ты $\vec{r}_1(t)=\vec{r}(t)+R\cdot\vec{n}^0$:

$$\xi\cdot\vec{i}+\eta\cdot\vec{j}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}-y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}\vec{i}+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-y'x''}\vec{j}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\vec{i}$ и $\vec{j}$ в левой и правой частях выражения, получим:

$$\xi=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''},\ \eta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{y''x'-y'x''}.$$

Данные формулы являются параметрическими уравнениями эволюты Γ' кривой $\Gamma=\{x(t);y(t);z=0|\ 0\le t\le T\}$. Сама же кривая Γ является эвольвентой по отношению к кривой Γ'.

Свойства эволюты и эвольвенты, устанавливающие связь между ними:

– нормаль к эвольвенте Γ является касательной к эволюте в соответствующей точке;

– если на некотором участке эвольвенты радиус кривизны изменяется монотонно, то приращение радиуса кривизны на этом участке равно по абсолютной величине длине дуги соответствующего участка эволюты.

Вопросы для самоконтроля

Определения

1 Сформулируйте определение производной.
2 Что называется правой и левой производной?
3 Какая функция называется дифференцируемой в точке x_0?
4 Что называется дифференциалом функции в точке?
5 Что называется логарифмической производной?
6 Дайте определение второй производной функции в точке.
7 Дайте определение дифференциала n - го порядка:
8 а) если x независимая переменная;
9 б) если x зависимая переменная.
10 Что называется многочленом Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке x_0?
11 Какая точка называется точкой локального экстремума?
12 Какая точка называется точкой абсолютного экстремума?
13 Какой график функции называется выпуклым, вогнутым?
14 Какая точка графика называется точкой перегиба?
15 Какая прямая называется вертикальной (наклонной, горизонтальной) асимптотой?

7 Какая последовательность называется фундаментальной?
8 Дайте определение функции, ее области определения, множества значений.
9 Дайте определение сложной функции.
10 Дайте определение обратной функции.
11 Сформулируйте определения предела функции в точке по Гейне и по Коши.
12 Дайте определения односторонних пределов функции.
13 Дайте определение бесконечно малой функции.
14 Что называется приращением функции $y=f(x)$ в точке?
15 Сформулируйте определения непрерывной функции.
16 Какие точки называются точками разрыва функции?
17 Дайте определения: а) точек устранимого разрыва, б) точек разрыва 1-го рода, в) точек разрыва 2-го рода.
18 Дайте определение равномерно-непрерывной функции.

Формулировки теорем и формулы

1 Критерий Коши существования предела функции.
2 Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными?
3 Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.
4 Какая связь между односторонними пределами и пределом функции?
5 Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности?
6 Сформулируйте теорему Кантора о равномерной непрерывности функции.

Доказательства теорем

1 Докажите теорему Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности.
2 Докажите число e.
3 Докажите критерий Коши о сходимости фундаментальной последовательности.
4 Докажите эквивалентность определений предела функции по Гейне и по Коши.
5 Докажите первый замечательный предел.
6 Докажите второй замечательный предел.
7 Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.
8 Докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.
9 Докажите теорему о достижении непрерывной функцией своих точных граней.

В о п р о с ы   и   з а д а ч и   н а   п о н и м а н и е

1 Может ли быть монотонной последовательностью: а) сумма двух немонотонных последовательностей; б) произведение двух немонотонных последовательностей?

2 Дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности.

3 Может ли быть монотонной последовательностью: а) сумма двух немонотонных последовательностей; б) произведение двух немонотонных последовательностей?

4 Дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности.

5 Как для взаимно однозначной функции получить обратную ей? Как располагаются графики взаимно-обратных функций?

6 Сформулируйте отрицания определений предела функции в точке по Гейне и по Коши.

7 Сформулируйте определения по Коши, соответствующие следующим символическим обозначениям:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$; в) ; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$; д) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

8 Какая связь между односторонними пределами и пределом функции?

9 Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности?

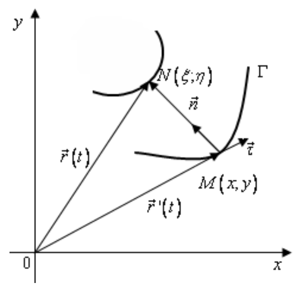

Рисунок 3. 23 – Эволюта и эвольвента

Запишем разложения векторов $\vec r_1$ и $\vec r$ по базису $B=\{\vec i,\vec j\}$:

$$r_1=\xi\cdot\vec i+\eta\cdot\vec j\,,$$
$$\vec r=x\cdot\vec i+y\cdot\vec j\,.$$

Найдем вектор $\vec n^{\,0}$.

Единичный вектор касательной к кривой Γ есть

$$\vec\tau^{\,0}=\frac{r'(t)}{|\vec r\,'(t)|}=\frac{x'\cdot\vec i+y'\cdot\vec j}{\sqrt{x'^2+y'^2}}=\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec i+\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec j\,.$$

Продифференцируем равенство $\vec\tau^{\,0\,2}=1$ по t. Имеем

$$2\vec\tau^{\,0}=\frac{d\vec\tau^{\,0}}{dt}=0\,.$$

Отсюда $\dfrac{d\vec\tau^{\,0}}{dt}\perp\vec\tau^{\,0}$. Таким образом, вектор нормали $\vec n=\dfrac{d\vec\tau^{\,0}}{dt}$.

Координаты вектора $\vec n$:

$$\vec n=\frac{d\vec\tau^{\,0}}{dt}=\left(\frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'\vec i+\left(\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)'\vec j=$$
$$=-y'\frac{x'y''+y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec i+x'\frac{x'y''-y'x''}{\sqrt{\left(x'^2+y'^2\right)^3}}\vec j\,.$$

Тогда $\vec n^{\,0}=\mp\dfrac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec i\pm\dfrac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\vec j$.

Подставим $\vec n^{\,0}$ и $R=\dfrac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{|y''x'-y'x''|}$ в векторное уравнение эволю-

тром кривизны, а круг с центром в точке N и радиусом R – *кругом кривизны кривой* в точке $M(x;y)$.

Если кривая Γ задана *в декартовой системе* координат Oxy уравнением $y=f(x)$, то ее радиус кривизны находится по формуле:

$$R=\frac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{|y''|}.$$

Если кривая Γ в плоскости Oxy задана *параметрическими уравнениями*, то ее радиус кривизны определяется по формуле:

$$R=\frac{\left(x'^2+y'^2\right)^{3/2}}{\left|y''x'-y'x''\right|}.$$

Если Γ – годограф вектор-функции $r=r(t)$, то:

$$R=\frac{|\vec{r}\,'|^3}{|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''|}.$$

Из определения центра кривизны следует, что каждой точке M кривой Γ, соответствует точка N – центр кривизны кривой Γ' в точке M .

Множество точек Γ' центров кривизны линии Γ называется ее *эволютой*, а сама линия Γ по отношению к своей эволюте называется *эвольвентой.*

Пусть кривая Γ задана уравнением $\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}$ в плоскости Oxy . Пусть $N(\xi;\eta)$ – центр кривизны линии Γ в точке M (рисунок 3.23).

Тогда для любой точки $M(x;y)\in\Gamma$ имеем $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MN}$. Обозначим $\overrightarrow{ON}=\vec{r}_1$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$, $\overrightarrow{MN}=R\cdot\vec{n}^0$, где $\vec{n}^0$ – единичный вектор нормали кривой Γ.

Тогда

$$\vec{r}_1=\vec{r}+R\vec{n}^0.$$

Данное уравнение называется *векторным уравнением эволюты кривой* Γ.

Раздел 3 **Дифференциальное исчисление функции действительной переменной**

Тема 1 Определение производной

1.1 Определение производной, правая и левая производная
1.2 Дифференцируемость функции и дифференциал
1.3 Геометрический и физический смысл производной и дифференциала
1.4 Свойства производных, связанные с арифметическими операциями

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(\delta;x_0)$точки x_0. Если фиксированное значение аргумента x_0 получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0+\Delta x\in U(\delta;x_0)$, то приращение функции определяется выражением $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Производной функции $y=f(x)$ в произвольной фиксированной точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что последнее стремится к нулю:

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Обозначается: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Производная функции $y=f(x)$ в произвольной точке x *обозначается* так: $f'(x)$, y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$.

При каждом конкретном числовом значении x производная $f'(x)$ (если она существует при данном x) функции $y=f(x)$ представляет собой определенное число. Значениям переменной x ставятся в соответствие определенные значения переменной $f'(x)$. Поэтому производная является функцией аргумента x.

Если для некоторого значения x предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ или

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty$, то говорят, что функция $y = f(x)$ в точке x имеет *бесконечную производную*.

Если функция $y = f(x)$ определена в левосторонней (правосторонней) окрестности точки x_0 и существует конечный или бесконечный предел:

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\right),$$

то он называется соответственно конечной или бесконечной *производной слева* (*справа*) функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается:

$$f'(x_0 - 0) \text{ или } f'_{-}(x_0) \quad (f'(x_0 + 0) \text{ или } f'_{+}(x_0)).$$

Левая и правая производные называются *односторонними производными*.

Если функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет конечную производную $f'(x_0)$, то существуют производные слева и справа, причем

$$f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0).$$

Вместе с тем существуют функции, имеющие в данной точке x_0 левую и правую производные, но не имеющие производной в этой точке.

Операция нахождения производной функции f называется *дифференцированием*.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение в этой точке $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

где A – некоторое действительное число и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.

Дифференцируемость функции в точке x_0 означает, что с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем приращение аргумента Δx, приращение функции представимо в виде линейной функции от Δx.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в

$$\left.\begin{aligned} y &= f(x), \\ t &= x. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда

$$|\vec{r}' \times \vec{r}''| = \sqrt{0 + 0 + (1 \cdot y'' - 0)^2} = |y''| \text{ и } |\vec{r}'| = \sqrt{1 + y'^2}.$$

Значит,

$$K = \frac{|y''|}{\left(1 + (y')^2\right)^{3/2}}.$$

Если кривая Γ задана в плоскости Oxy *неявно* уравнением $F(x; y) = 0$, то кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{\left|\det\begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{xy} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{pmatrix}\right|}{\left(F'^2_x + F'^2_y\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если кривая Γ задана в плоскости Oxy в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, то кривизна находится по формуле

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - r \cdot r''|}{\left(r^2 + r'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Проведем к кривой Γ нормаль в точке $M(x; y)$ и отложим на этой нормали в сторону вогнутости кривой отрезок $MN = R$ (рисунок 3. 22), по величине обратный кривизне K: $R = \dfrac{1}{K}$.

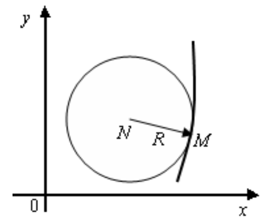

Рисунок 3. 22 – Радиус кривизны MN

Отрезок MN называется *радиусом кривизны*, точка N – *цен-*

ку ее изогнутости (кривизны).

Рассмотрим на кривой точки M и M_1. Проведем в этих точках касательные к кривой. При переходе по кривой из точки M в точку M_1 касательная поворачивается на угол $\Delta\varphi$, который называется *углом смежности* (рисунок 3.21).

Отношение угла смежности дуги к ее длине называется *средней кривизной дуги:* $K_{\text{ср}} = \dfrac{\Delta\varphi}{\Delta l}$.

Средняя кривизна характеризует среднюю изогнутость кривой на всей дуге. На отдельных участках кривой кривизна может значительно отличаться от средней. Чтобы избежать такой неопределенности, вводится количественная мера изогнутости кривой в точке M. Эта характеристика основана на том, что чем меньше дуга Γ (рисунок 3. 21), тем лучше средняя кривизна характеризует изогнутость линии вблизи точки M.

Кривизной K линии Γ в точке M называется предел, к которому стремится средняя кривизна $K_{\text{ср}}$ дуги MM_1 линии Γ при стремлении точки M_1 к точке M:

$$K = \lim_{M_1 \to M} K_{\text{ср}} = \left| \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta l} \right|.$$

Пусть кривая Γ является годографом дважды дифференцируемой *векторной функции* действительного аргумента $\Gamma = \left\{ \vec{r}(t) \middle| \ a \le t \le b \right\}$. Тогда кривизна кривой Γ вычисляется по формуле

$$K = \frac{\left|\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''\right|}{\left|\vec{r}\,'^3\right|}.$$

Если гладкая кривая Γ задана *параметрическими уравнениями*

$$\Gamma = \left\{ x(t); y(t); z(t) \middle| \ a \le t \le b \right\},$$

то кривизна вычисляется по формуле

$$K = \frac{\sqrt{\left(y'z'' - y''z'\right)^2 + \left(z'x'' - z''x'\right)^2 + \left(x'y'' - x''y'\right)^2}}{\left(x'^2 + y'^2 + z'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Если кривая Γ задана в *плоскости Oxy* уравнением $y = f(x)$, то формула для вычисления ее кривизны получается из формулы вычисления кривизны, положив в ней $t = x$, $z = 0$. Тогда уравнение линии Γ можно записать в параметрическом виде:

точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 существовала конечная производная $f'(x_0) = A$. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой точке, то она и непрерывна в этой точке. Если функция $y = f(x)$ в некоторой точке имеет производную, то она непрерывна в этой точке. Обратное верно не всегда, т. е. из непрерывности функции $y = f(x)$ в точке x_0 еще не следует ее дифференцируемость в этой точке.

Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой* на $[a;b]$, если она дифференцируема в любой точке $x \in [a;b]$.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение в этой точке представимо в виде:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда, если $f'(x_0) \ne 0$, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{f'(x_0)\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x} \right) = 1.$$

Следовательно, при $\Delta x \to 0$ приращение функции $\Delta f(x_0)$ и выражение $f'(x_0)\Delta x$ являются эквивалентными бесконечно малыми функциями. Поэтому при $\Delta x \to 0$ можно приближенно считать, что $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$.

Дифференциалом функции $f(x)$ называется величина $f'(x_0)\Delta x$, являющаяся *главным* (линейным) членом приращения функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0)$:

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

В частности, если $y = x$, то $y' = 1$, и, следовательно, $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Поэтому дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0 можно представить в виде

$$df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

Тогда приращение функции можно записать в виде

$$\Delta f(x_0) = df(x_0) + o(\Delta x).$$

Видно, что дифференциал функции в точке x_0 отличается от соответствующего приращения функции на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx при $\Delta x \to 0$.

На практике дифференциал используется при приближенных вычислениях следующим образом:

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x\,.$$

Рассмотрим задачу о проведении касательной к произвольной плоской кривой. Пусть Γ – дуга плоской кривой, M_0 – точка этой кривой, M_0M – секущая (рисунок 1. 1). Если точка M движется по кривой к точке M_0, то секущая поворачивается вокруг точки M_0 и стремится к некоторому предельному положению M_0T.

Касательной к кривой Γ в точке M_0 называется прямая M_0T, которая представляет собой предельное положение секущей M_0M при стремлении по кривой точки M к точке M_0 (рисунок 3.1).

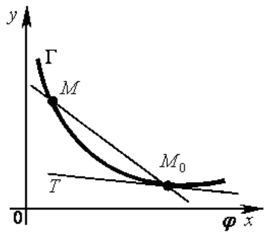

Рисунок 3. 1 – Секущая M_0M и касательная M_0T

Если предельного положения секущей не существует, то говорят, что в точке M_0 провести касательную нельзя. Это бывает в случае, когда точка M_0 является *точкой излома*, или *заостления*, кривой (рисунок 3. 2*, а, б, в*).

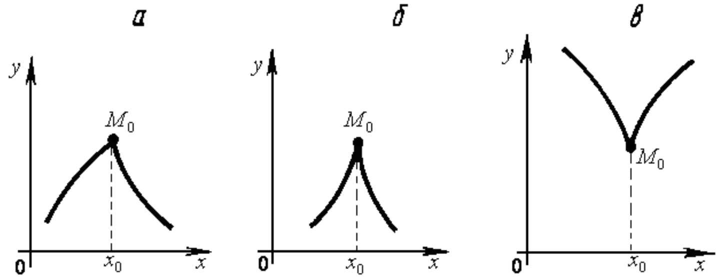

Рисунок 3. 2 – Точки излома графика функции

Пусть кривая Γ является графиком функции $f(x)$ и точка $M\left(x_0; f(x_0)\right)\in\Gamma$ (рисунок 3. 3).

можно положить $A=x'(t_0)$, $B=y'(t_0)$, $C=z'(t_0)$. Тогда искомое уравнение плоскости будет иметь вид:

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(z-z_0)=0\,.$$

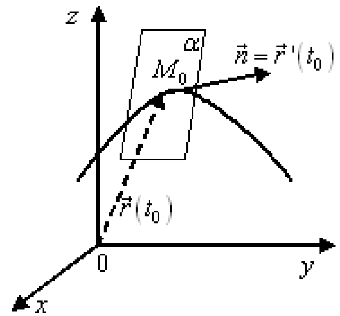

Рисунок 3.19 – Нормальная плоскость α к кривой Γ

Тема 10 Кривизна кривой

10.1 Понятие кривизны кривой
10.2 Вычисление кривизны кривой
10.3 Радиус, круг и координаты центра кривизны плоской кривой
10.4 Эволюта и эвольвента плоской кривой

Одной из важных характеристик кривой является мера ее изогнутости – *кривизна*.

Например, о двух плоских кривых $ACB\subset\Gamma_1$ и $ADB\subset\Gamma_2$ (рисунок 3. 20) можно сказать, что кривая Γ_2 более изогнута, чем Γ_1.

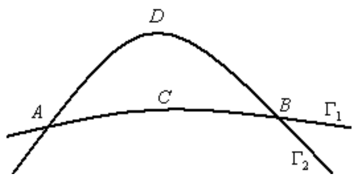

Рисунок 3.20 – Кривые Γ_1 и Γ_2

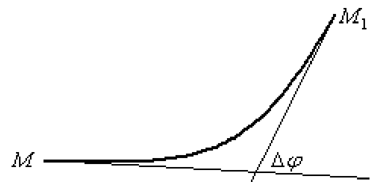

Рисунок 3.21 – Угол смежности

Однако для того, чтобы строго оценить степень изогнутости плоской линии, необходимо ввести количественную характеристирывно дифференцируема на отрезке $[0; L_\Gamma]$. По теореме об обратной функции имеем

$$t'(l) = \frac{1}{l'(t)} > 0 .$$

Таким образом, для всякой гладкой кривой Γ ее параметр t является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией переменной длины l, производная этой функции нигде не обращается в нуль.

Следовательно, функция $t = t(l)$ является допустимым преобразованием параметра и уравнение кривой Γ можно записать в виде $\vec{r} = \vec{r}(t(l))$, $l \in [0; L_\Gamma]$.

Если параметром кривой Γ является переменная длина ее дуги l, то l называется *натуральным параметром*, а уравнение кривой $\Gamma = \{\vec{r} = \vec{r}(l) \mid 0 \le l \le L_\Gamma\}$ называется *натуральным уравнением* кривой.

Пусть кривая $\Gamma = \{\vec{r}(t) \mid a \le t \le b\}$ гладкая, а $l = l(t)$ – переменная длина ее дуги. Тогда $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ является единичным касательным к кривой Γ вектором и $\left|\dfrac{d\vec{r}}{dl}\right| = 1$.

Отсюда следует, что если α, β, γ – углы, образованные вектором касательной $\dfrac{d\vec{r}}{dl}$ к кривой Γ с осями Ox, Oy, Oz соответственно, то $\dfrac{d\vec{r}}{dl} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$.

Нормальной плоскостью к кривой Γ называется плоскость, перпендикулярная касательной прямой и проходящая через точку касания.

Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка касания (рисунок 3. 19). Из аналитической геометрии известно, что уравнение плоскости α, проходящей через эту точку, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 ,$$

где $\vec{n} = (A, B, C)$ – нормальный вектор плоскости.

Из определения нормальной плоскости следует, что векторы $\vec{n} = (A, B, C)$ и $\vec{r}\,'(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ коллинеарные, поэтому

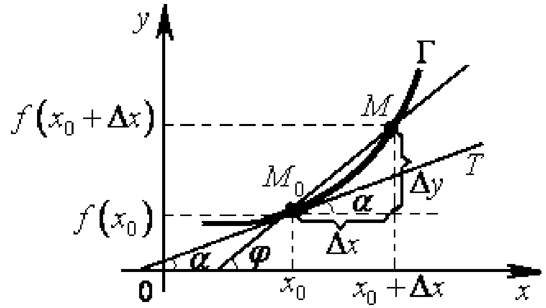

Рисунок 3. 3 – Геометрический смысл касательной

Предположим, что касательная к кривой в точке M_0 существует. Угловой коэффициент секущей M_0M есть

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то точка M движется по кривой к точке M_0 и секущая MM_0 стремится к своему предельному положению M_0T. Таким образом,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{M \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Отсюда следует *геометрический смысл производной*: производная от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Так как угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас}}}$, то *уравнение нормали* в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 изображается приращением ординаты точки касательной, проведенной в $M(x_0;f(x_0))$ к линии $y=f(x)$ (рисунок 3. 4).

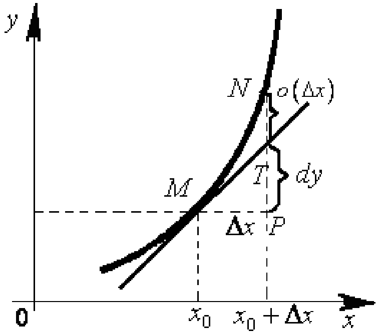

Рисунок 3. 4 – Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную и непрерывную в некоторой окрестности точки x_0. Если аргумент x_0 функции получает приращение Δx (положительное или отрицательное), такое, что $x_0+\Delta x$ принадлежит той же окрестности точки x_0, то соответствующее приращение функции равно $\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x)$. Тогда средняя скорость изменения функции равна:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},$$

а мгновенная скорость ее изменения:

$$v=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Механический смысл производной: производная – математическая модель мгновенной скорости процесса, описываемого функцией $f(x)$.

В зависимости от содержательной сущности функции можно получить широкий круг математических моделей скорости протекания процессов. Рассмотрим некоторые из них.

1 Пусть материальная точка M движется неравномерно и $y=s(t)$ – функция, устанавливающая зависимость пути от времени t. Мгновенная скорость движения в момент времени t_0 есть производная от пути s по времени t:

Соединив последовательно точки M_0, M_1, ..., M_n, отрезками M_0M_1, M_1M_2, ..., $M_{n-1}M_n$ получим ломаную P_n, которая называется *вписанной* в кривую Γ; отрезки $M_{k-1}M_k$, $k=0,1,...,n$ называются *звеньями* ломаной P_n, а точки ломаной $M_k=M(t_k)$ – *вершинами* ломаной. Длина каждого отрезка $M_{k-1}M_k$ равна $|\vec r(t_k)-\vec r(t_{k-1})|$. Тогда длина всей ломаной P_n равна

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}|\vec r(t_k)-\vec r(t_{k-1})|.$$

Верхняя грань длин всевозможных ломаных, вписанных в данную кривую, называется *длиной* кривой:

$$L_\Gamma=\sup_{\tau_n}\sigma_n,$$

где верхняя грань берется по всевозможным разбиениям $\tau_n=\{t_k\}$, $k=0,1,...,n$, отрезка $[a;b]$.

Если $0\le L_\Gamma<+\infty$, то кривая Г называется *спрямляемой*.

Теорема (о длине дуги) Если кривая $\Gamma=\{\,x(t);y(t);z(t)|\ \ a\le t\le b\}$ *непрерывно дифференцируема, то переменная длина дуги* $l=l(t)$, *отсчитываемая от начала кривой* Γ, *является возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией параметра* t *и*

$$\frac{dl}{dt}=\left|\frac{d\vec r}{dt}\right|=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Поскольку $l'(t)=\dfrac{dl}{dt}$, то отсюда *дифференциал длины дуги* равен

$$dl=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,dt.$$

Пусть кривая $\Gamma=\{\,\vec r(t)|\ \ a\le t\le b\}$ гладкая кривая. В силу теоремы 2 переменная длина дуги $l=l(t)$, отсчитываемая от начала $M(a)$ кривой Γ, является строго возрастающей непрерывно дифференцируемой функцией с производной, положительной во всех точках отрезка $[a;b]$: $l'(t)=|\vec r\,'(t)|$. Так как $l(a)=0$ и $l(b)=L_\Gamma$, то обратная функция $t=t(l)$ однозначна, строго возрастает, непре-

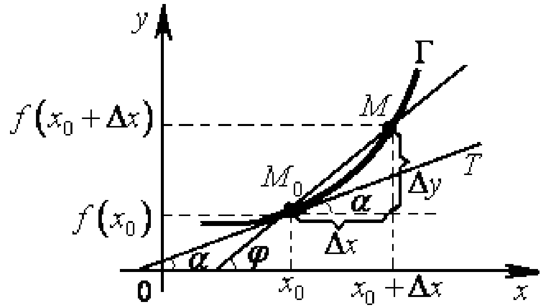

Рисунок 3. 3 – Геометрический смысл касательной

Предположим, что касательная к кривой в точке M_0 существует. Угловой коэффициент секущей M_0M есть

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то точка M движется по кривой к точке M_0 и секущая MM_0 стремится к своему предельному положению M_0T. Таким образом,

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{M\to M_0}\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Отсюда следует *геометрический смысл производной*: производная от функции $f(x)$ при $x = x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Так как угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности $k_{\text{норм}} = -\dfrac{1}{k_{\text{кас}}}$, то *уравнение нормали* в точке $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 изображается приращением ордина-

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $ds = v\Delta t$ равен пути, который прошла бы рассматриваемая точка за промежуток времени Δt, начиная с момента t, если движение на этом участке равномерно со скоростью v. Этот путь отличается от истинного пути Δs на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δt: $\Delta s = ds + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

2 Пусть $y = v(t)$ – функция, описывающая процесс изменения скорости неравномерного движения в зависимости от времени t. Мгновенное ускорение материальной точки в фиксированный момент времени t_0 есть производная от скорости v по времени t:

$$v = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t_0+\Delta t) - v(t_0)}{\Delta t}.$$

3 Пусть $y = Q(T)$ – функция, описывающая процесс изменения количества теплоты, сообщаемой телу при нагревании его до температуры T. Теплоемкость тела есть производная от количества теплоты Q по температуре T:

$$C = \left.\frac{dQ}{dT}\right|_{T=T_0} = \lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta Q(T_0)}{\Delta T} = \lim_{\Delta T\to 0}\frac{Q(T_0+\Delta T) - Q(T_0)}{\Delta T}.$$

4 Пусть необходимо определить линейную плотность неоднородного тонкого стержня длиной l, где m – масса стержня, концы которого имеют координаты 0 и x_0 (предполагается, что ось Ox направлена по стержню). Масса стержня является функцией x: $f(x) = m(x)$. Линейная плотность неоднородного тонкого стержня в точке x_0 есть производная от массы m по длине l:

$$\rho(x_0) = \left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x_0+\Delta x) - m(x_0)}{\Delta x}.$$

5 Пусть $y = \Phi(t)$ – функция, описывающая процесс изменения магнитного потока в зависимости от времени t. Мгновенное значение электродвижущей силы индукции равно скорости изменения магнитного потока, т.е. производной от магнитного потока Φ по времени t:

$$\varepsilon = \Phi'(t_0) = \left.\frac{d\Phi}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Phi(t_0+\Delta t) - \Phi(t_0)}{\Delta t}$$

6 Пусть $y = q(t)$ – функция, описывающая процесс изменения заряда в колебательном контуре в зависимости от времени t. Сила тока в контуре в момент времени t_0 равна производной заряда q по времени t:

$$I = \left.\frac{dq}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0+\Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}.$$

Дифференциал $dq = I\Delta t$ равен количеству электричества, которое бы протекало через поперечное сечение проводника за промежуток времени Δt, если бы сила тока была постоянной и равной силе тока в момент времени t. При этом $\Delta q = dq + o(\Delta t)$ при $\Delta t \to 0$.

Свойства производных, связанные с арифметическими операциями:

– $(c)' = 0$, $c \in \mathbb{R}$;

– *дифференцирования алгебраической суммы функций*

$$(u \pm v)' = u' \pm v';$$

– *дифференцирования произведения функций*

$$(u \cdot v)' = u'v + v'u;$$

– $(cu)' = c \cdot u' \quad \forall c \in \mathbb{R}$;

– *дифференцирования частного функций*

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2};$$

В таблице 3. 1 приводятся производные и дифференциалы элементарных функций

Таблица 3 .1 – Производные и дифференциалы элементарных функций

функции $f(x)$, параметром – переменная x;

– *неявно*: координаты всех точек носителя плоской кривой Γ удовлетворяют уравнению $F(x;y) = 0$;

– *в координатной форме*: $\Gamma = \{x(t); y(t); z(t) \mid a \le t \le b\}$, где $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координатные функции отображения $M(t)$, $t \in [a;b] \subset \mathbb{R}$;

– *векторное представление*: $\Gamma = \{\vec{r}(t) \mid a \le t \le b\}$, где $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ – вектор-функция.

Если для точек кривой $\Gamma = \{M(t) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le t \le b\}$ выполняется условие $\forall t_1 < t_2 \quad M(t_1)$ предшествует $M(t_2)$, то такая кривая называется *ориентированной*.

Точка носителя кривой, в которую при отображении $\Gamma = \{M(t) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le t \le b\}$ отображаются хотя бы две разные точки отрезка $[a;b]$, называется *точкой самопересечения* (*кратной точкой*) кривой Γ.

Если носитель кривой Γ не имеет кратных точек (отображение $\Gamma = \{M(t) \in \mathbb{R}^3 \mid a \le t \le b\}$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a;b]$ в точки пространства $\mathbb{R}^3$), то кривая называется *простой дугой*.

Если $M_0 = M(a)$ и $M_1 = M(b)$, то точка $(M_0;a)$ называется *началом* кривой Γ, а точка $(M_1;b)$ – *концом* данной кривой. Если $M(a) = M(b)$, то кривая Γ называется *замкнутой*.

Простым замкнутым контуром называется замкнутая кривая, у носителя которой нет кратных точек, кроме носителя ее начала и конца.

Если $t_1, t_2 \in [a;b]$, $t_1 < t_2$, то кривая $\Gamma = \{M(t) \mid t_1 \le t \le t_2\}$ называется *частью кривой* Γ или *простой дугой* $\overset{\frown}{M(t_1)M(t_2)}$ с началом в точке $M(t_1)$ и концом в точке $M(t_2)$.

Прямая проходящая через точку M_0 в направлении вектора $\vec{r}'(t_0)$, называется *касательной* к кривой Γ в точке $M(t_0)$.

Поместим начало вектора $\vec{r}'(t_0)$ в точку $M(t_0)$. Направление данного вектора совпадает с направлением касательной. Поэтому в момент t_0, называется *ускорением*: $\vec{r}''(t_0)=\dfrac{d\vec{v}(t_0)}{dt}=\vec{a}(t_0)$.

Механический смысл второй производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}''(t_0)$ есть вектор ускорения движения материальной точки в данный момент времени t_0.

Пусть в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. И пусть на отрезке $[a;b]\subset\mathbb{R}$ заданы непрерывные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Тогда говорят, что задано непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в $\mathbb{R}^3$.

Числа $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ можно рассматривать как координаты точки $M=M(t)$ или как координаты радиус-вектора $\vec{r}(t)$ с началом в точке O и концом в точке M (рисунок 3. 18):

$$\vec{r}(t)=(x(t);y(t);z(t)),\ t\in[a;b]\subset\mathbb{R}.$$

Непрерывное отображение отрезка $[a;b]$ в пространство $\mathbb{R}^3$ называется *кривой* и обозначается $\Gamma=\left\{M(t)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, a\le t\le b\right\}$.

Множество точек пространства $\mathbb{R}^3$, на которое отображается отрезок $[a;b]$, называется *носителем* кривой Γ, переменная t называется *параметром* на кривой Γ.

Если носитель кривой лежит в некоторой плоскости, то эта кривая называется *плоской*.

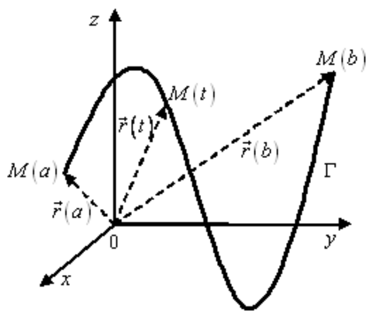

Рисунок 3.18 – Кривая Γ в пространстве $\mathbb{R}^3$

Кривая может быть задана:

– *явно*: непрерывная функция $y=f(x)$, $a\le x\le b$, задает плоскую кривую $\Gamma=\left\{y=f(x)\,\middle|\, a\le x\le b\right\}$, носителем является график

Функция	Производная	Функция	Производная
$y=c$	$y'=0$	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=x^{\alpha}$ $\alpha\in\mathbb{R}$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$	$y=\operatorname{tg}x$	$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$y=a^x$	$y'=\alpha^x\ln a$	$y=\operatorname{ctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y=e^x$	$y'=e^x$	$y=\arcsin x$	$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\log_a x$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$	$y=\arccos x$	$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$	$y=\operatorname{arctg}x$	$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$y=\operatorname{arcctg}x$	$y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$
$y=\operatorname{sh}x$	$y'=\operatorname{ch}x$	$y=\operatorname{th}x$	$y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$y=\operatorname{ch}x$	$y'=\operatorname{sh}x$	$y=\operatorname{cth}x$	$y'=\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

Тема 2 Производная обратной и сложной функции

2.1 Производная обратной функции
2.2 Производная и дифференциал сложной функции
2.3 Логарифмическая производная

Пусть функция $y=f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$ и имеет во всех точках интервала $(a;b)$ ненулевую производную $y'=f'(x)$. Тогда обратная функция $x=f^{-1}(y)$ дифференцируема во всех точках интервала $(f(a);f(b))$ и для любого $y\in(f(a);f(b))$ ее производная равна

$$\left(f^{-1}(y)\right)'=\frac{1}{f'(x)}.$$

Пусть $y=f(u(x))$ сложная функция. Если функция $u=u(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $y=f(u)$ имеет производную в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y = f(u(x))$ имеет в точке x_0 производную и справедлива формула

$$y' = f'_u(u) \cdot u'(x).$$

Функция u называется *промежуточным аргументом*, а x – *основным аргументом*.

Полученное правило распространяется на сложную функцию, зависящую от нескольких аргументов. Предположим, что функции $y = f(u)$, $u = u(v)$, $v = v(t)$, $t = t(x)$ дифференцируемы. Рассмотрим сложную функцию F переменной x через посредство промежуточных функций f, u, v, t:

$$F(x) = f(u(v(t(x)))).$$

Придадим фиксированному значению x приращение Δx. Тогда t получит приращение Δt, v – приращение Δv, u – приращение Δu.

Запишем $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в виде $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}$.

Так как u, v, t дифференцируемы, поэтому и непрерывны, то в силу непрерывности при $\Delta x \to 0$ приращения $\Delta u \to 0$, $\Delta v \to 0$ и $\Delta t \to 0$. Переходя к пределам, имеем

$$F'(x) = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_t \cdot t'_x.$$

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;b]$ и $f(x) > 0 \ \ \forall x \in [a;b]$. Тогда определен логарифм

$$\ln y = \ln f(x).$$

Дифференцируя обе части этого равенства по переменной x, имеем

$$(\ln y)' = (\ln f(x))'.$$

Отсюда $\frac{y'}{y} = (\ln f(x))'$ и $y' = y \cdot (\ln f(x))'$.

Производная $(\ln f(x))'$ от логарифма функции $f(x)$ называется *логарифмической производной.*

Логарифмическое дифференцирование удобно применять в двух случаях:

– при нахождении производной большого числа сомножителей,

– при нахождении производной степенно-показательной функции.

ция, $\vec{r}(t)$ – дифференцируемая в точке $t_0 = t(\tau_0)$ векторная функция, то

$$\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau};$$

– для произвольных векторных функций имеют место формулы;

$$(\vec{r}_1 \pm \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \pm \vec{r}_2{}',$$

$$(f \cdot \vec{r})' = f' \cdot \vec{r} + f \cdot \vec{r}\,',$$

$$(\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2{}',$$

$$(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2)' = \vec{r}_1{}' \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \vec{r}_2{}'.$$

– если вектор-функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 и векторы $\vec{r}(t)$ имеют одинаковую длину в некоторой окрестности точки t_0, то производная $\vec{r}\,'(t_0)$ ортогональна вектору $\vec{r}(t_0)$:

$$\vec{r}\,'(t_0) \cdot r(t_0) = 0;$$

– если вектор-функция $\vec{r}(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в каждой точке этого отрезка, то существует такая точка $\xi \in (a;b)$, что

$$|\vec{r}(b) - \vec{r}(a)| \le |\vec{r}\,'(\xi)| \cdot (b - a).$$

С *геометрической* точки зрения производная вектор-функции в точке t_0 есть вектор $\vec{r}\,'(t_0)$, направленный по касательной к годографу этой функции в сторону возрастания параметра t.

Механический смысл производной от вектор-функции состоит в том, что $\vec{r}\,'(t_0)$ есть вектор мгновенной скорости перемещения материальной точки по траектории, являющейся годографом функции.

Производная вектор-функции $\vec{r}(t)$ является, в свою очередь, вектор-функцией скалярного аргумента, и ее также можно дифференцировать.

Производная функции $\vec{r}\,'(t)$ точке $t = t_0$ называется *второй производной* вектор-функции $r(t)$ по скалярному аргументу t в точке t_0 и обозначается так: $\vec{r}\,''(t_0)$, $\frac{d^2\vec{r}(t_0)}{dt^2}$, $\left.\frac{d\vec{r}\,'(t_0)}{dt}\right|_{t=t_0}$, $\ddot{\vec{r}}(t_0)$.

Вектор $\vec{a}(t_0)$, равный производной скорости $\vec{v}(t)$ по времени t

Вектор-функция $\vec{r}(t)$, $t \in T$, называется *непрерывной* в точке $t = t_0$, если $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0)$.

Очевидно, что векторная функция непрерывна в некоторой точке тогда и только тогда, когда в этой точке непрерывны ее координатные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$.

Введем понятие производной вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t \in T$ в данной точке t_0. Для этого дадим аргументу t_0 приращение $\Delta t \neq 0$ и рассмотрим вектор $\Delta\vec{r}(t_0) = \vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)$. Составим отношение

$$\frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Если существует предел отношения приращения $\Delta\vec{r}(t_0)$ вектор-функции $\vec{r}(t)$ в точке t_0 к приращению скалярного аргумента Δt при $\Delta t \to 0$, то этот предел называется *производной вектор-функции* $\vec{r}(t)$ в точке t_0:

$$\vec{r}\,'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}.$$

Так как

$$\Delta\vec{r}(t_0) = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]\vec{i} + [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]\vec{j} + [z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)]\vec{k} =$$

$$= \Delta x(t_0)\vec{i} + \Delta y(t_0)\vec{j} + \Delta z(t_0)\vec{k},$$

то по определению получим

$$\vec{r}\,'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

Итак, вычисление производных от векторной функции скалярного аргумента в точке t_0 сводится к вычислению производных ее координат.

Дифференцируемые векторные функции обладают следующими свойствами:

– если векторная функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке;

– если векторная функция $\vec{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0, то она имеет в этой точке производную и $\vec{r}\,'(t_0) = \vec{a}$;

– векторная функция, имеющая в некоторой точке производную, дифференцируема в этой точке;

– если $t = t(\tau)$ – дифференцируемая в точке τ_0 скалярная функ-

Тема 3 Производные и дифференциалы высших порядков

3.1 Производная функции, заданной параметрическими уравнениями
3.2 Производная неявной функции
3.3 Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t \in T \subset \mathbb{R}$. Предположим, что функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы для любого $t \in T$ и $\varphi'(t) \neq 0$. Кроме этого, будем считать, что функция $x = \varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \varphi^{-1}(x)$, которая также дифференцируема. Тогда функцию $y = y(x)$, заданную параметрическими уравнениями, можно рассматривать как сложную функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, считая t промежуточным аргументом.

Продифференцировав функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$, по правилу дифференцирования сложной функции, получим $y'_x = \psi'(t) \cdot t'_x$. Производную t'_x найдем по правилу дифференцирования обратной функции:

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Учитывая, что $\varphi'(t) = x'_t$, $\psi'(t) = y'_t$, окончательно имеем:

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right.$$

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Предположим, что функция $y = f(x)$ дифференцируема. Если в уравнении $F(x, y) = 0$ под переменной y подразумевать функцию $y(x)$, то это уравнение обращается в тождество по аргументу x:

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in [a; b].$$

Дифференцируем уравнение по x и считаем, что переменная y есть функция переменной x. Получается новое уравнение, содержащее x, y и y'. Разрешая его относительно y', находим производную функции $y = f(x)$, заданной в неявном виде.

Пусть функция $y = f(x)$ является дифференцируемой. Производная $f'(x)$ является также функцией от x и может быть дифференцируема.

Производная от производной функции $y = f(x)$ называется *производной второго порядка* или *второй производной функции*.

Обозначается: y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

Механический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ – закон движения материальной точки, тогда первая производная определяет скорость движения $v = s'(t)$. Вторая же производная есть скорость изменения скорости движения, т.е. ускорение $a = \dfrac{dv}{dt} = s''(t)$.

Аналогично вводятся производные третьего, четвертого и более высоких порядков.

Производная от производной второго порядка функции $y = f(x)$ называется *производной третьего порядка.*

Обозначается: y''', $f'''(x)$, $\dfrac{d^3y}{dx^3}$:

Аналогично

$$y^{IV} = (y''')' = f^{IV}(x).$$

Производной n*-го порядка* от функции $y = f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка:

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x).$$

Пусть y – функция от x, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $t \in T \subset \mathbb{R}$.

Поскольку вторая производная от y по x есть первая производная от y'_x по x, то задача нахождения второй производной сводится к отысканию первой производной от функции, заданной параметрическими уравнениями:

форме вектор-функция запишется в виде $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$.

Вектор $\vec{a}$ называется *пределом* вектор-функции $\vec{r}(t)$, $t \in T$, в точке $t = t_0$ (или $t \to t_0$), если $\lim\limits_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - a| = 0$.

Обозначается: $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$.

Выражение $|\vec{r}(t) - a|$ задает числовую функцию. Следовательно, понятие предела вектор-функции сводится к понятию предела скалярной функции. Поэтому можно записать:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0: \;\; \forall t \in U(t_0; \delta) \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon .$$

Пусть $\vec{r}(t) = (x(t); y(t); z(t))$ и $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$. Для того, чтобы $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a}$, необходимо достаточно, чтобы

$$\lim_{t \to t_0} x(t) = a_1, \;\; \lim_{t \to t_0} y(t) = a_2, \;\; \lim_{t \to t_0} z(t) = a_3 .$$

Отсюда следует равенство:

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t)\vec{i} + \lim_{t \to t_0} y(t)\vec{j} + \lim_{t \to t_0} z(t)\vec{k} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} .$$

Таким образом, для того чтобы вычислить предел вектор-функции, достаточно найти соответствующие пределы координат этой функции. Если хотя бы один из пределов координат функции $\vec{r}(t)$ не существует, то не существует и $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}(t)$.

Геометрический смысл предела вектор-функции: если начало всех векторов $\{\, \vec{r}(t) \mid \; t \in T \}$ поместить в одну точку, то условие $|\vec{r}(t) - \vec{a}| < \varepsilon$ означает, что концы всех векторов $\vec{r}(t)$ при $t \in U(t_0; \delta)$ лежат в шаре радиуса ε с центром в конце вектора $\vec{a}$ (рисунок 3. 17)

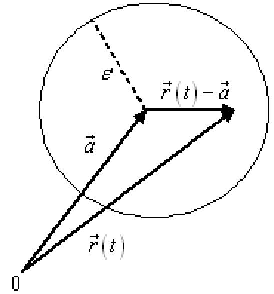

Рисунок 3. 17 – Геометрический смысл предела вектор-функции

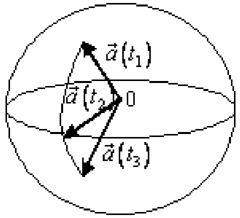

Рисунок 3. 15 – Годограф вектор-функции, изменяющейся только по направлению

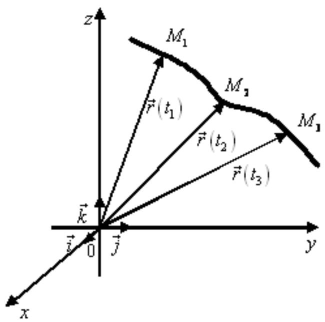

Рисунок 3. 16 – Радиус-векторы

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^3$ задана прямоугольная система координат $Oxyz$. Тогда задание вектор-функции означает задание координат вектора $\vec{a}(t)$. Если начало вектора $\vec{a}(t)$ совпадает с точкой O, то $\vec{a} = \vec{a}(t)$ называется *радиусом-вектором* точки M и обозначается $\vec{r}(t)$ (рисунок 3. 16).

Любой радиус-вектор $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OM}$ пространства $\mathbb{R}^3$ задается своими координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ (координаты вектора совпадают с координатами точки $M \in \Gamma$ (рисунок 3.16)) и может быть разложен по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Так как каждой упорядоченной тройке чисел x, y, z соответствует единственный радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(t)$, то задание вектор - функции эквивалентно заданию трех числовых функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t), \end{cases}$$

где $t \in T$.

Поэтому исследование векторной функции скалярного аргумента сводится к исследованию трех координатных функций $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, определенных на множестве T. В координатной

$$\left.\begin{aligned} y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Следовательно, по определению первой производной для функции, заданной параметрическими уравнениями, имеем:

$$\left.\begin{aligned} y''_x &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t). \end{aligned}\right\}$$

Аналогично находится третья производная:

$$\left.\begin{aligned} y'''_x &= \frac{(y''_x)'_t}{x'_t}, \\ x &= \varphi(t) \end{aligned}\right\}$$

и производные высших порядков.

Пусть функция $y = f(x)$ задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Найденная производная y'_x содержит, в общем случае, как аргумент x, так и функцию y. По определению вторая производная от функции $y = f(x)$ есть производная от первой производной. Следовательно, для нахождения второй производной, надо продифференцировать найденную первую производную по аргументу x, продолжая рассматривать y как функцию от x. В выражение для второй производной войдут x, y и y'. Подставляя вместо y' его значение, находим y'', зависящую только от x и y. Аналогично поступаем при нахождении y''', y^{IV} и производных более высоких порядков.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Дифференциал этой функции $dy = f'(x)dx$ зависит от x и $dx = \Delta x$, причем Δx от x не зависит, так как приращение в данной точке x можно выбирать независимо от точки x. Поэтому dx в формуле первого дифференциала будет постоянным. Тогда выражение $f'(x)dx$ зависит только от x и его можно дифференцировать по x.

Дифференциал от дифференциала функции $y = f(x)$ в данной точке x называется *дифференциалом второго порядка* или *вторым дифференциалом* и обозначается d^2y или $d^2f(x)$, т. е.

$d^2 y = d(dy)$. Полагая dx в формуле $dy = f'(x)dx$ первого дифференциала постоянным, получим:

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = d(f'(x)) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) =$$
$$= (f''(x)dx)dx = f''(x)(dx)^2 .$$

Аналогично определяется дифференциал третьего порядка $d^3 y = d\left(d^2 y\right)$ и он равен:.

$$d^3 y = d\left(f''(x)(dx)^2\right) = d\left(f''(x)\right)(dx)^2 + f''(x)d\left((dx)^2\right) =$$
$$= \left(f'''(x)dx\right)(dx)^2 = f'''(x)(dx)^3 .$$

Дифференциал n-го порядка (или *n-й дифференциал*) функции $y = f(x)$ определяется как дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка: $d^{(n)}y = d\left(d^{(n-1)}y\right)$ и $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)(dx)^n$.

Скобки при степенях dx можно опустить: $d^{(n)}y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Отсюда следует, что производная n-го порядка функции $y = f(x)$ есть отношение ее дифференциала n-го порядка к n-й степени дифференциала независимой переменной:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} .$$

В частности, при $n = 1, 2, 3$ получим соответственно:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} ,\ f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} ,\ f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} .$$

Тема 4 Теоремы о среднем. Правило Лопиталя

4.1 Теорема Ролля
4.2 Теоремы Лагранжа и Коши
4.3 Правило Лопиталя

Одним из важнейших классов (множеств) функций, изучаемых в курсе математического анализа и имеющих первостепенное значение при решении задач практического характера, является класс $C_{[a;b]}$ – непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций. Класс $C^1_{[a;b]}$ дифференцируемых функций является подмножеством множества $C_{[a;b]}$. Дифференцируемые функции представляют особый интерес, так как большинство задач техники и естествознания приводят

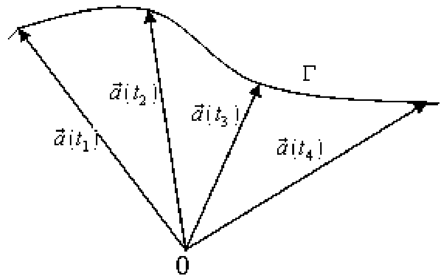

Рисунок 3. 13 – Годограф вектор-функции

С физической точки зрения годограф вектор-функции можно рассматривать как траекторию движущейся в пространстве материальной точки, а всякую линию Γ, в пространстве как годограф некоторой вектор-функции.

З а м е ч а н и я. *1* Если вектор $\vec a = \vec a(t)$ изменяется только по длине, а его направление остается постоянным, то $\{\vec a(t) \mid t \in T\}$ есть множество связанных векторов, расположенных на луче, выходящем из точки O. Годографом такой вектор-функции является луч Γ (рисунок 3. 14), если $T = \square$.

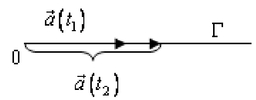

Рисунок 3. 14 – Годограф вектор-функции,
изменяющейся только по длине

2 Если при изменении t модули векторов $\vec a = \vec a(t)$ не меняются, а изменяется только направление, то векторы из множества $\{\vec a(t) \mid t \in T\}$ будут находиться в шаре радиусом $|\vec a(t)|$ с центром в точке O. Годографом такой функции является линия, принадлежащая сфере радиусом $|\vec a(t)|$ (рисунок 3. 15).

является асимптотой графика функции $r(\varphi)$, если выполнены следующие условия:

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi) = +\infty ,$$

$$\lim_{\varphi\to\varphi_0} r(\varphi)\sin(\varphi-\varphi_0) = d ,\ d \neq 0.$$

Тогда, выражая декартовы координаты через полярные:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

получим параметрические уравнения кривой (φ – параметр):

$$x = r(\varphi)\cos\varphi ,$$

$$y = r(\varphi)\sin\varphi .$$

Тема 9 Векторные функции

9.1 Годограф векторной функции
9.2 Производная и дифференциал векторной функции
9.3 Длина кривой
9.4 Натуральное уравнение гладкой кривой и уравнение нормальной плоскости

Векторной функцией действительного аргумента (*вектор-функцией скалярного аргумента*) называется отображение, которое каждому действительному числу $t \in T \subset \mathbb{R}$ ставит в соответствие один и только один вектор $\vec{a}$ трехмерного пространства $\mathbb{R}^3$. *Обозначается*: $\vec{a} = \vec{a}(t)$, $t \in T$.

Вектор $\vec{a} = \vec{a}(t)$ имеет определенную длину (модуль) и определенное направление в каждой точке t .

Выберем общую точку приложения O векторов $\vec{a} = \vec{a}(t)$. При непрерывном изменении аргумента t конец вектора $\vec{a} = \vec{a}(t)$ описывает некоторую линию Γ. Линия Γ, описываемая в пространстве концом вектора $\vec{a}$ при непрерывном изменении аргумента $t \in T \subset \mathbb{R}$, называется *годографом* вектор-функции скалярного аргумента $\vec{a}(t)$ (рисунок 3. 13).

к исследованию функций, имеющих производную. Также дифференцируемые функции обладают некоторыми общими свойствами, среди которых важную роль играют *теоремы о среднем*. В каждой из этих теорем утверждается существование на отрезке $[a;b]$ такой точки, в которой исследуемая функция $y = f(x)$ обладает тем или иным свойством.

Теорема (Ролля) Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям на отрезке $[a;b]$: $f(x)$ определена и непрерывна на $[a;b]$; $f(x)$ дифференцируема на $(a;b)$; $f(a) = f(b)$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$, такая, что $f'(\xi) = 0$.

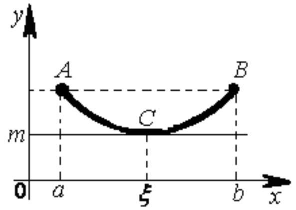

Рисунок 3. 5 – Геометрический смысл теоремы Ролля

Геометрический смысл теоремы Ролля. Если непрерывная на отрезке $[a;b]$ и дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ принимает на концах этого отрезка равные значения, то на графике этой функции найдется хотя бы одна такая точка C с абсциссой $x = \xi$, в которой касательная параллельна оси Ox (рисунок 3. 5).

Физический смысл теоремы Ролля. Пусть x – время, а $f(x)$ – координаты точки, движущейся по прямой, в момент времени x. В начальный момент $x = a$ точка имеет координату $f(a)$, далее движется определенным образом со скоростью $f'(x)$. В момент времени $x = b$ она возвращается в точку с координатой $f(a)$ (так как $f(a) = f(b)$). Ясно, что для возвращения в точку $f(a)$, она должна остановится в некоторый момент времени (прежде чем повернуть назад), т. е. в некоторый момент $x = \xi$ скорость $f'(\xi) = 0$.

Теорема (Лагранжа) Если функция $f(x)$ непрерывна на *отрезке $[a;b]$ и дифференцируема на интервале $(a;b)$, то существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$ такая, что*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Теорема Лагранжа называется также *теоремой о конечных приращениях*, а приведенная формула – *формулой Лагранжа*. Часто используется следующая запись формулы Лагранжа:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi),\ \xi \in (a;b).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Выражение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = k$$

представляет собой угловой коэффициент хорды AB, а $f'(\xi)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $f(x)$ в точке C. Теорема Лагранжа утверждает, что между точками A и B на дуге AB найдется, по крайней мере, одна точка C, в которой касательная параллельна хорде AB, при условии, что в каждой точке дуги AB существует касательная (рисунок 3. 6).

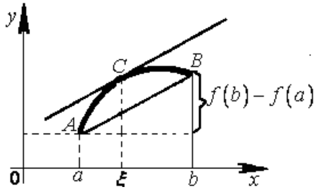

Рисунок 3. 6 – Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Физический смысл теоремы Лагранжа. Пусть x – время, а $f(x)$ – координаты точки, движущейся по прямой, в момент времени x. В выражении

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

величина в левой части равенства является средней скоростью движения точки по прямой за промежуток времени от a до b. Формула Лагранжа показывает, что существует такой момент времени $x = \xi$, в котором мгновенная скорость равна средней скорости на временном отрезке $[a;b]$.

Если в формуле Лагранжа положить $f(a) = f(b)$, получим теорему Ролля, т. е. теорема Ролля является частным случаем теоремы

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = x(t),\ \ y(-t) = -y(t)$ (симметрия относительно оси Ox);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = -x(t),\ \ y(-t) = y(t)$ (симметрия относительно оси Oy);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = -x(t),\ \ y(-t) = -y(t)$ (симметрия относительно начала координат);

– $\forall\ t \in T \quad x(-t) = x(t),\ \ y(-t) = y(t)$ (наложение).

3 Если t_p – точка, найденная в п. 4) схемы, и если на интервале $(t_p;t_{p+1})$ производная $\dot{x}(t)$ сохраняет знак, то на этом интервале система уравнений (8.1) задает параметрически функцию вида $y = f(x)$, для которой точка $x(t_p)$ является точкой возможного экстремума. Является ли $x(t_p)$ точкой экстремума функции $y = f(x)$, можно определить, рассмотрев изменение y на интервалах $(t_{p-1};t_p)$ и $(t_p;t_{p+1})$.

Если функцию, заданную неявно уравнением

$$F(x;y) = 0$$

возможно разрешить относительно одной из переменных, то исследование этой функции проводится обычным образом.

Иногда удается получить параметрические уравнения функции. Для этого положим $y = \alpha(t)x^n$, где $\alpha(t)$ и n – выбранные подходящим образом функция и число.

Подставляя выражение для y в уравнение $F(x;y) = 0$, получим

$$F(x;\alpha(t)x^n) = 0.$$

Пусть $x = \varphi(t)$ – решение этого уравнения. Тогда

$$x = \varphi(t),\ \ y = \alpha(t)\varphi^n(t) = \psi(t)$$

есть параметрические уравнения кривой.

На практике выбор функции $\alpha(t)$ определяется видом функции $F(x;y)$.

Пусть в полярной системе координат $(\varphi;r)$ кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$.

В полярных координатах прямая, задаваемая уравнением

$$r = \frac{d}{\sin(\varphi - \varphi_0)},\ d \neq 0,$$

Часть кривой, соответствующую изменению параметра t от t_p до t_{p+1} называется *ветвью кривой*. Каждая ветвь кривой является графиком функции вида $y = f(x)$;

5) найти точки t_j, в которых $y''_{xx} = 0$;

6) результаты исследования занести в таблицу, аналогичную таблице 3. 2.

Таблица 3. 2 – Результаты исследования графика функции, заданной параметрическими уравнениями

$(t_p;t_{p+1})$		…	
$(x_p;x_{p+1})$		…	
$(y_p;y_{p+1})$		…	
Знак y''_{xx}		…	

Здесь в первой строке записываются промежутки изменения параметра t, граничными точками которых t_p и t_{p+1} служат точки, найденные в п. 1), 4) и 5). Во второй и третьей строках таблицы приводятся соответствующие промежутки изменения переменных x и y. В последней строке таблицы указывается знак y''_{xx}, определяющий направление выпуклости графика соответствующей ветви кривой;

7) пользуясь таблицей, построить ветви кривой, соответствующие промежуткам $(t_p;t_{p+1})$.

Замечания. 1 В п. 1) схемы можно найти асимптоты кривой (если они имеются). Для этого надо иметь в виду следующее:

а) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to x_0$, а $y \to \infty$, то $x = x_0$ – вертикальная асимптота кривой;

б) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to \infty$, а $y \to y_0$, то $y = y_0$ – горизонтальная асимптота кривой;

в) если при $t \to t_p$ ($t \to t_p + 0$ или $t \to t_p - 0$) $x \to \infty$ и $y \to \infty$, то возможна наклонная асимптота.

2 Вместо всей области определения T рассматривается только ее неотрицательная часть в следующих случаях:

Лагранжа.

Положим в формуле Лагранжа $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$. Тогда она примет вид

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta\Delta x)\Delta x,$$

где $0 < \theta < 1$. Данная формула связывает приращения аргумента и функции, поэтому ее называют *формулой конечных приращений*. Данная формула дает точное выражение приращения функции через вызвавшее его приращение аргумента в отличие от дифференциала функции, который определяет приближенное значение приращения функции: $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$. В приближенных вычислениях приращение функции заменяют чаще дифференциалом, т.е. полагают $\Delta y \approx dy$. Формула Лагранжа применяется реже, так как для ее использования необходимо указать точку $\xi = x_0 + \theta\Delta x \in (a;b)$, что, вообще говоря, не всегда удается.

Обобщением теоремы Лагранжа является теорема Коши.

Теорема (Коши) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям: непрерывны на отрезке $[a;b]$; дифференцируемы в интервале $(a;b)$, причем $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$. Тогда существует, по крайней мере, одна точка $\xi \in (a;b)$, такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Если положить в формуле Коши $g(x) = x$, то все условия теоремы Коши будут выполнены, и формула Коши $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ «перейдет» в формулу Лагранжа $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$. Таким образом, теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши.

Теорема (Лопиталя) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) определены и дифференцируемы на интервале $(a;b)$, за исключением, быть может, точки x_0, причем $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in (a;b)$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$ (либо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ ($+\infty$ или $-\infty$));

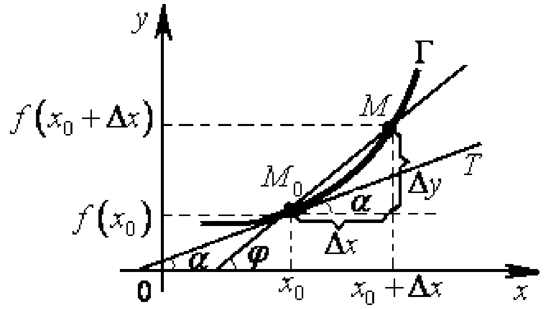

Рисунок 3. 3 – Геометрический смысл касательной

Предположим, что касательная к кривой в точке M_0 существует. Угловой коэффициент секущей M_0M есть

$$k=\operatorname{tg}\varphi=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x\to 0$, то точка M движется по кривой к точке M_0 и секущая MM_0 стремится к своему предельному положению M_0T. Таким образом,

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{M\to M_0}\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Отсюда следует *геометрический смысл производной*: производная от функции $f(x)$ при $x=x_0$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной имеет вид

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Так как угловые коэффициенты касательной и нормали связаны условием перпендикулярности $k_{\text{норм}}=-\frac{1}{k_{\text{кас}}}$, то *уравнение нормали* в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Углом между кривыми называют угол между касательными к кривым в точке их пересечения.

Геометрический смысл дифференциала: дифференциал dy функции $y=f(x)$ в точке x_0 изображается приращением ордина-

При решении конкретных задач отдельные этапы схемы могут быть расширены, другие же могут оказаться излишними или не выполнимыми.

Тема 8 Построение графиков функций

8.1 Исследование функций, заданных параметрическими уравнениями

8.2 Исследование функций, заданных неявно

8.3 Исследование функций, заданных в полярных координатах

Пусть параметрические уравнения плоской кривой имеют вид

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t\in T.$$

Исследование и построение такой кривой можно провести по следующей схеме:

1) найти множество T – общую часть областей определения функций $x(t)$, $y(t)$ (если множество T не задано). При этом необходимо отметить те значения параметра t_i (включая $t_i=\pm\infty$), для которых хотя бы один из односторонних $\lim\limits_{t\to t_i\pm 0}x(t)$, $\lim\limits_{t\to t_i\pm 0}y(t)$ равен $+\infty$ или $-\infty$;

2) установить, обладает ли кривая симметрией, позволяющей сократить выкладки;

3) найти нули функций $x(t)$, $y(t)$ и области знакопостоянства этих функций;

4) найти точки t_k, в которых хотя бы одна из производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ равна нулю или разрывна. Заметим, что точки t_i отмеченные в п. 1) и точки t_k, найденные в этом пункте, разбивают множество T на промежутки знакопостоянства производных $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Поэтому на каждом таком промежутке $(t_p;t_{p+1})$ функция $x(t)$ строго монотонна. Следовательно, система параметрических уравнений на интервале $(t_p;t_{p+1})$ задает параметрически функцию вида $y=f(x)$. Производные этой функции выражаются по формулам

$$y'_x=\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)},\ y''_{xx}=\frac{\frac{d}{dt}\left(y'_x\right)}{\dot{x}(t)}.$$

в точках разрыва второго рода функции $y = f(x)$. Следовательно, для отыскания вертикальных асимптот графика функции надо определить те значения x, при которых хотя бы один из односторонних пределов функции бесконечен.

Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$).

Теорема 4 Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы:

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = b.$$

Если $k = 0$, то прямая $y = b$ называется *горизонтальной асимптотой.*

Исследование дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ на $D(f)$ (за исключением, быть может, конечного множества точек) и построение ее графика может быть выполнено по следующей схеме:

1) находится $D(f)$, определяются точки разрыва, нули, точки пересечения графика функции с осью Oy, периодичность, симметрия;

2) находятся наклонные и горизонтальные асимптоты графика функции (если они существуют);

3) с помощью первой производной функции определяются стационарные точки и интервалы монотонности;

4) с помощью второй производной определяются интервалы вогнутости и выпуклости графика функции, точки перегиба;

5) находятся локальные экстремумы функции на $D(f)$.

По результатам исследований строится график функции. Если исследуемая функция четная или нечетная, то достаточно исследовать функцию и построить ее график для положительных значений аргумента из области определения. Иногда для удобства результаты исследования сводятся в таблицу, построение которой приведено в типовом примере 5.

5.2 Формула Маклорена

Пусть функция $f(x)$ и n раз дифференцируема в точке x_0. Многочлен

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

называется *многочленом Тейлора* для функции $f(x)$.

Теорема (Тейлора) Если функция $y = f(x)$ определена и $n+1$ раз дифференцируема в окрестности $U(\delta; x_0)$, то при $x \to x_0$ имеет место формула Тейлора

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ *– остаточный член в форме Лагранжа,* $\xi \in U(\delta; x_0)$.

Если записать $\xi = x_0 + \theta(x - x_0)$, $0 < \theta < 1$, то получим

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Остаточный член в формуле Тейлора также записывается в *форме Пеано* $R_{n+1}(x) = o\left((x - x_0)^n\right)$.

Если в формуле Тейлора положить $x_0 = 0$, то получается *формула Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x).$$

Основные разложения элементарных функций по формуле Маклорена с остаточным членом в виде Лагранжа.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x},$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos\left(\theta x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

где $R_n(x) = \dfrac{k(k-1)\ldots(k-n)}{(n+1)!}(1+\theta)^{k-n-1}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

Формула Тейлора широко используется при вычислении пределов, в приближенных вычислениях, при исследовании функции на экстремум, в теории рядов, при вычислении интегралов.

Тема 6 Локальные и глобальные экстремумы функции

6.1 Точки локального и глобального экстремума
6.2 Необходимое и достаточные условия существования локального экстремума функции
6.3 Глобальный экстремум функции на отрезке

С помощью производной функции можно произвести полное исследование функции (найти промежутки возрастания и убывания, экстремумы, точки перегиба, промежутки выпуклости и вогнутости, асимптоты графика) и построить график этой функции.

Теорема (*критерий монотонности функции*) *Для того чтобы дифференцируемая на $(a;b)$ функция не убывала (не возрастала) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \ge 0$ ($f'(x) \le 0$) для всех $x \in (a;b)$. Если же для любого $x \in (a;b)$ $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция f возрастает (убывает) на этом интервале.*

Геометрический смысл теоремы. Касательная к графику возрастающей на $(a;b)$ функции ($f'(x) > 0$) составляет острый угол с осью Ox, касательная к графику убывающей на $(a;b)$ функции, ($f'(x) < 0$) образует тупой угол с осью Ox. Если функция $f(x)$ на $(a;b)$ является постоянной $f(x) = C$, $C = \text{const}$, то $f'(x) = 0$ и касательная к графику функции параллельна оси Ox.

Точка $M(x_0; f(x_0))$ графика дифференцируемой функции $y = f(x)$, в которой направление выпуклости меняется на противоположное, называется *точкой перегиба* (рисунок 3. 12).

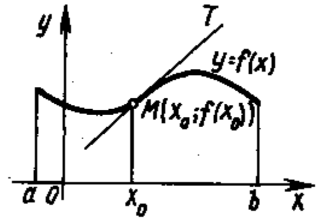

Рисунок 3. 12 – Точка $M(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба графика функции

Теорема (необходимое условие точек перегиба) Если функция $f(x)$ имеет в точке $M(x_0; f(x_0))$ перегиб и существует вторая производная $f''(x)$ в точке x_0, то $f''(x_0) = 0$.

Обратное утверждение верно не всегда.

Точки $M(x_0; f(x_0))$ графика функции $y = f(x)$ называются *точками возможного перегиба*, если $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует.

Теорема (достаточное условие существования точек перегиба) Если для функции $f(x)$ вторая производная $f''(x)$ в некоторой точке x_0 обращается в нуль или не существует и при переходе через нее меняет свой знак, то точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

При исследовании поведения функции на бесконечности, т. е. при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, или вблизи точек разрыва второго рода часто оказывается, что расстояния между точками графика функции и точками некоторой прямой с теми же абсциссами сколь угодно малы. Такая прямая называют *асимптотой графика*.

Прямая $x = x_0$ называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке x_0 равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} = f(x) \pm \infty \text{ или } \lim_{x \to x_0 + 0} = f(x) \pm \infty .$$

Очевидно, что непрерывные на множестве □ функции вертикальных асимптот не имеют; такие асимптоты существуют только большее из них.

Если x_1, x_2, ..., x_n – точки локальных экстремумов, то

$$\min_{x\in[a;b]} f(x) = \min\{f(a); f(b); f(x_1);...;(x_n)\},$$

$$\max_{x\in[a;b]} f(x) = \max\{f(a); f(b); f(x_1);...; f(x_n)\}$$

Тема 7 Исследование функций

7.1 Выпуклость и вогнутость графика функции
7.2 Точки перегиба графика функции
7.3 Асимптоты графика функции
7.4 Общая схема исследования функции

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым* на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y = f(x)$ $\forall x \in (a;b)$ расположена выше любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рисунок 3. 10).

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым* на интервале $(a;b)$, если дуга кривой $y = f(x)$ $\forall x \in (a;b)$ расположена ниже любой касательной T, проведенной к графику этой функции (рисунок 3. 11).

Теорема (достаточный признак вогнутости (выпуклости) графика функции) Если функция $y = f(x)$ на интервале $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ вогнутый (выпуклый вниз). Если функция $y = f(x)$ на $(a;b)$ дважды дифференцируема и $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a;b)$, то график этой функции на $(a;b)$ выпуклый.

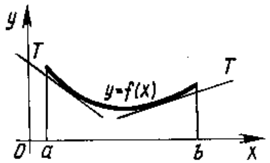

Рисунок 3.10 – Вогнутость графика

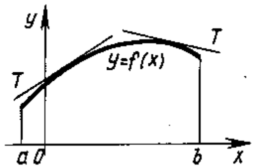

Рисунок 3. 11 – Выпуклость графика

Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)* функции $f(x)$ если существует δ-окрестность точки x_0, такая, что для всех $x \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ выполняется неравенство (рисунок 3. 7)

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) < 0 \;\; (\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) > 0).$$

Значение $f(x_0)$ называется *локальным максимумом (минимумом)* функции и обозначается:

$$\max_{x\cup U(\delta;x_0)} f(x) = f(x_0) \;\; \left(\min_{x\cup U(\delta;x_0)} f(x) = f(x_0)\right).$$

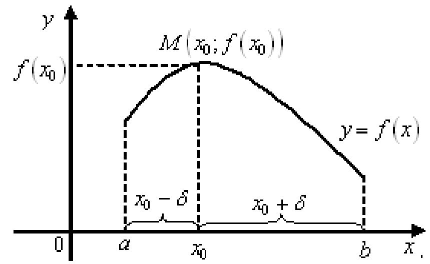

Рисунок3. 7 – Локальный максимум $M(x_0, f(x_0))$

Точки максимума или минимума функции называются *точками экстремума функции*, а максимумы и минимумы функции называются *экстремумами функции*.

Экстремумы функции носят локальный характер – это наибольшее или наименьшее значения функции по сравнению с близлежащими ее значениями.

Если функция $f(x)$ на $[a;b]$ имеет несколько максимумов и минимумов, то возможен случай, когда максимум функции меньше ее минимума.

Наименьшее и наибольшее значения функции на $[a;b]$ называются *абсолютными минимумом* и *максимумом* или *глобальными экстремумами* функции $f(x)$ и обозначаются:

$$\min_{x\in[a;b]} f(x), \;\; \max_{x\in[a;b]} f(x).$$

Теорема (необходимое условие экстремума) Если в точке x_0 функция $f(x)$ достигает экстремума, то ее производная в этой точке равна нулю или не существует.

Из теоремы 2 следует, что в точках экстремума функции $f(x)$

касательная к ее графику:

– параллельна оси абсцисс, если существует $f'(x_0)=0$ (рисунок 3. 8, а);

– параллельна оси ординат, если $f'(x_0)$ бесконечна (рисунок 3. 8, б);

– существуют не совпадающие левая и правая касательные, если $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ (рисунок 3. 8, в).

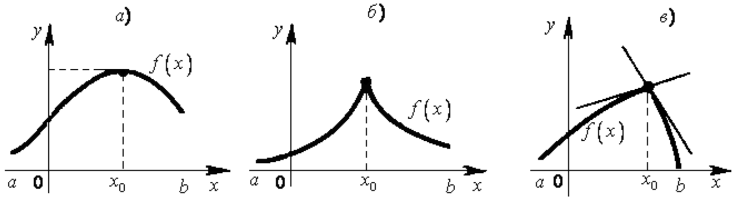

Рисунок 3. 8 – Положение касательной к графику функции в точках экстремума

Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль или не существует, называют *критическими* или *точками возможного экстремума*. Точки, в которых производная функции $y=f(x)$ обращается в нуль, называют *стационарными*.

Критическая точка x_0 называется *угловой точкой* функции $f(x)$ если $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$ (рисунок 3. 8, в). Критическая точка x_0 называется *точкой возврата* функции, если ее левая $f'_-(x_0)$ и правая $f'_+(x_0)$ производные бесконечны (рисунок 3. 8, б).

Не всякая критическая точка функции $f(x)$ является точкой ее локального экстремума.

Теорема (первый достаточный признак существования экстремума функции) Пусть x_0 – критическая точка непрерывной функции $f(x)$. Если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «+» на «–», то x_0 – точка локального максимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с «–» на «+», то x_0 – точка локального минимума; если $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Теорема (второй достаточный признак существования экстремума функции) Стационарная

точка x_0 функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в $U(\delta;x_0)$, является точкой локального минимума $f(x)$, если $f''(x_0)>0$, и точкой локального максимума, если $f''(x_0)<0$ (рисунок 3. 9).

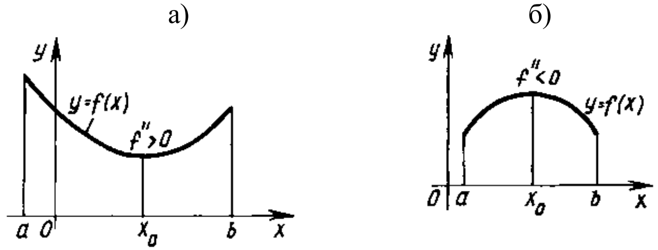

Рисунок 3. 9 – Локальные минимум (а) и максимум (б) функции

Теорема (третий достаточный признак существования экстремума функции) Пусть функция $f(x)$ – n раз непрерывно дифференцируема в точке x_0 и в этой точке

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0,\ f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

Тогда:

1) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 – точка локального максимума.

2) если n – четное и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 – точка локального минимума;

3) если n – нечетное, то x_0 не является точкой локального экстремума.

Одной из основных характеристик функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ являются ее глобальные экстремумы, т. е. наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[a;b]$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах этого отрезка или в точках ее локального экстремума. Следовательно, для отыскания глобальных экстремумов $\min\limits_{x\in[a;b]} f(x)$, $\max\limits_{x\in[a;b]} f(x)$ функции $f(x)$, надо найти ее значения на концах отрезка $[a;b]$, в точках локального экстремума и выбрать соответственно наименьшее и наи-