, B_1, B_2, …, B_k, M_1, N_1, …, M_s, N_s.

Тема 7 Геометрические приложения определенного интеграла

7.1 Площадь криволинейной трапеции
7.2 Длина дуги плоской кривой
7.3 Площадь поверхности вращения
7.4 Объем пространственного тела

Длина дуги плоской кривой в декартовой системе координат. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дуга $\overset{\frown}{AB}$ – график этой функции, заключенный между вертикальными прямыми $x = a$ и $x = b$ (рисунок 4.8).

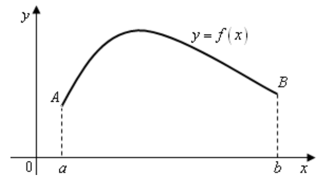

Рисунок 4. 8 – Дуга $\overset{\frown}{AB}$

Кривая $y = f(x)$ называется *спрямляемой*, если $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то длина l дуги $\overset{\frown}{AB}$, вычисляется по формуле:

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx.$$

Площадь криволинейной трапеции в декартовой системе координат. Если функция $y = f(x)$ неотрицательна и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то площадь криволинейной трапеции $\left\{(x;y) \middle| a \le x \le b;\ 0 \le y \le f(x)\right\}$ (рисунок 4. 9) вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Выражение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ – *подынтегральной* функцией, x – *переменной интегрирования*, а C – *постоянной интегрирования*.

Неопределенный интеграл представляет собой любую функцию, дифференциал которой равен подынтегральному выражению, а производная – подынтегральной функции.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых $y = F(x) + C$ (C – параметр), обладающих следующим свойством: *все касательные к кривым в точках с абсциссой $x = x_0$ параллельны между собой*:

$$\left(F(x)+C\right)'\Big|_{x=x_0} = F'(x_0) = f(x_0).$$

На рисунке 4. 1 изображен неопределенный интеграл $x^2 + C$ от функции $f(x) = 2x$:

$$\int 2xdx = x^2 + C,$$

который представляет собой семейство парабол $\{ y = x^2 + C \}$.

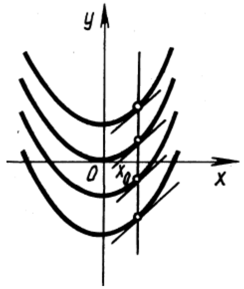

Рисунок 4. 1 – Интегральные кривые $\{ F(x) + C \}$

Кривые семейства $\{ F(x) + C \}$ называются *интегральными кривыми*. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Через каждую точку плоскости проходит только одна интегральная кривая. Все интегральные кривые получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси Oy.

Неопределенный интеграл обладает *свойствами*:

– производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$ (рисунок 4. 3);

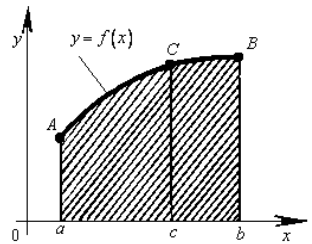

Рисунок 4. 3 – Геометрический смысл свойства аддитивности

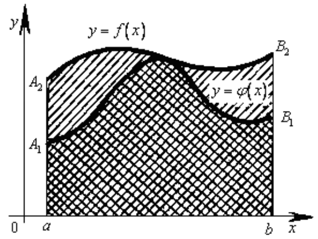

Рисунок 4. 4– Геометрический смысл свойства монотонности

– *(интегрирование неравенств)* если $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge 0, \ a < b;$$

– *(монотонность)* если интегрируемые функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \ge \varphi(x) \quad \forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b \varphi(x)dx, \ a < b.$$

Геометрическая интерпретация данного свойства: площадь криволинейной трапеции aA_2B_2b не меньше площади криволинейной трапеции aA_1B_1b (рисунок 4. 4);

– если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то и функция $|f(x)|$ также интегрируема на этом отрезке и

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b f(x)dx;$$

– *(оценка интеграла)* если m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$, то $\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a);$$

Геометрический смысл заключается в том, что площадь прямоугольника aA_1B_1b равна $m(b-a)$, площадь прямоугольника

aA_2B_2b равна $M(b-a)$, а площадь криволинейной трапеции $aABb$ не меньше площади первого прямоугольника и не больше площади второго (рисунок 4. 4).

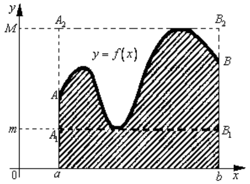

Рисунок 4. 5 – Геометрический смысл оценки

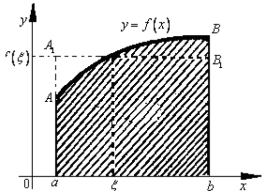

Рисунок 4. 6 – Геометрический свойства о среднем значении

– *(о средне значении)* если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует такая точка $\xi \in [a;b]$, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Число $f(\xi)$, называется *интегральным средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$*.

Геометрически данное свойство означает, что существует такая точка $\xi \in [a;b]$, для которой площадь прямоугольника aA_1B_1b равна площади криволинейной трапеции $aABb$ (рисунок 4. 6).

Пусть в определенном интеграле нижний предел интегрирования a остается постоянным, а верхний x изменяется так, что $x \in [a;b]$. Интеграл вида

$$\int_a^x f(t)dt = F(x),\ x \in [a;b],$$

называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом* и является функцией верхнего предела x.

С *геометрической* точки зрения, функция $F(x)$ представляет собой площадь криволинейной трапеции $aACx$ (рисунок 4. 7).

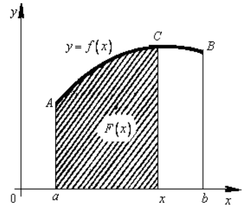

Рисунок 4. 7 – Геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом

Интеграл вида

$$\int_x^b f(t)dt = G(x),\ x \in [a;b],$$

называется *определенным интегралом с переменным нижним пределом* и является функцией нижнего предела x.

Теорема (непрерывность интеграла с переменным верхним пределом) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функции $F(x)$ и $G(x)$ непрерывны на $[a;b]$.

Теорема (дифференцируемость интеграла с переменным верхним пределом) Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и непрерывна в точке $x \in [a;b]$, то функции $F(x)$, $G(x)$ дифференцируемы в этой точке и

$$F'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x), \qquad G'(x) = \left(\int_x^b f(t)dt\right)'_x = -f(x).$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[a;b]$. Тогда на этом отрезке у нее существует первообразная. При этом для любой точки $x \in [a;b]$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ является одной из первообразных функций $f(x)$ на отрезке $[a;b]$. Совокупность всех первообразных непрерывной на некотором отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ представляет собой неопределенный интеграл:

$$\int_a^x f(t)dt = \int f(x)dx + C.$$

Таким образом, установлена связь между неопределенным и