Тема 2 Теория пределов

Практическое занятие 1 **Числовые последовательности**

1.1 Определение числовой последовательности
1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности
1.3 Монотонные последовательности
1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

1.1 Определение числовой последовательности

В курсе школьной математики кратко излагались элементы теории последовательности при изучении арифметической и геометрической прогрессий, при последовательных приближениях иррациональных чисел.

Числовой последовательностью $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется числовая функция, определенная на множестве натуральных чисел N и принимающая свои значения из множества действительных чисел $f : \mathrm{N} \to \mathrm{R}$.

Обозначается: $x_n = (x(1); x(2); ...; x(n); ...)$ или

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = (x_1; x_2; ...; x_n; ...).$$

Числа $x_1, x_2, x_3, ...$ называются *элементами* (*членами*) последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, x_n – *формула* общего члена последовательности, n – *номер* общего члена последовательности.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения ее любого элемента.

Основными *способами задания* последовательности являются: формула n-го члена, рекуррентный, словесный, графический.

Пусть даны две последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$.

Суммой последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов последовательностей.

Произведением последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ на число m называется последовательность $(m \cdot x_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента последовательности на число m.

Произведением последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $(x_n \cdot y_n)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен произведению соответствующих элементов последовательностей.

Если все члены последовательности (y_n) отличны от нуля, то частным последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ называется последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)_{n=1}^{\infty}$, каждый элемент которой равен частному соответствующих элементов последовательностей.

1.2 Ограниченные и неограниченные последовательности

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной сверху (снизу)*, если существует число M (m) такое, что каждый элемент последовательности x_n удовлетворяет неравенству $x_n \le M$ ($x_n \ge m$). Числа M и m называются *верхней и нижней гранями* числовой последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Символическая запись:

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *– ограничена сверху* $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N} \;\; x_n \le M$.

$(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *– ограничена снизу* $\Leftrightarrow$ $\exists m \in \mathbf{R} : \forall n \in \mathbf{N} \;\; x_n \ge m$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если она ограничена сверху и снизу, т.е. существуют числа M и m такие, что каждый элемент x_n последовательности удовлетворяет неравенству $m \le x_n \le M$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} \textit{ – ограничена} \Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbf{R} : \forall\, n \in \mathbf{N} \;\; m \le x_n \le M.$$

Пусть $A = \max\{|m|, |M|\}$. Тогда условие ограниченности можно записать в виде $|x_n| \le A$.

Последовательность (x_n) называется *неограниченной*, если для любого действительного числа $A > 0$ существует элемент x_n последовательности, удовлетворяющий неравенству $|x_n| \ge A$, т.е. либо $x_n \ge A$ или $x_n \le -A$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \textit{неограниченна} \Leftrightarrow \ \forall\, 0 < A \in \mathbf{R}\ \exists n \in \mathbf{N} : |x_n| \ge A .$$

1.3 Монотонные последовательности

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *неубывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n \le \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *возрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *невозрастающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 \ge x_2 \ge \ldots \ge x_n \ge \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *убывающей*, если ее элементы удовлетворяют условию: $x_1 > x_2 > \ldots > x_n > \ldots$.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *монотонной*, если является одной из выше перечисленных. Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *строго монотонной*, если она возрастающая или убывающая.

1.4 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$(\alpha_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.м.п.} \Leftrightarrow \ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon) \quad |\alpha_n| < \varepsilon .$$

Свойства бесконечно малых последовательностей:

– бесконечно малая последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ ограничена;

– сумма и разность бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность;

– произведение бесконечно малой последовательность $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ на ограниченную $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ есть бесконечно малая последовательность.

Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно большой*, если для любого положительного числа $c > 0$ существует такой номер $N(k)$ такой, что для всех номеров $n > N(k)$ выполняется неравенство $|x_n| > c$.

Символическая запись:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} - \text{б.б.п.} \Leftrightarrow \ \forall\, c > 0\ \exists N(k) : \forall n \ge N(k) \quad |x_n| > c .$$

Если последовательность бесконечно большая, то она неограниченна. Если последовательность неограниченна, то она не обязательно бесконечно большая. Если $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательность. Если $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ бесконечно малая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left(\dfrac{1}{\alpha_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно большой последовательностью.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определение числовой последовательности. Приведите примеры последовательностей с различным способом задания.

2 Перечислите арифметические действия над последовательностями.

3 Дайте определение ограниченной и неограниченной последовательности. Приведите примеры.

4 Какие последовательности называются монотонными, строго монотонными?

5 Может ли быть монотонной последовательностью: сумма двух немонотонных последовательностей; произведение двух немонотонных последовательностей?

6 Сформулируйте определение бесконечно малой и бесконечно большой последовательности. Какими свойствами они обладают?

Решение типовых примеров

1 Напишите пять первых членов из следующих последовательностей:

а) $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$,

б) числа Фибоначчи $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$,

в) $y_n = \begin{cases} -n, \text{ если } n - \text{простое число}, \\ -n^2, \text{если } n - \text{составное число}. \end{cases}$

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

Решение. а) для последовательности $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ имеем $x_1 = 2$, $x_2 = -\dfrac{3}{4}$, $x_3 = \dfrac{4}{9}$, $x_4 = -\dfrac{5}{16}$, $x_5 = \dfrac{6}{25}$.

Поскольку $|x_n| = \left|(-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}\right| = \dfrac{n+1}{n^2} \le 2$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то последовательность является ограниченной.

Так как $x_3 > x_4$ и $x_4 < x_5$, видно, что определение монотонности не выполняется. Значит, последовательность $x_n = (-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n^2}$ не является монотонной.

б) для чисел Фибоначчи имеем: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_2 + x_1 = 2$, $x_4 = x_3 + x_2 = 3$, $x_5 = x_4 + x_3 = 5$.

Поскольку $x_n \ge 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то последовательность ограничена снизу, но неограничена сверху. При этом $x_n \le x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Значит, числа Фибоначчи образуют неубывающую последовательность.

в) для последовательности (y_n) получим: $y_1 = -1$, $y_2 = -2$, $y_3 = -3$, $y_4 = -16$, $y_5 = -5$.

Данная последовательность ограничена сверху числом -1, но неограничена снизу. Она не является монотонной, так как $y_4 < y_3$ и $y_4 < y_5$.

2 Доказать по определению, что последовательность $\left(\dfrac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{6};\ldots\right)$ является бесконечно малой последовательностью.

Решение. Возьмем произвольное малое число $\varepsilon > 0$. Так как $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$, то для нахождения значений n, удовлетворяющих этому неравенству, достаточно его решить. Поскольку $n \in \mathbf{N}$, то $\dfrac{1}{2n} < \varepsilon$. Решая данное неравенство, получим $n > \dfrac{1}{2\varepsilon}$. Следовательно, в качестве $N(\varepsilon)$ можно взять целую часть числа $\dfrac{1}{2n}$: $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$. Тогда неравенство $\left|\dfrac{1}{2n}\right| < \varepsilon$ будет выполнятся при всех номеров n, больших чем $N(\varepsilon)$.

Например, пусть $\varepsilon = 0{,}1$. Тогда $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{2 \cdot 0{,}1} = 5$.

Начиная с шестого номера все члены последовательности $\left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ меньше $\varepsilon = 0{,}1$.

3 Доказать по определению, что последовательность $\left(n^2\right)_{n=1}^{\infty} = (1;4;9;\ldots)$ является бесконечно большой.

Решение. Возьмем произвольное число $c > 0$. Из неравенства $|x_n| > c$ найдем $N(c)$:

$$n^2 > c \;\Rightarrow\; n > \sqrt{c}.$$

Возьмем за $N(k)$ целую часть числа $\sqrt{c}$: $N(k) = 1 + \left\lfloor \sqrt{c} \right\rfloor$. Тогда для всех номеров n, больших чем $N(c)$, выполняется неравенство $n^2 > c$.

Например, для $c = 0{,}16$ имеем $N(c) = 1 + \left\lfloor \sqrt{0{,}16} \right\rfloor = 1$. Значит, для всех членов последовательности, начиная со второго номера, выполняется неравенство $n^2 > c$. Если $c = 12$, то $N(c) = 1 + \left\lfloor \sqrt{12} \right\rfloor = 4$ и неравенство верно $\forall n > 4$.

4 Является ли неограниченная последовательность бесконечно большой?

Решение. Рассмотрим последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (1,0,2,0,3,0,4,0,\ldots)$. Данная последовательность является неограниченной, поскольку для любого $A \in \mathbf{N}$ найдется элемент последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, для которого $x_n > A$. Однако она не является бесконечно большой, так как это неравенство не выполняется для любого $n \in \mathbf{N}$. Поэтому не всякая неограниченная последовательность является бесконечно большой.

Задания для аудиторной работы

1 Напишите пять первых членов каждой из следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{1}{2n+1}$; г) $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2$, при $n > 1$;

б) $x_n = \frac{n+2}{n^3+1}$; д) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2}$, при $n > 1$;

в) $x_n = \frac{n}{2^{n+1}}$; е) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$.

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными, монотонными?

2 Найти формулу для общего члена следующих последовательностей:

а) члены с четными номерами равны 1, а члены с нечетными равны -1;

б) членами последовательности являются корни уравнения $\cos \pi x = 0$.

3 Может ли быть монотонной последовательностью:

а) сумма двух немонотонных последовательностей;

б) произведение двух немонотонных последовательностей?

4 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n = \frac{n}{n^2+1}$, б) $x_n = \frac{\sin n}{n}$, в) $x_n = 2^{-n}$.

являются бесконечно малыми.

5 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n = \ln(n+1)$, б) $x_n = 2^{2n+1}$, в) $x_n = (-1)^n n$.

являются бесконечно большими.

Задания для домашней работы

1 Напишите пять первых членов каждой из следующих последовательностей:

а) $x_n = \frac{n+2}{n+3}$; в) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; д) $x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} 2^n$;

б) $x_n = \sin n$; г); $x_n = \ln n$; е) $x_n = \frac{5^n + (-3)^n}{n^2}$.

Какие из данных последовательностей являются ограниченными сверху, ограниченными снизу, ограниченными?

2 Найти формулу для общего члена следующих последовательностей:

а) члены номерами, кратными 3 равны 1, а остальные равны 0;

б) членами последовательности являются корни уравнения $\sin\frac{\pi x}{2}=0$.

3 Определить, какие из указаных последовательностей являются возрастающими, убывающими, а какие из них не являются монотонными?

а) $x_n=\frac{1}{n+1}$; г) $x_n=3^{-n}$; ж) $x_n=n^2-2n+4$;

б) $x_n=\frac{(-1)^n}{n^2}$; д) $x_n=\sin\frac{1}{n^2}$; и) $x_n=\frac{2^n+(-1)^n}{n}$;

в) $x_n=2^n$; е) $x_n=\lg(1+n)$ к) $x_n=\sqrt{n+2}$.

4 Может ли быть ограниченной последовательностью:

а) сумма двух неограниченных последовательностей;

б) произведение двух неограниченных последовательностей;

в) произведение ограниченной и неограниченной последовательностей.

5 Доказать по определению, что последовательности

а) $x_n=\frac{(-1)^n}{n}$, б) $x_n=\frac{\arcsin n}{n}$.

являются бесконечно малыми.

5. Доказать по определению, что последовательность $x_n=\frac{n^2}{n+1}$ является бесконечно большой.

Практическое занятие 2 Предел последовательности

2.1 Определение и свойства предела последовательности

Число $a\in\mathbf{R}$ называется *пределом* последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, если для любого положительного действительного числа ε найдется такой номер $N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$, что при всех $n>N(\varepsilon)$ элементы этой последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n-a|<\varepsilon$.

Обозначается: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ или $x_n\to a$ при $n\to\infty$.

Символическая запись:

$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a \;\Leftrightarrow\; \forall\,\varepsilon>0\;\exists N(\varepsilon):\forall n\ge N(\varepsilon)\quad |x_n-a|<\varepsilon$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется *сходящейся* (к числу *a*), а последовательности, не имеющие конечного предела, – *расходящимися*.

Неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$ означает, что последовательность $(x_n-a)_{n=1}^{\infty}$ является бесконечно малой последовательностью. Отсюда следует, что любую сходящуюся последовательность можно представить в виде $x_n=a+\alpha_n$, где $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – бесконечно малая последовательность, где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

Бесконечно большая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ имеет бесконечный предел:

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\infty \;\Leftrightarrow\; \forall\,A>0\;\exists N(A):\forall n\ge N(A)\quad |x_n|>A.$$

Сходящиеся последовательности обладают следующими *свойствами*:

– сходящаяся последовательность имеет только один предел;

– если последовательность (x_n) сходится, то она ограничена:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \;\Rightarrow\; \exists M \in \mathbf{R} : |x_n| \le M;$$

– сумма (разность) двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность, предел которой равен сумме пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n;$$

– произведение двух сходящихся последовательностей есть сходящаяся последовательность предел которой равен произведению пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

– частное двух сходящихся последовательностей $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ и $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \ne 0$, есть сходящаяся последовательность предел которой равен частному пределов последовательностей

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n};$$

– если все элементы сходящейся последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, начиная с некоторого номера, удовлетворяют неравенству $x_n \ge b$ ($x_n \le b$), то и предел этой последовательности удовлетворяет неравенству $a \ge b$ ($a \le b$);

– пусть последовательности $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ таковы, что $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n \le y_n \le z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда последовательность $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$;

– каждая ограниченная монотонная последовательность сходится.

2.2 Критерий Коши сходимости последовательности

Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если для любого малого действительного числа ε найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n, больших $N(\varepsilon)$ и любого $p \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Символическая запись: $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – фундаментальна $\Leftrightarrow$

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists N(\varepsilon) : \forall n \ge N(\varepsilon)$ и $\forall\; p \in \mathbf{N} \quad |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Из определения следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+p} - x_n| = 0$.

Критерий Коши сходимости последовательности: Для того, чтобы последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

2.3 Замечательные пределы

Пределы, к которым сводятся вычисления многих пределов условно называются замечательными пределами. Ниже приводся некоторые из них:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0,\ (a \in \mathbf{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1\ \ (a \in \mathbf{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!} = 0.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение предела последовательности.

2 Сформулируйте с помощью логических символов определение расходящейся последовательности, бесконечно большой последовательности.

3 Дайте геометрическую интерпретацию предела последовательности.

4 Перечислите свойства сходящихся последовательностей.

5 Всякая ли монотонная последовательность является сходящейся?

6 Какая последовательность называется фундаментальной?

7 В чем суть критерия Коши?

Решения типовых примеров

1 Доказать по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

Р е ш е н и е. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Найдем номер $N(\varepsilon)$.

Из неравенства $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ получим $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$. Отсюда $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$.

Если взять $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ (так как при $\varepsilon\ge 1$ получим $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]=0\notin\mathbf{N}$), то для всех номеров $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$.

Например, при $\varepsilon=0{,}01$ последнее неравенство справедливо для членов последовательности с номерами 100, 101, ..., а при $\varepsilon=2$ неравенство верно $\forall\ n\in\mathbf{N}$.

2 Доказать, что ограниченная последовательность $x_n=(-1)^n$ не имеет предела.

Р е ш е н и е. Предположим, что она имеет предел, равный $a\in\mathbf{R}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^n=a \iff \forall\ \varepsilon=\frac{1}{2}\ \exists N(\varepsilon):\forall n\ge N(\varepsilon)\quad \left|(-1)^n-a\right|<\frac{1}{2}.$$

При $n=2k$ получим $|1-a|<\dfrac{1}{2}$, при $n=2k-1$ получим

$$|-1-a|<\frac{1}{2}\ \text{ или }\ |1+a|<\frac{1}{2}.$$

С учетом этого $\forall n\ge N(\varepsilon)$

$$2=|1-a+a+1|\le|1-a|+|1+a|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1,$$

т. е. $2<1$. Получили противоречие.

Значит, последовательность $x_n=(-1)^n$ не имеет предела.

3 Доказать, что последовательность $x_n=\dfrac{(-1)^n}{2n}$ сходится к нулю, но она не является монотонной.

Р е ш е н и е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{2n}=0 \iff \forall\ \varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon):\forall n\ge N(\varepsilon)\quad \left|\frac{(-1)^n}{2n}-0\right|<\varepsilon.$$

Найдем номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого выполняется это неравенство:

$$\left|\frac{(-1)^n}{2n}\right|<\varepsilon \iff \frac{1}{2n}<\varepsilon \iff n>\frac{1}{2\varepsilon} \iff N(\varepsilon)=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]+1.$$

Следовательно, последовательность сходится.

Так как $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=\dfrac{1}{4}$, $x_3=-\dfrac{1}{6}$, …, то последовательность не является монотонной.

4 Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

Р е ш е н и е. Покажем, что $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$ монотонна.

Рассмотрим $x_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{2}{n+1}\cdot\dfrac{2^n}{n!}=\dfrac{2}{n+1}\cdot x_n$.

Следовательно, $x_{n+1}<x_n$ $\forall n>2$, т.е. x_n – убывающая и ограничена снизу числом 0. По свойству сходимости монотонной ограниченой последовательности существует предел последовательности $x_n=\dfrac{2^n}{n!}$, равный b, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$.

Переходя к пределу в равенстве $x_{n+1}=\dfrac{2}{n+1}\cdot x_n$ при $n\to\infty$, получим $b=b\cdot 0$. Отсюда $b=0$.

5 Доказать, что $x_n = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$ – сходится.

Р е ш е н и е. Так как

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1+\frac{1}{2^{n+1}} > 1,$$

то x_n – возрастает.

Покажем, что последовательность ограничена. Имеем:

$$\ln x_n = \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

т .е. $\ln x_n < 1$. Откуда $x_n < e$.

Значит, x_n – монотонна и ограничена. Тогда по свойству о сходимости монотонной и ограниченной последовательности x_n сходится.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}$, б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n+1}\right)$, в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n$.

Р е ш е н и е. а) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{8n-5}{2n+3}=\left[\begin{array}{l}\text{разделим числитель}\\ \text{и знаменатель на } n\end{array}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{8-\frac{5}{n}}{2+\frac{3}{n}}=$$

$$=\left[\text{по свойствам пределов}\right]=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(8-\frac{5}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)}=$$

$$=\left[\text{по свойствам пределов}\right]=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}8-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{8-0}{2+0}=\frac{8}{2}=4.$$

б) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)=(\infty-\infty)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{умножим и разделим}\\ \text{на } \sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\end{array}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

в) имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^n=\left(1^\infty\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}\cdot\left(\frac{-4}{n+3}\right)\cdot n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{-4}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-4}}\right)^{\frac{-4n}{n+3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-4n}{n+3}}=e^{-4}.$$

7 Доказать, что последовательность $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$, где $|a_k| < M \quad \forall k=\overline{1,n}$, $|q|<1$, сходится.

Р е ш е н и е. Для доказательства используется критерий Коши.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и рассмотрим разность

$$\left|x_n - x_{n+p}\right| = \left|a_{n+p}q^{n+p}+a_{n+p-1}q^{n+p-1}+\ldots+a_{n+1}q^{n+1}\right| \le$$

$$\le M\left|q^{n+p}\right|+\ldots+M\left|q^{n+1}\right| \le Mp\left|q^{n+1}\right| \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Следовательно, существует $N(\varepsilon)=\left[\frac{\varepsilon}{M}\right]+1$, такое, что $\forall n<\mathbf{N}$ и $\forall p>0$ выполняется неравенство $\left|x_n - x_{n+p}\right|<\varepsilon$. Следовательно, последовательность (x_n) является фундаментальной и согласно критерию Коши она сходится.

8 Доказать, что $x_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$ расходится.

Р е ш е н и е. Построим отрицание к критерию Коши:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n \geq N \ \ \exists p \geq N : \left| x_{n+p} - x_n \right| \geq \varepsilon_0 .$$

Для этого рассмотрим разность

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| = \left| \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p-1} + \ldots + \frac{1}{n+1} \right| \geq p \cdot \frac{1}{n+p} .$$

Пусть $p = n$. Тогда получим $\left| x_{2n} - x_n \right| \geq \frac{1}{2}$.

Значит, $\exists \varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, такое, что $\forall N \ \exists n = p \geq N$, $\left| x_{2n} - x_n \right| \geq \varepsilon_0$, т.е. последовательность не является фундаментальной, а значит и не сходится.

9 Доказать, что последовательность $x_n = \sin n$ расходится.

Решение. Доказательство проведем от противного.

Пусть существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = a$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(n+2) = a$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (\sin(n+2) - \sin n) = 0 .$$

С другой стороны

$$\sin(n+2) = 2\sin 1 \cdot \cos(n+1),$$

$$\lim_{n\to\infty} (2\sin 1 \cdot \cos(n+1) - \sin n) = 0 .$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n+1) = 0 .$$

С учетом того, что $\cos(n+1) = \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1$, имеем

$$\sin n = \frac{1}{\sin 1} (\cos n \cos 1 - \cos(n+1)).$$

Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \sin n = \frac{1}{\sin 1} \lim_{n\to\infty} (\cos n \cos 1 - \cos(n+1)) = 0 .$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = \lim\limits_{n\to\infty} \cos n = 0$, что противоречит равенству $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$.

Следовательно, $\sin n$ расходится.

Задания для аудиторной работы

1 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, указав для каждого положительного числа ε такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n \geq N(\varepsilon)$ элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $\left| x_n - 1 \right| < \varepsilon$, если x_n равно:

а) $\frac{2n+1}{n} - 1$; в) $1 + \frac{(-1)^n}{n}$;

б) $1 + \frac{\sin \frac{\pi n}{2}}{n}$; г) $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$.

2 Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} (0{,}8)^n = 0$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n + 5 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$.

3 Докажите, что последовательность $x_n = n^{(-1)^n}$ расходится.

4 Докажите, что число $a = -1$ не является пределом последовательности $x_n = \cos \pi n$.

5 Докажите по определению, что последовательность $x_n = 2^{\sqrt{n}}$ имеет бесконечный предел при $n \to \infty$.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n-1}{2n+3}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10n}{n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+2}{5n^2 + 4n - 1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2 - n}{n - \sqrt{n}}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 3^n}{3^n - 2}$;

и) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{1+3+5+\ldots+n}$

к) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$;

л) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$;

м) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$;

н) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{n-5}\right)^{3n+1}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n]{2}\right)$;   о) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{2n-5}\right)^{3n+1}$;   п) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+\dfrac{1}{n}}$.

Задания для домашней работы

1 Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$, указав для каждого положительного числа ε такой номер $N(\varepsilon)$, что при всех $n\ge N(\varepsilon)$ элементы x_n последовательности удовлетворяют неравенству $|x_n-1|<\varepsilon$, если x_n равно:

а) $2+\dfrac{1-n}{1+n}$;   в) $1+5^{-n}$;

б) $1+\dfrac{\cos\pi n}{n}$;   г) $\dfrac{n^2-1}{n^2}$.

2 Пользуясь определением предела последовательности, докажите, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$;   б) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n 2=0$.

3 Докажите, что последовательность $x_n=\ln n$ расходится.

4 Докажите, что число $a=0$ не является пределом последовательности $x_n=(-1)^n+1$.

5 Выясните существование предела у следующих последовательностей и найдите его, если он существует:

а) $x_n=-\dfrac{1}{5n}$;   в) $x_n=\dfrac{1}{5+(-1)^n}$;   д) $x_n=\cos n$;

б) $x_n=\dfrac{1}{3^n}$;   г) $x_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2}$,   е) $x_n=1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}$.

6 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-n+4}{10n+251}$;   и) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+27n+30}{n^3+n^2-15}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^4+7n^2+3}{2n^4-9n^2-n+7}$;   к) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}-1}{n-1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$;   л) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2-1}$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[7]{3}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2n+1]{3}\right)$;   м) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{3n-7}\right)^{2n-1}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+4}{n-7}\right)^{2n-1}$;   н) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{3n-7}\right)^{2n-1}$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3}{n^2-1}\right)^{\frac{n}{2}}$;   о) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$;

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{6}$;   п) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[4n]{n}$.

Практическое занятие 3 **Предел функции**

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции
3.2 Способы задания функции
3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши
3.4 Односторонние пределы функции

3.1 Понятие функции, сложная и обратная функции

Под функциями понимается отображение числовых множеств.

Пусть X – произвольное подмножество действительных чисел, $X \subseteq \mathbf{R}$.

Если каждому числу $x \in X$ поставлено в соответствие единственное действительное число $y = f(x)$, то говорят, что на множестве X определена *числовая функция* f. Переменная x называется *независимой переменной* или *аргументом*, y – *зависимой переменной*, множество X называется *областью определения* функции и *обозначается* $D(f)$, а множество $Y = \{\, y \in \mathbf{R} \mid y = f(x), x \in D(f) \,\}$ – *множеством значений* функции и *обозначается* $E(f)$.

Если о функции говорить как об отображении $f : X \to Y$, то $f(x)$ называется *образом элемента* x, а x – *прообразом элемента* $f(x)$. При этом множество Y называется *образом множества* X, множество X – *прообразом множества* Y.

Чтобы определить функцию $y = f(x)$, нужно задать множество X и закон (правило, соответствие) f, переводящий элементы x множества X в элементы y множества Y.

Пусть функции $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ определены на множествах X и U соответственно, причем множество значений функции φ содержится в области определения f. Тогда функция φ переводит элементы x в элементы u, а функция f переводит элементы u в элементы y: $x \overset{\varphi}{\mapsto} u \overset{f}{\mapsto} y$.

Таким образом, каждому значению x ставится в соответствие (посредством промежуточной переменной u) одно значение $y = f(\varphi(x))$. В этом случае y называется *сложной* функцией (*композицией* функций f и φ) аргумента x. При этом функция $u = \varphi(x)$ называется *промежуточным* аргументом, x – *независимым* аргументом. *Обозначается*: $y = f(\varphi(x))$ или $f \circ \varphi$.

Обратная функция. Пусть функция $y = f(x)$ такова, что каждое значение y она принимает только при одном значении x. Такая функция называется *обратимой*. Тогда уравнение $y = f(x)$ можно однозначно разрешить относительно x, т.е. каждому y соответствует единственное значение x. Это соответствие определяет функцию, которая называется *обратной* к функции f.

Обозначается: $x = f^{-1}(y)$ или f^{-1}.

Если функция f^{-1} является обратной по отношению к функции f, то функция f является обратной по отношению к f^{-1}, т.е. $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. Функции f и f^{-1} называются *взаимно обратными*, т.е. $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ и $f^{-1}(f(x)) = x$.

Если числовая функция $y = f(x)$ строго монотонна, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$. При этом, если f – возрастающая функция, то f^{-1} – возрастающая; если f – убывающая, то f^{-1} – убывающая.

Если же у обратной функции, так же как и у данной, аргумент обозначить через x, а зависимую переменную через y, то обратная функция запишется в виде $y = f^{-1}(x)$.

Функции $x = f^{-1}(y)$ и $y = f^{-1}(x)$ различаются только обозначением зависимой и независимой переменных. Поэтому, чтобы из графика функции $x = f^{-1}(y)$ совпадающего с графиком функции $y = f(x)$, получить график функции $y = f^{-1}(x)$, достаточно поменять местами оси Ox и Oy, т.е. повернуть плоскость чертежа вокруг биссектрисы первого координатного угла. Таким образом, график обратной функции $y = f^{-1}(x)$ симметричен графику данной функции $y = f(x)$ относительно биссектрисы первого координатного угла.

3.2 Способы задания функции

Функция задается одним из следующих способов.

Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы устанавливается алгоритм вычисления значений функции $f(x)$ для каждого из значений $x \in D$.

Частное значение функции $y = f(x)$ при некотором значении аргумента x_0 записывается в виде $f(x_0)$ или $y\big|_{x=x_0}$.

При аналитическом задании функции область определения D есть множество значений аргумента x, при которых данная формула имеет смысл.

Аналитически функция $y = f(x)$, $x \in [a;b]$ может быть ***неявно*** задана уравнением $F(x;y) = 0$, если $\forall x \in [a;b]$ $F(x; f(x)) = 0$.

В некоторых случаях, разрешив уравнение $F(x;y) = 0$ относительно *y*, удается получить явное задание функции $y = f(x)$.

Аналитически функция $y = f(x)$ может быть задана в *параметрическом* виде. Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ – две функции одной независимой переменной $t \in T$. Если $x = \varphi(t)$ монотонна на *T*, то существует обратная к ней функция $t = \varphi^{-1}(x)$. Поэтому функцию $y = \psi(t)$, $t = \varphi^{-1}(x)$ можно рассматривать как сложную функцию, переводящую элемент x в элемент y посредством промежуточной переменной t:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = \varphi^{-1}(x), \\ y = \psi(t), \end{cases} \Rightarrow y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x).$$

В этом случае говорят, что сложная функция

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)) = F(x)$$

задана *параметрическими уравнениями* и пишут:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

где t, $t \in T$, *параметр*.

Всякую функцию, заданную явно $y = f(x)$, можно задать параметрическими уравнениями.

Действительно,

$$y = f(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y = f(t). \end{cases}$$

Параметрическое задание функций иногда имеет преимущество перед другими формами их задания. В некоторых случаях непосредственная связь между y и x может быть весьма сложной, в то время как функции $x(t)$ и $y(t)$ определяющие функциональную зависимость y от x через параметр *t*, оказываются простыми.

Табличный способ задания функции осуществляется табличным перечислением n значений аргумента $x_1; x_2; \ldots; x_n$ и соответствующих им значений функции $y_1; y_2; \ldots; y_n$.

Графический способ задания функции состоит в представлении функции $y = f(x)$ графиком в некоторой системе координат.

Графиком Γ *функции* $y = f(x)$ называется множество точек $M(x;y)$ плоскости $\mathbf{R}^2$, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью:

$$\Gamma = \left\{ M(x;y) \in \mathbf{R}^2 \middle| \; y = f(x) x \in D(f) \right\}.$$

Средствами элементарной математики для функции $y = f(x)$ с областью определения $D(f)$ в большинстве случаев можно определить следующие характеристики.

Нули функции и знак функции на множестве $D(f)$. Значение $x \in D(f)$ при котором функция $y = f(x)$ обращается в нуль, называется *нулем функции*, т.е. нули функции являются корнями уравнения $f(x) = 0$.

В интервале, на котором функция положительна, график ее расположен выше оси Ox, а в интервале, на котором она отрицательна,– ниже оси Ox; в нуле функции график имеет общую точку с осью Ox.

Четность и нечетность функции. Числовая функция $y = f(x)$ называется *четной* (*нечетной*), если выполняются следующие условия:

1) область ее определения симметрична относительно точки O, т. е. для каждой точки $x \in D(x)$ существует точка $-x \in D(x)$;

2) для любого x из области определения выполняется равенство

$$f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Существуют функции, которые не являются ни четными, ни нечетными. Они называются функциями ***общего*** вида.

Ось Oy является осью симметрии графика любой четной функции, а начало координат – центром симметрии графика нечетной функции. Графики функций, не обладающих свойствами четности или нечетности, не симметричны.

При изучении поведения четной (нечетной) функции достаточно изучить ее при любом $x > 0$ и продолжить это изучение по симметрии на любое $x < 0$.

Периодичность функции. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве $D(f)$, называется *периодической*, если существует такое число $T > 0$, что $\forall\ x \in D(f)$ выполняются следующие условия:

1) $x - T$, $x + T \in D(f)$;

2) $f(x) = f(x - T) = f(x + T)$.

Число T называется *периодом* функции.

Если число T является периодом функции $y = f(x)$ для любого $n \in \mathbf{N}$, то число nT – также период этой функции. Если существует наименьший положительный период функции, то он называется *основным периодом*. Если T – период функции $y = f(x)$, то достаточно построить график на одном из интервалов длиной T, а затем произвести параллельный перенос его

вдоль оси Ox на $\pm Tk$, $k \in \mathbf{Z}$. Если функция $f(x)$ – периодическая с периодом T, то функция $f(kx)$ – также периодическая с периодом $\dfrac{T}{|k|}$.

К периодическим функциям относится постоянная функция $f(x) = c$, $c = \text{const}$, $D(f) = \mathbf{R}$. Любое число $T \in \mathbf{R}$ является периодом этой функции, но наименьшего (основного) периода T функция не имеет.

Монотонность функции. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции:

$$f(x) \textit{ возрастает на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2);$$
$$f(x) \textit{ убывает на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Функция $y = f(x)$ называется *неубывающей (невозрастающей)* на множестве X, если большему значению аргумента из этого множества соответствует не меньшее (не большее) значение функции:

$$f(x) \textit{ не убывает на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \le f(x_2);$$
$$f(x) \textit{ не возрастает на } X \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \ge f(x_2).$$

Возрастающие и убывающие функции называются *строго монотонными*, а неубывающие и невозрастающие – *монотонными*.

Ограниченность функции. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной сверху (снизу)* на множестве $X \subseteq D(f)$, если существует такое число $M \in \mathbf{R}$, что при любых $x \in X$ выполняется условие $f(x) \le M$ ($f(x) \ge M$):

$$f(x) \textit{ ограничена сверху на } X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \le M;$$
$$(f(x) \textit{ ограничена снизу на } X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in X \quad f(x) \ge M).$$

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной на множестве* $X \subseteq D(f)$, если существует такое положительное число M, что для любого $x \in X$ выполняется условие $|f(x)| \le M$:

$$f(x) \textit{ ограничена на } X \iff \exists M \in \mathrm{R} : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| \le M.$$

Функция $y = f(x)$ называется *неограниченной сверху* (*снизу*) на множестве $X \subseteq D(f)$ если условия ограниченности не выполняются:

$f(x)$ *неограничена сверху на* $X \iff \forall M \in \mathbf{R}\ \exists x \in X:\ f(x) > M$;

($f(x)$ *неограничена снизу на* $X \iff \forall M \in \mathbf{R}\ \exists x \in X:\ f(x) < M$).

3.3 Определения предела функции по Гейне и по Коши

Пусть функция $f(x)$ определена в проколотой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0) = \{x |\ 0 < |x - x_0| < \delta\}$. В точке x_0 значение $f(x_0)$ может быть не определено.

Число A называется *пределом* (*по Гейне*) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности точек $x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к A.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \in \overset{\circ}{U}(\delta; x_0) : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = a.$$

Число A называется *пределом* (по Коши) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta_1$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall x\ \ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определения предела функции в точке x_0 по Гейне и по Коши эквивалентны.

Предел функции обладает следующими *свойствами*.

– функция $f(x)$ в точке x_0 не может иметь больше одного предела;

– если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет предел, то она ограничена в некоторой окрестности $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$;

– если функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 имеют конечные пределы, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, $(b \ne 0)$;

4) $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = a^n$ при любом $n \in \mathbf{N}$;

5) $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{a}$ при $a > 0$, $n \in \mathbf{N}$.

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливо функциональное неравенство $f(x) \le \varphi(x)$ и существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \le \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$;

– если в $\overset{\circ}{U}(\delta; x_0)$ справедливы функциональные неравенства $\psi(x) \le f(x) \le \varphi(x)$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = A$, $A \in \mathbf{R}$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$;

– если в окрестности точки x_0 задана сложная функция $y = f(u(x))$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} u(x) = u_0$ ($u(x) \ne 0$ при $x \ne x_0$), $\lim\limits_{x \to x_0} f(u) = A$, то существует предел сложной функции $y = f(u(x))$ в точке x_0 и $\lim\limits_{x \to x_0} f(u(x)) = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$.

3.4 Односторонние пределы функции

Левой δ-окрестностью точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $-\delta < x - x_0 \le 0$:

$$U(\delta; x_0 - 0) = \{x \mid -\delta < x - x_0 \le 0\}.$$

Правой δ-окрестностью точки x_0 называется множество всех x, удовлетворяющих неравенству $0 \le x - x_0 < \delta$:

$$U(\delta; x_0 + 0) = \{0 \le x - x_0 < \delta\}.$$

Число A называется *левым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \mathring{U}(\delta; x_0 - 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in \mathring{U}(\delta; x_0 - 0) \ \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число A называется *правым пределом* функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall x \in \mathring{U}(\delta; x_0 + 0)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \ \forall x \in \mathring{U}(\delta; x_0 + 0) \ \ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ имеет в точке x_0 предел тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные правый и левый пределы и они равны между собой $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Критерий Коши существования предела функции: для того чтобы функция $f(x)$ имела в точке $x = x_0$ конечный предел, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая окрестность $U(\delta; x_0)$ точки x_0 такая, что для любых $\forall x', x'' \in U(\delta; x_0)$ имеет место неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0: \ \forall x', x'' \in U(\delta; x_0) \iff$$

$$\iff |f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение функции, ее области определения, множества значений.

2 Перечислите способы задания функций.

3 Какими элементарными свойствами обладают функции.

4 Дайте определение сложной функции.

5 Дайте определение обратной функции. Как для взаимно однозначной функции получить обратную ей? Как располагаются графики взаимно-обратных функций?

6 Сформулируйте определения предела функции в точке по Гейне и по Коши.

7 Сформулируйте отрицания этих определений.

8 Сформулируйте определения по Коши, соответствующие следующим символическим обозначениям:

а) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$; в) ; $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = a$; д) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$;

б) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; г) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; е) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

9 Дайте определения односторонних пределов функции. Какая связь между односторонними пределами и пределом функции?

10 Сформулируйте критерий Коши существования предела функции.

Решение типовых примеров

1 Найти область определения D и множество значений E функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$.

Решение. Функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ определена, если $4 - x^2 > 0$, т.е. если $|x| < 2$. Поэтому областью определения функции является множество

$$D(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x| < 2\} = (-2; 2).$$

Поскольку $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \geq \frac{1}{2}$ для всех x из области определения, то множество значений есть

$$E(f) = \left\{ y \middle| y \geq \frac{1}{2} \right\} = \left[\frac{1}{2}; +\infty \right).$$

2 Доказать, что функция $f(x) = \frac{1}{x}$ является неограниченной сверху на множестве $(0;1)$.

Решение. По определению:

$$f(x) \text{ ограничена сверху на } (0;1) \Leftrightarrow$$
$$\exists M \in \mathbf{R} : \forall x \in (0;1) \Rightarrow f(x) \leq M.$$

Построим отрицание для этого определения:

$$f(x) \text{ неограничена сверху на } (0;1) \Leftrightarrow$$
$$\forall M \in \mathbf{R} : \exists x \in (0;1) \Rightarrow f(x) > M.$$

Возьмем $x = \frac{1}{1+|M|}$.

Тогда $f\left(\frac{1}{1+|M|}\right) = 1 + |M| > M$ для любого M.

Следовательно, существует такое число $x \in (0;1)$, что $f(x) > M$. Поэтому функция неограничена.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная

а) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$, б) $f(x) = x^2 + 5x$, в) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$?

Решение.

а) изменим знак аргумента, тогда получим:

$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2\sin x = -f(x)$.

Следовательно, функция нечетная.

б) здесь $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x$. Таким образом, эта функция общего вида.

в) имеем

$$f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x = f(x).$$

4 Найти период функции $y = \cos 3x + \cos 4x$.

Решение. Функция $\cos 3x$ имеет период $T_1 = \frac{2\pi}{3}$, а функция $\cos 4x$ – период $T_2 = \frac{2\pi}{4}$. Поскольку $3T_1 = 4T_2 = 2\pi$, то число 2π является периодом данной функции.

5 Показать, что функция $y = 3x + 2$ имеет обратную, и найти ее аналитическое выражение.

Решение. Функция $y = 3x + 2$ $\forall x \in \mathbf{R}$ монотонно возрастает. Следовательно, имеет обратную.

Решив уравнение $y = 3x + 2$ относительно x, получим $x = f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$.Поменяв местами обозначения, найдем обратную функцию $y = f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$.

Графики этих функций изображены на рисунке 3.1.

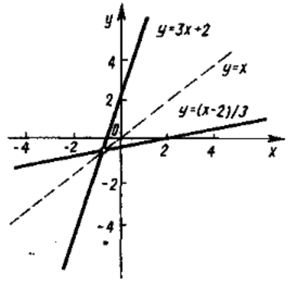

Рисунок 3. 1. – Графики функции $y = 3x + 2$ и обратной ей $y = f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

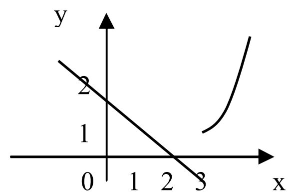

Рисунок 3. 2 – График функции $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$

6 Построить график функции $y = \begin{cases} 2 - x, & \text{если } x < 3, \\ 0{,}1x^2, & \text{если } x \geq 3. \end{cases}$

Решение. При $x < 3$ функция представляется лучом прямой $y = 2 - x$, при $x \geq 3$ – параболой $y = 0{,}1x^2$. График данной функции представлен на рисунке 3.2.

7 Используя определение предела функции по Гейне, доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

Решение. Функция $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ (рисунок 3.3) не определена в точке $x_0=1$, но определена для любой $\overset{\circ}{U}(\delta;x_0)$. Пусть $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – произвольная последовательность с общим членом $x_n\neq 1$ $\forall n\in\mathbf{N}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$. Образуем последовательность $f(x_n)=\frac{x_n^2-1}{x_n-1}$ $\forall n\in\mathbf{N}$. Так как $x_n\neq 1$, то $f(x_n)=x_n+1$ $\forall n\in\mathbf{N}$.

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+1)=2$.

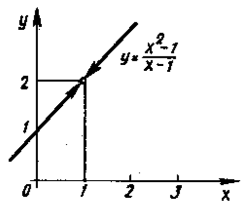

Рисунок 3.3 – График функции $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

8 Доказать, что функция $y(x)=\cos x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

Решение. Докажем, что эта функция не удовлетворяет определению предела функции при $x\to+\infty$ по Гейне:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \forall(x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n>0,\ x_n\in\overset{\circ}{U}(\delta;x_0):\ \lim_{n\to\infty}x_n=+\infty$$
$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

Для этого укажем такую бесконечно большую последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, что последовательность $(\cos x_n)_{n=1}^{\infty}$ расходится. Положим $x_n=\pi n$, $n\in\mathbf{N}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ и последовательность $\cos x_n=(1,-1,1,-1,\ldots)$ расходится. Следовательно, функция $\cos x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

9 Используя определение предела по Коши, доказать, $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

Решение. Возьмем произвольное малое $\varepsilon>0$. Положим $\delta=\varepsilon$. Известно, что $\forall x\in\overset{\circ}{U}(\delta;0)$ выполняется неравенство $|\sin x|\le|x|<\delta=\varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$.

10 Докажите, что для функции

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{если } x\ge 0,\\ 0, \text{если } x<0\end{cases}$$

число 1 не является пределом при $x\to 0$.

Решение. Положим $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$. Тогда $\forall\delta>0$ существуют $x\ge 0$ и $x<0$ такие, что $0<|x-x_0|<\delta$. Для $x<0$ имеем

$$|f(x)-1|=|0-1|=1>\frac{1}{2}.$$

Значит,

$$\exists\,\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0\ \forall\delta>0\ \exists x\ \ 0<|x-x_0|<\delta:\ \ |f(x)-1|\ge\varepsilon_0.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq 1$.

Задания для аудиторной работы

1 Найти область определения следующих функций:

а) $y=\frac{\ln(x+1)}{x-2}$; б) $y=\arccos\left(\frac{x}{2}-1\right)$; в) $y=\sqrt[4]{\frac{x-1}{x^2-9}}-\sqrt{\sin x}$.

2 Исследовать на ограниченность следующие функции:

а) $y=\dfrac{3}{x-2}$ на $(1;3)$, б) $y=\dfrac{\cos x}{x^2+1}$ на $\mathbf{R}$.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

а) $y=|x|-5\ln(x^2+1)$;

б) $y=x^3+3\sin x$;

в) $y=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

4 Найти период следующих функций:

а) $y=\cos^3 x\sin x-\sin^3 x\cos x$, б) $y=\sin|x|$.

5 Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 2}3x=6$; в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=6$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-4)=-2$; г) $\lim\limits_{x\to +\infty}(2x-4)=+\infty$.

6 Доказать, что функция $y(x)=\sin x$ не имеет предела при $x\to+\infty$.

7 Доказать, что число 1 не является пределом функции $f(x)$ при $x\to 0$, если $f(x)=\sin x$.

8 Привести пример функции, удовлетворяющей условию:

а) $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$, б) $f(x)$ не имеет предела в точке $x=2$.

9 Привести пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x=0$, но их сумма, произведение, разность; частное имеет предел в точке $x=0$.

10 Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}q(x)=B$. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}f^n(x)$, $n\in\mathbf{N}$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+1)(q(x)-2)$;

б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^2(x)-q(x)}{q^2(x)+1}$; г) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f^2(x)}$.

11. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x^2+\dfrac{1}{x}+3x-2\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+6x+1}}{x^2-3x+1}$; ж) $\lim\limits_{x\to 2}\lg\left(4x-1+\sqrt{2x+5}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$; з) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{2x-7}\right)^x$.

12 Для функции $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x+2)(x+1)}$ найти:

а) $\lim\limits_{x\to -2}f(x)$; б) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}f(x)$.

Задания для домашней работы

1 Найти область определения следующих функций:

а) $y=\log_3(x^2-9)+\arcsin(x-6)$; б) $y=\ln(\sin x)$;

в) $y=\dfrac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$.

2 Исследовать на ограниченность следующие функции:

а) $y=\dfrac{5}{x+2}$ на $(-4;4)$; б) $y=\dfrac{\sin x}{e^x+1}$ на $\mathbf{R}$.

3 Определить, какая из данных функций четная, нечетная:

а) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$; б) $y=2x^4+5\cos x-3$; в) $y=\dfrac{e^{-x}-1}{e^x+1}$.

4 Найти период следующих функций:

а) $y=\cos 4x+\sin 5x$, б) $y=|\cos 2x|$.

5 Используя определение предела функции по Коши, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\sin x=0$; в) $\lim\limits_{x\to 3}x^2=9$;

б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-9}{x^2-3}=1$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(x^3-1)=-1$.

6 Доказать, что функция:

$$y(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

не имеет предела в точке 0.

7 Привести пример функции, удовлетворяющей условию: $f(x)$ не имеет предела в точке $x=2$, но функция $|f(x)|$ имеет предел в этой точке.

8 Привести пример функций $f(x)$ и $q(x)$, каждая из которых не имеет предела в точке $x=1$, но их сумма, произведение, разность, частное имеет предел в точке $x=1$.

9 Известно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} q(x)=B$. Найти:

а) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f^2(x)+q^2(x)\right)$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)\sin x}{q^2(x)+\cos x}$; в) $\lim\limits_{x\to x_0}\cos f(x)$.

10 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(x^3+2\cos x\right)$; д) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x^2-2x+1}{x^2-5x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$; е) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\sin x\left(4x^2+1\right)$; ж) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[5]{x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{2x+1}}$; з) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-6x}$.

Практическое занятие 4 Бесконечно малые функции

4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций
4.2 Сравнение асимптотического поведения функций

4.1 Определение и свойства бесконечно малых функций

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (или бесконечно малой) при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$.

Обозначается: $\alpha(x)=o(1)$.

Функция $f(x)$ при $x\to x_0$ имеет конечный предел тогда и только тогда, когда функция $\alpha(x)=f(x)-A$ является бесконечно малой при $x\to x_0$.

Свойства бесконечно малых функций

– конечная сумма бесконечно малых функций есть функция, бесконечно малая;

– произведение бесконечно малой функции $\alpha(x)$ и функции ограниченной $\varphi(x)$ есть бесконечно малая функция;

– произведение некоторого числа и бесконечно малой функции есть бесконечно малая функция;

– произведение двух бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция;

– частное от деления бесконечно малой функции $\alpha(x)$ на функцию $\varphi(x)$, такую, что $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$, есть бесконечно малая функция;

– если функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ – бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x\to x_0$ – бесконечно большая. Если функция $f(x)$ при $x\to x_0$ – бесконечно большая, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x\to x_0$ – бесконечно малая.