Практическое занятие 5 **Тройной интеграл**

5.1 Определение, свойства и вычисление тройного интеграла
5.2 Замена переменных в тройном интеграле
5.3 Цилиндрические и сферические координаты
5.4 Приложения тройного интеграла

5.1 Определение, свойства и вычисление тройного интеграла

Определение тройного интеграла. Пусть Q замкнутая область пространства $\mathbb{R}^3$, на котором задана непрерывная функция $f(x;y;z)$. И пусть $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,...,n$, разбиение области Q на частичные области Q_1, Q_2, ..., Q_n с объемами ΔV_1, ΔV_2, ..., ΔV_n. При этом мелкость разбиения есть $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n} d(Q_i)$, где $d(Q_i)$ – диаметр частичной области Q_i, $i=1,2,...,n$. В каждой малой части Q_i выберем произвольную точку $C_i(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)$.

Сумма

$$\sigma_n(\tau,C_i)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\cdot\Delta V_i \tag{5.1}$$

называется *интегральной суммой* Римана для функции $f(x;y;z)$ на множестве Q, соответствующей разбиению τ и выбору точек $C_i\in Q_i$, $i=1,2,...,n$.

Если функция $f(x;y;z)$, ограничена на Q, то для любого разбиения $\tau=\{Q_i\}$, $i=1,2,...,n$, определены числа:

$$m_i=\inf_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z),\ M_i=\sup_{(x;y;z)\in Q_i} f(x;y;z).$$

Суммы

$$s_\tau=\sum_{i=1}^{n} m_i\cdot\Delta V_i\,,\qquad S_\tau=\sum_{i=1}^{n} M_i\cdot\Delta V_i$$

называются *нижней* и *верхней суммами Дарбу*, соответствующими разбиению $\tau=\{Q_i\}$ множества Q.

Тройным интегралом от функции $f(x;y;z)$ по множеству Q называется предел (если он существует) интегральной суммы (5.1) при $\lambda\to 0$:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dV=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i;\eta_i;\zeta_i)\Delta V_i\,, \tag{5.2}$$

подынтегральная функция $f(x;y;z)$ называется *интегрируемой* по замкнутой области Q, множество Q – *областью интегрирования*, x, y, z – *переменными интегрирования*, dv – *элементом* объема.

Не ограничивая общности, можно считать, что $dv=dxdydz$. Поэтому можно записать:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz=\iiint\limits_V f(x;y;z)dv\,.$$

Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости) *Если функция $f(x;y;z)$ интегрируема в замкнутой области Q, то она ограничена в этой области.*

Теорема 2 (достаточное условие интегрируемости) *Если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в замкнутой области Q, то она интегрируема в ней.*

Теорема 3 (критерий интегрируемости Дарбу) *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в замкнутой области $Q\subset\mathbb{R}^3$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon>0$ нашлось такое $\delta>0$, что для любого разбиения $\tau=\{Q_i\}$ с мелкостью $\lambda(\tau)<\delta$ выполнялось неравенство $S_\tau-s_\tau<\varepsilon$.*

Свойства тройного интеграла. Для тройного интеграла справедливы следующие *свойства*:

– $\iiint\limits_Q dv=V$, где V – объем области Q;

– *(линейность)* если α и β — произвольные постоянные числа, функции $f(x;y;z)$ и $g(x;y;z)$ интегрируемы в области

Q, то функция $\alpha \cdot f(x;y;z)+\beta \cdot g(x;y;z)$ тоже интегрируема в Q и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_Q (\alpha f(x;y;z)+\beta g(x;y;z))dv =$$
$$=\alpha \iiint\limits_Q f(x;y;z)dv + \beta \iiint\limits_Q g(x;y;z)dv;$$

– *(аддитивность)* если область Q является объединением областей Q_1 и Q_2, не имеющих общих внутренних точек, на каждом из которых функция $f(x;y;z)$ интегрируема, то $f(x;y;z)$ также интегрируема на Q и справедлива формула:

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv = \iiint\limits_{Q_1} f(x;y;z)dv + \iiint\limits_{Q_2} f(x;y;z)dv;$$

– *(монотонность)* если в области Q имеет место неравенство $f(x;y;z) \geq 0$, то

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv \geq 0;$$

– если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в области Q, объем которой равен V, то

$$m \cdot V \leq \iiint\limits_Q f(x;y;z)dv \leq M \cdot V,$$

где m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на множестве Q.

– *(теорема о среднем)* если функция $f(x;y;z)$ непрерывна в области Q, объем которой равен V, то в этой области существует такая точка $P_0(x_0;y_0z_0)$, что

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dv = f(x_0;y_0;z_0)\cdot V.$$

Вычисление тройного интеграла. В декартовых координатах вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех определенных.

Пусть функция $f(x;y;z)$ определена на измеримом множестве

$$Q = \{(x;y;z) \mid (x;y) \in G \subset Oxy,\, z_1(x;y) \leq z \leq z_2(x;y)\},$$

где $z_1(x;y)$ и $z_2(x;y)$ – непрерывные функции в области G. И пусть каждая прямая, параллельная оси Oz, пересекает границу области Q не более чем в двух точках (рисунок 5. 1), т. е. пространственная область Q является элементарной относительно оси Oz.

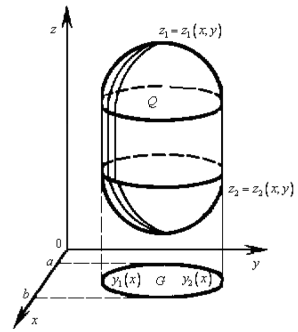

Рисунок 5. 1 – Пространственная область Q

Теорема 4 Пусть 1) существует тройной интеграл

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz;$$

2) $\forall (x;y) \in G$ существует определенный интеграл

$$I(x;y) = \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

(при постоянных x и y).

Тогда существует двойной интеграл

$$\iint\limits_G I(x;y)dxdy = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz$$

и справедливо равенство:

$$\iiint\limits_V f(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_G dxdy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz\,. \qquad (5.3)$$

Данная формула позволяет свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определенного интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по области G.

Выражение

$$I(x;y) = \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz \qquad (5.4)$$

представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и области $G = \{(x;y) | a \le x \le b,\, y_1(x) \le y \le y_1(x)\}$, по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы о сведении двойного интеграла к повторному, то, переходя от двойного интеграла $\iint\limits_G I(x;y)dxdy$ к повторному интегралу, получаем

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_1(x)} dy \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} f(x;y;z)dz\,. \qquad (5.5)$$

Если пространственная область Q не является элементарной, то ее необходимо разбить на конечное число элементарных областей, к которым можно применить формулу (5.5).

Порядок интегрирования в формуле при определенных условиях может быть иным, т. е. переменные x, y, z можно менять местами.

Пусть Q – прямоугольный параллелепипед

$$Q = \{(x;y;z) |\ a \le x \le b, c \le y \le d,\ p \le z \le q\},$$

$f(x,y,z)$ – непрерывная в Q функция. Тогда:

$$\iiint\limits_Q f\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f\,dz = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b dx \int\limits_p^q f\,dz = \int\limits_p^q dz \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f\,dx\,.$$

Если

$$f(x,y,z) = \varphi(x)\cdot g(y)\cdot h(z)$$

и область Q – прямоугольный параллелепипед, то

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b \varphi(x)dx \int\limits_c^d g(y)dy \int\limits_p^q h(z)dz\,. \qquad (5.6)$$

5.2 Замена переменных в тройном интеграле

Замена переменных в тройном интеграле $\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz$ состоит в переходе от координат x, y, z к новым криволинейным координатам u, v, w по формулам

$$x = x(u;v;w),\ y = y(u;v;w),\ z = z(u;v;w), \qquad (5.7)$$

где $(u;v;w) \in Q^* \subset \mathbb{R}^3_{uvw}$.

Функции (5.7) осуществляют взаимно-однозначное отображение области $Q^* \subset \mathbb{R}^3_{uvw}$ на область $Q \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$.

Теорема 5 Пусть 1) Q и Q^* замкнутые ограниченные области в пространствах $\mathbb{R}^3_{xyz}$ и $\mathbb{R}^3_{uvw}$ соответственно;

2) функция $f(x;y;z)$ ограничена и непрерывна в области Q;

3) функции $x(u;v;w)$, $y(u;v;w)$, $z(u;v;w)$ имеют в области Q^* непрерывные частные производные первого порядка и якобиан $J = \dfrac{D(x;y;z)}{D(u;v;w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \ne 0$ *в области Q^*.*

Тогда справедлива формула замены переменных в тройном интеграле

$$\iiint\limits_Q f(x;y;z)dxdydz = \\ = \iiint\limits_{Q^*} f(x(u;v;w); y(u;v;w); z(u;v;w))|J|dudvdw\,. \qquad (5.8)$$

5.3 Цилиндрические и сферические координаты

Цилиндрические координаты. Пусть $M(x;y;z)$ произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно определяется тройкой чисел $(r;\varphi;z)$, где $(r;\varphi)$ – полярные координаты точки M', z – аппликата точки M (рисунок 5. 2). Тройка чисел $(r;\varphi;z)$ называется *цилиндрическими координатами* точки M .

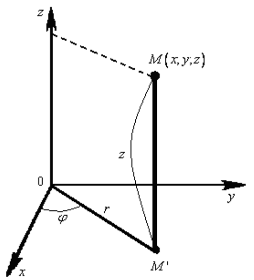

Рисунок 5. 2 – Связь декартовых и цилиндрических координат

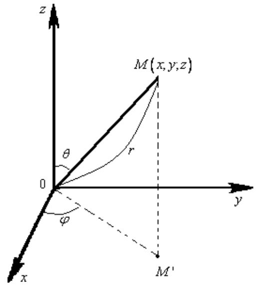

Рисунок 5. 3 – Связь декартовых и сферических координат

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к цилиндрическим координатам $(r;\varphi;z)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \\ z = z, \end{cases} \tag{5.9}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$. Иногда в качестве промежутка изменения φ берётся промежуток $-\pi < \varphi \le \pi$.

Якобиан отображения есть

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(p,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r .$$

Сферические координаты. Пусть $M(x;y;z)$ – произвольная точка в пространстве $Oxyz$, $M'(x;y)$ – проекция точки M на плоскость Oxy. Точка M однозначно задается тройкой чисел $(r;\theta;\varphi)$, где r – расстояние точки M до точки O (начала координат), θ – угол между лучами OM и Oz, φ – полярный угол точки M' на плоскости Oxy (рисунок 5. 3).

Тройка чисел $(r;\theta;\varphi)$ называется *сферическими координатами* точки M .

Переход от прямоугольных координат $(x;y;z)$ к сферическим координатам $(r;\theta;\varphi)$ задается формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\theta, \end{cases} \tag{5.10}$$

где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $0 \le \theta \le \pi$.

Якобиан отображения есть:

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta \end{vmatrix} = r^2\sin\theta .$$

Если тело ограничено эллипсоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ или его частью, переходят к обобщенным сферическим координатам по формулам:

$$\begin{cases} x = a\,r\sin\theta\cos\varphi, \\ y = b\,r\sin\theta\sin\varphi, \\ z = c\,r\cos\theta, \end{cases} \qquad (5.11)$$

якобиан отображения равен

$$J = abcr^2\sin\theta .$$

Тогда

$$\iiint\limits_Q f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{Q^*} f(ar\sin\theta\cos\varphi, br\sin\theta\sin\varphi, cr\cos\theta)abcr^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta .$$

5.4 Приложения тройного интеграла

Пусть Q материальное тело с плотностью $\rho(x;y;z)$. Тогда тройной интеграл используется для вычисления:

– *объема тела*

$$V = \iiint\limits_Q dxdydz ; \qquad (5.12)$$

– *массы тела*

$$m = \iiint\limits_Q \rho(x;y;z)\,dxdydz ; \qquad (5.13)$$

– *статических моментов* M_{yz}, M_{zx}, M_{xy} тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy соответственно:

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint\limits_Q x\rho(x;y;z)\,dxdydz ; \\ M_{zx} &= \iiint\limits_Q y\rho(x;y;z)\,dxdydz ; \\ M_{xy} &= \iiint\limits_Q z\rho(x;y;z)\,dxdydz ; \end{aligned} \qquad (5.14)$$

– *координат центра* $(x_c;y_c;z_c)$ тяжести тела:

$$x_0 = \frac{M_{yz}}{m}, \qquad y_0 = \frac{M_{zx}}{m}, \qquad z_0 = \frac{M_{xy}}{m} ; \qquad (5.15)$$

– *моментов инерции* I_{yz}, I_{zx}, I_{xy} тела относительно координатных плоскостей Oyz, Ozx, Oxy соответственно:

$$\begin{aligned} I_{yz} &= \iiint\limits_Q x^2\rho(x;y;z)\,dxdydz ; \\ I_{zx} &= \iiint\limits_Q y^2\rho(x;y;z)\,dxdydz ; \\ I_{xy} &= \iiint\limits_Q z^2\rho(x;y;z)\,dxdydz ; \end{aligned} \qquad (5.16)$$

– *моментов инерции* I_x, I_y, I_z, I_0 тела относительно координатных осей Ox, Oy, Oz и начала координат $O(0;0)$ соответственно:

$$\begin{aligned} I_x = I_{zx} + I_{xy}, \quad I_y &= I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{yz} + I_{zx} ; \\ I_0 &= I_{yz} + I_{zx} + I_{xy} . \end{aligned} \qquad (5.17)$$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определения: а) интегральной суммы, б) нижней и верхней сумм Дарбу.

2 Что называется тройным интегралом?

3 Сформулируйте необходимое и достаточное условия интегрируемости функции $f(x;y;z)$.

4 Перечислите свойства тройного интеграла.

5 Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному.

6 Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле.

7 Какие координаты называются цилиндрическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим?

8 Какие координаты называются сферическими? Чему равен якобиан перехода от декартовых координат к сферическим?

9 При вычислении каких величин используется тройной интеграл?

Решение типовых примеров

1 Вычислить $\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz$, где

$$Q=\left\{(x;y;z)\right|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 2,\ 0\le z\le 3\left.\right\}.$$

Решение. Область интегрирования – прямоугольный параллелепипед. По формуле (5.6) получим:

$$\iiint\limits_Q (x+y+z)\,dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2 dy\int\limits_0^3 (x+y+z)\,dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Big|_0^3 dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^2\left(3x+3y+\frac{9}{2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(3xy+\frac{3}{2}y^2+\frac{9}{2}y\right)\Big|_0^2 dx=\int\limits_0^1 (6x+6+9)\,dx=$$

$$=\int\limits_0^1 (6x+15)\,dx=\left(3x^2+15x\right)\Big|_0^1=3+15=18.$$

2 Вычислить интеграл $\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz$, область Q ограничена плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z-1=0$.

Решение. Область Q проектируется на плоскость Oxy в область G, которая представляет собой треугольник (рисунок 5. 4): $G=\left\{(x;y)\right|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x\left.\right\}$.

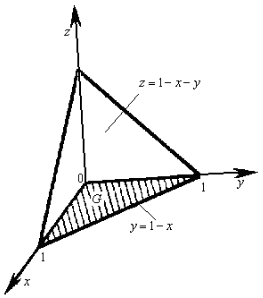

Рисунок 5.4 – Область интегрирования для типового примера 2

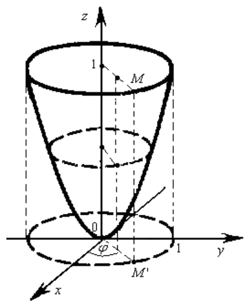

Рисунок 5.5 – Область интегрирования для типового примера 3

Имеем

$$\iiint\limits_Q (x+y+z)dxdydz=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=$$

$$=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left(xz+yz+\frac{z^2}{2}\right)\Bigg|_0^{1-x-y}dy=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left(y-yx^2-xy^2-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{1-x}dx=\frac{1}{6}\int\limits_0^1\left(2-3x+x^3\right)dx=$$

$$=\frac{1}{6}\left(2x-\frac{3x^2}{2}+\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{8}.$$

3 Вычислить интеграл $\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2\right)dxdydz$, где область Q ограничена поверхностями $z=x^2+y^2$ и $z=1$ (рисунок 5. 5).

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к цилиндрическим координатам по формулам (5.9).

Область Q проектируется в круг $x^2+y^2\le 1$. Поэтому $0\le\varphi<2\pi$, $0\le r\le 1$. Постоянному значению r в пространстве $Oxyz$ соответствует цилиндр $x^2+y^2=r^2$. Рассматривая пересечение этого цилиндра с областью Q, получаем изменение координаты z от точек, лежащих на параболоиде, до значений тех точек, лежащих на плоскости $z=1$, т. е. $r^2\le z\le 1$.

Имеем:

$$\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2\right)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1 dr\int\limits_{\rho^2}^1 r^2\cdot r\,dz=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\left(r^3z\right)\Big|_{\rho^2}^1 dr=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Bigg|_0^1 d\varphi=\frac{1}{12}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi=\frac{\pi}{6}.$$

4 Вычислить интеграл $\iiint\limits_V \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz$, где область Q есть шар $x^2+y^2+z^2\le R^2$ (рисунок 5. 6).

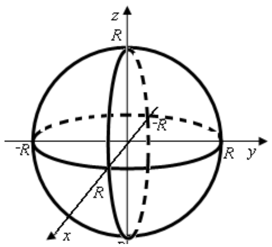

Рисунок 5. 6 – Область интегрирования для типового примера 4

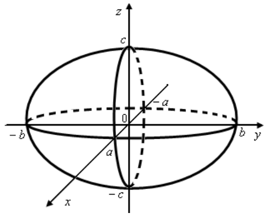

Рисунок 5. 7 – Область интегрирования для типового примера 5

Решение. Вычислим данный интеграл, переходя к сферическим координатам по формулам (5.10).

Из вида области Q следует, что

$$0 \le r \le R\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi\,,\ 0 \le \theta \le \pi\,.$$

В этом случае подынтегральная функция примет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2\sin^2\theta\cos^2\varphi + r^2\sin^2\theta\sin^2\varphi + r^2\cos^2\theta =$$
$$= r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta = r^2\,.$$

Тогда

$$\iiint\limits_Q \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz = \int_0^R dr\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} r^2 r^2 \sin\theta\, d\varphi =$$
$$= \int_0^R r^4 dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\int_0^R r^4 dr\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta =$$
$$= 4\pi\int_0^R r^4 dr = 4\pi\frac{r^5}{5}\bigg|_0^R = \frac{4\pi R^5}{5}\,.$$

5 Вычислить $\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz$, где Q – эллипсоид (рисунок 5. 7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \le 1$.

Решение. Переходя к обобщенным сферическим координатам по формулам (5.11), получим уравнение эллипсоида

$$r^2 = 1\,.$$

Тогда

$$\iiint\limits_Q \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^3 dxdydz =$$
$$= \iiint\limits_{Q^*} r^6\cdot r^2\sin\theta\, abc\, drd\varphi d\theta = abc\iiint\limits_{Q^*} r^8\sin\theta\, drd\varphi d\theta =$$
$$= abc\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^\pi \sin\theta d\theta\int_0^1 r^8 dr = abc\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}\cdot\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^\pi\cdot\frac{r^9}{9}\Big|_0^1 =$$
$$= \frac{abc}{9}\cdot 2\pi\left(1+1\right) = \frac{4\pi abc}{9}\,.$$

6 Найти объем тела, ограниченного поверхностями $2z = x^2 + y^2$, $z = 2$.

Решение. Тело Q ограничено снизу параболоидом вращения с осью симметрии Oz, вершиной в начале координат, сверху – плоскостью $z = 2$. Проекция тела на плоскость Oxy – область, ограниченная окружностью

$$\begin{cases} 2z = x^2 + y^2, \\ z = 2, \end{cases} \Rightarrow\ x^2 + y^2 = 4\,.$$

Для вычисления интеграла перейдем к цилиндрическим координатам по формулам (5.9):

Так как $\frac{x^2+y^2}{2} \le z \le 2$, то $\frac{r^2}{2} \le z \le 2$.

Очевидно, что $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r \le 2$.

Тогда по формуле (5.12) объем тела равен

$$V = \iiint\limits_Q dxdydz = \iiint\limits_{Q^*} r\, drd\varphi dz =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 dr\int_{\frac{r^2}{2}}^2 rdz = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 rz\Big|_{\frac{r^2}{2}}^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2 r\left(2-\frac{r^2}{2}\right)dr =$$
$$= \int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^2\left(2r-\frac{r^3}{2}\right)dr = \int_0^{2\pi}\left(r^2-\frac{r^4}{8}\right)\Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi}\left(4-2\right)d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\varphi\Big|_0^{2\pi} = 4\pi \ .$$

7 Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2Rz$, если плотность в каждой точке обратно пропорциональна расстоянию ее до начала координат.

Решение. По условию $\rho(x,y,z) = \dfrac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ и тогда по формуле (5.13) масса равна

$$m = \iiint_V \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz \ .$$

Уравнение сферической поверхности приведем к каноническому виду

$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$;

$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz + R^2 = R^2$;

$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = R^2$.

Сфера с центром в точке $(0;0;R)$ радиуса R. Проекция тела на плоскость $z = 0$ – область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = R^2$.

Переходим к сферическим координатам (5.10) .Из уравнения сферической поверхности находим пределы для r:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0 \ \Rightarrow \ r^2 - 2Rr\cos\theta = 0 \ \Rightarrow$

$\Rightarrow \ r(r - 2R\cos\theta) = 0 \ \Rightarrow \ 0 \le r \le 2R\cos\theta$.

При этом $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$.

Тогда масса равна

$$m = \iiint_Q \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dxdydz = k\iiint_{Q^*} \frac{r^2 \sin\theta}{r} drd\varphi\, d\theta =$$

$$= k\iiint_{Q^*} r\sin\theta drd\varphi\, d\theta = k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos\theta} r\sin\theta\, dr =$$

$$= k\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \frac{r^2}{2}\Big|_0^{2R\cos\theta} d\theta = \frac{k}{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \cdot 4R^2 \cdot \cos^2\theta\, d\theta =$$

$$= -2kR^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d(\cos\theta) =$$

$$= -2kR^2 \int_0^{2\pi} \frac{\cos^3\theta}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = -2kR^2 \int_0^{2\pi}\left(0 - \frac{1}{3}\right) d\varphi = \frac{2}{3}kR^2 \cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}k\pi R^2 .$$

Задания для аудиторной работы

1 Вычислить следующие тройные интегралы по указанным пространственным областям:

а) $\iiint_Q \left(5x + \frac{3}{2}z\right) dxdydz$, Q: $y = x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = 0$, $z = x^2 + 15y^2$;

б) $\iiint_Q (x + y + z^2) dxdydz$, Q: $-1 \le x \le 0$, $0 \le y \le 1$, $2 \le z \le 3$;

в) $\iiint_Q \dfrac{dxdydz}{(1 + x + y + z)^3}$, Q: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

г) $\iiint_Q (4x - y + z) dxdydz$, Q $z = 2 - x^2$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

д) $\iiint_Q zdxdydz$, Q: $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $z = 0$, $y = x$, $y = 2x$, $x = \dfrac{1}{2}$;

е) $\iiint\limits_Q ydxdydz$, Q: $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 16$, $y \le \sqrt{3}x$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

ж) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, Q: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z \ge 0$;

и) $\iiint\limits_Q 8y^2 ze^{-xyz}dxdydz$, Q: $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 2$;

к) $\iiint\limits_Q \dfrac{dxdydz}{(4x + 3y + z - 2)^6}$, Q: $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$;

л) $\iiint\limits_Q (1 - 2y)dxdydz$, Q: $z = y^2$, $z + 2x = 6$, $x = 0$, $z = 4$;

м) $\iiint\limits_Q x^2 y^2 dxdydz$, Q: $x^2 + y^2 \le 1$, $0 \le z \le x^2 + y^2$.

2 Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = 4 - y^2$, $z = y^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$.

3 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$, если плотность $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2$.

4 Найти массу шара $x^2 + y^2 + z^2 \le 2x$, если плотность

$$\rho(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

5 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностями $z = 2y^2$, $z = 3y^2$ $(y \ge 0)$, $z = 4x$, $z = 5x$, $z = 3$, с плотностью $\rho(x, y, z) = y$.

6 Вычислить объем тела Q, ограниченного поверхностями $2z = y^2$, $2x + 3y = 12$, $x = 0$, $z = 0$.

7 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 10x$, $x^2 + y^2 = 13x$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $y \ge 0$.

8 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}$, $12z = x^2 + y^2$.

9 Найти массу однородного тела Q, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8z$

10 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностью $9x^2 + 2y^2 + 18z^2 = 18$, если плотность

$$\rho(x, y, z) = (x^2 + y^2)\sqrt{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{9} + z^2}.$$

Задания для домашней работы

1 Вычислить следующие тройные интегралы по указанным пространственным областям:

а) $\iiint\limits_Q (6x + 8y + 4z + 5)dxdydz$, Q: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$;

б) $\iiint\limits_Q (x + y + z)dxdydz$, Q: $x + y = a$, $z = 0$, $z = c$, $x = 0$, $y = 0$;

в) $\iiint\limits_Q (x^2 + y^2 + z^2)dxdydz$, Q: $y^2 + z^2 = b^2$, $x = 0$, $x = a$;

г) $\iiint\limits_Q (x^2 + y^2 + z)^3 dxdydz$, Q: $z = x^2 + y^2$, $z = c$ $(c > 0)$;

д) $\iiint\limits_Q \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}dxdydz$, Q: верхняя половина шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$;

е) $\iiint\limits_Q \left(\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$, Q: внутренность эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

ж) $\iiint\limits_Q (5x-3z)dxdydz$, $Q:\ x^2+y^2=1$, $z=4$, $z+2x-3y=0$;

и) $\iiint\limits_Q (2x+y)dxdydz$, $Q:$ $y=x$, $y=0$, $x=1$, $z=1$, $z=1+x^2+y^2$;

к) $\iiint\limits_Q zdxdydz$, $Q:\ \dfrac{x^2+y^2}{R^2}=\dfrac{z^2}{h^2}$ и $z=h$ $(h>0)$;

л) $\iiint\limits_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, $Q:\ x^2+y^2+z^2=y$;

м) $\iiint\limits_Q \dfrac{xdxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}}$, $Q:\ 1\le x^2+y^2+z^2\le 9$, $y\le x$, $y\ge 0$, $z\ge 0$.

2 Вычислить массу тела Q расположенного в первом октанте и ограниченного цилиндрическими поверхностями $z=2x^2$, $z=3-x^2$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=2$, если $\rho(x,y,z)=xy^2$.

3 Найти массу пирамиды, ограниченной плоскостями $x-y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если $\rho(x,y,z)=x$.

4 Найти массу тела Q, ограниченного поверхностями $z=x^2+10y^2$, $z=20-x^2-10y^2$, если плотность равна $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$.

5 Вычислить массу тела Q, ограниченного поверхностью $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}=1$, с плотностью $\rho(x,y,z)=\sqrt{\left(\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{4}\right)^3}$.

6 Вычислить объем тела Q, ограниченного поверхностями $y^2=4x+4$, $y^2=-2x+4$, $z=0$, $z=3$.

7 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $y^2=x+1$, $y^2=1-x$, $x+y+z=3$, $z=0$.

8 Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями

$$y=12-x^2-z^2,\quad y=\sqrt{z^2+x^2}.$$