Практическое занятие 2 **Аналитические функции. Условия Коши-Римана**

2.1 Производная и дифференциал функции комплексной переменной
2.2 Условия Коши-Римана
2.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной
2.4 Конформное отображение

2.1 Производная и дифференциал функции комплексной переменной

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и конечна в некоторой области $D \subset \mathbb{C}$. И пусть точки z и $z+\Delta z$ принадлежат области D. Обозначим $\Delta f(z) = f(z+\Delta z) - f(z)$.

Производной функции $f(z)$ в точке z называется предел (если он существует и конечный)

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение Δz стремится к нулю любым образом, т. е. точка $z+\Delta z$ приближается к точке z по любому направлению.

Функция $f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* z, если ее приращение $\Delta f(z)$ представимо в виде

$$\Delta f(z) = C \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

где $\alpha(\Delta z) \to 0$ при $\Delta z \to 0$.

Теорема 1 Для того чтобы функция $f(z)$ была дифференцируемой в точке z, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\Delta f(z) = f'(z) \cdot \Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

где $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \alpha(\Delta z) = 0$.

Величина $f'(z)\Delta z$ называется *дифференциалом* функции $f(z)$ и обозначается $df(z) = f'(z)\Delta z$.

В частности, при $f(z) = z$ получаем $dz = \Delta z$, т. е. дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением. Заменяя приращение Δz на dz, имеем

$$df(z) = f'(z)dz.$$

Таким образом, дифференциал дифференцируемой функции равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной.

Функция $f(z)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцируема как в самой точке, так и в ее окрестности. Функция $f(z)$ называется *аналитической в области* $D \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в каждой точке этой области.

2.2 Условия Коши-Римана

Пусть $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ однозначная функция комплексной переменной $z = x + iy$, определенная в области D.

Теорема 2 Для того чтобы в точке $z = x + iy$ функция $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ была дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ были дифференцируемы в точке $(x;y)$ как функции двух действительных переменных x и y, и выполнялись условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Производная аналитической функции находится по формулам:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Поскольку свойства алгебраических действий и правила предельного перехода для функций действительной переменной распространяются и на функцию комплексной переменной, то правила дифференцирования функций действительной переменной справедливы и для функции комплексной переменной:

$$\left(f(z)+g(z)\right)'=f'(z)+g'(z),$$

$$\left(f(z)\cdot g(z)\right)'=f'(z)\cdot g(z)+f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'=\frac{f'(z)\cdot g(z)-f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)},\ g(z)\neq 0,$$

$$\left(f\left(g(z)\right)\right)'=f_g'\cdot g'(z),$$

$$f'(z)=\frac{1}{\left(f^{-1}(z)\right)'}.$$

Функция $g(x;y)$ действительных переменных x и y называется *гармонической*, если она дважды дифференцируема и ее частные производные $\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}$ удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g(x;y)}{\partial y^2}=0.$$

Теорема 3 Если функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ аналитическая в области $D\subset\mathbb{C}$, то $u(x;y)$ и $v(x;y)$ являются гармоническими в области D.

Обратное верно не всегда: если взять за $u(x;y)$ и $v(x;y)$ две произвольные функции, гармонические в области D, то функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ не всегда будет аналитической в этой области, так как две произвольно взятые гармонические функции могут не удовлетворять условиям Коши-Римана.

Две гармонические в области $D\subset\mathbb{C}$ функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$, связанные в области D условиями Коши-Римана, называются *сопряженными*.

Теорема 4 Пусть $D\subset\mathbb{C}$ односвязная область и функция $u(x;y)$ гармоническая в D. Тогда существует такая сопряженная ей гармоническая функция $v(x;y)$, определенная с точ-

ностью до постоянного слагаемого, что функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ является аналитической.

2.3 Геометрический смысл модуля и аргумента производной

Пусть функция $w=f(z)$ – аналитическая в некоторой точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$. Модуль производной $\left|f'(z_0)\right|$ называется *коэффициентом подобия* в точке z_0 при отображении $w=f(z)$. При $\left|f'(z_0)\right|>1$ имеет место *растяжение*, при $\left|f'(z_0)\right|<1$ – *сжатие*.

Аргумент производной $\arg f'(z_0)$ – это угол, на который надо повернуть касательную в точке z_0 к любой гладкой кривой Γ, проходящей через точку z_0 так, чтобы получить касательную в точке $w_0=f(z_0)$ к образу Γ' этой кривой при отображении $w=f(z)$. При этом, если $\arg f'(z_0)>0$, то поворот происходит против часовой стрелки, если $\arg f'(z_0)<0$ – по часовой.

2.4 Конформное отображение

Взаимно-однозначное отображение области $D\subset\mathbb{C}$ на область $D'\subset\mathbf{W}$, осуществляемое функцией $w=f(z)$, называется *конформным*, если оно в каждой точке области D обладает свойством сохранения углов и постоянством растяжений.

Другими словами, если $w=f(z)$ конформное отображение области $D\subset\mathbb{C}$ в область $D'\subset\mathbf{W}$, то

– величина угла между пересекающимися в точке z_0 кривыми области D равна величине угла между образами этих кривых, пересекающихся в точке $w_0=f(z_0)$ области D';

– бесконечно малому кругу с центром в точке $z_0\in D$ соответствует бесконечно малый круг с центром в точке $w_0=f(z_0)\in D'$.

Если при отображении $w = f(z)$ направление отсчета соответствующих углов одинаковое, то имеет место *конформное отображение 1-го рода*, если направление отсчета углов изменяется на противоположное, то – *конформное отображение 2-го рода*.

Теорема 5 Пусть функция $w = f(z)$ – аналитическая в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$. Тогда отображение $w = f(z)$ является конформным в точке z_0.

Теорема 6 (критерий конформности) Для того, чтобы функция $w = f(z)$ являлась конформным отображением в области D, необходимо и достаточно, чтобы $f(z)$ была однолистной, аналитической и $f'(z) \neq 0$ всюду в области D.

Для конформного отображения $w = f(z)$ справедливы следующие теоремы.

Теорема 7 (Римана) Всякую односвязную область D плоскости $\mathbb{C}$, граница которой состоит более чем из одной точки, можно конформно отобразить на внутренность единичного круга $|w| < 1$ плоскости $\mathbf{W}$.

Теорема 8 Существует единственная функция $w = f(z)$, осуществляющая конформное отображение заданной односвязной области D, граница которой состоит более чем из одной точки, на единичный круг $|w| < 1$ так, что

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha, \; z_0 \in E, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Теорема 9 (принцип взаимно однозначного соответствия границ) Пусть в ограниченной односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ с контуром γ задана аналитическая функция $w = f(z)$, непрерывная в $\bar{D}$ и осуществляющая взаимно однозначное отображение контура γ на некоторый контур Γ плоскости $\mathbf{W}$. Тогда, если при заданном отображении контуров сохраняется направление обхода, то функция $w = f(z)$, осуществляет конформное отображение D на внутреннюю область $D' \subseteq \mathbf{W}$, ограниченную контуром Γ.

Пусть область D содержит в составе своей границы прямолинейный отрезок γ. Область D^*, полученная зеркальным отражением области D относительно прямой, на которой лежит отрезок γ, называется областью, *симметричной* области D относительно γ (рисунок 2. 1).

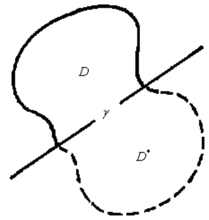

Рисунок 2. 1 – Симметричные области D и D^* относительно γ

Точки z_1 и z_2 называются *симметричными* относительно прямой, если они лежат на перпендикуляре к этой прямой по разные стороны от нее и на равных расстояниях.

Теорема 10 (принцип симметрии Римана-Шварца) Пусть 1) граница области D содержит прямолинейный отрезок γ;

2) на множестве $D \cup \gamma$ определена непрерывная функция $w = f(z)$, осуществляющая отображение области D на область D^*;

3) при отображении $w = f(z)$ прямолинейный отрезок γ границы области D переходит в прямолинейный отрезок Γ границы области D^*.

Тогда 1) если $f(z)$ аналитична в области D, то она аналитична в области D^*;

2) области D и *D^* симметричны относительно прямой, содержащей отрезок γ;*

3) различные точки z_1, z_2 из D симметрично отображаются в различные точки w_1 и w_2 из D^* соответственно.

Вопросы для самоконтроля

1 Что называется производной функции $f(z)$ в точке?

2 Какая функция называется дифференцируемой в точке?

3 Сформулируйте необходимое и достаточное условия дифференцируемости.

4 Что называется дифференциалом функции комплексной переменной?

5 Какая функция называется аналитической: а) в точке, б) в области?

6 Для каких функций выполняются условия Коши-Римана?

7 По каким формулам вычисляется производная функции комплексной переменной?

8 Какие функции называются гармоническими? Является ли аналитическая функция гармонической?

9 В чем состоит геометрический смысл модуля производной?

10 В чем состоит геометрический смысл аргумента производной?

11 Какое отображение называется конформным?

12 В чем состоит различие между конформным отображениями 1- и 2-го родов?

13 Сформулируйте критерий конформного отображения?

14 В чем суть теоремы Римана?

15 В чем состоит принцип соответствия границ?

16 Сформулируйте принцип симметриии Римана-Шварца.

Решение типовых примеров

1 Исследовать на дифференцируемость функцию $f(z)=\overline{z}$.

Решение. Функция $f(z)=\overline{z}$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Она может быть представлена в виде

$$f(z)=x-iy.$$

Тогда при любом z имеем

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Приращение Δz может стремиться к нулю по любому направлению. Выбирая для Δz два различных направления, получим два различных значения отношения:

– если $\Delta y=0$, $\Delta x\neq 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta x-0i}{\Delta x+0i}=1$;

– если $\Delta x=0$, $\Delta y\neq 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{0-i\Delta y}{0+i\Delta y}=-1$.

Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ не существует.

Функция $f(z)=\overline{z}$ непрерывная на всей комплексной плоскости не имеет производной ни в одной точке плоскости.

2 Исследовать функцию $w=z^2$ на дифференцируемость и найти ее производную.

Решение. Пусть $z=x+iy$. Тогда

$$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+2ixy.$$

Следовательно, $u(x;y)=x^2-y^2$, $v(x;y)=2xy$.

Условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x=\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

выполняются в любой точке $(x;y)$.

Значит, функция $w=z^2$ дифференцируема на всей комплексной плоскости.

Тогда

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=2x+2iy=2(x+iy)=2z.$$

3 Найти аналитическую функцию $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$, если $v(x;y)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$ при условии $f(0)=0$.

Решение. Частные производные первого и второго порядков функции $v(x;y)$ равны:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2,\ \frac{\partial v}{\partial y}=6x^2-6xy-6y^2;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=6x+12y,\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-6x-12y.$$

Функция $v(x;y)$ является гармонической на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, так как

$$\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v(x;y)}{\partial y^2}=0.$$

Согласно теореме 4, существует функция $u(x;y)$, сопряженная к $v(x;y)$. Проинтегрируем 1-е условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ по переменной x:

$$u(x;y)=\int\left(6x^2-6xy-6y^2\right)dx,$$

$$u(x;y)=2x^3-3x^2y-6xy^2+C(y).$$

Дифференцируя последнее равенство по переменной y и подставляя во 2-е условие Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, получим

$$-3x^2-12xy+C'(y)=-\left(3x^2+12xy-3y^2\right).$$

Отсюда $C'(y)=3y^2$. Интегрируя по y, получим

$$C(y)=y^3+C,\ C=\text{const}.$$

Тогда аналитическая функция имеет вид

$$f(z)=\left(2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3+C\right)+i\left(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3\right).$$

Из условия $f(0)=0$ находим постоянную C: $C=0$.

Искомая функция примет вид

$$f(z)=\left(2x^3-3x^2y-6xy^2+y^3\right)+i\left(x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3\right)=$$

$$=(x+iy)^3\cdot(2+i)=(2+i)z^3.$$

4 Выяснить геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $w=5z$.

Решение. Поскольку $w'=5\neq 0$, то отображение $w=5z$ является конформным во всех точках плоскости $\mathbb{C}$.

Модуль производной $\left|f'(z_0)\right|=5>1$, значит, происходит растяжение при отображении $w=5z$.

Аргумент производной равен $\arg f'(z)=0$, поэтому направление при отображении не меняется.

5 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображении $w=z^2$ в точке $z_0=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Решение. Имеем $w'(z)=2z$. Тогда

$$w'\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Так как

$$\left|f'\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\right|=4>0,$$

$$\arg f'\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)=\frac{\pi}{4}>0,$$

то при отображении $w=z^2$ происходит растяжение с коэффициентом, равным 4, и поворот против часовой стрелки на угол, равный $\frac{\pi}{4}$.

6 Найти область D', в которую функция $w=z^2$ отображает круг $\left|z-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$.

Решение. Функция $w=z^2$ является аналитической всюду в плоскости $\mathbb{C}$. Введем полярные координаты

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

Тогда отображение $w=z^2$ в тригонометрической форме запишется в виде

$$w=r^2(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2 \text{ или } w=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi).$$

Найдем уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ в полярных координатах:

$$\left|r\cos\varphi+ir\sin\varphi-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\Rightarrow\sqrt{\left(r\cos\varphi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(r\sin\varphi\right)^2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{r^2-r\cos\varphi+\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow r^2-r\cos\varphi+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow r=\cos\varphi,$$

т. е. уравнение окружности $\left|z-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ в полярных координатах $r,\ \varphi$ принимает вид $r=\cos\varphi$.

Обозначим через $\rho,\ \theta$ полярные координаты в плоскости $\mathbf{W}$. Тогда справедливы равенства

$$\rho=r^2,\ \theta=2\varphi.$$

При отображении $w=z^2$ окружность $r=\cos\varphi$ переходит в кардиоиду

$$\rho=\cos^2\frac{\theta}{2}\ \text{или}\ \rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta),$$

при этом сохраняется направление обхода окружности $r=\cos\varphi$ и кардиоиды $\rho=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)$.

На основании принципа взаимно однозначного соответствия границ заключаем, что функция $w=z^2$ осуществляет конформное отображение внутренности рассматриваемой окружности на внутренность кардиоиды (рисунок 2. 4).

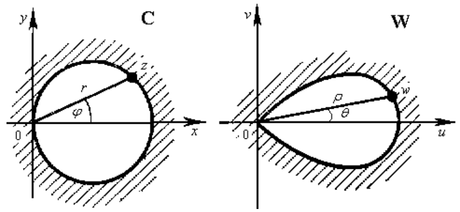

Рисунок 2. 2 – Рисунок к типовому примеру 6

Задания для аудиторной работы

1 Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

а) $w=z^2\cdot\bar{z}$; в) $w=e^{z^2}$;

б) $w=|z|\cdot\bar{z}$; г) $w=|z-1|^2$.

2 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $w=\operatorname{sh}z$; б) $w=\ln z^2$.

3 Найти области аналитичности функций:

а) $w=\operatorname{tg}z$; г) $w=\dfrac{z\cos z}{1+z^2}$;

б) $w=ze^{-z}$; д) $w=\operatorname{cth}z$;

в) $w=\sin z+\bar{z}$; е) $w=z\ln z$.

4 Проверить гармоничность функций:

а) $u=x^2+2x-y^2$; в) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; д) $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

б) $u=x^2-y^2+2xy$; г) $v=\ln\left(x^2+y^2\right)$; е) $v=2e^x\sin y$.

5 Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ части:

а) $u=x^2-y^2+2x$ при условии $f(i)=2i-1$;

б) $v=2(\operatorname{ch}x\sin y-xy)$ при условии $f(0)=0$;

в) $v=2\cos x\operatorname{ch}y-x^2+y^2$ при условии $f(0)=2$.

г) $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos 2xy$;

д) $u(x,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$;

е) $v(x,y)=-\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$.

6 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображениях $w=f(z)$ в указанных точках:

а) $w = e^z$, $z_1 = \ln 2 + i\dfrac{\pi}{4}$; $z_2 = -1 - i\dfrac{\pi}{2}$;

б) $w = z^2$, $z_1 = 2 - i$; $z_2 = 1 + i\dfrac{\pi}{2}$.

7 Найти области растяжения и сжатия при отображениях:

а) $w = e^z$; б) $w = \dfrac{1}{z}$.

8 Найти области конформности функций:

а) $w = 2z$; б) $w = e^{-3z}$; в) $w = -iz^2$.

9 Найти образы окружности $x^2 + y^2 = 2x$ при отображениях:

а) $w = z + 1$; б) $w = \dfrac{1}{z}$; в) $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Задания для домашней работы

1 Выяснить, в каких точках дифференцируемы функции:

а) $w = z \cdot e^z$; в) $w = \sin 3z - i$;

б) $w = |z| \cdot \operatorname{Re} \overline{z}$; г) $w = \ln z + e^{2z}$.

2 Проверить выполнение условий Коши-Римана и в случае их выполнения найти $f'(z)$:

а) $w = \sin\dfrac{z}{3}$; б) $w = e^{3z}$.

3 Найти области аналитичности функций:

а) $w = z\cos z$; в) $w = \overline{z} + \cos z$;

б) $w = \sin z \operatorname{Re} z$; г) $w = \dfrac{e^z}{z}$.

4 Проверить гармоничность функций:

а) $u = 2e^x \cos y$; в) $u = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$; д) $u = \ln\left(x^2 + y^2\right)$;

б) $u = x^2$; г) $v = \dfrac{x^2 + 1}{2} y^2$; е) $v = 3x^2 y - y^3$.

5 Восстановить аналитическую функцию $f(z)$ по известной действительной $u(x;y)$ или мнимой $v(x;y)$ части:

а) $u = 2\sin x \operatorname{ch} y - x$ при условии $f(0) = 0$;

б) $v = -2\sin 2x \operatorname{sh} 2y + y$ при условии $f(0) = 2$;

в) $v(x, y) = \sin 2y \cos 2x$;

г) $u(x, y) = e^{x+1} \cos y$;

д) $v(x, y) = \cos\left(x^2 - y^2\right)\sin 2xy$;

е) $u = -y(4x + 1)$;

ж) $v = y - e^{2x} \sin 2y$.

6 Найти коэффициент растяжения и угол поворота при отображениях $w = f(z)$ в указанных точках:

а) $w = z^3$, $z_1 = 2 + i$; $z_2 = 1 - i\dfrac{\pi}{2}$;

б) $w = \sin z$, $z_1 = 0$; $z_2 = 1 + i$.

7 Найти области растяжения и сжатия при отображениях

а) $w = \ln z$; б) $w = z^3$.

8 Найти области конформности функций:

а) $w = (z - 2)^2$; в) $w = \operatorname{sh}(1 - z)$;

б) $w = z^2 - 4z$; г) $w = |z|^2$.

9 Найти образы прямой $y = x - 1$ при отображениях:

а) $w = z + 1$; б) $w = \dfrac{1}{z}$; в) $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.