4.2 Сравнение асимптотического поведения функций

Первый замечательный предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1^\infty\right)=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^\infty\right)=e.$$

Под *асимптотикой*, или *асимптотическим поведением функции в окрестности некоторой точки* $x_0\in\mathbf{R}$, понимается описание поведения функции вблизи точки x_0, в которой функция, как правило, не определена.

Асимптотическое поведение функции обычно характеризуется с помощью другой, более простой или более изученной функции, которая в окрестности исследуемой точки с малой относительной погрешностью воспроизводит значения изучаемой функции.

Если $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые функции и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0,$$

то они называются *бесконечно малыми одного порядка малости*.

Обозначается: $\alpha(x)=O(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in O(1)$ означает, что функция $\alpha(x)$ при $x\to x_0$ *ограничена*, т.е. $O(1)$ – множество ограниченных функций при $x\to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ то они называются *эквивалентными* (*асимптотически равными)* при $x\to x_0$.

Обозначается: $\alpha(x)\sim\beta(x)$ или $\alpha(x)\approx\beta(x)$ при $x\to x_0$.

Если функция $\alpha(x)$ такова, что $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$, то при $x\to x_0$ справедливы следующие асимптотические равенства:

$$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim\operatorname{tg}\alpha(x)\sim\arcsin\alpha(x)\sim\operatorname{arctg}\alpha(x)\sim$$

$$\sim\ln(1+\alpha(x))\sim e^{\alpha(x)}-1,\ \sqrt[n]{1+\alpha(x)}-1\sim\frac{1}{n}\alpha(x).$$

Предел отношения двух бесконечно малых функций равен пределу отношения эквивалентных им функций, т. е. если при $x\to x_0$ $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$, то

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$$

Данное свойство используется при вычислении пределов, так как каждую бесконечно малую (или только одну) можно заменить бесконечно малой, ей эквивалентной.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то говорят, что $\alpha(x)$ является *бесконечно малой функцией более высокого порядка* по сравнению с функцией $\beta(x)$. *Обозначается*: $\alpha(x)=o(\beta(x))$.

Запись $\alpha(x)\in o(1)$ при $x\to x_0$ означает, что функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x\to x_0$. $o(1)$ – множество бесконечно малых функций при $x\to x_0$.

Если функции $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – бесконечно малые и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k}=c\neq 0$, $k>0$, то $\alpha(x)$ называется функцией k*-го порядка малости* по сравнению с $\beta(x)$.

Соотношения вида

$$\alpha(x)=O(\beta(x)),\ \alpha(x)=o(\beta(x)),\ \alpha(x)\sim\beta(x)\text{ при } x\to x_0$$

называются *асимптотическими оценками*.

Ниже приведены некоторые важные пределы, которые используются при вычислении:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение бесконечно малой функции.
2 Перечислите свойства бесконечно малых функций.
3 Докажите первый замечательный предел.
4 Докажите второй замечательный предел.
5 Какие бесконечно малые функции называются эквивалентными? Приведите примеры эквивалентных функций.

Решение типовых примеров

1 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} bx}{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$;

б) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2y}-1}{y}$; д) $\dfrac{\ln(1+3y)}{y}$; и) $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$; е) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$.

Решение.

а) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{5}{3}=$$

$$=\frac{5}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}=\frac{5}{3}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}.$$

б) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{1+2y}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}2\cdot\frac{(1+2y)^{\frac{1}{2}}-1}{2y}=\left[2y=x\right]=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}-1}{x}=2\cdot\frac{1}{2}=1.$$

в) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1+1-\cos x}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=1+\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}=1+\frac{1}{4}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin^2 t}{t^2}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}.$$

г) имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} bx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin bx}{\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin bx}{bx}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{b}{\cos bx}=$$

$$=1\cdot b=b.$$

д) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+3y)}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}3\cdot\frac{\ln(1+3y)}{3y}=\left[3y=x\right]=$$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=3\cdot 1=3.$$

е) имеем:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{(x-5)(x-1)}=\left[x-5=t\right]=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+4)}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{t+4}=1\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

ж) имеем:

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\left(1^{\infty}\right)=\left[\begin{array}{l}\text{введем новую}\\ \text{переменную } y=2x\end{array}\right]=$$

$$=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=\left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^2=e^2.$$

и) имеем:

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{y}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\frac{y}{2}}-1}{\frac{2y}{2}}=\left[\frac{y}{2}=x\right]=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Задания для аудиторной работы

1 Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x)=\sin(x-2)$ при $x\to 2$;

б) $\alpha(x)=x^2-3x+2$ при $x\to 1$;

в) $\alpha(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.

2 С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+x^3-2x^5}{5x+3x^3+x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\sin 2x}-1}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt[4]{x^4-7x^8}}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos 6x-\cos 4x}{\arcsin^2 3x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\sqrt[4]{16x^4+x^8}}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{3x}-e^{-2x}}{2\sin^2 x-\operatorname{arctg} 2x}$.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+3}\right)^{x+2}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+4t}-1}{t}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{1+\sin x}-1}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sin(x-5)}{x^2-6x+5}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\pi x^2}{\sin\pi x^3}$;

к) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^{\frac{x}{2}}$;

л) $\lim\limits_{t\to 0}\frac{2t}{e^{3t}-1}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos^2 x}{x^2}$;

н) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-\frac{2x^2}{x^2-4}\right)$.

Задания для домашней работы

1 Доказать, что функция $\alpha(x)$ при $x\to a$ является бесконечно малой:

а) $\alpha(x)=\frac{\cos x}{x}$ при $x\to\infty$;

б) $\alpha(x)=\cos x$ при $x\to\frac{\pi}{2}$;

в) $\alpha(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x\to 0$.

2 С помощью принципа замены эквивалентных функций вычислить следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\arcsin 4x)^2}{1-\cos 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x^2-3x+3)}{x^2-7x+6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x-\sin 2x}{\operatorname{arctg} 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sin(x+3)}{2x+6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{\ln(1+6x)}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-1}{x}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+5x^6}}{\ln(1+3x)}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-5^x}{1-e^x}$.

3 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 7x}{\sin^2 3x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$;

г) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{3t}{\sqrt{1-2t}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-2^x}{x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

ж) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 10x}$;

и) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{tg} bx}$;

к) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2}{x}}$;

л) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^{-2t}-1}{3t}$;

м) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x-\sin 2x}{\sin x}$;

н) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2x^2}{x^2-1}\right)$.

Практическое занятие 5 Непрерывность функции

5.1 Определение непрерывности функции
5.2 Точки разрыва и их классификация
5.3 Свойства непрерывных функций

5.1 Определение непрерывности функции

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если выполняются следующие три условия:

1) функция $y=f(x)$ определена в точке x_0, т.е. $x_0\in D(f)$;

2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Если в точке x_0 нарушено хотя бы одно из условий 1–3, то функция называется *разрывной в точке* x_0, а точка x_0 – *точкой разрыва*.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Коши*), если для любого заданного числа $\varepsilon>0$ можно найти такое число $\delta>0$ (зависящее от ε и x_0), что для всех x, для которых $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Символическая запись:

$f(x)$ *непрерывна в точке* x_0 $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0:\forall x\in U(\delta;x_0)\quad |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

Пусть $x-x_0=\Delta x$ есть приращение аргумента, а $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y$ приращение функции в точке x_0. При фиксированном x_0 переменной x приращение Δy является функцией аргумента Δx. Геометрический смысл приращений виден на рисунке 5. 1.

Можно дать еще одно определение непрерывности функции в терминах приращений.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Функция $f(x)$, определенная в некоторой левой (правой) окрестности точки x_0 называется *непрерывной слева (справа)* в точке x_0, если существует предел слева (справа) функции $y = f(x)$ и он равен $f(x_0)$:

$$f(x) \textit{ непрерывна справа в точке } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0+0} f(x) = f(x_0),$$

$$f(x) \textit{ непрерывна слева в точке } x_0 \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

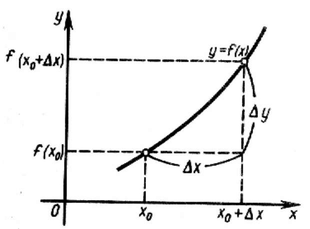

Рисунок 5. 1 – Определение непрерывности функции

Из определения односторонней непрерывности в точке x_0 следует, что функция $f(x)$, определенная в некоторой δ-окрестности точки x_0, непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна в этой точке слева и справа.

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 (*по Гейне*), если для любой последовательности точек $x_n \in U(\delta; x_0)$, сходящейся к x_0, последовательность соответствующих значений функции $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x_0)$.

Символическая запись:

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n=1}^{\infty},\ x_n \in U(\delta; x_0) : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0 \quad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывная во всех точках некоторого множества X, называется *непрерывной на множестве* X.

Если $X = [a;b]$, то для непрерывности функции на $[a;b]$ требуется, чтобы $f(x)$ была непрерывна во всех внутренних точках

отрезка, непрерывна справа на левом его конце, т.е. в точке a, и непрерывна слева на правом его конце, т.е. в точке b. Класс непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций обозначается $C[a;b]$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $g(x) \neq 0$, также непрерывны в этой точке.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X, и множество ее значений Y.

Число M (m) называется *точной верхней (нижней) гранью* функции $y = f(x)$ на множестве X, если выполняются следующие условия

1) $\forall x \in X \quad f(x) \le M \quad (f(x) \ge m)$;

2) для любого числа $M' < M$ ($m' > m$) найдется такая точка $x' \in X$, что $f(x') > M'$ ($f(x') < m'$).

Условие 1) означает, что число M является одной из верхних граней функции $y = f(x)$ на множестве X, условие 2) показывает, что M наименьшая из верхних граней функции. Аналогично для точной нижней грани.

Если множество Y неограниченно сверху, то пишут $\sup\limits_X f(x) = +\infty$, если снизу, то $\inf\limits_X f(x) = -\infty$.

5.2 Точки разрыва и их классификация

Точка x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не является непрерывной.

Разрывы функции классифицируются следующим образом.

Точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва* функции $f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) = A \text{ и } f(x_0) \neq A.$$

Вводя новую функцию

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), \text{ если } x \neq x_0, \\ A, \text{ если } x = x_0, \end{cases}$$

получим

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\neq x_0}} f_1(x)=A=f_1(x_0),$$

т. е. новая функция является непрерывной.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет конечные, но не равные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то функция $f(x)$ будет *непрерывной слева*, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$ – *непрерывной справа*.

Пусть существуют два конечных односторонних предела $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$, не равные друг другу. Разность $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Точка x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода* функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ имеет хотя бы один бесконечный односторонний предел: равен бесконечности:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty .$$

При исследовании функции на непрерывность необходимо проверить выполнение условий определения 1. Если x_0 – точка разрыва, то для установления характера разрыва необходимо вычислить односторонние пределы и значение функции в исследуемой точке.

Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она непрерывна во всех внутренних точках $[a;b]$, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она имеет разрыв 1-го рода. При этом существуют односторонние пределы в точках a и b. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной на числовой прямой* $\mathbf{R}$, если она кусочно-непрерывна на любом отрезке.

Многочлен $P_n(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, $a_k\in\mathbf{R}$, $k=\overline{0,n}$, является функцией, непрерывной для любого $x\in\mathbf{R}$.

Всякая рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ непрерывна в любой точке $x\in\mathbf{R}$, для которой $Q(x)\neq 0$. Здесь $P(x)$, $Q(x)$ – многочлены.

Если функция $u=\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=\varphi(x_0)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Тогда справедливы следующие равенства для непрерывных функций:

$$\lim_{x\to x_0} f(\varphi(x))=f\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\right),\quad \lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Пусть функция $y=f(x)$ определена, непрерывна и монотонна на некотором множестве X и пусть Y – множество ее значений. Тогда на множестве Y обратная функция $x=f^{-1}(y)$ монотонна и непрерывна.

Все элементарные функции непрерывны во всех точках, принадлежащих их области определения.

5.3 Свойства непрерывных функций

Непрерывные функции обладают следующими с в о й с т в а м и .

1 (устойчивость знака непрерывной функции). Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0)\neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0, в которой знак функции совпадает со знаком $f(x_0)$.

2 (прохождение непрерывной функции через любое промежуточное значение). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри этого отрезка существует точка ξ, в которой значение функции равно нулю:

$$f(x):\ f(a)f(b)<0\ \Rightarrow\ \exists x_0 \in (a;b):\ f(x_0)=0.$$

3 Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$. Тогда для любого числа C, заключенного между A и B, найдется такая точка $c\in[a;b]$, что $f(c)=C$.

Свойство 3 можно переформулировать так: непрерывная функция, переходя от одного значения к другому, обязательно принимает все промежуточные значения между ними.

4 (ограниченность непрерывных функций). Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на этом отрезке.

5 (достижение непрерывной функцией своих точных граней). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то на этом отрезке она достигает своих нижней и верхней граней, т.е. на нем существуют по крайней мере две точки x_1 и x_2 такие, что

$$M=f(x_1)=\sup_{[a;b]} f(x),\ m=f(x_2)=\inf_{[a;b]} f(x).$$

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определения непрерывной функции.

2 Какие арифметические действия не нарушают свойство непрерывности.

3 Дайте определение точек разрыва.

4 Какие точки называются точками разрыва функции?

5 Дайте определение точек устранимого разрыва и точек разрыва 1 и 2 рода.

6 Перечислите основные свойства непрерывных функций: о непрерывности сложной функции, основных элементарных функций, об устойчивости знака непрерывной функции, о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение, о достижении непрерывной функцией своих точных граней.

Решение типовых примеров

1 Доказать непрерывность функции $y=ax+b$.

Решение. Функция $y=ax+b$ определена при всех значениях x, т.е. $\forall x\in \mathbf{R}$. Фиксируем некоторое значение x_0 из этого множества.

Тогда

$$\forall \varepsilon>0\ \ |y(x)-y(x_0)|=|ax+b-ax_0-b|=|ax-ax_0|=|a|\cdot|x-x_0|.$$

Как только $|x-x_0|<\delta$, то $|y(x)-y(x_0)|<|a|\cdot\delta$.

Следовательно,

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ \delta=\frac{\varepsilon}{|a|}:\ |x-x_0|<\delta\ \Rightarrow$$

$$|y(x)-y(x_0)|<|a|\cdot\delta=|a|\cdot\frac{\varepsilon}{|a|}=\varepsilon.$$

2 Исследовать на непрерывность сложные функции

а) $y=e^{-\frac{1}{x}}$, б) $y=\sin x^4$.

Решение. а) функция $y=e^{-\frac{1}{x}}$ является композицией следующих элементарных функций: $y=-\dfrac{1}{x}$ и $f=e^y$. Так как функция $y=-\dfrac{1}{x}$ не определена в точке $x=0$, то функция не является непрерывной в этой точке. В остальных точках она непрерывна как композиция непрерывных функций.

б) функция $y=\sin x^4$ является композицией функций $y=\sin z$ и $z=x^4$. Так как функции y и z непрерывны при всех значениях своих аргументов, то по теореме о непрерывности сложной функции $y=\sin x^4$ также непрерывна при всех x.

3 Доопределить функцию

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0,\end{cases}$$

задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0.

*Решение***.** Функция

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 0, \text{ если } x=0\end{cases}$$

непрерывна во всех точках числовой прямой кроме точки $x=0$. Поскольку $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}\dfrac{\sin x}{x}=1\neq 0$, то в точке $x=0$ функция имеет устранимый разрыв. Этот разрыв можно устранить, положив

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, \text{ если } x\neq 0,\\ 1, \text{ если } x=0.\end{cases}$$

4 Доказать, что уравнение $x^3-4x+2=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в указанном промежутке $(0,1)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x^3-4x+2$. Она непрерывна при всех x (как сумма непрерывных функций $f_1=x^3$, $f_2=-4x$, $f_3=2$). Так как $f(0)=2>0$ и $f(1)=-1<0$, то между точками 0 и 1 найдется точка x_0, в которой эта функция обращается в нуль: $f(x_0)=0$. Поэтому x_0 – корень уравнения.

5 Найти точки разрыва функции $y=[x]$, где $[x]$ – целая часть числа, и построить график.

Решение. Функция $E(x)$ определена следующим образом: если $x=n+q$, где n – целое число, а $0\le q\le 1$, то $[x]=n$, т.е. функция равна целой части числа. Областью определения дан-

ной функции является множество $\mathbf{R}$. Функция $y=[x]$ терпит разрыв при каждом целочисленном значении x. Действительно, пусть $x_0=n$, тогда $y(x_0)=n$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0}y=n-1$, а $\lim\limits_{x\to x_0+0}y=n$. Причем каждая из этих точек является точкой разрыва первого рода (рисунок 5. 2).

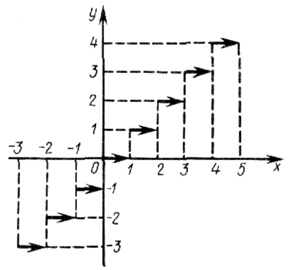

Рисунок 5. 2 – График функции $y=[x]$

Во всех точках $x\in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Z}$ функция $y=[x]$ является непрерывной как постоянная.

6 Определить точки разрыва функции $y=e^{\frac{2}{x-1}}$.

Решение. Данная функция не определена в точке $x=1$.

Односторонние пределы равны:

$$\lim_{x\to 1-0}e^{\frac{2}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to 1+0}e^{\frac{2}{x-1}}=+\infty .$$

Поскольку один из односторонних пределов является бесконечностью, то $x=1$ является точкой разрыва второго рода этой функции.

Задания для аудиторной работы

1 Докажите непрерывность следующих функций:

а) $y=x^2$; б) $y=\cos x$; в) $y=\sqrt{x}$.

2 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку x_0. Доопределите функцию $f(x)$ задав

$f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{\sin(1-x)}{x-1}$.

3 Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=x\sin\dfrac{1}{x}$.

4 Непрерывна ли функция

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ при } x<0,\\ x+1, \text{ при } 0\le x<1,\\ -x^2+4x-1, \text{ при } 1\le x<3,\\ 5-x, \text{ при } x\ge 3?\end{cases}$$

5 Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=a$, чтобы функция в этой точке была непрерывна:

а) $f(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$, $x=0$; б) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$, $x=3$.

6 Докажите, что уравнение $x^3+4x-6=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(1,2)$.

7 Исследовать функцию $y=\dfrac{[x]}{x}$ на непрерывность, и построить график функции.

8 Найти точки разрыва функций и установить их тип:

а) $y=\dfrac{1}{(x-1)^2}$;

б) $y=\sin\dfrac{1}{x}$;

в) $y=\ln\left|\dfrac{x-3}{x+3}\right|$;

г) $y=\dfrac{3x+7}{x^2-3x+2}$;

д) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2-x}$;

е) $y=\begin{cases}-2x+3, \text{ если } x<1\\ 3x+2, \text{ если } x\ge 1.\end{cases}$.

Задания для домашней работы

1 Доказать непрерывность функции

а) $y=\sqrt[3]{x}$; б) $y=\sin x$; в) $y=x^3$.

2 Функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0=1$, исключая саму точку x_0. Доопредеите функцию $f(x)$ задав $f(x_0)$ так, чтобы получившаяся функция была непрерывна в точке x_0:

а) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$, б) $f(x)=(1-x)\operatorname{ctg}\pi x$.

3 Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=\sqrt{x}\sin 2x$.

4 Установите, как надо доопределить функцию в точке $x=0$, чтобы функция $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2x}$ в этой точке была непрерывна:

5 Докажите, что уравнение $x^4-2{,}15x+0{,}95=0$ имеет по меньшей мере один действительный корень в промежутке $(1,2)$.

6 Исследовать функцию

$$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1 \text{ при } x>0,\\ 0 \text{ при } x=0,\\ -1 \text{ при } x<0\end{cases}$$

на непрерывность и построить график.

7 Найти точки разрыва функций и установить их тип:

а) $y=\dfrac{x-1}{x+3}$,

б) $y=\ln|\sin x|$,

в) $y=\cos\dfrac{\pi}{x}$,

г) $y=\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$.

8 Изобразите схематически график какой-либо функции, которая в точке $x_0=3$:

а) непрерывна;

б) имеет конечный предел, но не непрерывна;

в) имеет бесконечный предел; не имеет предела;

г) непрерывна слева и имеет конечный предел справа, но не непрерывна справа;

д) имеет конечные пределы и слева, и справа, но не непрерывна ни слева, ни справа;

е) непрерывна слева и имеет бесконечный предел справа;

ж) непрерывна слева и не имеет предела справа;

и) имеет бесконечный предел слева и не имеет предела справа;

к) не имеет предела ни слева, ни справа.

Индивидуальные домашние задания

ИДЗ–1 Числовые множества

1 Составьте подмножества множества A элементами которых являются $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, нечётные, чётные, отрицательные, положительные числа и числа кратные 2:

1.1 $A=\left\{-20;-1;\dfrac{3}{4};2;0\right\}$.

1.2 $A=\left\{-10;-\dfrac{3}{5};0;2;13;7\right\}$.

1.3 $A=\left\{1;2;3;17;\dfrac{200}{10}\right\}$.

1.4 $A=\left\{0;1;-1;\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{3}\right\}$.

1.5 $A=\{2{,}5;3{,}5;6{,}7;12\}$.

1.6 $A=\{-10^4;-10^3;-10^2;-10;0;1;10^2\}$.

1.7 $A=\left\{-7;-5;-3;-1;0;\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{7}\right\}$.

1.8 $A=\left\{\ -\dfrac{9}{10};-\dfrac{8}{10};-\dfrac{7}{10};-\dfrac{6}{10}\ \right\}$.

1.9 $A=\{24;25;26;27;28\}$.

1.10 $A=\left\{\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{5};\dfrac{1}{6};\dfrac{1}{7};\dfrac{1}{8}\right\}$.

1.11 $A=\{-12;0;21;23;27\}$.

1.12 $A=\{2{,}5;2{,}6;2{,}7;2{,}8;2{,}9;3\}$.

1.13 $A=\{2;4;6;8;10;12;14;16;18\}$.

1.14 $A=\{3;7;9;11;13;15;17\}$.

1.15 $A=\{-3;3;-4;4;-5;5;-6;6\}$.

1.16 $A=\left\{\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{5};0;-\dfrac{1}{3};-\dfrac{1}{4};-\dfrac{1}{5}\right\}$.

1.17 $A=\left\{10;100;1000;3\frac{1}{4};5\frac{2}{4}\right\}$.

1.18 $A=\left\{-3;-9;-12;-15\frac{3}{4}\right\}$.

1.19 $A=\left\{7;12;4;48;77\frac{1}{3}\right\}$.

1.20 $A=\left\{22;22\frac{1}{5};22\frac{2}{5};23\right\}$.

1.21 $A=\left\{7\frac{1}{4};7\frac{2}{4};7\frac{3}{4};8\right\}$.

1.22 $A=\left\{-15\frac{1}{3};18;-4\frac{1}{4};-16\right\}$.

1.23 $A=\left\{-\frac{1}{10};-12;-8;-7;-1\right\}$.

1.24 $A=\left\{\frac{24}{3};\frac{23}{3};\frac{22}{3};\frac{21}{3};\frac{20}{3};\frac{18}{3}\right\}$.

1.25 $A=\{-40;-30;-20;-10;-1;0;1\}$.

1.26 $A=\left\{2;17;19\frac{2}{3};21\frac{4}{5};47\right\}$.

1.27 $A=\left\{-3;8;21;-100\frac{1}{3}\right\}$.

1.28 $A=\left\{2;-100;42\frac{2}{3};41;3\right\}$.

1.29 $A=\{-8;-10;-16;-17;-18;20\}$.

1.30 $A=\left\{-10;8;20\frac{3}{10};-14\frac{1}{3};27\right\}$.

2 Найди пересечение, объединение, разность множеств A и B:

2.1 $A=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$, $B=\{4;16;8;12;20;\ldots\}$.

2.2 $A=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$, $B=\{9;18;27;36;\ldots\}$.

2.3 $A=\{4;16;8;12;20;\ldots\}$, $B=\{8;16;24;\ldots\}$.

2.4 $A=\{5;10;15;20;\ldots\}$, $B=\{10;20;30;\ldots\}$.

2.5 $A=\{6;12;18;24;\ldots\}$, $B=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$.

2.6 $B=\{7;49;7^3;7^4;\ldots\}$.

2.7 $A=\{8;16;24;\ldots\}$, $B=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$.

2.8 $A=\{9;18;27;\ldots\}$, $B=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$.

2.9 $A=\{10;100;1000;\ldots\}$, $B=\{10;20;30;\ldots\}$.

2.10 $A=\{2;4;6;8;10;\ldots\}$. $B=\{2;4;8;16;\ldots\}$.

2.11 $A=\{3;6;9;12;15;\ldots\}$, $B=\{1;3;5;7;9;\ldots\}$.

2.12 $A=\{-10;-100;-1000;\ldots\}$, $B=\{-10;-20;-30;\ldots\}$.

2.13 $A=\{-4;-8;-12;-16;-20;\ldots\}$, $B=\{-8;-16;-24;\ldots\}$.

2.14 $A=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\ldots\right\}$, $B=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\frac{1}{16};\ldots\right\}$.

2.15 $A=\left\{1;\frac{1}{3};\frac{1}{9};\frac{1}{27};\ldots\right\}$, $B=\left\{1;\frac{1}{9};\frac{1}{81};\ldots\right\}$.

2.16 $A=\{0,1;0,01;0,001;\ldots\}$, $B=\{0,1;0,2;0,3;\ldots\}$.

2.17 $A=\{-1;-2;-3;-4;\ldots\}$, $B=\{-1;-3;-5;-7;\ldots\}$.

2.18 $A=\{-5;-10;-15;-20;\ldots\}$, $B=\{-10;-100;-1000;\ldots\}$.

2.19 $A=\{-5;-10;-15;-20;\ldots\}$. $B=\{-10;-20;-30;\ldots\}$.

2.20 $A=\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{10};\frac{1}{15};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$.

2.21 $A=\{0,1;0,2;0,3;\ldots\}$, $B=\left\{0;\frac{1}{10};\frac{1}{20};\frac{1}{30};\ldots\right\}$.

2.22 $A=\left\{\frac{1}{10};\frac{2}{10};\frac{3}{10};\ldots\right\}$, $B=\{0,1;0,2;0,3;\ldots\}$.

2.23 $A=\{-7;-14;-21;-28;\ldots\}$, $B=\{-7;(-7)^2;(-7)^3;\ldots\}$.

2.24 $A=\{-3;-6;-9;-12;\ldots\}$, $B=\{-3;(-3)^2;(-3)^3;\ldots\}$.

2.25 $A=\{-2;-4;-6;-8;\ldots\}$, $B=\{-2;(-2)^2;(-2)^3;\ldots\}$.

2.26 $A=\{-1;1;-1;1;\ldots\}$, $B=\{-1;0;0,1;0,2;0,3;\ldots\}$.

2.27 $A=\left\{\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{4};\frac{3}{5};\frac{4}{6};\ldots\right\}$.

2.28 $A=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$, $B=\{-0{,}1;-0{,}01;-0{,}001;\ldots\}$.

2.29 $A=\left\{1\frac{1}{3};1\frac{2}{3};2\frac{1}{3};2\frac{2}{3};\ldots\right\}$, $B=\left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{3}{3};\frac{4}{3};\frac{5}{3};\ldots\right\}$.

2.30 $A=\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{100};\frac{1}{1000};\ldots\right\}$, $B=\{0{,}1;0{,}2;0{,}3;\ldots\}$.

3 Доказать иррациональность числа:

3.1 $\sqrt{3}$.
3.2 $\sqrt{5}$.
3.3 $\sqrt{7}$.
3.4 $\sqrt{11}$.
3.5 $\sqrt{10}$.
3.6 $\sqrt{13}$.
3.7 $\sqrt{15}$.
3.8 $\sqrt{17}$.
3.9 $\sqrt{19}$.
3.10 $\sqrt{20}$.
3.11 $\sqrt{21}$.
3.12 $\sqrt{22}$.
3.13 $\sqrt{33}$.
3.14 $\sqrt{23}$.
3.15 $\sqrt{27}$.
3.16 $\sqrt{30}$.
3.17 $\sqrt{35}$.
3.18 $\sqrt{37}$.
3.19 $\sqrt{40}$.
3.20 $\sqrt{41}$.
3.21 $\sqrt{43}$.
3.22 $\sqrt{47}$.
3.23 $\sqrt{50}$.
3.24 $\sqrt{51}$.
3.25 $\sqrt{52}$.
3.26 $\sqrt{53}$
3.27 $\sqrt{57}$.
3.28 $\sqrt{59}$.
3.29 $\sqrt{60}$.
3.30 $\sqrt{61}$.

4. Найти $\max X$, $\min X$, $\sup X$, $\inf X$ числового множества:

4.1 $X=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{5};\frac{1}{7};\frac{1}{9}\right\}$.

4.2 $X=\left\{-\frac{1}{3};-\frac{1}{5};-\frac{1}{7};-\frac{1}{9}\right\}$.

4.3 $X=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{8};\ldots\frac{1}{2^n}\ldots\right\}$.

4.4 $X=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\ldots-\frac{1}{2^n}\ldots\right\}$.

4.5 $X=\left\{\frac{1}{3};\frac{1}{9};\ldots\frac{1}{3^n}\ldots\right\}$.

4.6 $X=\left\{-\frac{1}{3};-\frac{1}{9};\ldots-\frac{1}{3^n}\ldots\right\}$.

4.7 $X=\left\{\frac{1}{10};\frac{1}{100};\ldots\frac{1}{10^n}\ldots\right\}$.

4.8 $X=\left\{-\frac{1}{10};-\frac{1}{100};\ldots-\frac{1}{10^n}\ldots\right\}$.

4.9 $X=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.10 $X=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.11 $X=\{x\in Q:|x|<4\}$.

4.12 $X=\{x\in Q:|x|<1\}$.

4.13 $X=\{x\in Q:|x|\le 2\}$.

4.14 $X=\{x\in Q:|x|>3\}$.

4.15 $X=\{x\in Q:|x|\ge 3\}$.

4.16 $X=(2;3]$.

4.17 $X=[2;3)$.

4.18 $X=(2;3)$.

4.19 $X=[2;3]$.

4.20 $X=\left\{1;1+\frac{1}{2};1+\frac{1}{3};\ldots1+\frac{1}{n}\ldots\right\}$.

4.21 $X=\left\{\frac{1}{2};\frac{3}{4};\ldots;\frac{2^n+1}{2^n}\ldots\right\}$.

4.22 $X=\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{3};\frac{1}{2}+\frac{1}{4};\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\ldots;\ldots\right\}$.

4.23 $X=\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{4};\frac{2}{4};\frac{3}{4};\frac{1}{5};\frac{2}{5};\frac{3}{5};\frac{4}{5}\ldots\right\}$.

4.24 $X=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{1}{3};-\frac{2}{3};-\frac{1}{4};-\frac{2}{4};-\frac{3}{4};-\frac{1}{5};\ldots\right\}$.

4.25 $X=\left\{-1;-1-\frac{1}{2};-1-\frac{1}{3};\ldots;-1-\frac{1}{n}\ldots\right\}$.

4.26 $X=\left\{-\frac{1}{2};-\frac{3}{4};\ldots;-\frac{2^n-1}{2^n}\ldots\right\}$.

4.27 $X=\left\{0;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.28 $X=\left\{1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.29 $X=\left\{-1;-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

4.30 $X=\left\{0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{4};-\frac{1}{6};\ldots\right\}$.

5 С помощью метода математической индукции доказать истинность утверждений $n\in\mathbf{N}$:

5.1 n^3+5n кратно 6.

5.2 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5.3 $n^3+9n^2+26n+24$ кратно 6.

5.4 $1+4+7+\cdots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$.

5.5 $7^{2n}-1$ кратно 24.

5.6 $2\cdot 2+3\cdot 5+\cdots(n+1)(3n-1)=\frac{n(2n^2+5n+1)}{2}$.

5.7 13^n+5 кратно 6.

5.8 $5+9\cdot 5+13\cdot 5^2+\cdots+(4n+1)\cdot 5^{n-1}=n\cdot 5^n$.

5.9 15^n+6 кратно 7.

5.10 $4\cdot 2+7\cdot 2^3+10\cdot 2^5+\cdots+(3n+1)\cdot 2^{2n-1}$.

5.11 9^n+3 кратно 4.

5.12 $1+6+20+\cdots+(2n-1)\cdot 2^{n-1}=3+2^n\cdot(2n-3)$.

5.13 $\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=\frac{n+2}{2n+2}$.

5.14 $(1-\frac{1}{4})\cdot(1-\frac{1}{9})\cdots(1-\frac{1}{n^2})=\frac{n+1}{2n}$.

5.15 7^n+3n-1 кратно 9.

5.16 $(1-\frac{4}{1})(1-\frac{4}{9})(1-\frac{4}{25})\cdots(1-\frac{4}{(2n-1)^2})=\frac{1+2n}{1-2n}$.

5.17 $7^n+12n+17$ кратно 18.

5.18 $\frac{1}{5\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 19}+\cdots+\frac{1}{(7n-2)\cdot(7n+5)}=\frac{n}{5(7n+5)}$.

5.19 $\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$.

5.20 $\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+3)}=\frac{n(4n+5)}{3(2n+1)(2n+3)}$.

5.21 $6^n+20n+24$ кратно 25.

5.22 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2n^2-1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}$.

5.23 $5^n+2\cdot 3^n+5$ кратно 8.

5.24 $\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{n(n+30)}{(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+1)}{n+2)}$.

5.25 5^n-3^n+2n кратно 4.

5.26 $4^n > 7n-5$.

5.27 $5\cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19.

5.28 $3^n-2^n \ge n$.

5.29 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}<1$.

5.30 $4^n \ge n^2+3^n$.

6 Вычислить:

6.1 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^8$. **6.2** $\left(\frac{1-i}{-1+\sqrt{3}i}\right)^{10}$.

6.3 $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^9$. **6.4** $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2+2i}\right)^{10}$.

6.5 $\left(\frac{-2+2i}{\sqrt{3}-i}\right)^6$. **6.6** $\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}\right)^9$.

6.7 $\left(\frac{1-\sqrt{3}i}{4-4i}\right)^{12}$. **6.8** $\left(\frac{3+3i}{-\sqrt{3}+i}\right)^7$.

6.9 $\left(\frac{-1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$. **6.10** $\left(\frac{3+3\sqrt{3}i}{1-i}\right)^7$.

6.11 $\left(\frac{5-5i}{\sqrt{3}-i}\right)^4$. **6.12** $\left(\frac{3+3i}{7-7\sqrt{3}i}\right)^{11}$.

6.13 $\left(\frac{1-i}{3\sqrt{3}-3i}\right)^8$. **6.14** $\left(\frac{6+6i}{4\sqrt{3}-4i}\right)^7$.

6.15 $\left(\frac{7-7i}{2+2\sqrt{3}i}\right)^6$. **6.16** $\left(\frac{7+7i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^5$.

6.17 $\left(\frac{1-i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^8$. **6.18** $\left(\frac{3+3i}{5-5\sqrt{3}i}\right)^7$.

6.19 $\left(\frac{4+4i}{5\sqrt{3}-5i}\right)^9$. **6.20** $\left(\frac{2-2i}{6\sqrt{3}+6i}\right)^5$.

6.21 $\left(\frac{4-4i}{7-7\sqrt{3}i}\right)^{10}$. **6.22** $\left(\frac{5+5i}{3\sqrt{3}-3i}\right)^8$.

6.23 $\left(\frac{7+7i}{5\sqrt{3}-5i}\right)^3$. **6.24** $\left(\frac{2-2i}{5\sqrt{3}+5i}\right)^8$.

6.25 $\left(\frac{3-3i}{2\sqrt{3}+2i}\right)^9$. **6.26** $\left(\frac{5+5i}{3+3\sqrt{3}i}\right)^8$.

6.27 $\left(\frac{8-8i}{-3+3\sqrt{3}i}\right)^8$. **6.28.** $\left(\frac{3+3\sqrt{3}i}{5-5i}\right)^7$.

6.29 $\left(\frac{3-3\sqrt{3}i}{7+7i}\right)^9$. **6.30.** $\left(\frac{3+3i}{2\sqrt{3}-2i}\right)^7$.

7 Найти все значения корня и изобразить в комплексной плоскости все корни.

7.1 $\sqrt[4]{-3+3i}$. **7.2** $\sqrt[5]{5-5i}$.

7.3 $\sqrt[6]{5+5i}$. **7.4** $\sqrt[4]{3-3i}$.

7.5 $\sqrt[3]{5\sqrt{3}+5i}$. **7.6** $\sqrt[4]{-2+2i}$.

7.7 $\sqrt[5]{5\sqrt{3}-5i}$. **7.8** $\sqrt[4]{-1-\sqrt{3}i}$.

7.9 $\sqrt[4]{-3+3i}$. **7.10** $\sqrt[6]{5+5\sqrt{3}i}$.

7.11 $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}i}$. **7.12** $\sqrt[5]{-2-2i}$.

7.13 $\sqrt[4]{3-3i}$. **7.14** $\sqrt[6]{3\sqrt{3}-3i}$.

7.15 $\sqrt[4]{5\sqrt{3}-5i}$. **7.16** $\sqrt[7]{3-3\sqrt{3}i}$.

7.17 $\sqrt[4]{3-3i}$. **7.18** $\sqrt[6]{2+2i}$.

7.19 $\sqrt[8]{1+i}$. **7.20** $\sqrt[4]{-2+2i}$.

7.21 $\sqrt[8]{-3+3\sqrt{3}i}$.

7.22 $\sqrt[5]{7\sqrt{3}+7i}$.

7.23 $\sqrt[4]{8\sqrt{3}-8i}$.

7.24 $\sqrt[6]{-5+5\sqrt{3}i}$.

7.25 $\sqrt[3]{2-2i}$.

7.26 $\sqrt[4]{3\sqrt{3}-3i}$.

7.27 $\sqrt[6]{-2\sqrt{3}+2i}$.

7.28 $\sqrt[5]{4-4\sqrt{3}i}$.

7.29 $\sqrt[4]{-7\sqrt{3}-7i}$.

7.30 $\sqrt[5]{-2\sqrt{3}-2i}$.

8 Найти множества точек на плоскости $\boldsymbol{C}$, которые определяются заданными условиями:

8.1 $|z-1|<4,\ |z+1|\ge 3$.

8.2 $|z-i|\le 2,\ \operatorname{Re} z>1$.

8.3 $|z+1|<1,\ |z-i|<1$.

8.4 $|z-1-i|<1,\ \operatorname{Im} z>1,\ \operatorname{Re} z\ge 1$.

8.5 $|z+i|>1,\ |z|<2$.

8.6 $|z|<2,\ \dfrac{\pi}{4}\le \arg z\le \pi$.

8.7 $|z-1+i|>1,\ |z+2|\le 1$.

8.8 $|z-i|<4,\ 0\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}$.

8.9 $|z+1+i|>1,\ |z-i|\le 2$.

8.10 $|z-1|<1,\ 0\le \operatorname{Im} z\le 1,\ 1\le \operatorname{Re} z\le 2$.

8.11 $|z+2i|\le 2,\ \operatorname{Re} z\ge 1$.

8.12 $|z+i|<2,\ |z+1+i|\ge 1$.

8.13 $|z-i|<1,\ \operatorname{Im} z>2,\ -1\le \operatorname{Re} z\le 1$.

8.14 $|z-2i|<2,\ -\dfrac{\pi}{4}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{4}$.

8.15 $|z+i|\ge 1,\ \operatorname{Im} z>0,\ \operatorname{Re} z<3$.

8.16 $|z-1-2i|<1,\ |z+1+i|\le 3$.

8.17 $|z|<4,\ -1\le \operatorname{Im} z\le 1,\ 0\le \operatorname{Re} z\le 1$.

8.18 $1\le |z-1|<4,\ |z|\ge 3$.

8.19 $2\le |z-i|<4,\ 0<\arg z<\dfrac{\pi}{2}$.

8.20 $|z-1+i|<4,\ |z|\ge 2$.

8.21 $|z-i|<1,\ \operatorname{Im} z\le 4,\ \operatorname{Re} z\ge 1$.

8.22 $|z|<4,\ |z+i|\ge 2$.

8.23 $|z-1|<2,\ -\dfrac{\pi}{3}\le \arg z\le \dfrac{\pi}{2}$.

8.24 $|z-i|<1,\ \operatorname{Re} z\ge -1$.

8.25 $|z|<2,\ |z-1|\ge 1$.

8.26 $|z-1-i|<2,\ 0\le \arg z\le \pi$.

8.27 $|z-1|<1,\ 0\le \operatorname{Im} z\le 3,\ 1\le \operatorname{Re} z\le 2$.

8.28 $|z-i|<2,\ |z+1+i|\ge 3$.

8.29 $1\le |z-1|<5,\ |z|\ge 3$.

8.30 $|z-1-i|<1,\ \operatorname{Im} z>2,\ \operatorname{Re} z\ge 1$.

9 Найти решение уравнения:

9.1 $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.2 $\dfrac{5}{z-i}+\dfrac{1-3i}{1+8i}=1$.

9.3 $\dfrac{5i}{z+2i}+\dfrac{4+3i}{1+2i}=3$.

9.4 $\dfrac{6i}{z-2i}+\dfrac{3+i}{1-i}=10$.

9.5 $\dfrac{6i}{2z+i}-\dfrac{3-i}{2-i}=1$.

9.6 $\dfrac{4}{z+6i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.7 $\dfrac{2}{4z+i}+\dfrac{2-3i}{1+i}=2$.

9.8 $\dfrac{3i}{2z-i}+\dfrac{5+i}{1+9i}=7$.