Л. А. ШЕМЕТКОВ · ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

современная алгебра

Л. А. ШЕМЕТКОВ

ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

СОВРЕМЕННАЯ
АЛГЕБРА

Л. А. ШЕМЕТКОВ

ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1978

517.1
Ш 46
УДК 512.8

Ш $\frac{20203-130}{053(02)-78}$ 63-78

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Формации, т. е. классы групп, замкнутые относительно фактор-групп и подпрямых произведений, всегда находились в поле деятельности исследователей по теории конечных групп. Однако вплоть до 1963 г. формационное развитие теории конечных групп шло лишь по пути накопления фактов, относящихся к различным конкретным формациям, из которых наиболее популярными были формация разрешимых групп и ее подформации, составленные из абелевых, нильпотентных и сверхразрешимых групп. Хотя теория конечных групп никогда не испытывала недостатка в общих методах, идеях и нерешенных проблемах, все же обилие полученных результатов с неизбежностью привело к необходимости разработки новых общих методов и систематизирующих точек зрения. Толчок, произведенный работой Гашюца [3], вызвал целую лавину исследований и привел к возникновению нового направления — теории формаций. Уже в первые годы существования этой теории были получены значительные результаты, вошедшие в книгу Хупперта [5]. Итоги развития теории формаций обсуждались в обзорной статье Чунихина и Шеметкова [1], а также в обзорных докладах, прочитанных автором на всесоюзных алгебраических конференциях в 1973, 1975 и 1976 гг. (первый из этих докладов опубликован автором в [16]). Возрастающий интерес советских алгебраистов к теории формаций побудил автора взяться за написание книги.

Сразу оговоримся, что эта книга не является полной энциклопедией по теории формаций. Причина этого кроется не только в ограниченности объема, но и в том, что теория формаций еще очень молода и находится в состоянии интенсивного развития. В книгу не включены многие интересные результаты, которым, по мнению автора, предстоит еще развитие, однако все наиболее важные статьи приведены в списке литературы. За пределами книги остались работы по развитию формационных методов для нужд теории бесконечных групп, а также теории алгебр Ли. По первоначальному замыслу неполнота книги должна была компенсироваться обзорами в конце каждой главы, однако в последний момент оказалось, что объем исчерпан, и пришлось довольствоваться лишь краткими комментариями. Представление о целях, которые ставил перед собой автор книги, дает следующий обзор ее глав.

Первая глава посвящена методам построения формаций. Рассматривается произведение формаций, операции на классах групп, приводящие к формациям. Особое внимание уделяется методу построения формаций с помощью групповых функций и экранов. Приводится классификация экранов и указываются максимальные экраны некоторых типов формаций. Доказана локальность ряда формаций, а также насыщенность всякой локальной формации. Приведены результаты о связи между свойствами локальной формации и свойствами значений ее экрана. Представлены также некоторые комбинированные способы построения формаций (при помощи понятия порожденной формации, $\mathfrak{F}$-длины, f-меры и др.).

Вторая глава открывается изложением известных свойств субнормальных подгрупп. Дается характеризация разрешимого корадикала с помощью $\bigvee$-неприводимых субнормальных подгрупп. По мнению автора, теория субнормальных подгрупп должна послужить образцом для построения теории $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп. Приводятся формационные обобщения таких понятий, как нормальность, стабильность, верхняя и нижняя центральная цепь, гиперцентр. Доказана основная теорема о f-стабильности: всякая f-стабильная группа автоморфизмов, где f — внутренний примарно постоянный экран, принадлежит $\langle f \rangle$. С помощью теорем о f-стабильности устанавливается внешняя характеризация сверхразрешимости: подгруппа $A \subseteq \operatorname{Aut} G$ сверхразрешима, если G обладает A-допустимым рядом с простыми индексами. Исследуются свойства группы, допускающей $\langle f \rangle$-группу автоморфизмов.

Одна из главных целей третьей главы — изучение условий, при которых существуют дополнения к $\mathfrak{F}$-корадикалам, где $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Доказано, что $G^{\mathfrak{F}}$ дополняем в G, если для любого простого p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева. Исследуются также свойства добавлений к произвольным нормальным подгруппам. Значение добавлений в теории формаций объясняется тем, что каждое добавление к $G^{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация, принадлежит $\mathfrak{F}$. Приводится формационное обобщение добавления — $\mathfrak{F}$-добавление и критическое $\mathfrak{F}$-добавление. Доказано, что каждому главному ряду группы G, проходящему через $G^{\mathfrak{F}}$, соответствует определенная факторизация группы попарно перестановочными подгруппами. В предельном случае данная факторизация вырождается в силовскую систему разрешимой группы.

Четвертая глава посвящена $\mathfrak{F}$-проекторам. Здесь решаются две основные задачи. Во-первых, находятся условия существования и сопряженности $\mathfrak{F}$-проекторов. В случае, когда $\mathfrak{F}$ — локальная формация, таким условием является разрешимость $\mathfrak{F}$-корадикала. Доказано существование абнормальных дисперсивных проекторов в любой (не обязательно разрешимой) группе. Во-вторых, исследуются условия вложения $\mathfrak{F}$-подгрупп в $\mathfrak{F}$-проекторы. Бóльшая часть материала посвящена здесь вложению в холловские подгруппы.

В пятой главе конструируются и исследуются $\mathfrak{F}$-нормализаторы в произвольных группах. Понятие $\mathfrak{F}$-нормализатора обобщает понятие нормализатора силовской системы разрешимой группы. Особенно интересными свойствами обладают $\mathfrak{F}$-нормализаторы в разрешимых группах. Однако и в произвольных группах $\mathfrak{F}$-нормализаторы сохраняют ряд важных свойств. В частности, в любой группе сверхразрешимый нормализатор является сверхразрешимой подгруппой, покрывающей все циклические главные факторы группы.

В шестой главе изучаются минимальные не $\mathfrak{F}$-группы. Излагается принадлежащий Картеру—Фишеру—Хоуксу метод экстремальных классов. Приводится описание групп Шмидта и минимальных несверхразрешимых групп.

В книге сформулировано 26 открытых проблем. Мы не давали им имена. Часть из них взята из работ разных авторов, некоторые возникли по ходу написания книги. Проблемы разной трудности, среди них есть и такие, которые не потребуют, видимо, больших усилий. Однако большая группа проблем уже выдержала испытание временем.

Заметим, что в книге рассматриваются только конечные группы; под группой всегда подразумевается конечная группа. Чтобы облегчить положение читателя, в особенности начинающего, автор постарался сделать изложение независимым; все сведения, необходимые для чтения книги, могут быть найдены в литературе, опубликованной на русском языке.

Мои ученики Н. Т. Воробьев, В. И. Гойко, В. С. Монахов и В. Н. Семенчук оказали мне большую помощь при подготовке рукописи, за что выражаю им искреннюю благодарность.

Гомель, октябрь 1977 г. *Л. А. Шеметков*

ГЛАВА I

ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЦИЙ

§ 1. Формация. Произведение формаций

Определение 1.1. *Классом групп* называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Если группа (подгруппа) принадлежит классу $\mathfrak{X}$, то она называется $\mathfrak{X}$-группой ($\mathfrak{X}$-подгруппой).

Определение 1.2. Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если выполняются следующие условия:

1) каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$;

2) из $H/A \in \mathfrak{F}$, $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$.

Если формации $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{H}$ называется *подформацией* формации $\mathfrak{F}$.

По определению, пустое множество является формацией (пустая формация). Множество $\mathfrak{G}$ всех групп является, конечно, формацией. *Единичная формация* $\mathfrak{E}$ — это непустой класс групп, состоящий лишь из единичных групп. Формациями являются: класс $\mathfrak{G}_\pi$ всех π-групп, класс $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп, класс $\mathfrak{N}$ всех нильпотентных групп, класс $\mathfrak{N}_p$ всех p-групп (p — фиксированное простое число), класс $\mathfrak{N}_\pi$ всех нильпотентных π-групп, класс $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп, класс $\mathfrak{S}_\pi$ всех разрешимых π-групп. Мы привели пока лишь примеры тех формаций, за которыми закреплены соответствующие обозначения.

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *пересечение любого множества формаций также является формацией;*

2) *если* $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — *некоторое множество формаций, линейно упорядоченное относительно включения* $\subseteq$, *то объединение* $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{F}_i$ *является формацией.*

Доказательство осуществляется проверкой.

Определение 1.3. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Обозначим через $G^{\mathfrak{F}}$ и назовем *$\mathfrak{F}$-корадикалом группы* G пересечение всех тех нормальных подгрупп M из G, для которых $G/M \in \mathfrak{F}$.

Очевидно, $\mathfrak{F}$-корадикал любой группы является характеристической подгруппой. $\mathfrak{S}_\pi$-корадикал группы G обозначают иначе через $O^\pi(G)$ и называют π-корадикалом. $\mathfrak{N}$-корадикал будем называть *нильпотентным корадикалом*; понятны также термины *разрешимый корадикал*, *π-разрешимый корадикал*, *π-сверхразрешимый корадикал* и т. д. $\mathfrak{A}$-корадикал (или *абелев корадикал*) — это коммутант группы. Так же как и коммутант, $\mathfrak{F}$-корадикал сохраняется при гомоморфизмах.

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *непустая формация*, $K \lhd G$. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1) $(G/K)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}K/K$;

2) *если* $G = HK$, *то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$;

3) *если* $G = HK$ *и* $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, *то* $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Пусть $(G/K)^{\mathfrak{F}} = N/K$. Тогда

$$(G/K)/(N/K) \simeq G/N \in \mathfrak{F}.$$

Отсюда следует, что $G^{\mathfrak{F}} \subseteq N$. С другой стороны,

$$(G/K)/(G^{\mathfrak{F}}K/K) \simeq G/G^{\mathfrak{F}}K \simeq (G/G^{\mathfrak{F}})/(G^{\mathfrak{F}}K/G^{\mathfrak{F}}) \in \mathfrak{F},$$

откуда получаем $N/K \subseteq G^{\mathfrak{F}}K/K$. Из $N \supseteq G^{\mathfrak{F}}K$ и $N \subseteq G^{\mathfrak{F}}K$ следует равенство $N = G^{\mathfrak{F}}K$. Утверждение 1) доказано.

Пусть $G = HK$, δ — естественный гомоморфизм группы G на G/K (δ: $x \to xK$, $x \in G$). Очевидно,

$$H^\delta = G/K, (H^{\mathfrak{F}})^\delta = (G^{\mathfrak{F}})^\delta = H^{\mathfrak{F}}K/K = G^{\mathfrak{F}}K/K,$$

откуда следует равенство $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}K$. В частности, если $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $H^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

Определение 1.4. Пусть $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$ — некоторые формации. Если $\mathfrak{X}_2 = \varnothing$, то положим $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 = \varnothing$. Если $\mathfrak{X}_2 \neq \varnothing$, то обозначим через $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ класс всех тех групп

G, для которых $G^{\mathfrak{X}_2} \in \mathfrak{X}_1$. Класс $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ называется *произведением формаций* $\mathfrak{X}_1$ и $\mathfrak{X}_2$.

Из определения 1.4 следует, что произведение формаций $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2$ является пустой формацией тогда и только тогда, когда по крайней мере одна из формаций $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ является пустой. Можно определить произведение нескольких формаций как результат последовательного умножения. Если задан упорядоченный набор формаций $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots, \mathfrak{X}_n$, причем произведение $\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 \ldots \mathfrak{X}_n$ уже определено, то $\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 \ldots \mathfrak{X}_n = \mathfrak{X}_1(\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_3 \ldots \mathfrak{X}_n)$. В частности, если $\mathfrak{X}_i = \mathfrak{X}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, n$, то мы приходим к понятию степени $\mathfrak{X}^n$.

Понятие произведения формаций представляет интерес с точки зрения построения формаций.

Теорема 1.1. *Произведение любых двух формаций также является формацией.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ есть произведение формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Пусть N — произвольная нормальная подгруппа группы $G \in \mathfrak{F}$. Согласно лемме 1.2 $G^{\mathfrak{F}_2}N/N = (G/N)^{\mathfrak{F}_2}$. Отсюда и из $G^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$ заключаем, что $(G/N)^{\mathfrak{F}_2} \in \mathfrak{F}_1$.

Рассмотрим теперь группу H и такие ее нормальные подгруппы N_1 и N_2, что $H/N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Ввиду леммы 1.2 $H^{\mathfrak{F}_2}N_i/N_i \in \mathfrak{F}_1$, $i = 1, 2$. Поэтому $H^{\mathfrak{F}_2}/H^{\mathfrak{F}_2} \cap N_1 \cap \cap N_2 \in \mathfrak{F}_1$. Но тогда

$$(H/N_1 \cap N_2)^{\mathfrak{F}_2} = H^{\mathfrak{F}_2}(N_1 \cap N_2)/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}_1,$$

и теорема доказана.

Лемма 1.3. *Пусть A и B — нормальные подгруппы группы G. Тогда каждый главный фактор группы $G/A \cap B$ G-изоморфен либо некоторому главному фактору группы G/A, либо некоторому главному фактору группы G/B.*

Доказательство вытекает из рассмотрения G-изоморфизма $AB/B \simeq A/A \cap B$.

Теорема 1.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая формация, $\mathfrak{F}$ — класс всех тех групп, все главные факторы которых принадлежат $\mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{H}$ — объединение формаций $\mathfrak{X}^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Тогда $\mathfrak{F}$ — подформация формации $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Из леммы 1.3 без труда выводим, что $\mathfrak{F}$ — формация. Из теоремы 1.1 и леммы 1.1 вытекает, что класс $\mathfrak{H}$ является формацией. Если $G \in \mathfrak{F}$, L — минимальная нормальная подгруппа группы G, то по индукции $G/L \in \mathfrak{X}^n$ для некоторого натурального n. Но тогда либо $G \in \mathfrak{X}^n$, либо L — $\mathfrak{X}^n$-корадикал группы G. Так как $L \in \mathfrak{X}$, то отсюда вытекает, что $G \in \mathfrak{X}^{n+1}$, и теорема доказана.

§ 2. Операции на классах групп

Определение 2.1. Всякое отображение множества всех классов групп в себя называется *операцией на классах групп.*

Операции мы будем обозначать, как правило, прямыми большими латинскими буквами. Результат операции U, примененной к классу $\mathfrak{X}$, обозначается через $\mathrm{U}\mathfrak{X}$. Степень операции U определяется так: $\mathrm{U}^1 = \mathrm{U}$, $\mathrm{U}^{n+1}\mathfrak{X} = \mathrm{U}^n(\mathrm{U}\mathfrak{X})$. Произведение операций определяется равенствами:

$$\mathrm{U}_1\mathrm{U}_2\mathfrak{X} = \mathrm{U}_1(\mathrm{U}_2\mathfrak{X}), \quad \mathrm{U}_1\mathrm{U}_2\ldots\mathrm{U}_t\mathfrak{X} = \mathrm{U}_1(\mathrm{U}_2\ldots\mathrm{U}_t\mathfrak{X}).$$

Введем операции S, S_n, Q, R, R_0, $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}$ и Ext_{Φ} следующим образом:

$H \in \mathrm{S}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H вкладывается в качестве подгруппы в некоторую $\mathfrak{X}$-группу;

$H \in \mathrm{S}_n\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H вкладывается в качестве нормальной подгруппы в некоторую $\mathfrak{X}$-группу;

$H \in \mathrm{Q}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H является гомоморфным образом некоторой $\mathfrak{X}$-группы;

$H \in \mathrm{R}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H совпадает с произведением некоторого конечного числа своих нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп;

$H \in \mathrm{R}_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H имеет нормальные подгруппы $N_1, N_2, \ldots, N_t$ $(t \geqslant 2)$ такие, что

$$\bigcap_{i=1}^{t} N_i = 1, H/N_i \in \mathfrak{X}, i = 1, 2, \ldots, t;$$

$H \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H является расширением $\mathfrak{F}$-группы с помощью $\mathfrak{X}$-группы;

$H \in \mathrm{Ext}_{\Phi}\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H имеет нормальную подгруппу N такую, что $N \subseteq \Phi(H)$, $H/N \in \mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_p$, то вместо $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}$ пишут Ext_p. Обратим внимание на тот факт, что если $M_1, M_2, \ldots, M_t$, $t \geqslant 2$, — нормальные подгруппы группы G, причем $G/M_i \in \mathfrak{X}$ для любого i, то $G/\bigcap\limits_{i=1}^{t} M_i \in \mathrm{R}_0\mathfrak{X}$. Заметим еще, что операцию R_0 можно определить с помощью понятия подпрямого произведения. Напомним (см. Каргаполов и Мерзляков [1]), что подгруппа H прямого произведения $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется *подпрямым произведением* групп $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если проекция H на A_i совпадает с A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Легко видеть, что $G \in \mathrm{R}_0\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда G есть подпрямое произведение некоторого конечного числа $\mathfrak{X}$-групп.

Определение 2.2. Класс $\mathfrak{X}$ называется *замкнутым относительно операции* U или, более коротко, U-*замкнутым*, если $\mathrm{U}\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}$.

Формацию можно определить теперь как класс групп, который одновременно Q-замкнут и R_0-замкнут. Ext_Φ-замкнутый класс согласно Гашюцу [3] называется *насыщенным*. Q-замкнутый класс групп называется иначе *гомоморфом*. Класс групп называется *замкнутым относительно подгрупп* (*нормальных подгрупп*), если он S-замкнут (соответственно S_n-замкнут).

Лемма 2.1. $\mathrm{S}^2 = \mathrm{S}$, $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$, $\mathrm{Ext}_\Phi^2 = \mathrm{Ext}_\Phi$. *Если класс групп* $\mathfrak{F}$ *содержит единичную группу и* $\mathrm{Ext}_\mathfrak{F}$-*замкнут, то* $\mathrm{Ext}_\mathfrak{F}^2 = \mathrm{Ext}_\mathfrak{F}$.

Доказательство. Относительно операций S и Q утверждение очевидно. Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольный класс групп. Ясно, что $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{Ext}_\Phi\, \mathfrak{X} \subseteq \mathrm{Ext}_\Phi^2\, \mathfrak{X}$. Если $H \in \mathrm{Ext}_\Phi^2\mathfrak{X}$, то в H найдется нормальная подгруппа A такая, что $A \subseteq \Phi(H)$, $H/A \in \mathrm{Ext}_\Phi\, \mathfrak{X}$. Группа H/A имеет нормальную подгруппу B/A такую, что $B/A \subseteq \Phi(H/A)$ и $(H/A)/(B/A) \in \mathfrak{X}$. Но тогда $H/B \in \mathfrak{X}$. Так как $A \subseteq \Phi(H)$, то $\Phi(H/A) = \Phi(H)/A$, а значит, $B \subseteq \Phi(H)$. Таким образом, $H \in \mathrm{Ext}_\Phi\mathfrak{X}$, что и требуется.

Пусть $1 \in \mathfrak{F} = \mathrm{Ext}_\mathfrak{F}\mathfrak{F}$. Если $G \in \mathrm{Ext}_\mathfrak{F}^2\, \mathfrak{X}$, то G имеет нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу K такую, что $G/K \in \mathrm{Ext}_\mathfrak{F}\, \mathfrak{X}$. Группа G/K имеет нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу L/K такую, что $(G/K)/(L/K) \simeq G/L \in \mathfrak{X}$. Так как $K \in \mathfrak{F}$ и $L/K \in \mathfrak{F}$, то из $\mathrm{Ext}_\mathfrak{F}$-замкнутости класса $\mathfrak{F}$ следует, что $L \in \mathfrak{F}$. Значит, $G \in \mathrm{Ext}_\mathfrak{F}\mathfrak{X}$, т. е. $\mathrm{Ext}_\mathfrak{F}^2\, \mathfrak{X} \subseteq \mathrm{Ext}_\mathfrak{F}\, \mathfrak{X}$. Обратное включение очевидно.

Лемма 2.2. *Для любого класса* $\mathfrak{X}$ *справедливо следующее утверждение*: $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{R}_0\mathfrak{X} = \mathrm{R}_0^2\mathfrak{X}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{X} = \phi$, то $R_0\mathfrak{X} = R_0^2\mathfrak{X} = \phi$. Пусть $\mathfrak{X} \neq \phi$. Если $H \in \mathfrak{X}$, то $H/B_i \in \mathfrak{X}$, $B_i = 1$, а значит, $H \simeq H/\bigcap B_i \in R_0\mathfrak{X}$. Таким образом, $\mathfrak{X} \subseteq R_0\mathfrak{X} \subseteq R_0^2\mathfrak{X}$. Пусть $G \in R_0^2\mathfrak{X}$. Тогда G имеет такие нормальные подгруппы $N_1, \ldots, N_t$ $(t \geqslant 2)$, что $\bigcap_{i=1}^{t} N_i = 1$, $G/N_i \in R_0\mathfrak{X}$, $i = 1, \ldots, t$. Группа G/N_i имеет такие нормальные подгруппы M_{ij}/N_i, что $\bigcap_j M_{ij} = N_i$, $G/M_{ij} \in \mathfrak{X}$. Так как $\bigcap_{i,j} M_{ij} = 1$, то $G \in R_0\mathfrak{X}$, что и доказывает равенство $R_0\mathfrak{X} = R_0^2\mathfrak{X}$.

Лемма 2.3. *Для любого класса $\mathfrak{X}$ имеет место включение* $R_0Q\mathfrak{X} \subseteq QR_0\mathfrak{X}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{X} = \phi$, то $R_0Q\mathfrak{X} = QR_0\mathfrak{X} = \phi$. Пусть $\mathfrak{X} \neq \phi$ и группа G является подпрямым произведением групп A_i/N_i, где $A_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Рассмотрим функцию φ: $(a_1, a_2, \ldots, a_t) \to (a_1N_1, a_2N_2, \ldots, a_tN_t)$, $a_i \in A_i$. Функция φ является гомоморфизмом группы $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_t$ в группу $A_1/N_1 \times A_2/N_2 \times \ldots \times A_t/N_t$. Ясно, что

$$H = \{(a_1, a_2, \ldots, a_t) \mid a_i \in A_i, (a_1N_1, a_2N_2, \ldots, a_tN_t) \in G\}$$

есть подпрямое произведение групп $A_1, A_2, \ldots, A_t$, причем $H/H \cap \operatorname{Ker} \varphi \simeq G$. Следовательно, $G \in QR_0\mathfrak{X}$, и лемма доказана.

Лемма 2.4. $QR_0Q = QR_0$.

Доказательство. Применяя лемму 2.3, получим

$$Q((R_0Q)\mathfrak{X}) \subseteq QQR_0\mathfrak{X} = QR_0\mathfrak{X}.$$

Так как $\mathfrak{X} \subseteq Q\mathfrak{X}$, то $QR_0Q\mathfrak{X} \supseteq QR_0\mathfrak{X}$. Из этих включений и вытекает требуемое равенство $QR_0Q\mathfrak{X} = QR_0\mathfrak{X}$.

В работе Фишера, Гашюца и Хартли [1] введено следующее понятие, в некотором смысле двойственное определению формации.

Определение 2.3. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *классом Фиттинга*, если он одновременно S_n-замкнут и R-замкнут.

Класс Фиттинга мы будем в дальнейшем называть иначе *радикальным классом*. Ввиду двойственности (нормальная подгруппа — фактор-группа) формацию можно было бы назвать *корадикальным классом.*

Определение 2.4. Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой R-замкнутый класс, содержащий 1. Обозначим через $G_{\mathfrak{X}}$ и назовем *$\mathfrak{X}$-радикалом* группы G произведение всех ее нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп.

Классы $\mathfrak{S}_\pi$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_\pi$, $\mathfrak{S}$ являются радикальными. $\mathfrak{N}$-радикал группы G — это ее подгруппа Фиттинга $\mathrm{F}(G)$. $\mathfrak{S}_\pi$-радикал обозначают иначе через $\mathrm{O}_\pi(G)$ и называют *π-радикалом.* $\mathfrak{S}$-радикал называют *разрешимым радикалом*; понятны также термины *p-нильпотентный радикал, π-замкнутый радикал* и т. д. Класс всех π-нильпотентных групп является одновременно и радикальным и корадикальным; $\mathrm{F}_\pi(G)$ — это π-нильпотентный радикал группы G.

В дальнейшем мы будем изучать формации, замкнутые относительно тех или иных операций; в частности, будут рассматриваться радикальные формации, т. е. формации, являющиеся одновременно и классами Фиттинга. Сейчас мы обратимся к задаче построения формаций с помощью операций Q, R_0 и $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}$.

Теорема 2.1 *Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — формации, причем либо $\pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \phi$, либо $\mathfrak{F}$ замкнута относительно нормальных подгрупп. Тогда $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{X}$ — формация, совпадающая с произведением $\mathfrak{F}\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{F}\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{X}$. Установим справедливость обратного включения. Пусть $G \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{X}$. Тогда G имеет нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу N такую, что $G/N \in \mathfrak{X}$. Если $\pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(\mathfrak{X}) = \phi$, то $G^{\mathfrak{X}} = N$. Пусть $\mathfrak{F}$ S_n-замкнута. Тогда ввиду $G^{\mathfrak{X}} \subseteq N \in \mathfrak{F}$ получаем $G^{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{F}$. Итак, $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}\,\mathfrak{X} = \mathfrak{F}\mathfrak{X}$, и остается применить теорему 1.1.

Из теоремы 2.1 вытекает, что для любой формации $\mathfrak{X}$ классы $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{N}}\,\mathfrak{X}$ и $\mathrm{Ext}_p\,\mathfrak{X}$ также являются формациями.

Определение 2.5. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп. Пусть $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ — пересечение всех тех формаций, которые содержат $\mathfrak{X}$. Класс $\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$ называется *формацией, порожденной множеством групп $\mathfrak{X}$.*

Заметим, что операцию form часто обозначают иначе через $\{\mathrm{Q}, \mathrm{R}_0\}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то пишут $\mathrm{form}\,G$ вместо $\mathrm{form}\,\{G\}$, причем в этом случае $\mathrm{form}\,G$ называют *формацией, порожденной группой G.*

Теорема 2.2. *Для любого класса $\mathfrak{X}$ имеет место равенство*: $\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0\mathfrak{X}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{X} = \varnothing$, то $\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0\mathfrak{X} = \varnothing$, и утверждение верно. Пусть $\mathfrak{X} \neq \varnothing$. Так как $\mathrm{Q}^2 = \mathrm{Q}$, то класс $\mathrm{QR}_0\mathfrak{X}$ является Q-замкнутым. $\mathrm{Q}\mathfrak{X}$ есть класс и $\mathrm{R}_0^2\mathrm{Q}\mathfrak{X} = \mathrm{R}_0\mathrm{Q}\mathfrak{X}$ по лемме 2.2. Используя это и леммы 2.3 и 2.4, получаем

$$\mathrm{R}_0\mathrm{QR}_0\mathfrak{X} = \mathrm{R}_0\mathrm{Q}\,(\mathrm{R}_0\mathrm{Q}\mathfrak{X}) \subseteq \mathrm{QR}_0^2\mathrm{Q}\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0\mathrm{Q}\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0\mathfrak{X}.$$

Последнее означает R_0-замкнутость класса $\mathrm{QR}_0\mathfrak{X}$. Итак, $\mathrm{QR}_0\mathfrak{X} = \mathrm{QR}_0\mathrm{Q}\mathfrak{X}$ — формация, содержащая $\mathfrak{X}$, так как $\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{Q}\mathfrak{X}$. Значит, $\mathrm{form}\,\mathfrak{X} \subseteq \mathrm{QR}_0\mathfrak{X}$. Обратное включение очевидно.

Нам понадобятся следующие хорошо известные сведения о коммутаторах (для доказательства см., например, Хупперт [5], гл. III, § 1).

Лемма 2.5. *Для любых элементов x, y, z группы G выполняются равенства* $[x, yz] = [x, z]\,[x, y]^z$, $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$. *Если A, B — подгруппы группы G, то выполняются следующие утверждения*:

1) $[A, B] = [B, A] \lhd \langle A, B\rangle$;

2) $[A, B]^\varphi = [A^\varphi, B^\varphi]$ *для любого гомоморфизма φ группы G; в частности, если подгруппа C из G нормализует A и B, то C нормализует и* $[A, B]$.

Лемма 2.6. *Пусть H — подгруппа нильпотентной группы G, причем $s(H) < s(G)$. Тогда $s(H^G) < s(G)$.*

Доказательство. Для того чтобы доказать лемму, достаточно установить, что при любом натуральном i выполняется включение:

$$\mathrm{K}_i\,(H^G) \subseteq \mathrm{K}_{i+1}\,(G)\,\mathrm{K}_i\,(H). \qquad (*)$$

При $i = 1$ это верно, так как $\mathrm{K}_2\,(G)\,\mathrm{K}_1\,(H) = G'H \lhd G$, а значит, $H^G \subseteq G'H$. Предположим, что включение $(*)$ справедливо при некотором $n \geqslant 1$. Тогда, используя лемму 2.5, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_{n+1}\,(H^G) &= [\mathrm{K}_n\,(H^G), H^G] \subseteq [\mathrm{K}_{n+1}\,(G)\,\mathrm{K}_n(H), H^G] = \\ &= [\mathrm{K}_{n+1}\,(G), H^G]\,[\mathrm{K}_n\,(H), H^G] \subseteq \mathrm{K}_{n+2}\,(G)\,[\mathrm{K}_n\,(H), G'H] = \\ &= \mathrm{K}_{n+2}\,(G)\,[\mathrm{K}_n\,(H), H]\,[\mathrm{K}_n\,(H), G'] = \\ &= \mathrm{K}_{n+2}\,(G)\,\mathrm{K}_{n+1}\,(H).\end{aligned}$$

Тем самым $(*)$ доказано.

Теорема 2.3 (Брайант, Брайс, Хартли [1]). *Если S — такая подгруппа группы G, что $S\,\mathrm{F}(G) = G$, то $S \in \mathrm{form}\, G$.*

Доказательство. Пусть T — нильпотентная нормальная подгруппа группы G, а H — такая подгруппа из G, что $HT = G$. Докажем индукцией по $s(T)$, что $H \in \mathrm{form}\, G$. Это верно, если $T = 1$. Поэтому будем считать, что $T \neq 1$. Рассмотрим следующие подгруппы прямого произведения $G \times G \times G$:

$$K = \{(h, h, h) \mid h \in H\},$$
$$D_1 = \{(t, t, 1) \mid t \in T\},$$
$$D_2 = \{(1, u, u) \mid u \in T\}.$$

Очевидно, подгруппа K нормализует D_1 и D_2. Обозначим через S подгруппу группы $G \times G \times G$, порожденную подгруппами K, D_1, D_2. Поскольку проекции S на множители прямого произведения $G \times G \times G$ равны G, то $S \in \mathrm{form}\, G$. Заметим еще, что $S = K\langle D_1, D_2\rangle$, где $\langle D_1, D_2\rangle$ нормальна в S и нильпотентна как подпрямое произведение из $T \times T \times T$.

Пусть Z_i — центр подгруппы D_i, $i = 1, 2$. Легко видеть, что $Z_1 = \{(t, t, 1) \mid t \in \mathrm{Z}(T)\}$, причем Z_1 и D_2 поэлементно перестановочны; аналогично, Z_2 и D_1 поэлементно перестановочны. Но тогда $M = Z_1Z_2$ абелева и нормальна в S. Если $r \in Z_1Z_2$, то $r = (t, tu, u)$, где $t \in \mathrm{Z}(T)$, $u \in \mathrm{Z}(T)$, и если $r \in K$, то $t = tu = u$, что влечет $t = u = 1$. Следовательно, $|Z_1Z_2 \cap K| = 1$. Если T абелева, то $Z_1 = D_1$, $Z_2 = D_2$, и мы имеем

$$H \simeq K \simeq S/D_1D_2 \in \mathrm{form}\, G.$$

Предположим теперь, что $s = s(T) > 1$. Ясно, что $s(D_1) = s(D_2) = s(\langle D_1, D_2\rangle) = s$. Так как

$$[\mathrm{K}_{s-1}(D_1), D_2] = \{(1, w, 1) \mid w \in \mathrm{K}_s(T)\} \not\subseteq M,$$

то $\langle D_1, D_2\rangle/M$ нильпотентна ступени s. Так как $|Z_1 \cap D_2| = 1$, то D_2M/M изоморфна D_2/Z_2 и имеет ступень $s - 1$, а потому согласно лемме 2.6 ее нормальное замыкание B/M в $\langle D_1, D_2\rangle/M$ имеет ступень $s - 1$. Так как K нормализует D_2 и $S = K\langle D_1, D_2\rangle$, то B/M нормальна в S/M. Итак, $S/M = (KD_1M/M)(B/M)$, причем

$s(B/M) = s - 1$. По индукции

$$KD_1M/M \in \mathrm{form}\, S/M \subseteq \mathrm{form}\, S \subseteq \mathrm{form}\, G.$$

Для группы KD_1M/M и ее нильпотентной нормальной подгруппы D_1M/M ступени $s - 1$ теорема также верна по индукции. Поэтому

$$K \simeq KM/M \in \mathrm{form}\, KD_1M/M \subseteq \mathrm{form}\, G.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.4 (Нейман [1]). *Любая подформация формации $\mathfrak{N}$ замкнута относительно подгрупп.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — подформация формации $\mathfrak{N}$. Если $S \subseteq G \in \mathfrak{F}$, то по теореме 2.3 имеет место $S \in \mathrm{form}\, G \subseteq \mathfrak{F}$, что и требуется.

Теорема 2.5 (Брайант, Брайс, Хартли [1]). *Формация, порожденная разрешимой группой, содержит лишь конечное число подформаций.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим; в нем существенно используются идеи и результаты теории многообразий.

Проблема 1. **Найти доказательство теоремы 2.5, независимое от теории многообразий.**

Проблема 2. **Доказать, что для любой группы G формация $\mathrm{form}\, G$ содержит лишь конечное число подформаций.**

§ 3. Ступенчатые формации

1. Тождественное действие. Напомним некоторые понятия, связанные с действием группы на группе. Пусть A и B — некоторые группы и зафиксирован гомоморфизм φ группы A в группу $\mathrm{Aut}\, B$. В этом случае говорят, что задано *действие группы A на группе B*. Группа A называется в таком случае *группой операторов* группы B, а элементы из A — *операторами* группы B. Операторы действуют на B так же, как и соответствующие им автоморфизмы:

$$x^a = x^{\varphi(a)}, \quad x \in B, \ a \in A.$$

Здесь через x^a обозначен образ элемента x при действии на него оператором a. Элемент $a \in A$ называется *тождест-*

венным оператором, если $x^a = x$ для любого $x \in B$. Множество всех тождественных операторов из A совпадает с ядром $\operatorname{Ker} \varphi$ гомоморфизма φ и обозначается через $C_A(B)$. Если $C_A(B) = A$, то говорят, что A *действует тождественно* на B.

Пример 3.1. Пусть A — некоторая подгруппа из $\operatorname{Aut} G$, B — некоторая A-допустимая подгруппа из G. Каждый элемент $a \in A$ производит некоторый автоморфизм $\varphi(a)$ группы B; отображение φ является гомоморфизмом A в $\operatorname{Aut} B$. Таким образом, A есть группа операторов группы B. Понятно, что A может действовать тождественно на B.

Пример 3.2. Возьмем некоторую подгруппу A из нормализатора $N_G(H/K)$ секции H/K группы G. Зададим действие A на H/K сопряжением:

$$(hK)^a = a^{-1}haK, \ a \in A, \ h \in H.$$

Тогда A — группа операторов группы H/K. В частности, если $A = G$, то G есть группа операторов своей нормальной секции H/K, причем G действует тождественно на H/K тогда и только тогда, когда H/K центральна в G, т. е. $H/K \subseteq Z(G/K)$.

В дальнейшем при рассмотрении действия подгрупп из G на секциях группы G без указания способа задания действия мы будем иметь в виду как раз пример 3.2.

2. f-тождественное действие. В этом пункте мы дадим очень важное для всего последующего изложения обобщение понятия тождественного действия.

Определение 3.1. Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп назовем *групповой функцией*, если $f(1) = \mathfrak{G}$ и из $G_1 \simeq G_2$ всегда следует $f(G_1) = f(G_2)$.

Если f — групповая функция, то групповая функция f', дополнительная к f, определяется следующим равенством: $f'(H) = \mathfrak{G} \setminus f(H)$ для любой группы $H \neq 1$.

Определение 3.2. Пусть f — некоторая групповая функция, A — группа операторов группы B. Если $A/C_A(B) \in f(B)$, то будем говорить, что A *действует f-тождественно* на B или что B *f-центральна* относительно A (или более коротко: B A-f-центральна). Если же $A/C_A(B) \notin f(B)$, то будем говорить, что B *f-эксцентральна* относительно A (иначе: B A-f-эксцентральна).

Вместо «относительно A» будем говорить «в A», если $B = L/M$ является нормальной секцией группы A и действие задается сопряжением, как в примере 3.2.

Определение 3.3. Пусть f — некоторая групповая функция. Нормальный ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = 1, \ t \geqslant 0,$$

группы G назовем *f-центральным*, если каждый его фактор f-централен в G.

Обозначим через $\langle f \rangle$ множество всех групп, обладающих f-центральными главными рядами.

Лемма 3.1. *$\langle f \rangle$ является непустой формацией для любой групповой функции f.*

Доказательство. Очевидно, $\langle f \rangle$ содержит единичную группу. То, что $\langle f \rangle$ — класс групп, вытекает из того, что f принимает на изоморфных группах одно и то же значение.

Пусть $K_i \triangleleft G$, $i = 1, 2$. Поскольку каждый главный фактор группы G/K_i G-изоморфен некоторому главному фактору группы G, то ясно, что $G \in \langle f \rangle$ влечет $G/K_i \in \langle f \rangle$. Предположим, что $G/K_i \in \langle f \rangle$, $i = 1, 2$. Тогда G действует f-тождественно на главных факторах группы G/K_i, а значит, ввиду леммы 1.3 и на главных факторах группы $G/K_1 \cap K_2$. Таким образом, $G/K_1 \cap K_2 \in \langle f \rangle$, и лемма доказана.

Если f — групповая функция, то $\langle f \rangle$-корадикал группы G мы будем обозначать через G^f и называть f-корадикалом.

Определение 3.4. Пусть $\Omega = \{f_i \mid i \in I\}$ — некоторое непустое множество групповых функций. Групповую функцию f, определяемую равенством

$$f(G) = \bigcap_{i \in I} f_i(G), \qquad G \in \mathfrak{G},$$

назовем *пересечением множества групповых функций* Ω. Групповую функцию h, определяемую равенством

$$h(G) = \bigcup_{i \in I} f_i(G), \qquad G \in \mathfrak{G},$$

назовем *объединением множества групповых функций* Ω.

Определение 3.5. Любое множество Ω групповых функций будем считать *частично упорядоченным* с отношением $\leqslant$, которое задается следующим образом.

Если $f_1, f_2 \in \Omega$, то будем говорить, что f_1 *предшествует* f_2, и писать $f_1 \leqslant f_2$, если $f_1(G) \subseteq f_2(G)$ для любой группы G.

Определение 3.6. Групповую функцию f назовем:

1) *p-постоянной* (p — фиксированное простое число), если $f(R) = f(S)$ для любых двух нееденичных p-групп R и S (в этом случае значение f на неединичных p-группах обозначаем через $f(p)$);

2) *π-постоянной*, если она p-постоянна для любого $p \in \pi$;

3) *примарно постоянной*, если она p-постоянна для любого простого p;

4) постоянной, если $f(G_1) = f(G_2)$ для любых двух неединичных групп G_1 и G_2;

5) *локальной*, если она примарно постоянна и $f(G) = \bigcap_{p \in \pi(G)} f(p)$ для любой группы $G \neq 1$;

6) *внутренней*, если $f(G) \subseteq \langle f \rangle$ для любой группы $G \neq 1$.

3. Экраны. Недостатком понятия групповой функции f является то, что не всегда уплотнение f-центрального ряда нормальными подгруппами является f-центральным рядом. Этого недостатка лишено более узкое понятие экрана, которое мы сейчас введем.

Определение 3.7. Отображение f класса $\mathfrak{G}$ всех групп в множество классов групп назовем экраном, если для любой группы G выполняются следующие условия:

1) $f(G)$ — формация;

2) $f(G) \subseteq f(G^\varphi) \cap f(\mathrm{Ker}\,\varphi)$ для любого гомоморфизма φ группы G;

3) $f(1) = \mathfrak{G}$.

Из условия 2) вытекает, что экран f принимает одинаковое значение на изоморфных группах, т. е. является групповой функцией в смысле определения 3.1. Кроме того, видно, что если f — экран, то каждый f-центральный ряд после удаления повторений может быть уплотнен до f-центрального главного ряда, а значит, класс групп, обладающих f-центральными рядами, совпадает с формацией $\langle f \rangle$.

Лемма 3.2. *Пусть f — экран, A — группа операторов группы G, K — некоторая нормальная A-допустимая подгруппа из G. Если G обладает нормальным A-допусти-*

мым рядом, факторы которого $\mathfrak{f}$-центральны относительно A, то один из таких рядов проходит через K.

Доказательство. Пусть дан ряд, удовлетворяющий условию леммы:

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = 1, \quad t \geqslant 1.$$

Пусть $K_i = K \cap G_i$, $i = 0, 1, \ldots, t$. Тогда ряд

$$G = KG_0 \supseteq KG_1 \supseteq \ldots \supseteq KG_t = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_t = 1$$

будет искомым. В этом нетрудно убедиться, используя определение экрана и G-изоморфизмы:

$$G_{i-1}K/G_iK \simeq G_{i-1}/G_i\,(G_{i-1} \cap K), \quad K_{i-1}/K_i \simeq G_i(G_{i-1} \cap K)/G_i.$$

Лемма 3.3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *пересечение любого непустого множества экранов также является экраном;*

2) *объединение любой непустой цепи экранов также является экраном.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Пусть непустое множество экранов $\Omega = \{f_i \mid i \in I\}$ является цепью, т. е. линейно упорядочено (с отношением частичной упорядоченности $\leqslant$, введенным в определении 3.5). Тогда для любой группы G множество формаций $\{f_i(G) \mid i \in I\}$ линейно упорядочено относительно включения, а следовательно, ввиду леммы 1.1 объединение $\bigcup_{i \in I} f_i(G)$ является формацией. Тем самым лемма доказана.

Выделим некоторые наиболее важные типы экранов. Экран *постоянен*, если он является постоянной групповой функцией. Экран, являющийся π-постоянной (примарно постоянной) групповой функцией, назовем *π-постоянным* (соответственно *примарно постоянным*) экраном. Другие типы экранов введем в следующем определении.

Определение 3.8. Экран f назовем:

1) *p-однородным* (p — фиксированное простое число), если он p-постоянен и для любой группы G и ее силовской p-подгруппы P имеет место $f(G) \subseteq f(P)$;

2) *однородным*, если он p-однороден для любого простого p;

3) *локальным*, если он является локальной групповой функцией;

4) *композиционным*, если для любой группы $G \neq 1$ имеет место $f(G) = \bigcap f(H/K)$, где H/K пробегает все композиционные факторы группы G;

5) *пустым*, если $f(G) = \varnothing$ для любой неединичной группы G;

6) $\mathfrak{X}$-*экраном*, если $f(G) \subseteq \mathfrak{X}$ для любой группы $G \neq 1$.

$\mathfrak{X}$-экран при $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ будем называть *единичным* экраном, если $\mathfrak{X} = \langle f \rangle$.

Легко видеть, что каждый локальный экран является однородным, а каждый композиционный экран является примарно постоянным. В случае, когда f — единичный экран, значок f в определениях 3.2 и 3.3 опускается и, таким образом, определение 3.3 превращается в обычное определение центрального ряда.

Пример 3.3. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{K}$ — непустые формации, причем $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{H}$, а групповая функция f такова, что $f(P) = \mathfrak{H}$ для каждой неединичной примарной группы P и $f(G) = \mathfrak{K}$ для любой непримарной группы G. Тогда f — однородный экран, не являющийся ни локальным, ни композиционным.

Пример 3.4. Пусть $\mathfrak{H}$ — непустая формация, а групповая функция f такова, что для любой неединичной группы G выполняются условия:

1) $f(G) = \mathfrak{H}$, если G не имеет абелевых композиционных факторов;

2) $f(G) = \varnothing$, если G имеет хотя бы один абелев композиционный фактор.

Тогда f — композиционный экран, не являющийся однородным.

Замечание 1. Локальный экран полностью определяется своими значениями на примарных подгруппах. Поэтому, чтобы построить локальный экран f, достаточно каждому простому числу p поставить в соответствие некоторую формацию $f(p)$, а затем для любой группы $G \neq 1$ положить $f(G) = \bigcap f(p)$, где p пробегает $\pi(G)$.

Замечание 2. Чтобы построить композиционный экран f, нужно каждой простой группе H поставить в соответствие некоторую формацию $f(H)$, а затем для любой группы $G \neq 1$ положить $f(G) = \bigcap f(L/K)$, где L/K пробегает все композиционные факторы группы G.

Лемма 3.4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *пересечение любого непустого множества однородных экранов снова является однородным экраном;*

2) *пересечение любого непустого множества локальных экранов снова является локальным экраном;*

3) *пересечение любого непустого множества композиционных экранов снова является композиционным экраном.*

Доказательство. Пусть экран f является пересечением множества экранов $\{f_i \mid i \in I\}$, $I \neq \phi$. Предположим, что все экраны f_i являются локальными (композиционными), т. е. для любых $i \in I$ и $G \neq 1$ имеет место равенство:

$$f_i(G) = \bigcap f_i(P),$$

где P пробегает все примарные подгруппы (соответственно все композиционные факторы) группы G. Тогда

$$f(G) = \bigcap_i \Big(\bigcap_P f_i(P) \Big) = \bigcap_P \Big(\bigcap_i f_i(P) \Big) = \bigcap_P f(P),$$

а значит, f — локальный (соответственно композиционный) экран. Рассуждение для однородных экранов аналогично, только знак равенства заменяется на знак включения.

Лемма 3.5. *Объединение любой непустой цепи примарно постоянных (однородных) экранов является примарно постоянным (соответственно однородным) экраном.*

Доказательство. Пусть $\Omega = \{f_i \mid i \in I\}$ — некоторая цепь экранов, f — ее объединение, $I \neq \phi$. По лемме 3.3 функция f является экраном, причем ясно, что примарная постоянность f_i влечет примарную постоянность экрана f. Предположим, что все f_i являются однородными экранами. Тогда, если $G \neq 1$ — любая группа и $p \in \pi(G)$, то $f_i(G) \subseteq f(p)$. Следовательно,

$$f(G) = \bigcup_{i \in I} f_i(G) \subseteq \bigcup_{i \in I} f_i(p) = f(p),$$

что и доказывает однородность экрана f.

4. Экраны формации. Мы установили в лемме 3.1, что каждой групповой функции f соответствует формация $\langle f \rangle$. Обратно, если задана формация $\mathfrak{F}$, то можно искать те групповые функции f, для которых $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$; особенно важно искать экраны с этим свойством.

Определение 3.9. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Если f — такой экран, что $\langle f\rangle = \mathfrak{F}$, то формация $\mathfrak{F}$ называется *ступенчатой* формацией, причем в этом случае будем говорить, что

f — экран формации $\mathfrak{F}$,

$\mathfrak{F}$ имеет экран f,

экран f определяет формацию $\mathfrak{F}$,

$\mathfrak{F}$ определяется экраном f.

Легко видеть, что формация $\mathfrak{N}$ имеет единичный экран. Единичная формация $\mathfrak{E}$ имеет пустой экран.

Определение 3.10. Экран f назовем *внутренним*, если f — внутренняя групповая функция, т. е. $f(G) \subseteq \langle f\rangle$ для любой неединичной группы G.

Лемма 3.6. *Каждая ступенчатая формация имеет по крайней мере один внутренний экран.*

Доказательство. Пусть f — экран формации $\mathfrak{F}$. Определим функцию f_1 следующим образом: $f_1(H) = \mathfrak{F} \cap f(H)$ для любой группы $H \neq 1$. Легко видеть, что f_1— экран, причем $\langle f_1\rangle \subseteq \langle f\rangle = \mathfrak{F}$. Если $G \in \mathfrak{F}$ и L / K — главный фактор группы G, то $G / C_G(L / K) \in f(L / K)$. Так как класс $\mathfrak{F}$ Q-замкнут, то $G/C_G(L/K) \in \mathfrak{F}$, а значит, L / K f_1-централен в G. Таким образом, $G \in \langle f_1\rangle$. Итак, $\langle f_1\rangle = \mathfrak{F}$, т. е. f — искомый внутренний экран.

Лемма 3.7. *Пусть f_i — экран формации $\mathfrak{F}_i$, $i \in I \neq \phi$. Тогда $f = \bigcap_{i\in I} f_i$ является экраном формации $\mathfrak{F} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{F}_i$.*

Доказательство. Пусть L / K — произвольный главный фактор группы $G \in \mathfrak{F}$. Пусть $C = C_G(L / K)$. Так как $G \in \mathfrak{F}_i$, то $G / C \in f_i(L / K)$. Значит, $G / C \in f(L / K)$, т. е. L / K f-централен в G. Отсюда следует, что $\mathfrak{F} \subseteq \langle f\rangle$.

Обратно, если $G \in \langle f\rangle$, то главный ряд группы G будет f_i-центральным для любого $i \in I$, т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Итак, $\mathfrak{F} = \langle f\rangle$.

Лемма 3.8. *Пересечение f любого непустого множества Ω экранов формации $\mathfrak{F}$ снова является экраном формации $\mathfrak{F}$. Кроме того, если в Ω имеется хотя бы один внутренний экран, то f — внутренний экран.*

Доказательство. То, что f — экран формации $\mathfrak{F}$, непосредственно следует из леммы 3.7. Пусть в

Ω имеется внутренний экран f_1. Тогда $f(H) \subseteq f_1(H) \subseteq \mathfrak{F}$ для любой группы $H \neq 1$. Значит, f — внутренний экран.

5. Композиционная формация. Вполне естественно называть ступенчатую формацию именем ее экрана. Однако следует иметь в виду, что формация может иметь экраны различных типов.

Определение 3.11. Формация $\mathfrak{F}$ называется *композиционной*, если она имеет хотя бы один композиционный экран.

Ввиду леммы 3.6 (точнее, ввиду доказательства леммы 3.6) каждая композиционная формация имеет по крайней мере один внутренний композиционный экран. Напомним, что любое множество экранов в соответствии с определением 3.5 частично упорядочено, и поэтому имеет смысл говорить о его максимальных и минимальных элементах.

Определение 3.12. Пусть Ω — множество всех композиционных экранов композиционной формации $\mathfrak{F}$. Экран f назовем *минимальным композиционным экраном* формации $\mathfrak{F}$, если f является минимальным элементом множества Ω.

Теорема 3.1. *Композиционная формация имеет единственный минимальный композиционный экран, который является к тому же внутренним экраном.*

Доказательство. Пусть f — пересечение множества всех композиционных экранов композиционной формации $\mathfrak{F}$ По лемме 3.8 f является внутренним экраном формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 3.4 экран f является композиционным. Легко видеть, что f — искомый экран.

Лемма 3.9. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *если H / K — главный фактор группы G и $p \in \pi(H / K)$, то $G / C_G(H / K)$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, причем $F_p(G) \subseteq C_G(H / K)$;*

2) *если A — группа операторов группы G и R / T — A-композиционный p-фактор группы G, то $A / C_A(R / T)$ не имеет неединичных нормальных p-подгрупп.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Пусть $C = C_G(H / K)$, $F = F_p(G)$. Очевидно, $C \supseteq K$. Рассмотрим случай, когда H / K неабелева. Тогда HC / C и H / K G-изоморфны. В группе G / C подгруппа HC / C является неабелевой минимальной нормальной подгруппой с единичным централизатором.

Отсюда следует, что G / C не имеет неединичных нормальных p-подгрупп и, кроме того, $FC / C = C / C$.

Пусть теперь $P = H / K$ — абелева p-группа. Группа G / C изоморфна некоторой неприводимой группе автоморфизмов A группы P. Последнее означает, что в полупрямом произведении $\Gamma = P \rightthreetimes A$ подгруппа P является минимальной нормальной подгруппой. Пусть A обладает нормальной p-подгруппой $L \neq 1$. Тогда PL — нормальная p-подгруппа группы Γ. Так как $P \lhd PL$, то $Z = Z(PL) \cap P \neq 1$. Так как $Z(PL) \lhd \Gamma$, то $Z \lhd \Gamma$. Отсюда, ввиду минимальности P, заключаем, что $Z = P$. Это значит, что $P \subseteq Z(PL)$. Так как $L \subseteq \operatorname{Aut} P$, то это возможно лишь при $L = 1$. Таким образом, $|O_p(G / C)| = 1$. Если S — $S_{p'}$-подгруппа из F, то $S \lhd G$ и в группе G / K подгруппы SK / K и H / K поэлементно перестановочны. Значит, $S \subseteq C$ и поэтому FC / C является p-группой. Так как $|O_p(G / C)| = 1$, то отсюда получаем $F \subseteq C$. Первое утверждение леммы доказано.

Второе утверждение есть следствие первого, так как R / T — минимальная нормальная p-подгруппа полупрямого произведения $(R / T) \rightthreetimes A$. Лемма доказана.

Лемма 3.10. *Пусть A — некоторая группа автоморфизмов p-группы G. Если A действует тождественно на каждом факторе субнормального A-допустимого ряда $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = 1$, $t > 0$, то A является p-группой.*

Доказательство. Если $t = 1$, то $A = 1$. Пусть $t > 1$, $C = C_A(G_1)$. По индукции A / C является p-группой. Для любых $x \in G$, $c \in C$ имеем $x^c = xg$, где $g \in G_1$. Если $r = |G_1|$, то $x^{c^r} = xg^r = x$. Отсюда заключаем, что $c^r = 1$, т. е. C является p-группой. Но тогда и A является p-группой.

Лемма 3.11. *Пусть f — внутренний p-постоянный экран. Тогда $\mathfrak{N}_p f(p)$ является подформацией формации $\langle f \rangle$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{N}_p f(p)$ не содержится в $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, и выберем в $\mathfrak{N}_p f(p) \setminus \mathfrak{F}$ группу G, имеющую наименьший порядок. По теореме 1.1 класс $\mathfrak{N}_p f(p)$ является формацией. Поэтому G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, причем L является p-группой и совпадает с $G^{\mathfrak{F}}$. Группа $G / C_G(L)$ ввиду леммы 3.9 не имеет неединичных нормальных p-подгрупп. Отсюда и из $G / C_G(L) \in \mathfrak{N}_p f(p)$

заключаем, что $G/C_G(L) \in f(p)$. Но тогда $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 3.12. *Пусть f_1 и f_2 — внутренние p-постоянные экраны формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{N}_p f_1(p) = \mathfrak{N}_p f_2(p)$.*

Доказательство. Предположим, что $\mathfrak{N}_p f_1(p)$ не содержится в $\mathfrak{N}_p f_2(p)$, и выберем в $\mathfrak{N}_p f_1(p) \setminus \mathfrak{N}_p f_2(p)$ группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда $G \neq 1$, и так как по теореме 1.1 классы $\mathfrak{N}_p f_1(p)$ и $\mathfrak{N}_p f_2(p)$ являются формациями, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу M, причем M не является p-группой и $G / M \in \mathfrak{N}_p f_1(p) \cap \mathfrak{N}_p f_2(p)$.

Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = P \wr G$, где $|P| = p$. Группа Γ представима в виде $\Gamma = A \leftthreetimes G$, где A — элементарная абелева p-группа. Поэтому Γ содержится в $\mathfrak{N}_p f_1(p)$, а ввиду леммы 3.11 — и в формации $\mathfrak{F}$. Так как M не является p-группой и в сплетении $P \wr G$ не действует тождественно на A, то ввиду леммы 3.10 M не может действовать тождественно на каждом G-главном факторе группы A. Пусть L / K — такой G-главный фактор группы A, что $C = C_\Gamma(L / K)$ не содержит подгруппу M. Так как $C \supseteq A$, то $C = A(C \cap G)$, причем $C \cap G \triangleleft G$. Вспоминая, что M — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, получаем теперь, что $C \cap G = 1$, а значит,

$$\Gamma / C_\Gamma(L / K) \simeq G \notin f_2(p).$$

Последнее означает, что L / K не является f_2-центральным главным фактором группы Γ. А это противоречит тому, что $\Gamma \in \mathfrak{F} = \langle f_2 \rangle$. Таким образом, доказано, что $\mathfrak{N}_p f_1(p) \subseteq \mathfrak{N}_p f_2(p)$. Так как f_1 и f_2 равноправны, то тем самым установлена справедливость и обратного включения. Лемма доказана.

Лемма 3.13. *Пусть экран f формации $\mathfrak{F}$ является π-постоянным для некоторого непустого множества простых чисел π. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает π-постоянным экраном f_1 со следующими свойствами:*

1) $f_1(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого $p \in \pi$;

2) $f_1(H) = f(H)$ для любой группы H, не являющейся примарной π-группой.

Доказательство. Построим групповую функцию f_1, удовлетворяющую условиям 1) и 2) доказываемой леммы, и покажем, что она и является искомым экраном.

Прежде всего, нетрудно заметить, что f_1 — π-постоянный экран. Так как $f \leqslant f_1$, то $\mathfrak{F} \subseteq \langle f_1 \rangle$. Предположим, что в $\langle f_1 \rangle$ имеются группы, не принадлежащие $\mathfrak{F}$, и выберем среди них группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда $L = G^{\mathfrak{F}}$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G.

Предположим сначала, что L — абелева p-группа для некоторого $p \in \pi$. Так как $G \in \langle f_1 \rangle$, то $G / C_G(L) \in f_1(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$. Отсюда и из леммы 3.9 следует, что $G / C_G(L) \in f(p)$. Последнее означает, что L f-центральна в G, что невозможно, так как $L = G^{\mathfrak{F}}$.

Пусть теперь L не является примарной π-группой. Тогда, по условию, $f(L) = f_1(L)$, и так как L f_1-центральна в G, то L будет и f-центральна в G. Снова получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 3.14. *Пусть f_1 — внутренний экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает таким экраном f_2, что выполняются следующие условия:*

1) $f_2(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой элементарной группы H;

2) $f_2(H) = f_1(H)$, если H не является неабелевой элементарной группой.

Доказательство. Построим групповую функцию f_2, удовлетворяющую условиям 1) и 2) доказываемой леммы. Ясно, что f_2 — экран, причем $f_1 \leqslant f_2$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \langle f_2 \rangle$. Предположим, что множество $\langle f_2 \rangle \setminus \mathfrak{F}$ не пусто, и выберем в нем группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда $L = G^{\mathfrak{F}}$ есть единственная минимальная нормальная подгруппа группы G. Если L неабелева, то $C = C_G(L) = 1$ и поэтому из $G \in \langle f_2 \rangle$ следует $G \simeq G/C \in f_2(L) = \mathfrak{F}$. Если же L абелева, то по условию $f_1(L) = f_2(L)$, а значит, L f_1-центральна в G, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 3.15. *Пусть f — внутренний примарно постоянный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает таким внутренним композиционным экраном f^*, что выполняются следующие условия:*

1) $f^*(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p;

2) $f^*(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой элементарной группы H.

Доказательство. Пусть π обозначает множество всех простых чисел. Применив лемму 3.13 по отношению к экрану f, мы получим экран f_1. Применив лемму 3.14 по отношению к экрану f_1, мы получим экран f_2 формации $\mathfrak{F}$ со следующими свойствами:

1) f_2 примарно постоянен;

2) $f_2(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p;

3) $f_2(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой элементарной группы H.

Ввиду лемм 3.11 f_2 — внутренний экран. Пусть f^* — композиционный экран, значения которого на элементарных группах такие же, как и у f_2. Очевидно, что f^* — искомый экран. Лемма доказана.

Из лемм 3.6 и 3.15 вытекает, что если формация $\mathfrak{F}$ имеет примарно постоянный экран, то она имеет внутренний композиционный экран, т. е. является композиционной формацией.

Определение 3.13. Пусть f — внутренний композиционный экран формации $\mathfrak{F}$. Если f является максимальным элементом множества всех внутренних композиционных экранов формации $\mathfrak{F}$, то f называется *максимальным внутренним композиционным экраном* формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 3.2. *Композиционная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний композиционный экран f, причем f обладает следующими свойствами:*

1) $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p;

2) $f(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой элементарной группы H.

Доказательство. Пусть f_1 и f_2 — любые два внутренних композиционных экрана формации $\mathfrak{F}$. По лемме 3.15 формация $\mathfrak{F}$ имеет такой внутренний композиционный экран f_i^*, что $f_i^*(p) = \mathfrak{N}_p f_i(p)$ для любого простого p и $f_i^*(H) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой элементарной группы H, $i = 1, 2$. По лемме 3.12 $f_1^*(p) = f_2^*(p)$ для любого простого числа p. Но тогда $f_1^* = f_2^*$, что и доказывает теорему, так как $f_1 \leqslant f_1^*$, $f_2 \leqslant f_2^*$.

Замечание 3. Экран f^* из леммы 3.15 является максимальным внутренним композиционным экраном формации $\mathfrak{F}$. Тем самым лемма 3.15 указывает способ получения максимального внутреннего композиционного экрана формации $\mathfrak{F}$, исходя из наличия внутреннего примарно постоянного экрана той же формации. Что касается минимального композиционного экрана формации $\mathfrak{F}$, то кроме теоремы 3.1 других результатов пока нет.

Проблема 3. Найти явное описание и способ построения минимального композиционного экрана формации.

6. Локальная формация. Неединичная формация, имеющая локальный экран, содержит некоторые неединичные примарные группы (точнее, все те примарные группы, на которых локальный экран принимает непустое значение). С другой стороны, пример 3.4 показывает, что существуют композиционные формации, не содержащие ни одной неединичной примарной группы. Таким образом, мы видим, что не всякая композиционная формация имеет локальный экран.

Определение 3.14. Формация $\mathfrak{F}$ называется *локальной*, если она имеет хотя бы один локальный экран.

Лемма 3.6 показывает, что всякая локальная формация имеет хотя бы один внутренний локальный экран.

Определение 3.15. Пусть f — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, являющийся максимальным элементом множества всех внутренних локальных экранов формации $\mathfrak{F}$. Тогда f называется *максимальным внутренним локальным экраном* формации $\mathfrak{F}$.

Другими словами, внутренний локальный экран f формации $\mathfrak{F}$ является ее максимальным внутренним локальным экраном, если для любого ее внутреннего локального экрана h и любого простого числа p имеет место включение $h(p) \subseteq f(p)$.

Теорема 3.3 (Картер и Хоукс [1], Шмид [5]). *Локальная формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран f, причем f удовлетворяет следующему условию: $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого числа p.*

Доказательство. Пусть f_i^* — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Построим локальные экраны f_1 и f_2 такие, что $\mathfrak{N}_p f_i^*(p) = f_i(p)$ для любого простого p, $i = 1, 2$. По лемме 3.12 $f_1 = f_2$. Так как $f_i^* \leqslant f_i$, то нам осталось установить, что $f = f_1 = f_2$ есть внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Ввиду леммы 3.9 всякий f-центральный ряд является f_1-центральным рядом. Поэтому $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$. Из леммы 3.11 следует, что f — внутренний экран. Теорема доказана.

Определение 3.16. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Минимальный элемент множества всех локальных экранов формации $\mathfrak{F}$ назовем *минимальным локальным экраном* формации $\mathfrak{F}$.

Теорема 3.4. *Локальная формация имеет единственный минимальный локальный экран, который является к тому же внутренним экраном.*

Доказательство. Пусть Ω — множество всех локальных экранов формации $\mathfrak{F}$, причем $\Omega \neq \varnothing$. Обозначим через f пересечение множества экранов Ω. В множестве Ω имеется внутренний экран, поэтому f — внутренний экран формации $\mathfrak{F}$. По лемме 3.4 экран f является локальным. Ввиду леммы 3.8 f — искомый экран.

Замечание 4. По доказанному, процедура получения максимального внутреннего локального экрана формации $\mathfrak{F}$, исходя из наличия ее внутреннего локального экрана f_1, состоит в следующем. Строим локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{N}_p f_1(p)$ для любого простого p. Экран f и будет максимальным внутренним локальным экраном формации $\mathfrak{F}$. Аналогичной процедуры получения минимального локального экрана формации пока нет.

Проблема 4. Найти явное описание и способ построения минимального локального экрана формации.

7. Формация с однородным экраном. Формацию, имеющую однородный экран, можно было бы назвать однородной формацией. Мы не станем этого делать, так как справедлива следующая

Теорема 3.5 (Шеметков). *Всякая формация, имеющая по крайней мере один однородный экран, является локальной формацией.*

Доказательство. Пусть формация $\mathfrak{F}$ имеет однородный экран. Ввиду леммы 3.6 формация $\mathfrak{F}$ имеет внутренний однородный экран f_1. Построим локальный экран f, удовлетворяющий следующему условию: $f(p) = f_1(p)$ для любого простого числа p. Тогда $f_1 \leqslant f$ и, следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \langle f \rangle$. Предположим, что формация $\langle f \rangle$ обладает группами, не входящими в $\mathfrak{F}$, и выберем среди всех таких групп группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда $L = G^{\mathfrak{F}}$ является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G. Так как $G \in \langle f \rangle$, то для любого $p \in \pi(G)$ имеет место

$$G/C_G(L) \in f(L) \subseteq f(p) = f_1(p) \subseteq \mathfrak{F}.$$

Если L неабелева, то $C_G(L) = 1$ и $G \in \mathfrak{F}$. Если же L — p-группа, то получается, что L f_1-центральна в G. А это противоречит тому, что $L = G^{\mathfrak{F}}$. Теорема доказана.

Замечание 5. Заменяя в определениях 3.15 и 3.16 слово «локальный» на слово «однородный», мы получим определения минимального однородного экрана и максимального внутреннего однородного экрана формации. Согласно доказательству теоремы 3.5, максимальный внутренний однородный экран локальной формации совпадает с ее максимальным внутренним локальным экраном. Нетрудно заметить, что локальная формация обладает единственным минимальным однородным экраном (см. леммы 3.4 и 3.8).

Проблема 5. Найти явное описание и способ построения минимального однородного экрана локальной формации.

§ 4. Построение локальных формаций

Понятие локальной формации особенно важно, так как многие часто встречающиеся в исследованиях формации являются локальными.

1. Формация всех групп. Формация $\mathfrak{G}$ обладает локальным экраном f таким, что $f(p) = \mathfrak{G}$ для любого простого p.

2. Формация единичных групп. Формация $\mathfrak{E}$ имеет пустой экран, который, очевидно, локален.

3. Формация нильпотентных π-групп. Пусть $\mathfrak{N}_\pi$ — формация всех нильпотентных π-групп, f — такой локальный экран, что $f(p) = \mathfrak{E}$ для любого $p \in \pi$, $f(q) = \phi$ для любого $q \in \pi'$. Очевидно, f — минимальный локальный экран формации $\mathfrak{N}_\pi$.

4. Формация π-групп. Пусть $\mathfrak{G}_\pi$ — формация всех π-групп, f — такой локальный экран, что $f(p) = \mathfrak{G}_\pi$ для любого $p \in \pi$, $f(q) = \phi$ для любого $q \in \pi'$. Очевидно, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{G}_\pi$.

5. Формация p-нильпотентных групп. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-нильпотентных групп (p — фиксированное простое число), f — такой локальный экран, что $f(p) = \mathfrak{E}$, $f(q) = \mathfrak{G}$ для любого простого числа q, отличного от p. Покажем, что f — экран формации $\mathfrak{F}$.

Ясно, что главный ряд p-нильпотентной группы f-централен. Пусть $G \in \langle f \rangle$. Нужно установить, что G p-нильпотентна. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. По индукции G/L p-нильпотентна. Если L — p'-группа, то отсюда следует, что и G p-нильпотентна. Если же L — pd-группа, то $G/C_G(L) \in f(p) = \mathfrak{E}$, т. е. $L \subseteq Z(G)$. Если теперь S/L — S_p-подгруппа из G/L, то ввиду $L \subseteq Z(S)$ подгруппа S p-нильпотентна, а значит, и G p-нильпотентна. Тем самым показано, что $\langle f \rangle = \mathfrak{F}$. А отсюда, ввиду леммы 3.9, мы немедленно получаем следующий известный результат.

Теорема 4.1. *В любой pd-группе G подгруппа $F_p(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных pd-факторов группы G.*

Легко видеть, что группа нильпотентна, если она p-нильпотентна для любого простого делителя p ее порядка. Поэтому из теоремы 4.1 вытекает

Следствие 4.1.1. *В любой группе G подгруппа Фиттинга $F(G)$ совпадает с пересечением централизаторов в G всех главных факторов группы G.*

Следствие 4.1.2. *Для любой π-разрешимой группы G имеет место включение $C_G(F_\pi(G)) \subseteq F_\pi(G)$.*

Доказательство. Пусть $F = F_\pi(G)$, $C = C_G(F)$, $R = O_{\pi'}(F)$. Если $R \neq 1$, то по индукции $CR/R \subseteq F/R = F_\pi(G/R)$, что дает $C \subseteq F$. Пусть $R = 1$, $F \neq FC$. Пусть N/F — минимальная нормальная подгруппа из G/F, содержащаяся в FC/F. Тогда $N = F(N \cap C)$ централизует каждый свой главный πd-фактор и по теореме 4.1 $N = F_\pi(N)$, что невозможно.

Следствие 4.1.3 (Фиттинг). $F(G) \supseteq C_G(F(G))$ *для любой разрешимой группы G.*

Следствие 4.1.4 (Чунихин [3]). *Коммутант p-сверхразрешимой группы p-нильпотентен.*

Следствие 4.1.5 (Вендт). *Коммутант сверхразрешимой группы нильпотентен.*

6. Формация π-замкнутых групп. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех π-замкнутых групп (π — некоторое фиксированное множество простых чисел), f — такой локальный экран, что $f(p) = \mathfrak{G}$ для любого $p \in \pi$, $f(q) = \mathfrak{G}_{\pi'}$ для любого $q \in \pi'$. Покажем, что f — экран формации $\mathfrak{F}$.

Очевидно, $\mathfrak{F} \subseteq \langle f \rangle$. Предположим, что класс $\langle f \rangle \setminus \mathfrak{F}$ не пуст, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу L, причем L не является π-группой. Пусть $C = C_G(L)$. Так как $G/C \in \mathfrak{S}_{\pi'}$, то $C \neq 1$, а значит, $C \supseteq L$. Поэтому L — абелева π'-группа. Так как G/L π-замкнута, то и C/L π-замкнута, т. е. C/L имеет нормальную S_π-подгруппу H/L. Ясно, что $|H/L| = |G|_\pi$. Так как $H \subseteq C_G(L)$, то $L \subseteq Z(H)$. Легко видеть, что H, а значит, и группа G π-замкнута. Тем самым показано, что $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$.

7. Формация φ-дисперсивных групп. Пусть φ — некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел, $\mathfrak{F}$ — формация всех φ-дисперсивных групп. Покажем, что $\mathfrak{F}$ локальна.

Рассмотрим всевозможные множества π_i простых чисел, обладающие следующим свойством: $p\varphi q$ для всех $p \in \pi_i$, $q \in \pi_i'$. Пусть $\mathfrak{F}_i$ — формация всех π_i-замкнутых групп. Очевидно, $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_i \mathfrak{F}_i$. Так как формации $\mathfrak{F}_i$ локальны, то по лемме 3.4 формация $\mathfrak{F}$ также является локальной.

8. Формация π-разрешимых групп. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех π-разрешимых групп, f — такой локальный экран, что $f(p) = \mathfrak{F}$ для любого простого p. Нетрудно заметить, что f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. В частности, формация $\mathfrak{S}$ является локальной.

9. Формация π-сверхразрешимых групп. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех π-сверхразрешимых групп. Обозначим через $\mathfrak{A}(p-1)$ формацию всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Построим локальный экран f такой, что $f(p) = \mathfrak{A}(p-1)$ для любого $p \in \pi$, $f(q) = \mathfrak{G}$ для любого $q \in \pi'$. Покажем, что $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$. Ясно, что $\mathfrak{F} \subseteq \langle f \rangle$. Пусть $G \in \langle f \rangle$, V — минимальная нормальная подгруппа группы G. По индукции $G/V \in \mathfrak{F}$. Если V — π'-группа, то G π-сверхразрешима. Пусть порядок V делится на некоторое число $p \in \pi$. Тогда, если $C = C_G(V)$, то

$$G/C \in f(p) = \mathfrak{A}(p-1), \qquad VC/C \in \mathfrak{A}(p-1).$$

Отсюда следует, что V — p-группа, и доказательство равенства $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$ завершается применением следующего результата (Х у п п е р т [5]).

Лемма 4.1. *Пусть A — некоторая неприводимая абелева группа автоморфизмов p-группы V и $|V| = p^n > 1$. Тогда A — циклическая группа порядка, делящего $p^n - 1$. Кроме того, n — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^n \equiv 1 \pmod{|A|}$.*

Доказательство. Будем считать, что V — аддитивная абелева группа. Тогда V можно рассматривать как правое векторное пространство размерности n над полем K из p элементов. Пусть R — коммутативное подкольцо кольца $\mathrm{Hom}_K(V, V)$, порожденное элементами A и K. Ввиду условия V является неприводимым правым R-модулем (определения, связанные с R-модулями, см. у Кэртиса и Райнера [1]). По лемме Шура, $R \subseteq$ $\mathrm{Hom}_R(V, V)$ — тело. Так как R коммутативно, то $R \subseteq$ $\subseteq \mathrm{Hom}_R(V, V)$. Легко видеть, что множество всех ненулевых элементов из R замкнуто относительно операции умножения и, следовательно, является группой. Поэтому R — поле. Так как R-модуль V неприводим, то $V = vR =$ $= \{vr \mid r \in R\}$ для любого ненулевого $v \in V$; но тогда отображение $\varepsilon: r \to vr, r \in R$, является R-гомоморфизмом R-модуля R на V. Так как ядро ε есть идеал поля R, то ε — изоморфизм. Следовательно, $p^n = |V| = |R|$. Известно, что мультипликативная группа конечного поля циклическая. Поэтому A циклическая и $|A|$ делит $p^n - 1$.

Пусть k — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $p^k \equiv 1 \pmod{|A|}$. Тогда k делит n. Хорошо известно, что поле R порядка p^n содержит подполе R_1 порядка p^k. Так как циклическая группа содержит точно одну подгруппу каждого возможного порядка и $|A|$ делит $p^k - 1$, то $A \subseteq R_1$. Но тогда $R_1 = R$ и $k = n$. Лемма доказана.

10. Формация $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, f — такой локальный экран, что $f(p) = \mathfrak{F}$ для любого простого p. Применяя следствие 4.1.1, можно без труда показать, что f — экран формации $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$. В частности, формации $\mathfrak{N}^2$ и $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ являются локальными формациями.

Пусть f_1 — локальный экран некоторой подформации $\mathfrak{H}$ из $\mathfrak{N}\mathfrak{F}$. Применяя леммы 3.4 и 3.7, мы видим, что $f_1 \cap f$ является локальным $\mathfrak{F}$-экраном формации $\mathfrak{H}$. Таким образом, каждая локальная подформация формации

$\mathfrak{N}\mathfrak{F}$ имеет внутренний локальный $\mathfrak{F}$-экран. В частности, любая локальная подформация формации $\mathfrak{N}^2$ имеет внутренний локальный $\mathfrak{N}$-экран.

11. Насыщенность локальных формаций. В этом пункте будет показано, что всякая локальная формация является насыщенной.

Лемма 4.2. *Пусть f — однородный экран, $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Тогда $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi$ и $\pi = \{p \mid f(p) \neq \varnothing\}$.*

Доказательство. Пусть p — простой делитель порядка группы $G \in \mathfrak{F}$. Если H/K — главный pd-фактор группы G, то $G/C_G(H/K) \in f(p)$, откуда следует, что $f(p) \neq \varnothing$. Но тогда $\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$, так как ввиду $1 \in f(p)$ главный ряд любой p-группы f-централен. Тем самым доказано, что $\mathfrak{N}_\pi \subseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$ и $f(p) \neq \varnothing$ для любого $p \in \pi$. Поскольку $\mathfrak{N}_\pi \supseteq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$, то мы имеем требуемое равенство $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{F} = \mathfrak{N}_\pi$. Очевидно, условие $f(q) \neq \neq \varnothing$ равносильно $\mathfrak{N}_q \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 4.3 (обобщенная лемма Фраттини). *Пусть H и K — подгруппы группы G, причем $H \subseteq K$. Если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены с помощью элемента из K, то $N_G(H)K = G$.*

Доказательство. По условию для любого $x \in G$ найдется такой $y \in K$, что $H^{xy} = H$. Отсюда следует, что $x \in N_G(H)y^{-1}$, а значит, $G \subseteq N_G(H)K$. Обратное включение очевидно.

Лемма 4.4. *Пусть $K \subseteq N \lhd G$, $K \lhd G$, $K \subseteq \Phi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если N/K π-замкнута, то и N π-замкнута;*
2) $F_p(N/K) = F_p(N)/K$.

Доказательство. Пусть N/K имеет нормальную S_π-подгруппу H/K. Так как $K \subseteq \Phi(G)$ и $\Phi(G)$ нильпотентна, то и K нильпотентна. Легко видеть, что $S_{\pi'}$-подгруппа R из K является $S_{\pi'}$-подгруппой в H. По теореме Шура — Цассенхауза (см., например, Чунихин [7], теорема 1.5.2) H обладает S_π-подгруппой S, причем любые две S_π-подгруппы из H сопряжены в H. По лемме 4.3 $N_G(S)H = G$. Так как $H = SR$, то $G = = N_G(S)R$. Отсюда вытекает, что S нормальна в G, так как R входит в $\Phi(G)$, состоящую из необразующих элементов группы G. Второе утверждение леммы есть следствие первого при $\pi = p'$.

Лемма доказана.

Лемма 4.5. *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Группа G тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{F}$, когда $G/\mathrm{F}_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}$, $p \in \pi(G)$. Если H/K — главный pd-фактор группы G, то $G/\mathrm{C}_G(H/K) \in \in f(p)$. Ввиду этого фактор-группа группы G по пересечению централизаторов всех главных pd-факторов группы G принадлежит $f(p)$. Применяя теорему 4.1, получаем $G/\mathrm{F}_p(G) \in f(p)$. Обратно, пусть $G/\mathrm{F}_p(G) \in f(p)$ для любого $p \in \pi(G)$. Если H/K — главный pd-фактор группы G, то по лемме 3.9 имеем $\mathrm{C}_G(H/K) \supseteq \mathrm{F}_p(G)$. Но тогда $G/\mathrm{C}_G(H/K)$ как гомоморфный образ группы $G/\mathrm{F}_p(G)$ принадлежит $f(p)$. Следовательно, главный ряд группы G f-централен, т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая локальная формация, N — нормальная подгруппа группы G и $N/N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Тогда N представима в виде прямого произведения $N = N_1 \times N_2$, множители которого удовлетворяют следующим условиям:*

1) $N_1 \in \mathfrak{F}$;
2) $\pi(N_2) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \phi$;
3) $N_2 \subseteq \Phi(G)$.

Доказательство. Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$, $D = N \cap \Phi(G)$, $\omega = \pi(\mathfrak{F})$. Так как N/D является ω-группой, то по лемме 4.4 подгруппа N представима в виде $N = N_1 \times N_2$, где N_1 — S_ω-подгруппа из N. Так как $N_2 \subseteq D$, то $N / D \simeq N_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, где $D_1 = N_1 \cap \Phi(G)$. Пусть $p \in \omega$. Так как $N_1 / D_1 \in \mathfrak{F}$, то, используя леммы 4.4 и 4.5, получаем

$$(N_1 / D_1) / \mathrm{F}_p(N_1 / D_1) = \\ = N_1 / D_1 / \mathrm{F}_p(N_1) / D_1 \simeq N_1 / \mathrm{F}_p(N_1) \in f(p).$$

Так как последнее справедливо для любого $p \in \pi(N_1)$, то по лемме 4.5 подгруппа N_1 входит в $\mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Следствие 4.2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}$. Если $N \lhd G$ и $N / N \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $N \in \mathfrak{F}$.*

Этот результат содержит в себе лемму 4.4 как частный случай. Условию следствия 4.2.1 удовлетворяет, в частности, формация всех π-сверхразрешимых групп.

Следствие 4.2.2. *Если $N \lhd G$ и $N / N \cap \Phi(G)$ π-сверхразрешима, то и N π-сверхразрешима.*

Следствие 4.2.3. *Если $N \lhd G$ и $N / N \cap \Phi(G)$ сверхразрешима, то и N сверхразрешима.*

Теорема 4.3 (Гашюц [3]). *Каждая локальная формация является насыщенной.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $K \lhd G$, $K \subseteq \Phi(G)$, $G/K \in \mathfrak{F}$. Тогда $G/\Phi(G) \in \mathfrak{F}$. По теореме 4.2 $G = N_1 \times N_2$, где $N_1 \in \mathfrak{F}$, $N_2 \subseteq \Phi(G)$. Отсюда вытекает, что $G = N_1$, что и требуется.

Теорема 4.4 (Хупперт [1]). *Группа $G \neq 1$ сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее максимальная подгруппа имеет простой индекс.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Пусть каждая максимальная подгруппа группы G имеет простой индекс. Если $\Phi(G) \neq 1$, то $G / \Phi(G)$ сверхразрешима по индукции, но тогда и G сверхразрешима, так как формация всех сверхразрешимых групп является локальной, а значит, по теореме 4.3 и насыщенной. Поэтому будем считать, что $\Phi(G) = 1$. По теореме Ф. Холла (М. Холл [1], теорема 10.5.7) группа G разрешима. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда L абелева и не входит в $\Phi(G)$. Если M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая L, то $ML = G$, $M \cap L = 1$. Но тогда $|L| = |G : M|$ есть простое число. Поскольку G / L по индукции сверхразрешима, то мы убеждаемся, что и G сверхразрешима. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 10.5.7 из книги М. Холла [1] позволяет получить следующий результат.

Лемма 4.6. *Пусть K — нормальная π-обособленная подгруппа группы G и пусть индекс в G каждой ее максимальной подгруппы, не содержащей K, является либо π'-числом, либо числом из π, либо квадратом числа из π. Тогда K π-разрешима.*

Используя лемму 4.6 и следствие 4.2.2, легко получить следующее обобщение теоремы 4.4.

Теорема 4.5 (Шеметков [6]). *Пусть группа G содержит нормальную π-обособленную подгруппу K. Если индекс в G каждой ее максимальной подгруппы, не содержащей K, является либо π'-числом, либо числом из π, то K π-сверхразрешима.*

Следствие 4.5.1. *Пусть $K \lhd G$ и $|G : M|$ есть простое число для любой не содержащей K максимальной подгруппы M группы G. Тогда K сверхразрешима.*

Проблема 6. Доказать, что всякая непустая насыщенная формация является локальной.

Для насыщенных формаций разрешимых групп эта проблема решена (см. Хупперт [5], с. 710, теорема 7.25).

12. Локальные формации с заданными свойствами. Пусть U — некоторая операция, f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Естественно возникают два вопроса:

1) Будет ли $\mathfrak{F}$ U-замкнутой, если $f(p)$ U-замкнута для любого простого p?

2) Будет ли $f(p)$ U-замкнутой для любого простого p, если $\mathfrak{F}$ U-замкнута?

Мы дадим положительный ответ на эти вопросы в некоторых конкретных случаях.

Теорема 4.6 (Слепова [4]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, p — фиксированное простое число. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если* $\mathrm{S}\mathfrak{F} \cap \mathrm{Ext}_p \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, *то* $\mathrm{S}f(p) \cap \mathrm{Ext}_p \mathfrak{X} \subseteq f(p)$;

2) *если* $\mathrm{S}_n \mathfrak{F} \cap \mathrm{Ext}_p \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, *то* $\mathrm{S}_n f(p) \cap \mathrm{Ext}_p \mathfrak{X} \subseteq f(p)$.

Доказательство. Будем доказывать оба утверждения одновременно. Пусть U — одна из операций S, S_n. Предположим, что $\mathrm{U}\mathfrak{F} \cap \mathrm{Ext}_p \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$. Пусть H — (нормальная) подгруппа группы $G \in f(p)$ и $H \in \mathrm{Ext}_p \mathfrak{X}$. Рассмотрим регулярное сплетение $G^* = P \wr G = K \leftthreetimes G$, где $|P| = p$, K — элементарная абелева p-группа. По лемме 3.11 $G^* \in \mathfrak{F}$. Так как $KH \in \mathrm{U}\mathfrak{F} \cap \mathrm{Ext}_p \mathfrak{X}$, то $KH \in \mathfrak{F}$. Рассмотрим главный ряд группы KH:

$$KH \supset \ldots \supset K = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_t = 1.$$

Пусть $C_i = \mathrm{C}_{KH}(K_{i-1} / K_i)$. Так как $KH \in \mathfrak{F}$ и $C_i \supseteq K$, то

$$KH / C_i = HC_i / C_i \simeq H / H \cap C_i \in f(p)$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Следовательно, $H / D \in f(p)$, где $D = \bigcap_i (H \cap C_i)$. По свойству регулярного сплетения $\mathrm{C}_G(K) = 1$. Следовательно, $\mathrm{C}_D(K) = 1$, и по лемме 3.10 подгруппа D является p-группой. Так как $H / D \in f(p)$ и формация $f(p)$ является по теореме 3.3 Ext_p-замкнутой, то мы получаем, что $H \in f(p)$. Теорема доказана.

Теорема 4.7 (Подуфалова, Слепова). *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ S-замкнута (S_n-замкнута) тогда и только тогда, когда для любого простого p формация $f(p)$ S-замкнута (соответственно S_n-замкнута).*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что $\mathfrak{F}$ S-замкнута (S_n-замкнута). Полагая $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ и применяя теорему 4.6, мы получаем, что $f(p)$ S-замкнута (S_n-замкнута) для любого простого p.

Достаточность. Пусть для любого простого p формация $f(p)$ является S-замкнутой (S_n-замкнутой). Пусть H — подгруппа (нормальная подгруппа) неединичной группы $G \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $H \in \mathfrak{F}$. Так как $G \in \mathfrak{F}$, то G обладает f-центральным главным рядом

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_r = 1.$$

Пусть $H_i = G_i \cap H$. Так как

$$H_{i-1} / H_i \simeq H_{i-1} G_i / G_i \subseteq G_{i-1} / G_i,$$

то $C_i^* = C_H(H_{i-1} / H_i) \supseteq C_i \cap H$, где $C_i = C_G(G_{i-1} / G_i)$. Пусть $q \in \pi(H_{i-1} / H_i)$. По условию $G / C_i \in f(q)$ и $HC_i / C_i \simeq H / H \cap C_i \in f(q)$. Отсюда, ввиду $C_1^* \supseteq C_i \cap H$, вытекает, что $H / C_i^* \in f(q)$. Тем самым установлено, что ряд

$$H = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_r = 1$$

является f-центральным рядом группы H. Теорема доказана.

Для любого натурального числа $t \geqslant 2$ R-замкнутый класс $\mathfrak{X}$ содержит, по определению, каждую группу G, представимую в виде произведения t нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп. Ослабляя это требование, мы приходим к следующему определению.

Определение 4.1. Класс групп $\mathfrak{X}$ назовем *слабо R_t-замкнутым*, $t \geqslant 2$, если $\mathfrak{X}$ содержит всякую группу G, имеющую t нормальных $\mathfrak{X}$-подгрупп с попарно взаимно простыми индексами.

Легко заметить, что если A и B — подгруппы группы G, причем $|G : A|$ и $|G : B|$ взаимно просты, то $G = AB$.

Теорема 4.8 (Слепова [1], [3]). *Пусть f — локальный экран формации $\mathfrak{F}$ и пусть для некоторого натурального числа $t \geqslant 2$ выполняется следующее условие:*

для любого простого p формация $f(p)$ либо совпадает с $\mathfrak{G}$, либо входит в $\mathfrak{F}$ и является слабо R_t-замкнутой. Тогда $\mathfrak{F}$ слабо R_t-замкнута.

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Тогда существуют группы, не входящие в $\mathfrak{F}$, но имеющие t нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп с попарно взаимно простыми индексами. Выберем среди всех таких групп группу G наименьшего порядка. Таким образом, G не принадлежит $\mathfrak{F}$, но имеет нормальные $\mathfrak{F}$-подгруппы $M_1, M_2, \ldots, M_t$ с попарно взаимно простыми индексами. Ясно, что все подгруппы M_i неединичны.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. В G/L подгруппы M_iL/L имеют попарно взаимно простые индексы и принадлежат $\mathfrak{F}$. Так как для G/L теорема верна, то $G/L \in \mathfrak{F}$. Ясно, что L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, причем $L = G^{\mathfrak{F}}$ и $L \subseteq M_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Ввиду теоремы 4.3 $\Phi(G) = 1$. Так как $L = G^{\mathfrak{F}}$, то найдется такое $p \in \pi(L)$, что $f(p) \neq \mathfrak{G}$. Рассмотрим $D_i = \bigcap C_{M_i}(H/K)$, где H/K пробегает все M_i-главные факторы группы L. Так как $M_i \in \mathfrak{F}$, то $M_i/D_i \in f(p)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Возможны два случая.

Случай 1. Пусть $\mathrm{F}(G) = 1$. Тогда L неабелева и $C_G(L) \cap L = 1$. Отсюда и из единственности L вытекает, что $C_G(L) = 1$. Но тогда $C_{D_i}(L) = 1$ и, следовательно, D_i можно рассматривать как некоторую группу автоморфизмов группы L, действующую тождественно на всех M_i-главных факторах группы L. По хорошо известной теореме Ф. Холла (см. теорему 9.8 ниже) D_i нильпотентна. Так как D_i к тому же нормальна в M_i, то $D_i \subseteq \mathrm{F}(M_i) \subseteq \mathrm{F}(G) = 1$. Но тогда $M_i \in f(p)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$, а так как формация $f(p)$ слабо R_t-замкнута по условию, то $G \in f(p)$. Но тогда $G \in \mathfrak{F}$, так как $f(p) \neq \mathfrak{G}$ и по условию $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Случай 2. Пусть $\mathrm{F}(G) \neq 1$. Тогда L входит в $\mathrm{F}(G)$ и является p-группой. Так как $\Phi(\mathrm{F}(G)) \subseteq \Phi(G) = 1$, то $\mathrm{F}(G)$ абелева. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, не содержащая L. Тогда $G = ML$, $M \cap L = 1$, $C_G(L) = (C_G(L) \cap M)L$, $C_G(L) \cap M \lhd G$. Отсюда, ввиду единственности L, заключаем, что $C_G(L) = L$, а значит, $L = \mathrm{F}(G)$. По лемме 3.10 $D_i / C_{M_i}(L) =$

$= D_i / L$ является p-группой. Но тогда и D_i является p-группой, причем $D_i \subseteq \mathrm{F}(M_i) \subseteq \mathrm{F}(G) = L$. Мы получаем, таким образом, что $M_i / L \in f(p)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Но тогда $G / L \in f(p)$, так как $f(p)$ слабо R_t-замкнута. Последнее означает, что L f-центральна в G, что противоречит равенству $L = G^{\mathfrak{F}}$. Снова получили противоречие.

Теорема доказана.

Следствие 4.8.1. *Пусть группа G имеет две нормальные π-сверхразрешимые подгруппы, индексы которых взаимно просты. Тогда G π-сверхразрешима.*

Для того чтобы получить это следствие, достаточно заметить, что построенный в п. 9 настоящего параграфа экран удовлетворяет условию теоремы 4.8 при $t = 2$.

Следствие 4.8.2. *Пусть группа G имеет две нормальные сверхразрешимые подгруппы, индексы которых взаимно просты. Тогда G сверхразрешима.*

Теорема 4.9 (Слепова [1], [3]). *Пусть формация $\mathfrak{F}$ имеет такой локальный экран f, что для любого простого p формация $f(p)$ либо совпадает с $\mathfrak{G}$, либо входит в $\mathfrak{F}$ и является R-замкнутой. Тогда $\mathfrak{F}$ R-замкнута.*

Доказательство. Повторяем с очевидными изменениями доказательство теоремы 4.8.

Теорема 4.10 (Слепова [3]). *Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ R-замкнута (слабо R_t-замкнута, $t \geqslant 2$) тогда и только тогда, когда для любого простого p формация $f(p)$ R-замкнута (соответственно слабо R_t-замкнута).*

Доказательство. Достаточность вытекает из теорем 4.8 и 4.9. Пусть $\mathfrak{F}$ R-замкнута (слабо R_t-замкнута, $t \geqslant 2$). Пусть $G = M_1M_2 \ldots M_t$, где $M_1, M_2, \ldots, M_t$ — нормальные $f(p)$-подгруппы (нормальные $f(p)$-подгруппы с попарно взаимно простыми индексами). Так как $f(p) \subseteq \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$. Покажем, что $G \in f(p)$.

Пусть $G^* = P \wr G = K \leftthreetimes G$, где $|P| = p$, K — элементарная абелева p-группа. По лемме 3.11 $KM_i \in \mathfrak{F}$ для любого i. Так как $\mathfrak{F}$ R-замкнута (слабо R_t-замкнута), то отсюда вытекает, что $G^* \in \mathfrak{F}$. Если D — пересечение централизаторов в G^* всех G^*-главных факторов группы K, то

$$G^* / D = KG / D \simeq G / G \cap D \in f(p).$$

Так как $C_G(K) = 1$, то по лемме 3.10 подгруппа $G \cap D$ является p-группой. Но тогда $G \in f(p)$, так как по теореме 3.3 имеет место равенство $f(p) = \mathrm{Ext}_p f(p)$.

Теорема доказана.

Лемма 4.7 (Чунихин [1]). *Пусть $G = HK$, $L \lhd H$, $L \subseteq K$. Тогда $K_G \supseteq L$. В частности, если $K \neq G$ и $L \neq 1$, то G непростая.*

Доказательство. Из равенства $G = HK$ следует, что

$$\{K^h \mid h \in H\} = \{K^x \mid x \in G\}.$$

Следовательно, $K_G = \bigcap_{h \in H} K^h$. Отсюда, ввиду $L^h = L$ для любого $h \in H$, получаем $K_G \supseteq L$. Лемма доказана.

Теорема 4.11 (Виландт [6]). *Группа G разрешима, если она имеет три разрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.*

Доказательство. Пусть группа G имеет разрешимые подгруппы H_1, H_2 и H_3 с попарно взаимно простыми индексами. Тогда $G = H_1H_2 = H_1H_3 = H_2H_3$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из H_1. Так как H_1 разрешима, то $|L| = p^\alpha$, p — простое число. Ввиду условия теоремы, p не делит одновременно $|G : H_2|$ и $|G : H_3|$. Пусть, для определенности, p не делит $|G : H_2|$. Это значит, что силовская p-подгруппа из H_2 является силовской p-подгруппой группы G. Ввиду теоремы Силова $L \subseteq K = H_2^x$, где $x \in G$. Так как $G = H_1K$ $L \lhd H_1$ и $L \subseteq K$, то по лемме 4.7 $K_G \supseteq L$. Таким образом, K_G — неединичная разрешимая нормальная подгруппа группы G. В фактор-группе G / K_G индексы подгрупп H_1K_G / K_G, H_2K_G / K_G и H_3K_G / K_G попарно взаимно просты. По индукции G / K_G разрешима, но тогда и G разрешима. Теорема доказана.

Следуя Крамеру [2], введем следующее определение.

Определение 4.2. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *Σ_t-замкнутым* (t — натуральное число), если $\mathfrak{X}$ содержит всякую группу G, имеющую t $\mathfrak{X}$-подгрупп, индексы которых в G при $t > 1$ попарно взаимно просты. ∎

По определению, пустая формация Σ_t-замкнута для любого t. Единственной Σ_1-замкнутой непустой формацией, отличной от $\mathfrak{G}$, условимся считать $\mathfrak{E}$.

Лемма 4.8. *Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — Σ_t-замкнутые классы групп. Тогда $\mathfrak{X} \cap \mathfrak{Y}$ также Σ_t-замкнут.*

Доказательство очевидно.

Следующая лемма доказана Крамером [2].

Лемма 4.9. *Пусть формация $\mathfrak{X}$ содержится в $\mathfrak{S}$ и Σ_t-замкнута, $t \geqslant 2$. Тогда формация $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{X}$ является Σ_{t+1}-замкнутой.*

Доказательство. Пусть группа G имеет $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{X}$-подгруппы $U_1, U_2, \ldots, U_{t+1}$, индексы которых в G попарно взаимно просты. Так как $t+1 \geqslant 3$, то по теореме 4.11 группа G разрешима. При любом гомоморфизме группы G образы подгруппы U_i принадлежат $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{X}$ и имеют попарно взаимно простые индексы. Поэтому можно считать, что $\mathfrak{S}_\pi\mathfrak{X}$-корадикал L группы G является ее единственной минимальной нормальной подгруппой. Ясно, что L является p-группой для некоторого $p \in \pi'$. Подгруппа Фиттинга F группы G также является p-группой. Индекс любой подгруппы, не содержащей F, делится на p. Поэтому F содержится по крайней мере в t подгруппах нашей системы подгрупп $U_1, U_2, \ldots, U_{t+1}$. Будем считать, что $U_i \supseteq F$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как F является π'-группой, то F и $O_\pi(U_i)$ поэлементно перестановочны, $i = 1, 2, \ldots, t$. Отсюда и из следствия 4.1.3 вытекает, что $O_\pi(U_i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Так как $U_i \in \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{X}$, то мы получаем, что $U_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Воспользовавшись Σ_t-замкнутостью формации $\mathfrak{X}$, мы приходим к тому, что $G \in \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_\pi\mathfrak{X}$.

Лемма доказана.

Теорема 4.12 (Крамер [2]). *Пусть f — такой локальный $\mathfrak{S}$-экран формации $\mathfrak{F}$, что для любого простого p формация $f(p)$ Σ_t-замкнута, $t \geqslant 1$. Тогда $\mathfrak{F}$ Σ_{t+2}-замкнута.*

Доказательство. Так как f — $\mathfrak{S}$-экран, то $f(p) \subseteq \mathfrak{S}$ для любого простого p, а значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду леммы 4.5 $\mathfrak{F} = \bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p f(p)$ $\cap \mathfrak{F}_\pi$. Если $t = 1$, то $f(p) = \mathfrak{E}$ и $\mathfrak{S}_p f(p) = \mathfrak{S}_p$ Σ_2-замкнута; если же $t > 1$, то по лемме 4.9 формация $\mathfrak{S}_p f(p)$ Σ_{t+1}-замкнута. В любом случае $\mathfrak{S}_p f(p)$ Σ_{t+1}-замкнута. По лемме 4.9 $\mathfrak{S}_{p'}\mathfrak{S}_p f(p)$ Σ_{t+2}-замкнута. Применяя лемму 4.8, мы видим, что и формация $\mathfrak{F}$ Σ_{t+2}-замкнута. Теорема доказана.

Так как формация $\mathfrak{N}$ имеет единичный экран, удовлетворяющий условию теоремы 4.12 при $t = 1$, то мы получаем

Следствие 4.12.1 (Кегель [3]). *Группа G нильпотентна, если она имеет три нильпотентные подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты.*

Этот факт вытекает также и из следующего результата Кегеля [3].

Лемма 4.10. *Класс всех p-замкнутых групп Σ_3-замкнут.*

Доказательство такое же, как и у теоремы 4.11.

Лемма 4.11. *Каждая формация нильпотентных групп является Σ_3-замкнутой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторая формация нильпотентных групп. Пусть группа G имеет $\mathfrak{X}$-подгруппы U_1, U_2 и U_3 с попарно взаимно простыми индексами. Тогда по следствию 4.12.1 группа G нильпотентна. Если p^α — наивысшая степень простого числа p, делящая $|G|$, то p^α делит $|U_j|$ для некоторого j, так как p не может делить одновременно индексы всех подгрупп U_1, U_2 и U_3. Если p^α делит $|U_j|$, то силовская p-подгруппа P из U_j входит в $\mathfrak{X}$ и является силовской p-подгруппой группы G. Тем самым показано, что все силовские подгруппы нильпотентной группы G являются $\mathfrak{X}$-группами. Так как $\mathfrak{X}$ — формация, то отсюда следует, что $G \in \mathfrak{X}$.

Лемма доказана.

Лемма 4.12. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый Σ_3-замкнутый гомоморф p-замкнутых групп. Тогда класс $\mathrm{Ext}_p\,\mathfrak{X}$ Σ_3-замкнут.*

Доказательство. Пусть группа G имеет $\mathrm{Ext}_p\,\mathfrak{X}$-подгруппы U_1, U_2 и U_3 с попарно взаимно простыми индексами. По лемме 4.10 G имеет нормальную силовскую p-подгруппу P. Поскольку $U_i \cap P$ является силовской p-подгруппой в U_i и $\mathfrak{X}$—гомоморф, то $U_iP/P \simeq U_i / U_i \cap P \in \mathfrak{G}_{p'} \cap \mathfrak{X}$. В группе G/P индексы подгрупп U_1P/P, U_2P/P и U_3P/P попарно взаимно просты. Поэтому ввиду Σ_3-замкнутости $\mathfrak{X}$ имеем $G/P \in \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Лемма 4.13. *Для любого простого p и любой формации нильпотентных групп $\mathfrak{X}$ класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X}$ является Σ_3-замкнутой формацией.*

Доказательство. По лемме 4.11 класс $\mathfrak{X}$ Σ_3-замкнут. По лемме 4.12 класс $\mathfrak{N}_p\mathfrak{X}$ Σ_3-замкнут и по теореме 1.1 является формацией.

Теорема 4.13. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная подформация формации $\mathfrak{S}$, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Если для любого простого p формация $f(p)$ Σ_t-замкнута, $t \geqslant 2$, то $\mathfrak{F}$ Σ_{t+1}-замкнута.*

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Ввиду теоремы 3.3 и леммы 4.5, $\mathfrak{F} = \bigcap\limits_{p\in\pi} \mathfrak{S}_{p'}f(p)$. По лемме 4.9 формация $\mathfrak{S}_{p'}f(p)$ Σ_{t+1}-замкнута. По лемме 4.8 формация $\mathfrak{F}$ Σ_{t+1}-замкнута. Теорема доказана.

Теорема 4.14 (Крамер [2]). *Любая локальная подформация формации $\mathfrak{N}^2$ является Σ_4-замкнутой.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная подформация формации $\mathfrak{N}^2$. Как замечено в п. 10 настоящего параграфа, $\mathfrak{F}$ имеет внутренний локальный $\mathfrak{N}$-экран f_1. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Тогда по теореме 3.3 для любого простого p имеет место равенство $f(p) = \mathfrak{N}_p f_1(p)$. Так как $f_1(p) \subseteq \mathfrak{N}$, то по лемме 4.13 формация $f(p)$ Σ_3-замкнута. Тогда по теореме 4.13 формация $\mathfrak{F}$ Σ_4-замкнута. Теорема доказана.

Следствие 4.14.1 (Дёрк [1]). *Пусть группа G имеет четыре сверхразрешимые подгруппы, индексы которых в G попарно взаимно просты. Тогда G сверхразрешима.*

Проблема 7. Доказать теоремы 4.12 и 4.13 для произвольной локальной формации.

Проблема 8. Допускает ли теорема 4.13 обращение?

Проблема 9. Перечислить все те локальные формации, у которых каждая подформация является S_n-замкнутой.

§ 5. Некоторые комбинированные способы построения формаций

1. $\overline{\mathfrak{F}}$-длина. В этом пункте $\mathfrak{F}$ будет обозначать некоторую непустую формацию. Введем следующие обозначения:

$\overline{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех радикальных формаций, содержащих $\mathfrak{F}$;

$\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ — класс групп, содержащий $\mathfrak{E}$, а также те и только те неединичные группы, у которых каждый композиционный фактор не принадлежит $\overline{\mathfrak{F}}$.

Лемма 5.1. *$\overline{\mathfrak{F}}$, $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\overline{\mathfrak{F}}$ — радикальные формации.*

Доказательство. То, что $\overline{\mathfrak{F}}$ — радикальная формация, очевидно. Неединичная группа содержится в $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ тогда и только тогда, когда каждый ее главный фактор не принадлежит $\overline{\mathfrak{F}}$. Отсюда и из леммы 1.3 выводим, что класс $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ R_0-замкнут. Замкнутость класса $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ относительно операций Q, R и S_n очевидна.

Согласно теоремам 1.1 и 2.1, $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\overline{\mathfrak{F}} = \mathrm{Ext}_{\overline{\overline{\mathfrak{F}}}}\overline{\mathfrak{F}}$ — формация. Пусть A_1 и A_2 — нормальные $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\overline{\mathfrak{F}}$-подгруппы группы G. Так как $\overline{\overline{\mathfrak{F}}} \cap \overline{\mathfrak{F}} = \mathfrak{E}$, то ясно, что $\overline{\mathfrak{F}}$-корадикал C_i группы A_i совпадает с ее $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$-радикалом, $i = 1, 2$. Ввиду R-замкнутости $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ $C = C_1C_2 \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$. Теперь имеем

$$A_1A_2 / C = (A_1C / C)(A_2C / C),$$
$$A_iC / C \simeq A_i / A_i \cap C \in \overline{\mathfrak{F}}, \qquad i = 1,2.$$

Отсюда, ввиду R-замкнутости $\overline{\mathfrak{F}}$, получаем $A_1A_2/C \in \overline{\mathfrak{F}}$, а значит, $A_1A_2 \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}\overline{\mathfrak{F}}$. Если же $G \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}\overline{\mathfrak{F}}$, то $G_{\overline{\overline{\mathfrak{F}}}} \cap A_1 = C_1 \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ и $A_1G_{\overline{\overline{\mathfrak{F}}}}/G_{\overline{\overline{\mathfrak{F}}}} \simeq A_1/C_1 \in \overline{\mathfrak{F}}$, так как $\overline{\mathfrak{F}}$ S_n-замкнута. Поэтому $A_1 \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}\overline{\mathfrak{F}}$, и лемма доказана.

Определение 5.1. *Верхней $\overline{\mathfrak{F}}$-цепью* группы G назовем цепь

$$1 = \mathrm{P}_0^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_0^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \subseteq \mathrm{M}_1^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \ldots \subseteq \mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \ldots,$$

в которой $\mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(G) / \mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(G)$ — $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$-радикал группы $G / \mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(G)$, $\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(G) / \mathrm{M}_{i-1}^{\mathfrak{F}}(G)$ — $\overline{\mathfrak{F}}$-радикал группы $G / \mathrm{M}_{i-1}^{\mathfrak{F}}(G)$. Очевидно, начиная с некоторого номера, члены верхней $\overline{\mathfrak{F}}$-цепи совпадают с G. Наименьшее l, для которого $\mathrm{M}_l^{\mathfrak{F}}(G) = G$, назовем *$\overline{\mathfrak{F}}$-длиной* группы G и обозначим через $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$, ряд

$$1 = \mathrm{P}_0^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_0^{\mathfrak{F}}(G) \subset \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G) \subset \subset \mathrm{M}_1^{\mathfrak{F}}(G) \subset \ldots \subset \mathrm{P}_l^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_l^{\mathfrak{F}}(G) = G$$

назовем *верхним* $\overline{\mathfrak{F}}$*-рядом* группы G, а ряд

$$1 = \mathrm{P}_0^{\mathfrak{F}}(G) \subset \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G) \subset \ldots \subset \mathrm{P}_l^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq G$$

назовем *верхним* $\overline{\mathfrak{F}}$*-радикальным рядом* группы G.

Очевидно, $\mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G)$ есть $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\mathfrak{F}$-радикал группы G. По определению, $l_{\mathfrak{F}}(G) = 0$ тогда и только тогда, когда $G \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$. Все члены верхнего $\overline{\mathfrak{F}}$-ряда группы G являются характеристическими подгруппами.

Лемма 5.2. *Пусть группа G обладает таким нормальным рядом*

$$1 = P_0 \subseteq M_0 \subseteq P_1 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq P_m \subseteq M_m = G,$$

что $M_i / P_i \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$ и $P_i / M_{i-1} \in \in \overline{\mathfrak{F}}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда для любого i выполняются включения $M_i \subseteq \mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(G)$ и $P_i \subseteq \mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(G)$. В частности, $l_{\mathfrak{F}}(G) \leqslant m$.

Доказательство. Очевидно, требуемые включения выполняются при $i = 0$. Пусть уже установлено, что $P_r \subseteq \subseteq P_r^{\mathfrak{F}}(G)$, $r \geqslant 0$. Тогда $M_r\mathrm{P}_r^{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{P}_r^{\mathfrak{F}}(G)$ нормальна в $G/\mathrm{P}_r^{\mathfrak{F}}(G)$ и изоморфна $M_r/M_r \cap \mathrm{P}_r^{\mathfrak{F}}(G) \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$. Так как $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$—радикальный класс, то $M_r\mathrm{P}_r^{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{P}_r^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{P}_r^{\mathfrak{F}}(G)$. Таким образом, $M_r \subseteq \mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G)$. Теперь рассматриваем $P_{r+1}\mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G)$, нормальную в $G/\mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G)$ и изоморфную $P_{r+1}/P_{r+1} \cap \mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G) \in \overline{\mathfrak{F}}$. Отсюда, ввиду радикальности класса $\overline{\mathfrak{F}}$, получаем $P_{r+1}\mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq \mathrm{P}_{r+1}^{\mathfrak{F}}(G)/\mathrm{M}_r^{\mathfrak{F}}(G)$. Таким образом, $P_{r+1} \subseteq \subseteq \mathrm{P}_{r+1}^{\mathfrak{F}}(G)$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 5.3. *Пусть группа G обладает нормальным рядом (R), каждый фактор которого принадлежит либо $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$, либо $\overline{\mathfrak{F}}$. Тогда $l_{\mathfrak{F}}(G)$ не больше числа неединичных $\overline{\mathfrak{F}}$-факторов ряда (R).*

Доказательство. Выбрасывая из (R) некоторые члены, получим ряд (R_1) с тем же свойством, но у которого соседние факторы не принадлежат одновременно формации $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$. Уплотняя ряд (R_1) повторяющимися членами, получим ряд (R_2), удовлетворяющий условию леммы 5.2, применение которой и завершает доказательство.

Замечание 1. $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ совпадает с числом неединичных $\overline{\mathfrak{F}}$-факторов верхнего $\overline{\mathfrak{F}}$-ряда G. Поэтому из леммы 5.3 вытекает, что $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ есть наименьшее число неединичных $\overline{\mathfrak{F}}$-факторов, встречающихся в тех нормальных рядах группы G, у которых каждый фактор принадлежит либо $\overline{\mathfrak{F}}$, либо $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$.

Лемма 5.4. *Если* $N \lhd G$, *то* $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(N) \leqslant l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ *и* $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G/N) \leqslant l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$.

Доказательство. Положим $P_i = \mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(G)$, $M_i = \mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(G)$, $l = l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$. Рассмотрим нормальный ряд группы G/N:

$$P_0N/N \subseteq M_0N/N \subseteq P_1N/N \subseteq$$
$$\subseteq M_1N/N \subseteq \ldots \subseteq P_lN/N \subseteq M_lN/N = G/N.$$

Поскольку $M_iN/N/P_iN/N \simeq M_i/P_i(M_i \cap N) \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$, $P_iN/N/M_{i-1}N/N \simeq P_i/M_{i-1}(P_i \cap N) \in \overline{\mathfrak{F}}$, то построенный ряд удовлетворяет условию леммы 5.3, поэтому $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G/N) \leqslant l$.

Если $\tilde{P}_i = N \cap P_i$, $\tilde{M}_i = M_i \cap N$, то

$$\tilde{P}_i/\tilde{M}_{i-1} \simeq \tilde{P}_iM_{i-1}/M_{i-1} \subseteq P_i/M_{i-1} \in \overline{\mathfrak{F}},$$
$$\tilde{M}_i/\tilde{P}_i \simeq \tilde{M}_iP_i/P_i \subseteq M_i/P_i \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}.$$

Отсюда и из S_n-замкнутости классов $\overline{\mathfrak{F}}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ вытекает, что группа N и ее нормальный ряд

$$1 = \tilde{P}_0 \subseteq \tilde{M}_0 \subseteq \tilde{P}_1 \subseteq \tilde{M}_1 \subseteq \ldots \subseteq \tilde{P}_l \subseteq \tilde{M}_l = N$$

удовлетворяют условию леммы 5.3. Поэтому $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(N) \leqslant l$, и лемма доказана.

Так же просто, с применением леммы 5.3, доказывается следующая лемма.

Лемма 5.5. *Пусть* $\mathfrak{X}$ — *класс групп, содержащий все секции группы* G. *Если* $\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{X}$ *и* $\overline{\overline{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{X}$ S-*замкнуты, то* $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(H) \leqslant l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ *для любой подгруппы* H *группы* G.

Лемма 5.6. *Пусть* N_1 *и* N_2 — *нормальные подгруппы группы* G. *Тогда* $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(N_1N_2) = \mathrm{Max}\,\{l_{\overline{\mathfrak{F}}}(N_1),\ l_{\overline{\mathfrak{F}}}(N_2)\}$.

Доказательство. Пусть $t = \mathrm{Max}\,\{l_{\overline{\mathfrak{F}}}(N_1), l_{\overline{\mathfrak{F}}}(N_2)\}$, $P_i = \mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_1)\,\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_2)$, $\mathrm{M}_i = \mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(N_1)\,\mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(N_2)$. Так как $M_t = N_1N_2$, то для доказательства достаточно установить, что группа N_1N_2 и ее нормальный ряд

$$1 = P_0 \subseteq M_0 \subseteq P_1 \subseteq M_1 \subseteq \ldots \subseteq P_t \subseteq M_t = N_1N_2$$

удовлетворяют условию леммы 5.3. Группа P_i / M_{i-1} представима в виде произведения нормальных подгрупп $P_i^{\mathfrak{F}}(N_1)\,\mathrm{M}_{i-1}^{\mathfrak{F}}(N_2) / M_{i-1}$ и $\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_2)\,\mathrm{M}_{i-1}^{\mathfrak{F}}(N_1) / M_{i-1}$, которые изоморфны соответственно

$$\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_1)/\mathrm{M}_{i-1}^{\mathfrak{F}}(N_1)(\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_1) \cap \mathrm{M}_{i-1}^{\mathfrak{F}}(N_2)) \in \overline{\mathfrak{F}},$$
$$\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_2)/\mathrm{M}_{i-1}^{\mathfrak{F}}(N_2)(\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_2) \cap \mathrm{M}_{i-1}^{\mathfrak{F}}(N_1)) \in \overline{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому $P_i / M_{i-1} \in \overline{\mathfrak{F}}$. Аналогично, M_i / P_i принадлежит $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$, так как представима в виде произведения двух нормальных подгрупп, изоморфных

$$\mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(N_1)/\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_1)(\mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(N_1) \cap \mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_2)) \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}},$$
$$\mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(N_2)/\mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_2)(\mathrm{M}_i^{\mathfrak{F}}(N_1) \cap \mathrm{P}_i^{\mathfrak{F}}(N_1)) \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}.$$

Теперь остается применить лемму 5.3.

Лемма 5.7. *Пусть N_1 и N_2 — нормальные подгруппы группы G, принадлежащей некоторой S-замкнутой формации $\mathfrak{X}$. Если $\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{X}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{X}$ S-замкнуты, то*

$$l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G/N_1 \cap N_2) = \mathrm{Max}\,\{l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G/N_1), l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G/N_2)\}.$$

Доказательство. Группа $G / N_1 \cap N_2$ изоморфна подгруппе внешнего прямого произведения $G / N_1 \times G / N_2 \in \mathfrak{X}$. Поэтому, применяя леммы 5.5 и 5.6, получаем

$$l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G / N_1 \cap N_2) \leqslant l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G / N_1 \times G / N_2) =$$
$$= \mathrm{Max}\,\{l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G / N_1), l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G / N_2)\}.$$

Так как G / N_i есть гомоморфный образ группы $G / N_1 \cap N_2$, то по лемме 5.4 справедливо неравенство

$$l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G / N_i) \leqslant l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G / N_1 \cap N_2), \qquad i = 1, 2.$$

Лемма доказана.

Теорема 5.1. *Пусть t — натуральное число, $\mathfrak{X}$ — некоторая S-замкнутая радикальная формация, $\mathfrak{H}$ —*

класс всех $\mathfrak{X}$-групп с $\overline{\mathfrak{F}}$-длиной $\leqslant t$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *$\mathfrak{H}$ — Q-замкнутый радикальный класс;*

2) *если $\overline{\mathfrak{F}}\cap\mathfrak{X}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\cap\mathfrak{X}$ S-замкнуты, то $\mathfrak{H}$ — S-замкнутая радикальная формация;*

3) *если $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\,\overline{\mathfrak{F}}\cap\mathfrak{X}$ — локальная формация, то $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G / \Phi(G)) = l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G)$ для любой группы G из $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Утверждения 1) и 2) прямо следует из лемм 5.4—5.7. Докажем 3).

Пусть $G \in \mathfrak{X}$, $\Phi = \Phi(G)$. Так как G обладает верхним $\overline{\mathfrak{F}}$-рядом, то $\pi(G) \subseteq \pi(\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\,\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{X})$. Отсюда и из леммы 4.2 выводим, что $\Phi \subseteq \overline{\overline{\mathfrak{F}}}\,\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{X}$. Теперь, применяя теорему 4.2, получаем, что $\mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G) / \Phi(G) = \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G / \Phi)$. Следовательно, группы $G / \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G)$ и $(G / \Phi) / \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G / \Phi)$ изоморфны и имеют одинаковую $\overline{\mathfrak{F}}$-длину. Поэтому $l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G) = l_{\overline{\mathfrak{F}}}(G / \Phi)$, и теорема доказана.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, содержащий все секции группы G. Если $\overline{\mathfrak{F}}$ — локальная формация и*

$$\pi(\overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{X}) \cap \pi(\overline{\overline{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{X}) = \phi, \text{ то } \mathrm{C}_G(\mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G)) \subseteq \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G).$$

Доказательство. Пусть $H = \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G)$, $C = \mathrm{C}_G(H)$. Можно считать, что $\mathrm{M}_0^{\mathfrak{F}}(G) = 1$ (в противном случае рассматриваем соответствующую фактор-группу). Предположим, что C не входит в H, и рассмотрим минимальную нормальную подгруппу N / H группы G' / H, содержащуюся в CH / H. Возможны два случая: $N / H \in \overline{\mathfrak{F}}$ и $N / H \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$. Подгруппа N представима в виде $N = H(N \cap C)$, так как $H \subseteq N \subseteq \subseteq CH$. Если $N / H \in \overline{\mathfrak{F}}$, то и изоморфная ей группа $N \cap C / H \cap C$ также принадлежит $\overline{\mathfrak{F}}$, и мы получаем, что $N / H \cap C$ есть прямое произведение $\overline{\mathfrak{F}}$-групп $H / H \cap C$ и $N \cap C / H \cap C$. Но тогда $N / H \cap C \in \in \overline{\mathfrak{F}}$, и так как $H \cap C \subseteq \mathrm{Z}(N)$ и $\overline{\mathfrak{F}}$ — локальная формация, то $N \in \overline{\mathfrak{F}}$. Мы видим, что случай $N / H \in \overline{\mathfrak{F}}$ невозможен. Рассмотрим теперь случай $N / H \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$. Так как $N\cap C/H\cap C \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ и $H \cap C \subseteq H \in \overline{\mathfrak{F}}$, то ввиду условия $H \cap C$ является холловской подгруппой в

$N \cap C$. По теореме Шура (см. Ч у н и х и н [7], теорема 1.5.1), $H \cap C$ обладает дополнением K в $N \cap C$. Так как $K \subseteq C$, то $N \cap C = (H \cap C) \times K$, а значит, $K \lhd G$. Так как $K \in \overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ и $\mathrm{M}_0^{\mathfrak{F}}(G) = 1$, то $K = 1$. Но тогда $N \cap \cap C = H \cap C$ и $N = H$, что невозможно. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5.3. *Пусть G — π-обособленная группа, R — ее $\mathfrak{S}_{\pi'}\mathfrak{S}_{\pi}$-радикал. Тогда* $\mathrm{C}_G(R) \subseteq R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}$, $\mathfrak{X}$ — класс всех π-обособленных групп. Тогда $\mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$ — локальная формация, $R = \mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G)$, $\overline{\overline{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{S}_{\pi'}$. Теперь применяем теорему 5.2.

З а м е ч а н и е 2. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех π-разрешимых групп, $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}_{\pi}$. Тогда $\mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}} = \overline{\mathfrak{F}} \cap \mathfrak{X}$, $\overline{\overline{\mathfrak{F}}} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{S}_{\pi'}$, $\mathrm{P}_1^{\mathfrak{F}}(G) = \mathrm{F}_{\pi}(G)$. Мы видим, что в этом частном случае теорема 5.2 превращается в ранее полученное следствие 4.1.2.

2. $\mathfrak{F}$-длина. О п р е д е л е н и е 5.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая формация. Нормальный ряд группы G назовем *$\mathfrak{F}$-рядом*, если каждый его фактор H / K независимо от остальных удовлетворяет одному из следующих условий:

1) $H / K \in \mathfrak{F}$;

2) группа H / K не имеет композиционных $\mathfrak{F}$-факторов.

$\mathfrak{F}$-длиной нормального ряда будем называть число его неединичных $\mathfrak{F}$-факторов. Наименьшую из $\mathfrak{F}$-длин всех $\mathfrak{F}$-рядов группы G назовем *$\mathfrak{F}$-длиной группы G* и обозначим через $l_{\mathfrak{F}}(G)$.

З а м е ч а н и е 3. Если формация $\mathfrak{F}$ такова, что $\mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$, то $\overline{\mathfrak{F}}$-длина и $\mathfrak{F}$-длина группы G совпадают (см. замечание 1), и можно воспользоваться результатами, полученными в предыдущем пункте. При $\mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$ во всех определениях и обозначениях п. 1 вместо $\overline{\mathfrak{F}}$ будем писать $\mathfrak{F}$. Условию $\mathfrak{F} = \overline{\mathfrak{F}}$ удовлетворяют, например, формации $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}_{\pi}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_p$, $\mathfrak{N}_{\pi}$.

З а м е ч а н и е 4. Если $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}$, то верхний $\mathfrak{F}$-ряд будем называть *верхним π-рядом* (с членами $\mathrm{P}_i^{\pi}(G)$ и $\mathrm{M}_i^{\pi}(G)$), $\mathfrak{F}$-длину — *π-длиной* и обозначать через $l_{\pi}(G)$. При $\pi = \{p\}$ в этих обозначениях вместо π

пишем p. Нетрудно заметить, что если G p-разрешима, то $\mathrm{P}_1^p(G)=\mathrm{F}_p(G)$, $\mathrm{M}_0^p(G)=\mathrm{O}_{p'}(G)$. Таким образом, p-длину p-разрешимой группы G можно определить как число l из следующего ряда:

$$1=F_0\subset F_1\subset\ldots\subset F_l\subseteq G,$$

где $F_i/F_{i-1}=\mathrm{F}_p(G/F_{i-1})$ — pd-группа ($i=1,2,\ldots,l$), G/F_l — p'-группа. Если $G\in\mathfrak{S}_{p'}$, то $l_p(G)=0$.

Замечание 5. $l_{\mathfrak{S}}(G)$ можно иначе называть *разрешимой длиной*, а $l_{\mathfrak{N}}(G)$ — *нильпотентной длиной* группы G. Подчеркнем, что группа G здесь любая, необязательно разрешимая. Если же G разрешима, то $\mathrm{M}_i^{\mathfrak{N}}(G)=\mathrm{P}_i^{\mathfrak{N}}(G)$ для любого i, и верхним $\mathfrak{N}$-радикальным рядом группы G будет ряд

$$1=\mathrm{P}_0^{\mathfrak{N}}(G)\subset\mathrm{P}_1^{\mathfrak{N}}(G)\subset\ldots\subset\mathrm{P}_l^{\mathfrak{N}}(G)=G,$$

где $l=l_{\mathfrak{N}}(G)$, $\mathrm{P}_i^{\mathfrak{N}}(G)/\mathrm{P}_{i-1}^{\mathfrak{N}}(G)=\mathrm{F}(G/\mathrm{P}_{i-1}^{\mathfrak{N}}(G))$, $i=1,2,\ldots,l$.

Теорема 5.4. *Пусть t — натуральное число, $\mathfrak{F}$ — некоторая S-замкнутая радикальная формация, $\mathfrak{H}$ — класс всех $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимых групп с $\mathfrak{F}$-длиной $\leqslant t$. Тогда $\mathfrak{H}$ — S-замкнутая радикальная формация.*

Доказательство. Пусть $\pi=\pi(\mathfrak{F})$, $\mathfrak{X}$ — класс всех π-разрешимых групп. Очевидно, $\mathfrak{X}$ — S-замкнутая радикальная формация. Ввиду условия $\overline{\mathfrak{F}}=\mathfrak{F}$ и $\overline{\mathfrak{F}}\cap\mathfrak{X}$ — S-замкнутые формации. Кроме того, $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\cap\mathfrak{X}=\mathfrak{S}_{\pi'}$. Применяя теорему 5.1, получаем требуемый результат.

Теорема 5.5. *Класс всех π-обособленных групп с π-длиной $\leqslant t$, где t — фиксированное натуральное число, является S-замкнутой радикальной формацией.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех π-обособленных групп, $\mathfrak{F}=\mathfrak{S}_\pi$. Тогда $\overline{\mathfrak{F}}\cap\mathfrak{X}=\overline{\mathfrak{F}}=\mathfrak{F}$, $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}\cap\mathfrak{X}=\mathfrak{S}_{\pi'}$. Остается применить теорему 5.1.

Теорема 5.6. *Класс всех π-разрешимых групп с $\mathfrak{N}_\pi$-длиной $\leqslant t$, где t — фиксированное натуральное число, является локальной формацией.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$ — класс групп, удовлетворяющий условию теоремы. Так как $\mathfrak{F}=\mathfrak{N}_\pi$ —

S-замкнутая радикальная формация, то по теореме 5.4 класс $\mathfrak{H}$ является формацией.

Построим локальный экран f следующим образом. Если $p \in \pi$, то $f(p)$ — класс всех π-разрешимых групп с $\mathfrak{N}_\pi$-длиной $\leqslant t-1$. Если $p \in \pi'$, то $f(p) = \mathfrak{G}$. Покажем, что $\langle f \rangle = \mathfrak{H}$.

Пусть H/K — главный фактор группы $G \in \mathfrak{H}$. Если H/K — π'-группа, то $G/C_G(H/K) \in f(H/K) = \mathfrak{G}$. Пусть H/K — p-группа, $p \in \pi$. Согласно теореме 4.1 $P_1^{\mathfrak{F}}(G) = F_\pi(G)$, содержится в $C_G(H/K)$. Так как $l_{\mathfrak{F}}(G/F_\pi(G)) = t-1$ и $G/C_G(H/K)$ является гомоморфным образом группы $G/F_\pi(G)$, то по теореме 5 4 имеет место неравенство:

$$l_{\mathfrak{F}}(G/C_G(H/K)) \leqslant l_{\mathfrak{F}}(G/F_\pi(G)) = t-1.$$

Это означает, что H/K f-централен в G. Тем самым доказано, что $\mathfrak{H} \subseteq \langle f \rangle$.

Пусть теперь G — группа из $\langle f \rangle$. Тогда для любого главного πd-фактора H/K группы G имеет место

$$G/C_G(H/K) \in f(H/K) = f(p),$$

где p — некоторое число из π. Согласно теореме 4.1 отсюда следует, что $G/F_\pi(G) \in f(p)$. Таким образом, $G/F_\pi(G)$ имеет $\mathfrak{F}$-длину $\leqslant t-1$. Но тогда G имеет $\mathfrak{F}$-длину $\leqslant t$, так как в нашем случае $F_\pi(G) = P_1^{\mathfrak{F}}(G)$. Мы показали, что $\langle f \rangle \subseteq \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 5.6.1. *Класс всех p-разрешимых групп с p-длиной $\leqslant t$, где t — фиксированное натуральное число, является локальной формацией.*

Следствие 5.6.2. *Класс всех разрешимых групп с нильпотентной длиной $\leqslant t$, где t — фиксированное натуральное число, является локальной формацией.*

3. **A-f-мера.** Определение 5.3. Пусть f — некоторая групповая функция. Назовем *f-мерой группы G относительно некоторой ее группы операторов A* (более коротко: *A-f-мерой*) и обозначим через $\mu_f(G, A)$ произведение порядков всех A-f-центральных факторов некоторого A-композиционного ряда группы G. Если G не имеет A-композиционных факторов, f-центральных относительно A, то положим $\mu_f(G, A) = 1$.

Определение 5.4. Если f — групповая функция, то число $\mu_f(G) = \mu_f(G, G)$ назовем *f-мерой группы G.*

Таким образом, $\mu_f(G)$ есть произведение порядков всех f-центральных факторов некоторого главного ряда группы G, если такие факторы имеются, и $\mu_f(G) = 1$, если G не имеет f-центральных главных факторов.

Лемма 5.8. *Пусть f_1 и f_2 — внутренние экраны формации $\mathfrak{F}$ и пусть A — некоторая группа операторов группы G, действующая f_1-тождественно на G и такая, что каждый внутренний автоморфизм группы G производится некоторым оператором из A. Тогда G обладает A-допустимым нормальным рядом, все факторы которого f_2-центральны относительно A.*

Доказательство. Пусть $G \neq 1$, $\Gamma = G \leftthreetimes A$, $C = C_\Gamma(G)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $C_A(G) = 1$. По условию, для любого $x \in G$ существует такой элемент $\bar{x} \in A$, что x и $\bar{x}$ производят путем сопряжения один и тот же автоморфизм группы G, т. е. $x\bar{x}^{-1} \in C$. Следовательно, $GC / C \subseteq AC / C$, и так как $\Gamma = AG$, мы получаем равенство $AC = \Gamma$. Так как $C_A(G) = 1$, то $C \cap A = 1$, и поэтому ввиду условия леммы

$$\Gamma / C \simeq A \in f_1(G).$$

Но тогда $\Gamma \in \mathfrak{F}$, так как G f_1-центральна, а $\Gamma / G \simeq A \in f_1(G) \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, G обладает главными f_2-центральными рядами, один из которых согласно лемме 3.2 проходит через G. Лемма доказана.

Определение 5.5. Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация. Главный фактор H / K группы G назовем *$\mathfrak{F}$-центральным* (*$\mathfrak{F}$-эксцентральным*), если H/K f-централен (соответственно f-эксцентрален) в G для некоторого внутреннего экрана f формации $\mathfrak{F}$. При $K = 1$ мы получаем отсюда понятие $\mathfrak{F}$-центральной и $\mathfrak{F}$-эксцентральной минимальной нормальной подгруппы.

Ввиду леммы 5.8 это определение не зависит от выбора внутреннего экрана f формации $\mathfrak{F}$.

Лемма 5.9. *Пусть H / K — главный фактор группы $G \neq 1$. Справедливы следующие утверждения:*

1) *H / K $\mathfrak{N}$-централен в G тогда и только тогда, когда $H / K \subseteq Z(G / K)$;*

2) *если H / K $\mathfrak{S}$-централен в G, то $|H / K|$ — степень простого числа;*

3) *если* $\mathfrak{F}$ — *формация всех сверхразрешимых групп, то* H / K $\mathfrak{F}$-*централен в* G *тогда и только тогда, когда* $|H / K|$ — *простое число.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно, так как $\mathfrak{N}$ имеет единичный экран. Пусть $C = C_G(H / K)$. Формация $\mathfrak{S}$ имеет такой локальный экран f, что $f(p) = \mathfrak{S}$ для любого простого p. Поэтому если H / K $\mathfrak{S}$-централен, то $HC / C \subseteq G / C \in f(H / K) = \mathfrak{S}$. Таким образом, $H / H \cap C \in \mathfrak{S}$, $H \cap C \supseteq K$. Отсюда следует, что H / K — элементарная абелева группа.

Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Как мы убедились в § 4, п. 9, $\mathfrak{F}$ имеет внутренний экран f такой, что для любого простого p формация $f(p)$ есть класс всех абелевых групп экспоненты, делящей $p - 1$. Если H/K $\mathfrak{F}$-централен в G, то согласно лемме 5.8 H / K будет f-централен в G. Значит, H / K является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого p, причем G / C — абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$. Применяя лемму 4.1 к H / K и G / C, мы убеждаемся, что $|H / K| = p$. Обратно, если $|H / K|$ — простое число, то ясно, что H / K f-централен в G. Лемма доказана.

Определение 5.6. Пусть f — внутренний экран формации $\mathfrak{F}$, $K \lhd G$. Положим $\mu_{\mathfrak{F}}(K, G) = \mu_f(K, G)$, $\mu_{\mathfrak{F}}(G) = \mu_f(G)$. Число $\mu_{\mathfrak{F}}(G)$ назовем $\mathfrak{F}$-*мерой группы* G.

Это определение, так же как и определение 5.5, ввиду леммы 5.8 не зависит от выбора f.

Введенная Чунихиным [7] мера сверхразрешимости группы G совпадает с $\mu_{\mathfrak{F}}(G)$, где $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Чунихин [7] ввел также понятие меры разрешимости. Мера разрешимости группы G, согласно Чунихину, равна произведению простых индексов некоторого ее композиционного ряда, либо 1, если G не имеет композиционных факторов простых порядков. Нетрудно заметить, что мера разрешимости группы G совпадает с $\mu_f(G)$, где f — такой экран, что $f(H) = \mathfrak{G}$, если H абелева, и $f(H) = \varnothing$, если H неабелева. Мера разрешимости по Чунихину и $\mathfrak{S}$-мера одной и той же группы могут не совпадать.

Теорема 5.7. *Пусть* f — *групповая функция,* $\mathfrak{H}$ — *класс всех групп с* f-*мерой* 1. *Тогда* $\mathfrak{H}$ — *формация.*

Доказательство. Q-замкнутость класса $\mathfrak{H}$ очевидна, а R_0-замкнутость есть следствие леммы 1.3.

4. Группы с системой f-центральных главных факторов. Один из общих путей получения формаций с помощью групповой функции f состоит в следующем. Фиксируется некоторое свойство Θ, а затем рассматривается класс групп, у которых все главные факторы со свойством Θ f-центральны. Таким путем можно выделять и изучать различные формации, содержащие формацию $\langle f \rangle$.

Теорема 5.8. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, f — групповая функция. Тогда класс $\mathfrak{H}$ всех групп, у которых все f-эксцентральные главные факторы принадлежат $\mathfrak{X}$, является формацией.*

Доказательство легко получить, используя лемму 1.3. Заметим, что если в условиях теоремы 5.8 класс $\mathfrak{X}$ пуст, то $\mathfrak{H} = \langle f \rangle$; если же f — пустой экран, то $\mathfrak{H}$ совпадает с классом всех групп, все главные факторы которых принадлежат $\mathfrak{X}$, либо единичны.

Нам понадобится в дальнейшем следующий известный результат (см. Хупперт [5], с. 350).

Лемма 5.10. *Пусть H — абелева нормальная подгруппа группы G, причем $(|H|, |G:H|) = 1$. Тогда $H = [H, G] \times (H \cap Z(G))$.*

Доказательство. Пусть $|G:H| = m$, $\overline{G} = G / H$. Если $x \in G$, то через $\bar{x}$ будем обозначать смежный класс xH. Полагая $h^{\bar{x}} = h^x$, где $h \in H$, $x \in G$, мы превращаем $\overline{G}$ в группу операторов группы H. Для любого $h \in H$ имеет место равенство

$$h^m = \prod_{\bar{x} \in \overline{G}} h(h^{-1})^{\bar{x}} \prod_{\bar{x} \in \overline{G}} h^{\bar{x}}, \tag{1}$$

где $h(h^{-1})^{\bar{x}} = [h^{-1}, x] \in [H, G]$. Если $y \in G$, то

$$y^{-1}\Big(\prod_{\bar{x} \in \overline{G}} h^{\bar{x}}\Big)y = \prod_{\bar{x} \in \overline{G}} h^{\bar{x}\bar{y}} = \prod_{\bar{z} \in \overline{G}} h^{\bar{z}}, \tag{2}$$

где $\bar{z} = \bar{x}\bar{y}$ пробегает всю группу $\overline{G}$, как только $\bar{x}$ пробегает всю $\overline{G}$. Из (2) вытекает, что $\prod h^{\bar{x}}$ принадлежит $Z(G) \cap H$. Так как $(m, |H|) = 1$, то отображение $h \to h^m$, где $h \in H$, является автоморфизмом группы H. Теперь ясно, что (1) приводит к следующему равенству:

$$H = [H, G]\,(H \cap \mathrm{Z}(G)).$$

Без труда проверяется, что отображение

$$\alpha\colon h \to \prod_{\bar{x} \in \bar{G}} h^{\bar{x}}, \qquad h \in H,$$

является гомоморфизмом группы H в $H \cap \mathrm{Z}(G)$, причем $[H, G] \subseteq \operatorname{Ker} \alpha$. Если $h \in [H, G] \cap (H \cap \mathrm{Z}(G))$, то $1 = h^{\alpha} = h^{m}$, что влечет $h = 1$. Тем самым лемма доказана.

Лемма 5.11. *Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, являющаяся p-группой, и пусть T / L — неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G / L. Если $L \subseteq \mathrm{Z}(T)$ и силовская p-подгруппа из T абелева, то $T = L \times T'$.*

Доказательство. Поскольку T/L совпадает со своим коммутантом, то $T'L / L = T / L$, откуда получаем $T'L = T$. Поэтому нам остается лишь установить, что $T' \cap L = 1$. Если p не делит $|T / L|$, то из того, что $L \subseteq \mathrm{Z}(T)$, заключаем, что T p-нильпотентна, и лемма очевидна. Предположим, что p делит $|T / L|$, и пусть P — силовская p-подгруппа из T, а N — нормализатор подгруппы P в группе T. По лемме 5.10

$$P = [P, N] \times (P \cap \mathrm{Z}(N)).$$

Эта факторизация позволяет представить N в следующем виде:

$$N = (P \cap \mathrm{Z}(N)) \times ([P, N]\,Q),$$

где Q— дополнение к P в N. Учитывая это равенство и теорему Грюна (М. Холл [1], теорема 14.4.5), получаем, что

$$|T / \mathrm{O}^{p}(T)| \geqslant |P \cap \mathrm{Z}(N)| \geqslant |L|.$$

Следовательно, $|T : T'| \geqslant |L|$. Отсюда и из $T = T'L$ выводим, что $T' \cap L = 1$, и лемма доказана.

О формации $\mathfrak{H}$ из теоремы 5.8 трудно что-либо сказать без дополнительных ограничений на $\mathfrak{X}$ и f. В следующей теореме в качестве $\mathfrak{X}$ выступает класс групп с циклической силовской p-подгруппой.

Теорема 5.9 (Шеметков [4]). *Пусть p — фиксированное простое число, f — внутренняя групповая функция. Если каждый f-эксцентральный главный pd-фактор группы G является неабелевой группой с циклической силовской p-подгруппой, то $\mu_f(G^f, G)$ не делится на p.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна. Выберем тогда из всех групп, для которых теорема не выполняется, группу G, имеющую наименьший порядок. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. По лемме 1.2 $(G / L)^f = G^f L / L$. Так как для G / L теорема верна, то p не делит

$$\mu_f(G^f L / L, \ G / L) = \mu_f(G^f / G^f \cap L, \ G).$$

Отсюда следует, что $L \subseteq G^f$ и на участке между G^f и L главные pd-факторы группы G f-эксцентральны. Ясно, что L — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G, причем L является pd-подгруппой и f-центральна в G. Так как f — внутренняя групповая функция, то из последнего следует, что $G / C_G(L) \in f(L) \subseteq \langle f \rangle$. Но тогда $C_G(L) \supseteq G^f$ и, следовательно, L содержится в центре G^f и является p-группой. Так как G не принадлежит $\langle f \rangle$, то $L \neq G^f$. Пусть T / L — минимальная нормальная подгруппа группы G / L, содержащаяся в $G^f L / L$. Из единственности L и того, что $Z(G^f) \supseteq L$, заключаем, что p делит $|T / L|$. Так как T / L f-эксцентральна в G, то по условию T / L неабелева, обладает циклической силовской p-подгруппой P / L и, следовательно, является простой неабелевой группой. Если $P / L = \langle xL \rangle$, $x \in G$, то $P = \langle x \rangle L$, и так как $L \subseteq Z(T)$, мы получаем, что P абелева. Теперь мы можем применить лемму 5.11, согласно которой $T = L \times T'$. Так как $T' \lhd G$, то мы приходим к существованию двух различных минимальных нормальных подгрупп группы G. Получили противоречие. Теорема доказана.

Теорема 5.10 (Шеметков [4]). *Пусть каждый главный фактор группы G обладает циклической силовской p-подгруппой. Тогда p-сверхразрешимый корадикал группы G обладает абелевой силовской p-подгруппой и не имеет композиционных факторов порядка p.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех p-сверхразрешимых групп. Согласно § 4, п. 9 $\mathfrak{F}$ имеет внутренний локальный экран f такой, что $f(q) = \mathfrak{F}$ для любого простого $q \neq p$ и $f(p)$ есть формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Пусть группа G удовлетворяет условию теоремы и R — ее p-сверхразрешимый корадикал. Каждый главный pd-фактор группы G имеет, по условию, циклическую силовскую p-подгруппу и поэтому является простой группой. Поэтому если R имеет композиционный фактор порядка p, то R имеет и G-главный фактор порядка p, являющийся f-центральным в G. Но это, ввиду теоремы 5.9, невозможно. Тем самым установлено, что p-сверхразрешимый корадикал любой группы, удовлетворяющей условию теоремы, не имеет композиционных факторов порядка p.

Предположим, что теорема неверна и что G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Таким образом, $R = G^{\mathfrak{F}}$ не имеет композиционных факторов порядка p, но имеет неабелеву силовскую p-подгруппу P. Если $R \neq G$, то для R теорема верна, а поскольку $R^{\mathfrak{F}} = R$, то она будет верна и для G. Поэтому $R = G$. Предположим, что $X = O_{p'}(G) \neq 1$. Группа G / X удовлетворяет условию теоремы, причем по лемме 1.2 $(G / X)^{\mathfrak{F}} = G / X$. Для группы G / X теорема верна и, следовательно, $PX / X \simeq P$ абелева. Получаем противоречие. Таким образом, $O_{p'}(G) = 1$.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда L — неабелева простая pd-группа с циклической силовской p-подгруппой $P_1 = P \cap L$. По лемме Фраттини, $G = N_G(P_1) L$, откуда получаем

$$G / L \simeq N_G(P_1) / N_L(P_1). \qquad (1)$$

Ввиду $G^{\mathfrak{F}} = G$ подгруппа $N_G(P_1)$ не может быть p-сверхразрешимой группой. Кроме того, $N_G(P_1) \neq G$, так как G не имеет композиционных факторов порядка p. Поскольку каждый главный фактор группы $N_G(P_1)$ изоморфен подгруппе некоторого главного фактора группы G, то $N_G(P_1)$ удовлетворяет условию теоремы. Пусть R_1 — p-сверхразрешимый корадикал группы $N_G(P_1)$. Тогда R_1 имеет абелеву силовскую p-подгруппу, не имеет композиционных факторов порядка p и является pd-группой. Так как G / L совпадает со своим p-сверхразрешимым корадикалом, то из (1) и леммы 1.2 вытекает равенство $N_G(P_1) = R_1 N_L(P_1)$. Таким образом, мы приходим к равенству

$$G = \mathrm{N}_G(P_1)\, L = R_1 L. \tag{2}$$

Так как R_1 не имеет композиционных факторов порядка p, а подгруппа $\mathrm{N}_L(P_1)$ p-разрешима и нормальна в $\mathrm{N}_G(P_1)$, то $R_1 \cap N_L(P_1)$ является p'-группой. Ввиду равенства

$$R_1 \cap \mathrm{N}_L(P_1) = R_1 \cap L$$

мы приходим к следующему утверждению:

$$p \notin \pi(R_1 \cap L). \tag{3}$$

Так как $P \cap L = P_1 \lhd P$, то $P \subseteq \mathrm{N}_G(P_1)$. Так как $R_1 \lhd \mathrm{N}_G(P_1)$, то $R_1 \cap P = P_2 \lhd P$, причем P_2 является силовской p-подгруппой в R_1. Ввиду (3) $P_1P_2 = P_1 \times P_2$. Отсюда и из равенства (2) получаем, что P_1P_2 есть силовская p-подгруппа группы G, т. е. $P = P_1 \times P_2$. Подгруппа P_1 циклическая, а P_2 абелева, так как является силовской p-подгруппой из R_1. Следовательно, P абелева, и теорема доказана.

Ввиду следствия 4.1.4, p-длина любой p-сверхразрешимой группы не больше 1. Отсюда и из теоремы 5.10 немедленно получаем

Следствие 5.10.1. *Пусть каждый главный фактор группы G имеет циклическую силовскую p-подгруппу. Тогда $l_p(G) \leqslant 1$.*

Лемма 5.12. *Пусть G равна $O^{p'}(G)$, причем группа G имеет абелеву силовскую p-подгруппу P. Тогда каждый главный неабелев pd-фактор группы G является простой группой.*

Доказательство. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, причем $G \neq 1$. Поскольку для G/N теорема верна по индукции, то нам надо рассмотреть случай, когда N — неабелева pd-группа, и доказать, что N проста. Предположим, что N непроста. Тогда N единственным образом представима в виде прямого произведения изоморфных неабелевых простых групп:

$$N = \mathop{\times}_{i \in I} N_i, \quad |I| > 1.$$

Внутренние автоморфизмы группы G лишь переставляют множители этого разложения. Пусть

$$K = \{x \in G \mid N_i^x = N_i, \quad \forall i \in I\}.$$

Так как $K \lhd G$ и G является p'-корадикалом группы G, то P не содержится в K. Рассматривая элемент $z(P \cap K)$ порядка p из $P / P \cap K$ как подстановку множества $\{N_i \mid i \in I\}$, мы видим, что $z(P \cap K)$ имеет цикл длины p. Другими словами, существуют такие $N_1, N_2, \ldots, N_p$, что

$$N_p^z = N_1, \quad N_i^z = N_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, p-1.$$

Подгруппа $P \cap N_1$ является силовской в N_1, а так как $z \in P$ и P абелева, то $(P \cap N_1)^z = P \cap N_1$ есть силовская подгруппа из N_2. Но это противоречит тому, что $N_1 \cap N_2 = 1$. Лемма доказана.

Теорема 5.11 (Хупперт [3]). *Пусть p-разрешимый корадикал R группы G имеет абелеву силовскую p-подгруппу P. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *R не имеет композиционных факторов порядка p;*
2) *$P = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_m$, где каждая P_i изоморфна силовской p-подгруппе некоторого композиционного фактора группы R.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение. Пусть $R \neq 1$ и L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в R. Для G / L теорема верна по индукции. Поэтому считаем, что L — p-группа. Так как $R \neq 1$, то $L \neq P$. Тогда $C_R(L)$ нормальна в G и содержит P. Значит, $G / C_R(L)$ p-разрешима, а потому $C_R(L) = R$. Пусть T / L — минимальная нормальная подгруппа группы G / L, содержащаяся в R / L. По лемме 5.11 $T = L \times T_1$, где $T_1 \lhd G$. Так как для G / L теорема верна и $T_1 \simeq T / L$, то T_1 является либо p'-группой, либо неабелевой pd-группой. По индукции R / T_1, а значит, и R не имеет композиционных факторов порядка p.

Докажем теперь второе утверждение. Заметим, что по лемме 5.12 каждый главный pd-фактор группы R является простой группой. Не ограничивая общности, считаем, что $R = G$, $O_{p'}(G) = 1$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Пусть $P_1 = P \cap L$, R_1 — p-разрешимый корадикал группы $N_G(P_1)$. Так как $P \subseteq N_G(P_1)$, то $P \cap R_1$ — силовская p-подгруппа из R_1. Так же как и при доказательстве теоремы 5.10, получаем

$$G \,/\, L \simeq \mathrm{N}_G(P_1) \,/\, \mathrm{N}_L(P_1),$$
$$\mathrm{N}_G(P_1) = R_1\mathrm{N}_L(P_1),$$
$$G = R_1L,\ (p,\ |R_1 \cap L|) = 1.$$

Тогда $P = (P \cap R_1) \times P_2$, причем теорема для R_1 верна. Поскольку композиционные pd-факторы группы R_1 изоморфны композиционным pd-факторам группы $G \,/\, L = R_1 L \,/\, L$, то мы получаем, что теорема верна и для G. Теорема доказана.

Следствие 5.11.1. *Пусть группа G имеет абелеву силовскую p-подгруппу. Тогда $l_p(G) \leqslant 1$.*

Доказательство. Ввиду теоремы 5.11 достаточно рассмотреть случай, когда G p-разрешима. Но тогда каждый главный pd-фактор является p-группой и содержит в своем централизаторе все силовские p-подгруппы группы G. Применяя теорему 4.1, получаем, что $G \,/\, \mathrm{F}_p(G)$ является p'-группой. Поэтому $l_p(G) \leqslant 1$.

5. Порожденные формации. Рассматривавшееся в § 2 понятие формации, порожденной множеством групп, может быть обобщено следующим образом:

Определение 5.7. Пусть Θ — некоторое множество формаций, содержащее $\mathfrak{G}$. Формацию из Θ будем называть *Θ-формацией*. Пусть пересечение любого непустого множества Θ-формаций снова является Θ-формацией. Если $\mathfrak{X}$ — некоторое множество групп, то пересечение всех Θ-формаций, содержащих $\mathfrak{X}$, назовем *Θ-формацией, порожденной множеством групп* $\mathfrak{X}$, и обозначим через $\Theta\mathrm{form}\,\mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то $\Theta\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \Theta\mathrm{form}\,G$ — Θ-формация, порожденная группой G.

Ввиду лемм 3.4 и 3.7 в качестве Θ можно взять класс всех локальных, либо всех композиционных формаций. Если Θ — класс всех локальных формаций, то $\Theta\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{l\,form}\,\mathfrak{X}$ будем называть *локальной формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$. Если Θ — класс всех композиционных формаций, то $\Theta\,\mathrm{form}\,\mathfrak{X} = \mathrm{c\,form}\,\mathfrak{X}$ будем называть *композиционной формацией, порожденной* $\mathfrak{X}$.

Естественно поставить вопрос о числе Θ-подформаций из $\Theta\mathrm{form}\,G$ (Θ-подформация — это подформация, являющаяся Θ-формацией). Мы покажем, что для локальных формаций этот вопрос прямо зависит от решения проблемы 2.

Следующая лемма доказана Н. Т. Воробьевым.

Лемма 5.13. *Пусть f_1 и f_2 — максимальные внутренние локальные экраны соответственно формаций $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$. Тогда $\mathfrak{F}_1$ является подформацией $\mathfrak{F}_2$ в том и только в том случае, когда $f_1 \leqslant f_2$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$ и $G \in f_1(p)$, p простое. Рассмотрим регулярное сплетение $\Gamma = PrG$, где $|P| = p$. По теореме 3.3 $\Gamma \in f_1(p)$. Так как f_1 — внутренний экран и $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$, то $\Gamma \in \mathfrak{F}_2$. Так как $O_{p'}(\Gamma) = 1$, то $F_p(\Gamma) = O_p(\Gamma)$. По лемме 4.5 $\Gamma/O_p(\Gamma) \in f_2(p)$, а так как $f_2(p) = \mathfrak{N}_p f_2(p)$, то $\Gamma \in f_2(p)$, а значит, и группа G принадлежит $f_2(p)$. Мы показали, что $f_1(p) \subseteq f_2(p)$.

Обратно, если $f_1 \leqslant f_2$, то легко видеть, что $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Лемма доказана.

Теорема 5.12. *Если проблема 2 решается положительно, то для любой группы G формация* $\mathrm{l\,form}\, G$ *содержит лишь конечное число локальных подформаций.*

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(G)$. Построим локальный экран f со следующими свойствами:

1) $f(p) = \mathrm{form}\, G/F_p(G)$ для любого $p \in \pi$;

2) $f(q) = \varnothing$ для любого $q \in \pi'$.

Пусть $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$. Так как

$$G/F_p(G) \in \mathrm{form}\, G/F_p(G)$$

для любого $p \in \pi$, то по лемме 4.5 группа G принадлежит $\mathfrak{F}$. Предположим, что для любого $p \in \pi$ формация $f(p)$ содержит лишь конечное число подформаций. Тогда, ввиду леммы 5.13, нетрудно заметить, что существует лишь конечное число локальных подформаций формации $\mathfrak{F}$. Так как $\mathrm{l\,form}\, G \subseteq \mathfrak{F}$, то тем самым теорема доказана.

Проблема 10. Доказать, что для любой группы G формация $\mathrm{c\,form}\; G$ содержит лишь конечное число композиционных подформаций.

§ 6. Комментарии

1. Понятия формации и локальной формации ввел Гашюц [3]. Виландт [9] выступил с идеей использовать при изучении группы не формации, а системы секций данной группы, удовлетворяющие определенным

требованиям. Эта идея реализовалась в статье Прентис [1], а наиболее последовательно — в работах Райта [3], [4].

2. Радикальные подформации из $\mathfrak{N}^2$ изучали Хоукс [6], Брайс и Косси [1], [2].

3. Некоторые предварительные результаты по проблеме 2 можно найти у Брайанта, Брайса и Хартли [1].

4. Понятие экрана, а также классификация экранов предложены Шеметковым [13].

5. Локальность класса всех p-сверхразрешимых групп является следствием более общей теоремы Хупперта [4] о локальности одной формации p-разрешимых групп.

6. Лемма 4.10 является следствием более общей теоремы Кегеля [3] о p-замкнутости группы G, представимой в виде произведения p-замкнутых подгрупп $G = AB = BC = CA$. Такие многократные факторизации изучала также Пеннингтон [2]. Развитие теоремы 4.14 можно найти в статье Крамера [3].

7. Вопросам, отмеченным в п. 12 § 4, посвящены также работы Р. Шмидта [3], Л. Каппе и В. Каппе [1], Брайса и Косси [1].

8. Понятие p-длины для p-разрешимых групп введено Ф. Холлом и Г. Хигменом [1], а в общем случае — Шеметковым [4]. В работе Харламовой [2] дана оценка $\mathfrak{F}$-длины конечной группы, где $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}$. Макан [5] исследовал в одном специальном случае зависимость $\mathfrak{F}$-длины разрешимой группы от числа классов сопряженных максимальных подгрупп.

ГЛАВА II

ФОРМАЦИОННАЯ ЦЕНТРАЛЬНОСТЬ, НОРМАЛЬНОСТЬ И СТАБИЛЬНОСТЬ

§ 7. Субнормальные подгруппы и f-цепи

1. Решетка субнормальных подгрупп. В этом пункте мы докажем теорему Виландта о том, что множество всех субнормальных подгрупп группы G образует подрешетку решетки $\mathrm{L}(G)$. Изложение будем вести, следуя Виландту [10].

Определение 7.1. Пусть H — подгруппа группы G. Цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = H, \quad t \geqslant 0,$$

в которой $H_i \lhd H_{i-1}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$, называется *субнормальной* $(G - H)$-*цепью*, а число t — *длиной* этой цепи. Наименьшее t, при котором существует хотя бы одна субнормальная $(G - H)$-цепь длины t, называется *дефектом* подгруппы H в G и обозначается через $|G - H|$.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 7.1. *Если* $K \lhd\lhd H \lhd\lhd G$, *то* $K \lhd\lhd G$ *и* $|G - K| \leqslant |G - H| + |H - K|$.

Теорема 7.1. *Если подгруппа H субнормальна, но не нормальна в G, то существует такой элемент $x \in G$, что*

$$H^x \neq H, \quad H \subseteq \mathrm{N}_G(H^x), \quad H^x \subseteq \mathrm{N}_G(H).$$

Доказательство. Пусть $t = |G - H|$. Рассмотрим субнормальную $(G - H)$-цепь длины t:

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_t = H.$$

Так как H не нормальна в G, то $t \geqslant 2$. Очевидно, H не нормальна в H_{t-2}, поэтому существует элемент $x \in H_{t-2}$

такой, что $H^x \neq H$. Теперь имеем

$$H^x = H_t^x \lhd H_{t-1}^x = H_{t-1}.$$

Так как $H \lhd H_{t-1}$, то отсюда следует $H^x \subseteq \mathrm{N}_G(H)$. Кроме того, $H^x \lhd H_{t-1}$ и $H \subseteq H_{t-1}$, откуда получаем $H \subseteq \mathrm{N}_G(H^x)$. ~~Теорема~~ доказана.

Определение 7.2. Пусть H — субнормальная подгруппа дефекта t в G. Субнормальная $(G - H)$-цепь

$$G = C_0 \supset C_1 \supset \ldots \supset C_t = H$$

называется *канонической*, если для любой субнормальной $(G - H)$-цепи

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = H$$

имеет место $C_i \subseteq G_i$, $i = 0, 1, \ldots, t$.

Теорема 7.2. *Если $H \lhd \lhd G$, то существует единственная каноническая субнормальная $(G - H)$-цепь.*

Доказательство. Пусть $t = |G - H|$ и

$$G = G_0^\lambda \supset G_1^\lambda \supset \ldots \supset G_t^\lambda = H, \qquad \lambda \in \Lambda,$$

— все субнормальные $(G - H)$-цепи длины t. Положим $C_i = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_i^\lambda$. Так как $G_{i-1}^\lambda \subseteq N_G(G_i^\lambda)$, то для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ мы имеем

$$C_{i-1} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_{i-1}^\lambda \subseteq \mathrm{N}_G\Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_i^\lambda\Big) = \mathrm{N}_G(C_i).$$

Таким образом, цепь

$$G = C_0 \supseteq C_1 \supseteq \ldots \supseteq C_t = H$$

является субнормальной $(G - H)$-цепью длины t и, следовательно, не имеет повторений. Так как $C_j \subseteq G_j^\lambda$ при любых j и λ, то теорема доказана.

Теорема 7.3. *Если $H \lhd \lhd G$ и $K \subseteq G$, то $H \cap K \lhd \lhd K$ и $|K - H \cap K| \leqslant |G - H|$.*

Доказательство. Пусть $t = |G - H|$ и цепь

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = H$$

является субнормальной $(G - H)$-цепью. Положив $K_i = K \cap G_i$, получаем субнормальную $(K - H \cap K)$-цепь

$$K = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_t = H \cap K,$$

что и доказывает теорему.

Следствие 7.3.1. *Если* $H \lhd \lhd G$ *и* $H \subseteq T$, *то* $H \lhd \lhd T$.

Теорема 7.4. *Пусть* $H \lhd \lhd G$, $K \lhd \lhd G$. *Тогда* $H \cap K \lhd \lhd G$ *и* $|G - H \cap K| \leqslant \operatorname{Max}\{|G - H|, |G - K|\}$.

Доказательство. Пусть t — наибольший из дефектов подгрупп H и K в группе G. Очевидно, существуют (возможно, с повторениями) цепи

$$G = H_0 \rhd H_1 \rhd \ldots \rhd H_t = H,$$
$$G = K_0 \rhd K_1 \rhd \ldots \rhd K_t = K.$$

Положим $G_i = H_i \cap K_i$, $i = 0, 1, \ldots, t$. Из $H_j \lhd H_{j-1}$, $K_j \lhd K_{j-1}$ следует, что $G_j = H_j \cap K_j$ нормальна в $G_{j-1} = H_{j-1} \cap K_{j-1}$. Следовательно, цепь

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = H \cap K$$

является субнормальной $(G - H \cap K)$-цепью, что и доказывает теорему.

Лемма 7.2. *Если* $H \lhd \lhd G$, $N \lhd G$, *то* $HN \lhd \lhd G$ *и* $|G - HN| \leqslant |G - H|$.

Доказательство. Из существования субнормальной $(G - H)$-цепи $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = H$ следует существование субнормальной $(G - HN)$-цепи

$$G = H_0N \supseteq H_1N \supseteq \ldots \supseteq H_tN = HN,$$

что и требуется.

Лемма 7.3. *Если подгруппы* H *и* K *субнормальны в* G *и* $K \subseteq N_G(H)$, *то* $HK \lhd \lhd G$.

Доказательство. Если $H \lhd G$, то результат следует по лемме 7.2. Предположим, что $t = |G - H| > 1$, и будем считать, что теорема верна для субнормальных подгрупп с дефектом $< t$. Таким образом, если X и Y субнормальны в G, причем $Y \subseteq N_G(X)$ и $|G - X| < t$, то по индуктивному предположению $XY \lhd \lhd G$.

Пусть $G = C_0 \rhd C_1 \rhd \ldots \rhd C_t = H$ — каноническая субнормальная $(G - H)$-цепь. Так как K нормализует подгруппу H, то для любого $x \in K$ цепь

$$G = G^x = C_0^x \rhd C_1^x \rhd \ldots \rhd C_t^x = H$$

будет субнормальной $(G - H)$-цепью. По свойству канонической субнормальной $(G - H)$-цепи $C_i \subseteq C_i^x$, а значит, $C_i = C_i^x$ для любого $i = 0, 1, \ldots, t$. Следовательно,

K содержится в $N_G(C_i)$ для любого i. Так как $K \subseteq \subseteq N_G(C_{t-1})$ и $|G - C_{t-1}| = t - 1 < t$, то по индукции $C_{t-1}K \lhd \lhd G$. По следствию 7.3.1 $K \lhd \lhd C_{t-1}K$. Так как $H \lhd C_{t-1}$ и $K \subseteq N_G(H)$, то $H \lhd C_{t-1}K$. Таким образом, $K \lhd \lhd C_{t-1}K$, $H \lhd C_{t-1}K$, а значит, по лемме 7.2 подгруппа HK субнормальна в $C_{t-1}K$. Так как к тому же $C_{t-1}K \lhd \lhd G$, то мы получаем $HK \lhd \lhd G$. Лемма доказана.

Теорема 7.5. *Если $H \lhd \lhd G$ и $K \lhd \lhd G$, то $H \vee K \lhd \lhd G$.*

Доказательство. Положим $R = H \vee K$. Среди субнормальных подгрупп группы G, содержащихся в R, выберем подгруппу M, имеющую наибольший порядок. По следствию 7.3.1 $M \lhd \lhd R$. Докажем, что $M \lhd R$. Предположим, что M не нормальна в R. Тогда по теореме 7.1 найдется такой элемент $x \in R$, что $M \neq M^x$, $M \subseteq N_G(M^x)$, $M^x \subseteq N_G(M)$. Так как $M \lhd \lhd R$ и $x \in \in R$, то $M^x \lhd \lhd R$. Получается следующая ситуация: $M \lhd \lhd G$, $M^x \lhd \lhd G$, $M^x \subseteq N_G(M)$. По лемме 7.3 $MM^x \lhd \lhd G$. Ввиду выбора M отсюда следует $M = MM^x$, что противоречит $M \neq M^x$.

Итак, $M \lhd R$, а значит, H и K нормализуют подгруппу M. По лемме 7.3 MH и MK субнормальны в G. Так как $MH \subseteq R$ и $MK \subseteq R$, то ввиду выбора M получаем $MH = M = MK$. Следовательно, $R = \langle H, K \rangle \subseteq M \subseteq \subseteq R$, откуда вытекает, что $R = M \lhd \lhd G$. Теорема доказана.

Объединим теоремы 7.4 и 7.5 в один результат.

Теорема 7.6 (Виландт). *Множество всех субнормальных подгрупп группы G образует подрешетку решетки* $L(G)$.

Отметим одно часто используемое приложение теорем 7.1 и 7.6.

Теорема 7.7. *Пусть $\mathfrak{X}$ — некоторое непустое множество субнормальных подгрупп группы G, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *если $X \in \mathfrak{X}$ и $x \in G$, то $X^x \in \mathfrak{X}$;*

2) *если $X \in \mathfrak{X}$, $Y \in \mathfrak{X}$, $X \subseteq N_G(Y)$, $Y \subseteq N_G(X)$, то $XY \in \mathfrak{X}$.*

Тогда $H^G \in \mathfrak{X}$ для любой подгруппы $H \in \mathfrak{X}$.

Доказательство. Возьмем произвольную подгруппу H из $\mathfrak{X}$. Если H не нормальна в G, то по теореме 7.1 найдется такой элемент $x \in G$, что $H \neq H^x$, $H \subseteq \mathrm{N}_G(H^x)$, $H^x \subseteq \mathrm{N}_G(H)$. По условиям 1) и 2) $H^x \in \mathfrak{X}$, $M = HH^x \in \mathfrak{X}$. Если M не нормальна в G, то найдется $y \in G$ такой, что $M \neq M^y$, $M \subseteq \mathrm{N}_G(M^y)$, $M^y \subseteq \mathrm{N}_G(M)$. Тогда $M^y \in \mathfrak{X}$ и $R = MM^y \in \mathfrak{X}$. Если R не нормальна, то описанную процедуру применяем к R. Так как G конечна, то этот процесс завершится построением нормальной подгруппы S, представимой в виде $S = HH^{x_1} \ldots H^{x_n}$, где $x = x_1, \ldots, x_n$ — некоторые элементы из G. Очевидно, $S = H^G$, и теорема доказана.

Следствие 7.7.1. *Если $\mathfrak{H}$ — непустой радикальный класс, то $G_{\mathfrak{H}}$ содержит все субнормальные $\mathfrak{H}$-подгруппы группы G.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — множество всех субнормальных $\mathfrak{H}$-подгрупп из G. Ввиду теоремы 7.6 легко заметить, что $\mathfrak{X}$ удовлетворяет условиям 1) и 2) теоремы 7.7.

Следствие 7.7.2. *Для любой субнормальной подгруппы H группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *если H — π-группа, то $H \subseteq \mathrm{O}_\pi(G)$;*
2) *если H нильпотентна, то $H \subseteq \mathrm{F}(G)$;*
3) *если H p-нильпотентна, то $H \subseteq \mathrm{F}_p(G)$;*
4) *если H разрешима, то $H \subseteq G_{\mathfrak{S}}$.*

2. Характеризация разрешимого корадикала. Следуя Виландту [10], введем следующее определение.

Определение 7.3. Группа G называется *$\vee$-неприводимой*, если из $G = H \vee K$, $H \lhd\lhd G$, $K \lhd\lhd G$ всегда следует, что либо $H = G$, либо $K = G$. Если группа S $\vee$-неприводима и является подгруппой группы G, то S называется *$\vee$-неприводимой подгруппой группы G.*

По определению, единичная группа $\vee$-неприводима.

Лемма 7.4. *Пусть M — максимальная нормальная подгруппа из $G \neq 1$ и $\mathfrak{X} = \{H \lhd\lhd G \mid H \not\subseteq M\}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $H \in \mathfrak{X}$, то $HM = G$;*
2) *подгруппа $H \in \mathfrak{X}$ минимальна в $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда H $\vee$-неприводима.*

Доказательство. Заметим, что $G \in \mathfrak{X}$, поэтому $\mathfrak{X}$ не пусто. Пусть $H \in \mathfrak{X}$. Так как H не входит в M, то $M \subset HM$, причем $HM \lhd\lhd G$. Если $HM \neq G$, то HM содержится в собственной нормальной подгруппе группы G, что противоречит тому, что G/M проста. Значит, $G = MH$, и утверждение 1) верно.

Докажем 2). Пусть $H \in \mathfrak{X}$ и H минимальна в $\mathfrak{X}$. Последнее означает, что если $H_1 \lhd\lhd G$ и $H_1 \subset H$, то $H_1 \subseteq M$. Пусть $H = B \vee C$, $B \lhd\lhd H$, $C \lhd\lhd H$. Так как $H \lhd\lhd G$, то B и C субнормальны в G. Предположим, что $B \subset H$, $C \subset H$. Тогда ввиду минимальности H имеем $B \subseteq M$, $C \subseteq M$, а значит, $B \vee C = H \subseteq M$, что невозможно. Тем самым доказано, что H $\vee$-неприводима.

Обратно, пусть $H \in \mathfrak{X}$ и H $\vee$-неприводима. Предположим, что H не минимальна в $\mathfrak{X}$. Это значит, что существует такая $B \in \mathfrak{X}$, что $B \subset H$. Положим $C = H \cap M$. Тогда

$$G/M = HM/M \simeq H/H \cap M = H/C$$

является простой группой. Следовательно, C является максимальной нормальной подгруппой в H. Так как B не входит в M, то B не входит в C. Согласно утверждению 1) имеем $H = BC$, так как $B \lhd\lhd H$. Но это противоречит тому, что H $\vee$-неприводима. Значит, утверждение 2) верно. Лемма доказана.

Лемма 7.5. *В дополнение к условию леммы* 7.4 *предположим, что G/M неабелева. Тогда $\mathfrak{X}$ является решеткой, и если D — пересечение всех подгрупп, входящих в $\mathfrak{X}$, то D $\vee$-неприводима, $D = D'$ и $D \lhd G$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется. Если $X \in \mathfrak{X}$, $Y \in \mathfrak{X}$, то по теореме 7.6 подгруппа $X \vee Y$ субнормальна в G, причем ясно, что $X \vee Y$ не входит в M. Таким образом, $X \vee Y \in \mathfrak{X}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}$.

Предположим, что $X \cap Y \in \mathfrak{X}$ для любых $X, Y \in \mathfrak{X}$. Пусть D — пересечение всех подгрупп из $\mathfrak{X}$. Тогда D минимальна в $\mathfrak{X}$ и по лемме 7.4 является $\vee$-неприводимой, причем $DM = G$. Нетрудно заметить, что $X^x \in \mathfrak{X}$ для любых $X \in \mathfrak{X}$, $x \in G$, а потому D нормальна в G. Если $D' \subset D$, то, учитывая, что $D' \lhd\lhd G$ и D минимальна в $\mathfrak{X}$, получаем $D' \subseteq M$. Отсюда и из равенства $G = DM$ заключаем, что группа $G/M \simeq D/D \cap M$ абелева. Получили противоречие.

Итак, найдутся такие $X \in \mathfrak{X}$ и $Y \in \mathfrak{X}$, что $X \cap Y$ не содержится в $\mathfrak{X}$, т. е. $X \cap Y \subseteq M$. Покажем, что любая пара X, Y таких подгрупп порождает G. Пусть это не так. Рассмотрим тогда группу $G_1 = X \bigvee Y$ и ее нормальную подгруппу $M_1 = G_1 \bigcap M$. Так как по лемме 7.4 имеет место равенство $G = XM = YM$, то $G = G_1M$, причем

$$G/M = G_1M \,/\, M \simeq G_1 \,/\, M_1$$

является неабелевой простой группой. Значит, M_1 является максимальной нормальной подгруппой в G_1. Кроме того, X и Y не содержатся в M_1 и субнормальны в G_1 (по теореме 7.6 и следствию 7.3.1). Так как $|G_1| < |G|$, то для G_1 теорема верна. Поэтому $X \bigcap Y$ не содержится в $M_1 = G_1 \bigcap M$. Это противоречит тому, что $X \bigcap Y \subseteq G_1$ и $X \bigcap Y \subseteq M$. Итак, в дальнейшем будем иметь в виду, что из $X \in \mathfrak{X}$, $Y \in \mathfrak{X}$, $X \bigcap Y \subseteq M$ всегда следует $X \bigvee Y = G$.

Среди пар подгрупп из $\mathfrak{X}$, пересечение которых содержится в M, можно выбрать пару с наименьшей суммой индексов. Таким образом, существуют подгруппы $H \in \mathfrak{X}$ и $K \in \mathfrak{X}$, удовлетворяющие следующим требованиям: 1) $H \bigcap K \subseteq M$; 2) если $H^* \in \mathfrak{X}$, $K^* \in \mathfrak{X}$ и $|G : H^*| + |G : K^*| < |G : H| + |G : K|$, то $H \bigcap K \in \mathfrak{X}$. Имеем два случая: либо подгруппы H и K нормальны в G, либо хотя бы одна из них не нормальна в G. Эти случаи мы и рассмотрим.

Пусть $H \lhd G$, $K \lhd G$. Тогда $[H, K] \subseteq H \bigcap K \subseteq M$. По лемме 7.4 $G = HM = KM$. Поэтому для любых $x, y \in G$ найдутся такие $a \in H$, $b \in K$, что

$$xM = aM,\ yM = bM,\ [x, y]M = [a, b]M.$$

Так как $[H, K] \subseteq M$, то $[a, b]M = M$. Следовательно, $[x, y]M = M$ для любых $x, y \in G$. А это означает, что G/M абелева. Получили противоречие.

Предположим, что $N_G(H) \neq G$, $N_G(K) \neq G$. Так как H и K субнормальны в G, то $\overline{H} = H^G \subset G$ и $\overline{K} = K^G \subset G$. Ясно, что $\overline{H} \in \mathfrak{X}$, $\overline{K} \in \mathfrak{X}$. Так как

$$|G : \overline{H}| + |G : \overline{K}| < |G : H| + |G : K|,$$
$$|G : \overline{H}| + |G : K| < |G : H| + |G : K|,$$
$$|G : H| + |G : \overline{K}| < |G : H| + |G : K|,$$

то $\bar{H} \cap \bar{K} \in \mathfrak{X}$, $H_1 = \bar{K} \cap H \in \mathfrak{X}$, $K_1 = \bar{H} \cap K \in \mathfrak{X}$. Так как

$$H_1 \cap K_1 = \bar{K} \cap H \cap \bar{H} \cap K = K \cap H,$$

то $H_1 \cap K_1 \subseteq M$. По доказанному, $H_1 \vee K_1 = G$. Так как $H_1 \vee K_1 \subseteq \bar{H} \cap \bar{K} = G$, то мы получаем противоречие.

Осталось рассмотреть последнюю возможность, когда одна из подгрупп H и K нормальна в G, а другая не нормальна в G. Пусть для определенности $K \lhd G$. По доказанному, $HK = H \vee K = G$. Положим $L = K \cap M$. Если L не входит в H, то $HL \cap K \in \mathfrak{X}$, что следует из того, что $HL \in \mathfrak{X}$ и

$$|G : HL| + |G : K| < |G : H| + |G : K|.$$

Так как $HL \cap K = L(H \cap K)$ и $H \cap K \subseteq M$, то $HL \cap K \subseteq M$, что противоречит $HL \cap K \in \mathfrak{X}$. Полученное противоречие показывает, что $L \subseteq H$. Поскольку $\bar{H} = H^G \subset G$ и $\bar{H} \in \mathfrak{X}$, то пара $\bar{H}$, K имеет меньшую сумму индексов, чем пара H, K. Поэтому $\bar{H} \cap K \in \mathfrak{X}$, а значит, $(\bar{H} \cap K) M = G$. Так как $L \subseteq H$, то ясно, что $\bar{H} \cap K \cap M = L$. Если $L = 1$, то $G/M = KM/M \simeq \simeq K$ — простая неабелева группа, и так как $(\bar{H} \cap \cap K) M = G$, то $K \subseteq \bar{H}$. Но это невозможно, так как $KH = G$ и $\bar{H} \subset G$. Следовательно, $L \neq 1$. Рассмотрим группу G/L и ее подгруппы M/L, H/L, K/L. Для группы G/L теорема верна. Так как H/L и K/L субнормальны в G/L, причем

$$G/L/M/L \simeq G/M$$

есть простая неабелева группа, то

$$(H/L) \cap (K/L) = (H \cap K)/L$$

не содержится в M/L. Но тогда $H \cap K$ не содержится в M. Снова получили противоречие.

Лемма доказана.

Лемма 7.6. *Пусть* $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_m = G$ — *композиционный ряд группы* $G \neq 1$. *Пусть* $I = \{i \mid G_i / G_{i-1}$ *неабелева*$\}$, $J = \{D \mid D = D' \lhd\lhd G$, D $\vee$-*неприводима*, $D \neq 1\}$. *Тогда существует такое отображение* ρ *множества* J *на множество* I, *что каждая подгруппа* $D \in J$ *является нормальной подгруппой в* $G_{\rho(D)}$, *но не содержится в* $G_{\rho(D)-1}$.

Доказательство. Пусть $i \in I$. Тогда G_{i-1} является максимальной нормальной подгруппой в G_i, причем G_i / G_{i-1} неабелева. Обозначим через D_i пересечение всех таких подгрупп из G_i, которые субнормальны в G_i и не содержатся в G_{i-1}. По лемме 7.5 D_i совпадает со своим коммутантом, нормальна в G_i и $\bigvee$-неприводима. Кроме того, $D_i \lhd \lhd G$. Поэтому $D_i \in J$. Ясно, что если $i, j \in I$, $i \neq j$, то $D_i \neq D_j$. Следовательно, $|I| \leqslant |J|$.

Возьмем теперь $D \in J$ и пусть $i = \rho(D)$ — наименьший номер, при котором $D \subseteq G_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Тогда D субнормальна в G_i и не входит в G_{i-1}. По лемме 7.4 $G_i = DG_{i-1}$. Тогда

$$G_i / G_{i-1} = DG_{i-1} / G_{i-1} \simeq D / D \cap G_{i-1}.$$

Так как $D \cap G_{i-1} \subset D$ и $D = D'$, то $D / D \cap G_{i-1}$ неабелева. Но тогда G_i / G_{i-1} неабелева и $i \in I$. Так как D $\bigvee$-неприводима, то по леммам 7.4 и 7.5 подгруппа D совпадает с пересечением всех таких подгрупп из G_i, которые субнормальны в G_i и не содержатся в G_{i-1}. Построенное отображение ρ и будет искомым. Лемма доказана.

Теорема 7.8 (Виландт [10]). *Для любой группы G справедливо следующее равенство*:

$$G^{\mathfrak{S}} = \langle D \mid D = D', \quad D \lhd \lhd G, \quad D \ \bigvee\text{-}\textit{неприводима}\rangle.$$

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{S}$, то результат очевиден. Пусть G неразрешима, $J = \{D \mid D = D',\ D \lhd \lhd G,\ D \neq 1,\ D \ \bigvee\text{-неприводима}\}$, Q — подгруппа, порожденная всеми подгруппами из J. Ясно, что $Q \lhd G$. Покажем, что G / Q разрешима. Возьмем композиционный ряд группы G, проходящий через Q:

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \ldots \lhd G_k = Q \lhd \ldots \lhd G_m = G.$$

Применяя лемму 7.6, мы видим, что G_i / G_{i-1} абелева при $i > k$. Значит, G / Q разрешима.

Пусть теперь $N \lhd G$ и G / N разрешима. Берем композиционный ряд группы G, проходящий через N:

$$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \ldots \lhd H_t = N \lhd \ldots \lhd H_m = G.$$

По лемме 7.6 каждой подгруппе $D \in J$ соответствует единственный номер i такой, что D входит в G_i, не входит в G_{i-1} и G_i / G_{i-1} неабелева. Поэтому из разрешимости G / N вытекает, что $i \leqslant t$. Таким образом, $Q \subseteq N$.

Теорема доказана.

Теорема 7.9 (Виландт [7]). *Если $H \lhd \lhd G$, то $H^{\mathfrak{S}}K = KH^{\mathfrak{S}}$ для любой $K \lhd \lhd G$.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и что G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Тогда в группе G существуют субнормальные подгруппы, разрешимые корадикалы которых не перестановочны с каждой субнормальной подгруппой из G. Выберем среди таких субнормальных подгрупп подгруппу H наименьшего порядка. Тогда $H^{\mathfrak{S}} \neq 1$ и существует такая $K \lhd \lhd G$, что $H^{\mathfrak{S}}K \neq KH^{\mathfrak{S}}$. Очевидно, $H^{\mathfrak{S}} \lhd \lhd G$. Если $H^{\mathfrak{S}} \neq H$, то для $H^{\mathfrak{S}}$ теорема верна, т. е. $(H^{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{S}}K = K(H^{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{S}}$, что невозможно, так как $(H^{\mathfrak{S}})^{\mathfrak{S}} = H^{\mathfrak{S}}$. Поэтому $H = H^{\mathfrak{S}}$.

Пусть $D_1, D_2, \ldots, D_k$ — все различные $\bigvee$-неприводимые, совпадающие со своим коммутантом неединичные субнормальные подгруппы группы H. Так как $H = H^{\mathfrak{S}}$, то по теореме 7.8 имеет место равенство

$$H = \langle D_1, D_2, \ldots, D_k \rangle.$$

Возможны два случая.

Первый случай: $D_i \subset H$ для любого $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда для D_i теорема верна. Ввиду $D_i' = D_i = D_i^{\mathfrak{S}}$ мы получаем, что для любого $i = 1, 2, \ldots, k$ подгруппа D_i перестановочна с каждой субнормальной подгруппой группы G. В частности, $D_iD_j = D_jD_i$, $D_iK = KD_i$. Таким образом, в этом случае $H = D_1D_2 \ldots D_k$, и легко видеть, что $HK = KH$. Получаем противоречие.

Второй случай: подгруппа H $\bigvee$-неприводима и $H = H'$. Поскольку H и K субнормальны в $H \bigvee K$, а для групп порядка $< |G|$ теорема верна, то $H \bigvee K = G$. Возьмем композиционный ряд группы G, проходящий через K:

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t = K \subset \ldots \subset G_m = G.$$

Очевидно, $t \leqslant m - 1$. Так как $G = H \bigvee K$ и $K \subseteq G_{m-1}$, то H не содержится в G_{m-1}. Применяя лемму 7.6, получаем, что H нормальна в $G_m = G$. Но тогда $HK = KH$, и теорема доказана.

Проблема 11. Пусть $\mathfrak{F}$ — такая локальная формация, что $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{S}$. Доказать, что $H^{\mathfrak{F}}K = KH^{\mathfrak{F}}$ для любых двух субнормальных подгрупп H и K группы G.

3. A-субнормальные подгруппы. Зафиксируем в этом пункте группу G и некоторую ее группу операторов A. Напомним, что члены A-композиционных рядов группы G называются ее A-субнормальными подгруппами.

Определение 7.4. Цепь подгрупп

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = H, \quad t \geqslant 0,$$

в которой для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ подгруппа H_i нормальна в H_{i-1} и A-допустима, назовем *A-субнормальной $(G - H)$-цепью длины t. A-композиционная $(G - H)$-цепь* — это A-субнормальная $(G - H)$-цепь наибольшей длины без повторений.

Лемма 7.7. *Подгруппа H группы G тогда и только тогда A-субнормальна в G, когда H одновременно субнормальна в G и A-допустима.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Предположим, что H субнормальна в G и A-допустима. Докажем, что H A-субнормальна. Если $H \lhd G$, то это так. Пусть H не нормальна в G. Возьмем субнормальную $(G - H)$-цепь

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = H$$

и положим $H_0 = G$, $H_i = H[H_{i-1}, H]$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Покажем, что H_i содержится в G_i и является A-допустимой нормальной подгруппой из H_{i-1}, $i \geqslant 1$. Пусть i — наименьший номер, для которого это утверждение не выполняется. Так как $H_{i-1} \subseteq G_{i-1}$ и $G_i \lhd G_{i-1}$, то

$$[H_{i-1}, H] \subseteq [G_{i-1}, G_i] \subseteq G_i.$$

Значит, $H_i \subseteq G_i$. Для любых $x \in H_{i-1}$, $h \in H$ имеем

$$x^{-1}hx = h[h, x] \in H[H_{i-1}, H] = H_i.$$

Кроме того, $[H_{i-1}, H]$ нормальна в H_{i-1} и A-допустима по лемме 2.5. Учитывая это, мы видим, что H_i нормальна в

H_{i-1} и A-допустима. Следовательно, цепь

$$G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_m = H$$

является A-субнормальной $(G - H)$-цепью. Лемма доказана.

Замечание 1. Так как подгруппа, порожденная A-допустимыми подгруппами, также A-допустима, то из леммы 7.7 и теоремы 7.6 вытекает, что множество всех A-субнормальных подгрупп группы G образует решетку.

Лемма 7.8. *A-цоколь группы G содержится в цоколе группы G.*

Доказательство. Пусть K — минимальная A-допустимая нормальная подгруппа из G. Возьмем минимальную нормальную подгруппу L группы G, содержащуюся в K. Для любого $a \in A$ подгруппа L^a входит в K и является минимальной нормальной подгруппой группы G. Теперь ясно, что $\langle L^a \mid a \in A \rangle$ нормальна в G и A-допустима, а значит, совпадает с K. Лемма доказана.

Теорема 7.10 (Виландт [5]). *Цоколь группы G содержится в нормализаторе любой субнормальной подгруппы группы G.*

Доказательство. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, $H \lhd \lhd G$. Докажем, что L содержится в $\mathrm{N}_G(H)$. Это так, если $H \lhd G$. Пусть H не нормальна в G. Тогда $H \subset G_1 \lhd G$, $G_1 \neq G$. Если L не входит в G_1, то $L \cap G_1 = 1$ (ввиду минимальности L). Но тогда L и G_1 поэлементно перестановочны и $L \subseteq \mathrm{N}_G(H)$. Пусть $L \subseteq G_1$. Тогда L содержится в G-цоколе группы G_1, который по лемме 7.8 входит в цоколь группы G_1. Так как $H \lhd \lhd G_1$ и теорема для G_1 верна по индукции, то $L \subseteq \mathrm{N}_{G_1}(H)$, и теорема доказана.

Лемма 7.9. *Пусть H — нильпотентная нормальная подгруппа группы G. Если $H \neq 1$ и $H \cap \Phi(G) = 1$, то H дополняема в G и равна прямому произведению некоторого числа минимальных нормальных подгрупп группы G.*

Доказательство. Так как $\Phi(H) \subseteq \Phi(G)$, то ввиду условия леммы $\Phi(H) = 1$, а значит, H абелева. Будем доказывать лемму индукцией по $|H|$. Пусть H/K — главный фактор группы G. Так как для K лемма верна, то найдется такая подгруппа R, что $KR = G$, $R \cap K = 1$. Тогда $H = K(H \cap R)$. Очевидно,

$$H \cap R \lhd G, \quad H = K \times (H \cap R),$$

причем имеет место G-изоморфизм $H / K \simeq H \cap R$. Поэтому $H \cap R$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, и лемма для H верна.

Определение 7.5. Определим подгруппу $\widetilde{\mathrm{F}}(G, A)$ группы G, имеющей группу операторов A, следующими двумя условиями:

1) $\widetilde{\mathrm{F}}(G, A) \supseteq \Phi(G)$;

2) $\widetilde{\mathrm{F}}(G, A) / \Phi(G)$ — A-цоколь группы $G / \Phi(G)$. Положим $\widetilde{\mathrm{F}}(G) = \widetilde{\mathrm{F}}(G, 1)$, т. е. $\widetilde{\mathrm{F}}(G) / \Phi(G)$ — цоколь группы $G / \Phi(G)$.

Так как формация $\mathfrak{N}$ локальна, то из следствия 4.2.1 и леммы 7.9 вытекает, что если $\widetilde{\mathrm{F}}(G)$ разрешима, то $\widetilde{\mathrm{F}}(G) = \mathrm{F}(G)$. На подгруппу $\widetilde{\mathrm{F}}(G)$ можно смотреть как на обобщение подгруппы Фиттинга, тем более, что она сохраняет основное свойство подгруппы Фиттинга разрешимой группы — содержать свой централизатор.

Теорема 7.11 (Шмид [2]). $C_G(\widetilde{\mathrm{F}}(G)) \subseteq \mathrm{F}(G)$.

Мы будем доказывать операторное обобщение этой теоремы.

Теорема 7.12 (Шеметков [14]). $C_G(\widetilde{\mathrm{F}}(G, A)) \subseteq \mathrm{F}(G)$.

Доказательство. Положим $H = \widetilde{\mathrm{F}}(G, A)$, $C = C_G(H)$, $F = \mathrm{F}(G)$. Если $\Phi(G) \neq 1$, то рассматриваем $G / \Phi(G)$, для которой теорема верна по индукции. Тогда

$$C\Phi(G) / \Phi(G) \subseteq F / \Phi(G) = \mathrm{F}(G / \Phi(G)),$$

откуда $C \subseteq F$. Рассмотрим теперь случай $\Phi(G) = 1$. Ввиду следствия 4.1.1 $F \subseteq C$. Если оператору $a \in A$ соответствует автоморфизм $\varphi(a) \in \operatorname{Aut} G$, то φ является гомоморфизмом A в $\operatorname{Aut} G$. Положим $A^* = A^{\varphi} \operatorname{In} G$. Ясно, что A-цоколь и A^*-цоколь группы G совпадают. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $A = A^*$.

Предположим, что $C \neq F$ и рассмотрим такой A-главный фактор N / F группы G, что $N \subseteq C$. Так как $A \supseteq \operatorname{In} G$, то A-цоколь группы N содержится в H и, следовательно, централизуется подгруппой N. Если $N \neq G$, то по индукции $N = \mathrm{F}(N) = \mathrm{F}(G)$, что невозможно. Пусть $N = G$, т. е. G / F — A-главный фактор группы G.

По лемме 7.9

$$G = LF, \quad L \cap F = 1, \quad F \subseteq H.$$

В рассматриваемом случае $G = C$. Поэтому $G = L \times F$. Так как $G / F \simeq L$, то L либо проста, либо есть прямое произведение изоморфных простых групп. Так как $F \neq G$, то L неабелева и, как легко видеть, $L = G'$. Значит, L A-допустима и является минимальной A-допустимой нормальной подгруппой группы G, т. е. $L \subseteq H$. Но это невозможно, так как L неабелева и $G = C$. Теорема доказана.

Определение 7.6. Если A — группа операторов группы G, то говорят, что задана *групповая пара* (A, G). Групповая пара (A, G) называется *неприводимой*, если G является минимальной нормальной подгруппой в $G \leftthreetimes A$. Две групповые пары (A, G) и (A, G_1) называются *эквивалентными* (записывается $(A, G) \simeq (A, G_1)$), если существует изоморфизм φ группы G на группу G_1 такой, что $(x^a)^\varphi = (x^\varphi)^a$ для любых $x \in G$, $a \in A$.

Некоторое множество групповых пар $\mathcal{H} = \{(A, G_i) \mid i \in I\}$ будем называть *A-классом*, если $\mathcal{H}$ вместе с каждой своей групповой парой (A, G_i) содержит и все с ней эквивалентные.

Пусть H — A-субнормальная подгруппа группы G. Возьмем A-композиционную $(G - H)$-цепь:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = H.$$

Если $H \neq G$, то определим A-класс $\mathcal{K}(G - H, A)$ следующим образом: $\mathcal{K}(G - H, A) = \{(A, \Gamma) \mid (A, \Gamma) \simeq (A, G_{i-1} / G_i)$ для некоторого i, $1 \leqslant i \leqslant t\}$. Положим $\mathcal{K}(G - G, A) = \phi$. В случае $H = 1$ вместо $\mathcal{K}(G - H, A)$ будем писать $\mathcal{K}(G, A)$. Положим еще $\mathcal{K}(G - H) = \mathcal{K}(G - H, 1)$, $\mathcal{K}(G) = \mathcal{K}(G, 1)$.

Следующая лемма вытекает из теоремы Жордана — Гёльдера (М. Холл [1], с. 147).

Лемма 7.10. *Определение A-класса $\mathcal{K}(G - H, A)$ не зависит от выбора A-композиционной $(G - H)$-цепи.*

Теорема 7.13. *Если H и L — A-субнормальные подгруппы группы G, то*

$$\mathcal{K}(G - H \cap L, A) = \mathcal{K}(G - H, A) \cup \mathcal{K}(G - L, A).$$

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Среди пар A-субнормальных подгрупп, для которых утверждение теоремы не имеет места, выберем подгруппы H и L с наименьшей суммой порядков $|H| + |L|$. Ясно, что $H \neq G$, $L \neq G$. Пусть G / H_1 и G / L_1 — такие A-композиционные факторы группы G, что $H_1 \supseteq H$, $L_1 \supseteq L$. Возможны два случая: $L \subseteq H_1$, либо $LH_1 = G$.

Пусть $L \subseteq H_1$. Для H_1 теорема верна, поэтому

$$\mathcal{K}(H_1 - H \cap L, A) = \mathcal{K}(H_1 - H, A) \cup \mathcal{K}(H_1 - L, A).$$

Добавляя слева и справа групповые пары, эквивалентные $(A, G / H_1)$, мы получим, что теорема для G верна. Пришли к противоречию.

Пусть теперь $LH_1 = G$. Положим $L \cap H_1 = L_2$. Тогда

$$(A, G / H_1) \simeq (A, L / L_2). \tag{1}$$

Так как $|L_2| + |H| < |L| + |H|$ и $L_2 \cap H = L \cap H$, то

$$\mathcal{K}(G - L_2 \cap H, A) = \mathcal{K}(G - L \cap H, A) = \\ = \mathcal{K}(G - L_2, A) \cup \mathcal{K}(G - H, A). \tag{2}$$

Учитывая (1), убеждаемся в справедливости следующего равенства:

$$\mathcal{K}(G - L_2, A) = \\ = \mathcal{K}(G - L, A) \cup \{(A, R) \mid (A, R) \simeq (A, G/H_1)\}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (2), получаем, что утверждение теоремы для группы G и ее подгрупп L и H справедливо.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 7.13.1 (Виландт). *Пусть H и L — субнормальные подгруппы группы G. Тогда*

$$\mathcal{K}(G - H \cap L) = \mathcal{K}(G - H) \cup \mathcal{K}(G - L).$$

О п р е д е л е н и е 7.7. Пусть $\mathcal{H}$ — некоторый A-класс неприводимых групповых пар. Подгруппу H группы G будем называть *$\mathcal{H}$-подгруппой*, если H A-субнормальна в G и $\mathcal{K}(H, A) \subseteq \mathcal{H}$. Обозначим через $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}(G)$ множество всех $\mathcal{H}$-подгрупп группы G.

Заметим, что $\mathrm{L}_{\mathcal{H}}(G) \neq \phi$, так как содержит единичную подгруппу из G. Очевидно, пересечение любых двух $\mathcal{H}$-подгрупп также является $\mathcal{H}$-подгруппой.

Теорема 7.14. *Пусть $\mathscr{H}$ — некоторый A-класс неприводимых групповых пар и пусть $\mathrm{L}_{\mathscr{H}}(S / T)$ является решеткой для любой A-субнормальной примарной секции S / T группы G. Тогда $\mathrm{L}_{\mathscr{H}}(G)$ является решеткой.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Тогда в G существуют такие две $\mathscr{H}$-подгруппы H и L, что $H \vee L$ не является $\mathscr{H}$-подгруппой. Если $H \vee L \neq G$, то теорема для $H \vee L$ верна и, следовательно, $\mathscr{K}(H \vee L, A) \subseteq \mathscr{H}$. Получили противоречие. Поэтому $H \vee L = G$. Будем считать, что H и L являются максимальными $\mathscr{H}$-подгруппами. Если $H \lhd G$, то $G = HL$, причем группы G / H и $L / L \cap H$ A-изоморфны. Поэтому

$$\mathscr{K}(G / H, A) \subseteq \mathscr{K}(L, A),$$
$$\mathscr{K}(G, A) \subseteq \mathscr{K}(L, A) \cup \mathscr{K}(H, A) \subseteq \mathscr{H},$$

что невозможно. Следовательно, H и L не нормальны в G.

Пусть G / M — такой A-композиционный фактор группы G, что $M \supseteq H$. Так как $M \lhd G$ и $G = H \vee L$, то $G = ML$, причем

$$(A, G / M) \simeq (A, L / L \cap M) \in \mathscr{K}(L, A). \qquad (1)$$

Рассмотрим подгруппу $R = H \vee (L \cap M)$. Эта подгруппа A-субнормальна и содержится в M. Поэтому $|R| < |G|$ и для R теорема верна. Следовательно, $\mathscr{K}(R, A) \subseteq \mathscr{H}$, а значит, R является $\mathscr{H}$-подгруппой группы G. Вспоминая, что H — максимальная $\mathscr{H}$-подгруппа, получаем $R = H$. Таким образом,

$$\langle H, L \cap M \rangle = H, \ L \cap M \subseteq L \cap H.$$

Ввиду $H \subseteq M$ выполняется включение $L \cap H \subseteq L \cap M$. Значит, $L \cap H = L \cap M \lhd L$, причем ввиду (1) имеем

$$(A, L / L \cap H) \in \mathscr{K}(L, A). \qquad (2)$$

Аналогично показывается, что $L \cap H \lhd H$ и

$$(A, H / H \cap L) \in \mathscr{K}(H, A). \qquad (3)$$

Так как $L \cap H$ нормальна в H и L, то $L \cap H$ нормальна в $G = H \vee L$. Предположим, что $L \cap H \neq 1$. Так как $G / L \cap H$ порождается своими $\mathscr{H}$-подгруппами $H / L \cap$

$\cap H$ и $L / L \cap H$, причем теорема для $G / L \cap H$ верна, то $\mathcal{K}(G / L \cap H, A) \subseteq \mathcal{H}$. Отсюда и из очевидного включения

$$\mathcal{K}(L \cap H, A) \subseteq \mathcal{K}(L, A) \cup \mathcal{K}(H, A) \subseteq \mathcal{H}$$

заключаем, что $\mathcal{K}(G, A) \subseteq \mathcal{H}$. Получили противоречие. Поэтому, учитывая (2) и (3), мы приходим к следующему:

$$L \cap H = 1, \quad (A, L) \in \mathcal{K}(L, A), \quad (A, H) \in \mathcal{K}(H, A). \quad (4)$$

Докажем, что $HL = LH$. Из (4) вытекает, что H и L характеристически просты. Если одна из подгрупп H и L неабелева, то по теореме 7.9 подгруппы H и L перестановочны. Если H и L абелевы, то по следствию 7.7.2 они содержатся в $\mathrm{F}(G)$, а значит, $G = H \vee L = \mathrm{F}(G)$. Но тогда, учитывая непримарность группы G, получаем $G = HL = H \times L$. А это противоречит тому, что H и L не нормальны в G.

Итак, установлено, что $G = LH$, $L \cap H = 1$. Как и выше, пусть G / M — такой A-композиционный фактор группы G, что $M \supseteq H$. Тогда $M = H(M \cap L)$. Но мы отмечали раньше, что $M \cap L = L \cap H$, а значит, $M \cap L = 1$ и $M = H$. Это противоречит тому, что H не нормальна в G. Теорема доказана.

Следствие 7.14.1. *Пусть H и L — A-субнормальные подгруппы группы G. Если $(A, S) \in \mathcal{K}(H \vee L, A)$ и группа S неабелева, то $(A, S) \in \mathcal{K}(H, A) \cup \mathcal{K}(L, A)$.*

Доказательство. Применяем теорему 7.14 для случая, когда $\mathcal{H}$ состоит из $\mathcal{K}(H, A) \cup \mathcal{K}(L, A)$ и всех неприводимых групповых пар (A, R) с примарной группой R.

Следствие 7.14.2 (Виландт). *Пусть H и L — субнормальные подгруппы группы G. Тогда*

$$\mathcal{K}(H \vee L) = \mathcal{K}(H) \cup \mathcal{K}(L).$$

Доказательство. Применяем теорему 7.14 для случая $A = 1$, $\mathcal{H} = \mathcal{K}(H) \cup \mathcal{K}(L)$.

Замечание 2. В доказательстве теоремы 7.14, да и в других местах книги мы без оговорок пользуемся тождеством Дедекинда (если H, K, L — такие подгруппы из G, что $HK = KH$ и $H \subseteq L$, то $H(K \cap L) = HK \cap L$), а также элементарными свойствами подгрупп Фраттини. Вот главнейшие из них:

1) если $K \lhd G$ и $K \subseteq \Phi(G)$, то $\Phi(G) / K = \Phi(G / K)$;

2) если $K \subseteq G$, $D \lhd G$, $D \subseteq \Phi(K)$, то $D \subseteq \Phi(G)$;

3) $\Phi(G)$ состоит из всех необразующих элементов группы G;

4) $\Phi(G) \in \mathfrak{N}$;

5) если $G \in \mathfrak{N}$, то $\Phi(G) \supseteq G'$.

Замечание 3. Поскольку A-цоколь содержится в цоколе, то операторное обобщение теоремы 7.10 тривиально. Однако теорема 7.12 не сводится к теореме 7.11, так как A-цоколь далеко не всегда совпадает с цоколем.

4. Верхние и нижние A-f-цепи. В этом пункте f будет обозначать некоторую групповую функцию, A — фиксированную группу операторов группы G.

Определение 7.8. Обозначим через $\mathrm{K}^f(G, A)$ и назовем *A-f-коммутантом* группы G пересечение всех тех A-допустимых нормальных подгрупп H из G, для которых G / H f-центральна относительно A. Введем в рассмотрение *нижнюю A-f-цепь*.

$$G = \mathrm{K}_1^f(G, A) \supseteq \mathrm{K}_2^f(G, A) \supseteq \ldots \supseteq \mathrm{K}_i^f(G, A) \supseteq \ldots,$$

где $\mathrm{K}_i^f(G, A) = \mathrm{K}^f(\mathrm{K}_{i-1}^f(G, A), A)$ при $i > 1$. При $A = G$ в этих обозначениях A опускается, и мы получаем понятие *f-коммутанта* $\mathrm{K}^f(G)$ *и нижней f-цепи* группы G. Легко видеть, что члены $\mathrm{K}_i^f(G)$ нижней f-цепи группы G являются характеристическими подгруппами.

Определение 7.9. Скажем, что *A действует f-стабильно на G — H*, если существует A-субнормальная $(G — H)$-цепь

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = H, \quad t \geqslant 0, \qquad (*)$$

все факторы которой f-центральны относительно A, т. е. $A / C_A(G_{i-1} / G_i) \in f(G_{i-1} / G_i)$ для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. При этом будем говорить, что *A f-стабилизирует* цепь (*), саму цепь (*) будем называть *A-f-центральной*, либо *f-центральной относительно A*, а группу A при $H = 1$ — *f-стабильной группой операторов* группы G (в частности, *f-стабильной группой автоморфизмов*, если $A \subseteq \mathrm{Aut}\, G$). Кроме того, при $H = 1$ будем говорить, что *A действует f-стабильно на G.*

Условимся в этом определении f опускать, если f — единичный экран. Таким образом, ясно, что́ называется стабильной группой автоморфизмов.

Используя определение экрана и применяя теорему Жордана — Гёльдера, получаем сразу следующую лемму.

Лемма 7.11. *Если f — экран и A действует f-стабильно на G — H, то A f-стабилизирует любую A-композиционную (G — H)-цепь.*

Лемма 7.12. *Если A f-стабилизирует A-композиционную (G—H_i)-цепь ($i = 1, 2$), то A f-стабилизирует и A-композиционную (G — $H_1 \cap H_2$)-цепь.*

Доказательство. Применяем теорему 7.13.

Определение 7.10. Назовем *A-f-корадикалом* и обозначим через $G^{f,A}$ пересечение всех тех A-субнормальных подгрупп H группы G, которые удовлетворяют следующему условию:

A f-стабилизирует A-композиционную (G — H)-цепь.

Ввиду леммы 7.12 A f-стабилизирует A-композиционную (G — $G^{f,A}$)-*цепь*. Ясно, что $G^{f,G}$ совпадает с введенным в § 3 f-корадикалом G^f.

Теорема 7.15. *Если f — экран, то* $G^{f,A} = \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{K}_i^f(G, A)$.

Доказательство. Положим $\mathrm{K}_i = \mathrm{K}_i^f(G, A)$, $D = \bigcap\limits_i K_i$. Если $K_i \subseteq H \lhd K_{i-1}$ и A действует f-тождественно на K_{i-1} / H, то A действует, конечно, f-стабильно на K_{i-1} — H. Так как K_i — пересечение всех таких H, то по лемме 7.12 A действует f-стабильно на K_{i-1} — K_i. Но тогда получается, что A-композиционная (G —D)-цепь f-центральна относительно A, откуда следует $D \supseteq G^{f,A}$. Так как D — пересечение всех K_i, то $K_t = K_{t+1}$. Если $G^{f,A} \neq D$, то существует A-композиционный фактор D/T, f-центральный относительно A. Тогда $T \supseteq K_{t+1}$, что противоречит тому, что $K_t = K_{t+1}$. Теорема доказана.

Определение 7.11. Назовем *A-f-центром* группы G и обозначим через $Z^f(G, A)$ подгруппу, порожденную всеми теми A-субнормальными подгруппами из G, которые f-центральны относительно A. Введем в рассмотрение *верхнюю A-f-цепь*

$$1 = Z_0^f(G, A) \subseteq Z_1^f(G, A) \subseteq \ldots \subseteq Z_i^f(G, A) \subseteq \ldots,$$

где $Z_1^f(G, A) = Z^f(G, A)$, а при любом $i \geqslant 1$ $Z_i^f(G, A)$ совпадает с подгруппой, порожденной всеми теми A-субнормальными подгруппами H группы G, для которых $Z_{i-1}^f(G, A) \lhd H$ и секция $H/Z_{i-1}^f(G, A)$ f-центральна относительно A. При $A = G$ в этом определении A опускается, и мы получаем понятие *f-центра* $Z^f(G)$ и *верхней f-цепи* с членами $Z_i^f(G)$.

Нетрудно заметить, что члены $Z_i^f(G)$ верхней f-цепи являются характеристическими подгруппами группы G, причем

$$Z_{i+1}^f(G)/Z_i^f(G) = Z^f(G/Z_i^f(G)).$$

Определение 7.12. A-субнормальную подгруппу H группы G назовем *A-f-гиперцентральной*, если A f-стабилизирует A-композиционный ряд группы H. Единичная подгруппа, по определению, является A-f-гиперцентральной. Обозначим через $Z_\infty^f(G, A)$ подгруппу, порожденную всеми A-f-гиперцентральными A-субнормальными подгруппами группы G. Подгруппу $Z_\infty^f(G, A)$ будем называть *A-f-гиперцентром* группы G.

При $A = G$ в этом определении условимся A опускать, и мы получаем, таким образом, понятие *f-гиперцентра* $Z_\infty^f(G)$ и *f-гиперцентральной нормальной подгруппы*. Легко видеть, что f-гиперцентр группы G является ее характеристической подгруппой.

Лемма 7.13. *Подгруппа $Z_\infty^f(G, A)$ является A-f-гиперцентральной, если выполняется одно из следующих условий:*

1) *каждый внутренний автоморфизм группы G производится некоторым оператором из A;*

2) *f — примарно постоянный экран.*

Доказательство. Если выполняется условие 1), то все A-субнормальные подгруппы нормальны, и утверждение очевидно. Пусть выполняется условие 2). Пусть H и L — A-f-гиперцентральные A-субнормальные подгруппы группы G. Докажем, что $H \vee L$ также A-f-гиперцентральна. Пусть $\mathfrak{H}$ — множество всех неприводимых групповых пар (A, R), удовлетворяющих следующему условию: A действует f-тождественно на R. Возьмем групповую пару (A, P), где P — p-группа, и пусть P_1

и P_2 — A-f-гиперцентральные A-субнормальные подгруппы из P. Применяя лемму 3.10, убеждаемся, что $A/C_i \in \mathfrak{N}_p f(p)$, где $C_i = \mathrm{C}_A(P_i)$, $i = 1, 2$. Тогда $C_1 \cap \cap C_2 \subseteq \mathrm{C}_A(P_1 \vee P_2)$, $A/C_1 \cap C_2 \in \mathfrak{N}_p f(p)$. Применяя лемму 3.9, видим, что A действует f-стабильно на $P_1 \vee P_2$. Мы доказали, что $\mathrm{L}_{\mathscr{H}}(P)$ является решеткой. Теперь можно применить теорему 7.14, согласно которой $\mathscr{K}(H \vee \vee L, A) \subseteq \mathscr{H}$. Последнее означает, что $H \vee L$ A-f-гиперцентральна. Тем самым лемма доказана.

Теорема 7.16. *Если f — экран и подгруппа $\mathrm{Z}^f_\infty(G, A)$ является A-f-гиперцентральной, то* $\mathrm{Z}^f_\infty(G, A) = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \mathrm{Z}^f_i(G, A)$.

Доказательство. Положим $Z = \mathrm{Z}^f_\infty(G, A)$, $Z_i = \mathrm{Z}^f_i(G, A)$. Согласно определению 7.11 $Z_i \lhd Z_{i+1}$ для любого i. Пусть уже доказано, что A действует f-стабильно на Z_t для некоторого $t \geqslant 0$. Пусть $Z^*_{t+1} = \{H \mid Z_t \lhd H,\ H$ A-субнормальна в G, A действует f-тождественно на $H/Z_t\}$. По определению, Z_{t+1} порождается подгруппами $H \in Z^*_{t+1}$, причем, как легко заметить, на каждой подгруппе $H \in Z^*_{t+1}$ группа A действует f-стабильно. Поэтому каждая подгруппа из Z^*_{t+1} входит в Z и является A-f-гиперцентральной. Отсюда вытекает, что $Z_{t+1} \subseteq Z$. Тем самым доказано, что $\bigcup\limits_i Z_i$ содержится в Z.

Пусть m — такой номер, что $Z_m = Z_{m+1}$. Предположим, что $Z_m \neq Z$. Так как A действует f-стабильно на Z, то A f-стабилизирует A-композиционный ряд группы Z, проходящий через Z_m:

$$1 = C_0 \subset C_1 \subset \ldots \subset C_r = Z_m \subset C_{r+1} \subset \ldots \subset C_n = Z.$$

Таким образом, $C_r = Z_m \lhd C_{r+1}$ и C_{r+1}/C_r f-центральна относительно A. Но тогда $Z_m \subset C_{r+1} \subseteq Z_{m+1}$, что противоречит равенству $Z_m = Z_{m+1}$. Следовательно, $Z_m = \bigcup\limits_i Z_i = Z$, и теорема доказана.

Замечание. 4. Пусть f — единичный экран. Тогда в определениях 7.8, 7.11 и 7.12 условимся f опускать. Таким образом получается понятие *A-коммутанта* $\mathrm{K}(G, A)$, *нижней A-цепи с членами* $\mathrm{K}_i(G, A)$, *A-центра* $\mathrm{Z}(G, A)$, *верхней A-цепи с членами* $\mathrm{Z}_i(G, A)$, *A-гиперцентра* $\mathrm{Z}_\infty(G, A)$, *A-гиперцентральной нормальной под-*

группы. Кроме того, при $A = G$ мы условились A опускать и, таким образом, мы возвращаемся к обычным понятиям коммутанта, центра, гиперцентра и другим.

Замечание 5. Если f — экран и $G^{f,A} = 1$, то по теореме 7.15 и 7.16 верхняя A-f-цепь достигает группы G, а нижняя A-f-цепь доходит до единицы. В этом случае мы получаем верхний и нижний A-f-ряд:

$$1 = Z_0^f(G, A) \subset Z_1^f(G, A) \subset \ldots \subset Z_m^f(G, A) = G,$$

$$G = K_1^f(G, A) \supset K_2^f(G, A) \supset \ldots \supset K_n^f(G, A) = 1.$$

При $A = G$ мы получаем верхний и нижний f-ряд группы G.

Теорема 7.17. *Пусть f — некоторый экран, A — группа операторов группы G. Пусть G имеет A-f-центральный ряд*:

$$G = G_1 \supseteq G_2 \supseteq \ldots \supseteq G_m = 1.$$

Тогда $K_i^f(G, A) \subseteq G_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство. Обозначим $K_i^f(G, A)$ через K_i. Очевидно, $K_1 \subseteq G_1$. Пусть уже доказано, что $K_t \subseteq G_t$, $t \geqslant 1$. Так как группа G_t/G_{t+1} A-f-центральна, то и K_tG_{t+1}/G_{t+1} A-f-центральна. Так как группы K_tG_{t+1}/G_{t+1} и $K_t/G_{t+1} \cap K_t$ A-изоморфны, то отсюда делаем вывод, что $K_t \cap G_{t+1} \supseteq K_{t+1}$, а значит, $K_{t+1} \subseteq G_{t+1}$, что и доказывает теорему.

Теорема 7.18. *Пусть f — некоторый экран и G имеет f-центральный ряд*:

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_m = G.$$

Тогда $Z_i^f(G) \supseteq G_i$, $i = 0, 1, \ldots, m$.

Доказательство. Обозначим $Z_i^f(G)$ через Z_i. Очевидно, $Z_1 \supseteq G_1$. Пусть уже доказано, что $Z_t \supseteq G_t$, $t \geqslant 1$. Тогда $G_{t+1} \cap Z_t \supseteq G_t$ и из f-центральности G_{t+1}/G_t следует f-центральность секций

$$G_{t+1}/G_{t+1} \cap Z_t \simeq G_{t+1}Z_t/Z_t.$$

Отсюда следует, что $G_{t+1}Z_t/Z_t \subseteq Z_{t+1}/Z_t$, а значит, $G_{t+1} \subseteq Z_{t+1}$. Тем самым теорема доказана.

Определение 7.13. Пусть A — группа операторов группы G и f — некоторый экран. Если $G^{f,A} = 1$, то наименьшее $n - 1$, для которого $K_n^f(G, A) = 1$, назовем

A-f-ступенью группы G и обозначим через $s_f(G, A)$. При $G^{f,A} \neq 1$ положим $s_f(G, A) = \infty$.

При $G = A$ число $s_f(G, G)$ будем называть *f-ступенью* группы G и обозначать через $s_f(G)$. Если f — единичный экран, то A-f-ступень называем *A-ступенью* и обозначаем через $s(G, A)$; $s(G) = s(G, G)$.

Непосредственным следствием теорем 7.17 и 7.18 является следующий факт.

Теорема 7.19. *Пусть f — некоторый экран, $G \in \langle f \rangle$ и пусть и верхний и нижний f-ряды группы G являются f-центральными. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *длина верхнего f-ряда группы G равна $s_f(G)$;*

2) *длина каждого f-центрального ряда группы G не меньше $s_f(G)$.*

Если f — единичный экран, то теорема 7.19 превращается в известное свойство центральных рядов нильпотентной группы.

Замечание 6. Чтобы избежать недоразумений, обратим внимание на следующее. Когда мы говорим о цепях или о рядах, f-центральных относительно A, то автоматически подразумеваем, как это и требуется определением 7.9, что указанные цепи и ряды A-субнормальны. Если A f-стабилизирует ряд (R), то ряд (R), по определению, A-субнормален.

Замечание 7. Иногда удобнее в обозначении f-гиперцентра использовать символ формации. Если f — внутренний экран ступенчатой формации $\mathfrak{F}$, то f — гиперцентр группы G будем называть *$\mathfrak{F}$-гиперцентром* и обозначать через $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Лемма 5.8 указывает на независимость этого определения от выбора внутреннего экрана f формации $\mathfrak{F}$. Всякую нормальную подгруппу группы G, содержащуюся в $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$, будем называть *$\mathfrak{F}$-гиперцентральной.*

§ 8. $\mathfrak{F}$-субнормальные и $\mathfrak{F}$-абнормальные подгруппы

Определение 8.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая непустая формация. Максимальная подгруппа M группы G называется:

1) *$\mathfrak{F}$-нормальной*, если $M \supseteq G^{\mathfrak{F}}$;

2) *$\mathfrak{F}$-абнормальной*, если $MG^{\mathfrak{F}} = G$.

Максимальная $(G - H)$-цепь $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m = H$ называется *$\mathfrak{F}$-субнормальной* (*$\mathfrak{F}$-абнормальной*), если для любого $i \geqslant 1$ подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-нормальна (соответственно $\mathfrak{F}$-абнормальна) в H_{i-1}.

Подгруппа S группы G называется:

1) *$\mathfrak{F}$-субнормальной*, если существует хотя бы одна $\mathfrak{F}$-субнормальная максимальная $(G - S)$-цепь;

2) *$\mathfrak{F}$-абнормальной*, если любая максимальная $(G - S)$-цепь $\mathfrak{F}$-абнормальна.

Если $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, где f — групповая функция, то во введенном определении $\mathfrak{F}$ можно заменить на f и говорить о *f-нормальности*, *f-субнормальности* и *f-абнормальности*.

Лемма 8.1. *Пусть максимальная подгруппа M не покрывает главный фактор H/K группы G. Тогда M не покрывает фактор HM_G/M_G, G-изоморфный H/K.*

Доказательство. Так как M не покрывает H/K, то $M \supseteq K$, $MH = G$, $H \cap M_G = K$. Поэтому HM_G/M_G и H/K G-изоморфны, и лемма верна.

Теорема 8.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, M — максимальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если M $\mathfrak{F}$-нормальна в G, то M покрывает каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G;*

2) *если M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то M покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G.*

Доказательство. Пусть M не покрывает главный фактор H/K группы G. Тогда $M \supseteq K$, $MH = G$. По лемме 8.1 главные факторы H/K и HM_G/M_G G-изоморфны. Поэтому

$$C = C_G(H/K) = C_G(HM_G/M_G) \supseteq KM_G = M_G.$$

Предположим, что M $\mathfrak{F}$-нормальна в G. Тогда $M_G \supseteq G^{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, $G/M_G \in \mathfrak{F}$. Отсюда вытекает, что HM_G/M_G является $\mathfrak{F}$-центральным главным фактором группы G/M_G, а значит, и группы G. Но тогда и H/K $\mathfrak{F}$-централен в G. Утверждение 1) доказано.

Предположим теперь, что H/K $\mathfrak{F}$-централен в G, но M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Рассмотрим G/M_G. В этой фактор-группе максимальная подгруппа M/M_G $\mathfrak{F}$-абнормальна, так как не содержит $G^{\mathfrak{F}}M_G/M_G = (G/M_G)^{\mathfrak{F}}$. Кроме того, M/M_G не покрывает $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор

HM_G/M_G группы G/M_G. Если $M_G \neq 1$, то для G/M_G теорема верна по индукции, и мы приходим к противоречию. Пусть $M_G = 1$. Возможны два случая: $C = 1$ и $C \neq 1$. Пусть сначала $C \neq 1$. Так как $M_G = 1$, то C не входит в M, а значит, $G = CM = HM$. Отсюда вытекает, что $C \cap M \lhd G$, а потому $C \cap M = 1$. Так как H/K $\mathfrak{F}$-централен в G, то $G/C \simeq M \in \mathfrak{F}$ (по определению 5.5 $G/C \in f(H/K) \subseteq \mathfrak{F}$). Учитывая, что $K = M_G = 1$, $G/H \simeq M/M \cap H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-центральна, мы получаем $G \in \mathfrak{F}$. А это противоречит тому, что $M \neq G$ и $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Осталось рассмотреть случай $C = 1$. Если $C = 1$, то ввиду $\mathfrak{F}$-центральности H имеем $G/C \simeq G \in \mathfrak{F}$ и снова приходим к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 8.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация. Максимальная подгруппа M группы $G \neq 1$ $\mathfrak{F}$-нормальна ($\mathfrak{F}$-абнормальна) тогда и только тогда, когда M не покрывает хотя бы один $\mathfrak{F}$-центральный (соответственно $\mathfrak{F}$-эксцентральный) главный фактор группы G.*

Следствие 8.1.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, L/K — G-главный фактор группы $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если L/K $\mathfrak{F}$-централен в G, то $L/K \subseteq \Phi(G/K) \cap Z(G^{\mathfrak{F}}/K)$;*

2) *если $L/K \not\subseteq \Phi(G/K)$, то L/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален в G.*

Доказательство. Пусть f — внутренний экран формации $\mathfrak{F}$. Если существует максимальная подгруппа M, не покрывающая L/K, то $MG^{\mathfrak{F}} = G$, т. е. M $\mathfrak{F}$-абнормальна, а значит, по теореме 8.1 L/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Пусть L/K $\mathfrak{F}$-централен. Тогда $L/K \subseteq \Phi(G/K)$ и $G/C_G(L/K) \in f(L/K) \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C_G(L/K)$, откуда следует $L/K \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}}/K)$.

Теорема 8.2. *Пусть M — максимальная подгруппа разрешимой группы G, $\mathfrak{F}$ — формация с внутренним экраном f. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *M $\mathfrak{F}$-нормальна в G;*

2) *если M не покрывает главный фактор H/K группы G, то $M/M_G \in f(H/K)$.*

Доказательство. Пусть M не покрывает главный фактор H/K группы G. Если $K \neq 1$, то рассматриваем G/K. Пусть $K = 1$. Имеем: $G = MH$, $M \cap H = 1$, $C_G(H) = HC_M(H) = HM_G$. Пусть M $\mathfrak{F}$-нормальна. Тогда по теореме 8.1 H $\mathfrak{F}$-центральна в G, и получаем

$$M/M_G \simeq MH/M_GH = G/C_G(H) \in f(H). \qquad (*)$$

Обратно, пусть выполняется 2). Тогда выполняется (*), откуда вытекает $\mathfrak{F}$-центральность H. По теореме 8.1 M $\mathfrak{F}$-нормальна. Теорема доказана.

Теорема 8.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, M — максимальная подгруппа группы G. Если M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G, то $M \supseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство. Предположим, что в G существуют $\mathfrak{F}$-гиперцентральные нормальные подгруппы, не входящие в M. Выберем среди них подгруппу H, имеющую наименьший порядок. Пусть H/K — главный фактор группы G. Тогда $K \subseteq M$, $MH = G$, т. е. M не покрывает H/K. Так как $H \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$, то H/K $\mathfrak{F}$-централен, и по теореме 8.1 подгруппа M $\mathfrak{F}$-нормальна. Тем самым доказано, что каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа содержит $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Теорема доказана.

Теорема 8.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, M — максимальная подгруппа группы G, не покрывающая некоторый ее главный фактор L/K. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если L/K $\mathfrak{F}$-централен, то M не покрывает фактор $LG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}}$, который G-изоморфен L/K;*

2) *если L/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален, то M не покрывает фактор $L \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$, который G-изоморфен L/K.*

Доказательство. Так как M не покрывает L/K, то $K \subseteq M$, $LM = G$. Рассмотрим G-изоморфизм:

$$LG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}} \simeq L/K(L \cap G^{\mathfrak{F}}). \qquad (*)$$

Очевидно, подгруппа $K(L \cap G^{\mathfrak{F}})$ равна либо K, либо L. Допустим, что L/K $\mathfrak{F}$-централен в G. По теореме 8.1 M $\mathfrak{F}$-нормальна в G, т. е. $M \supseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $ML = G$ и $M \supseteq G^{\mathfrak{F}}$, то должно быть $K(L \cap G^{\mathfrak{F}}) = K$, и первое утверждение теоремы доказано.

Предположим теперь, что L/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Ввиду (*), возможны два случая: $K(L \cap G^{\mathfrak{F}}) = K$ и $K(L \cap G^{\mathfrak{F}}) = L$. Пусть $K(L \cap G^{\mathfrak{F}}) = K$. Тогда $LG^{\mathfrak{F}}/KG^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G и группы $G/KG^{\mathfrak{F}}$. Но это противоречит тому, что $G/KG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$. Остается принять, что $K(L \cap G^{\mathfrak{F}}) = L$. Тогда имеем

G-изоморфизм

$$L/K = K(L \cap G^{\mathfrak{F}})/K \simeq L \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}.$$

Следовательно, $L \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор, не покрываемый ~~по теореме 8.1~~ подгруппой M. Теорема доказана.

Замечание 1. Подгруппа $\mathfrak{N}$-субнормальна в группе из $\mathfrak{S}$ только тогда, когда она субнормальна. Поэтому понятие $\mathfrak{F}$-субнормальности является расширением понятия субнормальности. Естественно попытаться развить теорию $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп, аналогичную теории субнормальных подгрупп.

Проблема 12. В каких случаях множество всех $\mathfrak{F}$-субнормальных подгрупп группы G образует решетку?

Замечание 2. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп. Из теоремы 8.1 и леммы 5.9 вытекает, что каждая $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа неединичной группы имеет простой индекс. Обратно, если $|G:M| = p$ — простое число и M не покрывает некоторый абелев главный фактор H/K группы G, то $|H/K| = p$ и M $\mathfrak{F}$-нормальна в G.

Лемма 8.2. *Пусть группа G имеет нормальную p-разрешимую подгруппу K, причем $K = O^p(K)$. Если силовская p-подгруппа P из K абелева, то P обладает дополнениями в G и любые два из них сопряжены в G.*

Доказательство. По теореме Чунихина [7] о π-разрешимых группах K обладает $S_{p'}$-подгруппой Q, причем любые две $S_{p'}$-подгруппы из K сопряжены в K. По лемме 4.3 $NK = NP = G$, где $N = N_G(Q)$. Покажем, что $N \cap P = 1$. Легко видеть, что $N_K(P) = P(N \cap N_K(P))$, причем $N \cap N_K(P) = P_1 \times Q_1$, где $P_1 \subseteq P$, $Q_1 \subseteq Q$. Используя известную теорему Грюна (М. Холл [1], теорема 14.4.5) и тот факт, что $K = O^p(K)$, получаем, что $N_K(P)$ совпадает со своим p-корадикалом. Отсюда и из леммы 5.10 вытекает, что $P_1 = N \cap P = 1$. Итак, N — дополнение к P в G.

Пусть H — любое другое дополнение к P в G. Тогда $H \cap K$ нормальна в H и является $S_{p'}$-подгруппой в K. Ясно, что $H = N_G(H \cap K)$. Мы видим теперь, что сопряженность дополнений к P есть следствие сопряженности $S_{p'}$-подгрупп в K. Лемма доказана.

Теорема 8.5 (Шеметков [19]). *Пусть $\mathfrak{f}$-корадикал группы G p-разрешим, f — p-однородный экран, M и H — f-абнормальные максимальные подгруппы группы G. Если $M_G \cap G^f = H_G \cap G^f$ и p делит $(|G : M|, |G : H|)$, то M и H сопряжены между собой в G.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Пусть M и H удовлетворяют условию теоремы, но не сопряжены.

Предположим, что $D = M_G \cap H_G \neq 1$, и рассмотрим G / D. Так как G^fD / D есть f-корадикал группы G / D, то нетрудно видеть, что условие теоремы выполняется для G / D и ее максимальных подгрупп M / D и H / D. По предположению, M / D и H / D сопряжены, а значит, M и H сопряжены. Получили противоречие.

Таким образом, $M_G \cap H_G = 1$. Допустим, что $M_G \neq 1$. Пусть $L_1 \subseteq M_G$, где L_1 — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда L_1 не входит в H_G, а значит, $HL_1 = G$. Так как $M_G \cap H_G = 1$, то $L_1 \cap G^f = 1$, а поэтому L_1 f-центральна в G. Но это противоречит тому, что H f-абнормальна и не покрывает L_1. Следовательно, $M_G = 1$. Аналогично, $H_G = 1$.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в G^f. Тогда $HL = ML = G$. Ввиду условия L является p-группой. Положим $C = C_G(L)$. Очевидно, $C \supseteq L$, $C = L(M \cap C)$, откуда следует $M \cap C \lhd G$. Так как $M_G = 1$, то $M \cap C = 1$. Итак, L совпадает со своим централизатором в G.

Если $O_{p'}(G / L) = R / L$ неединична, то R совпадает со своим p-корадикалом, и по лемме 8.2 подгруппы M и H сопряжены. Так как $L = C_G(L)$, то $O_p(G / L) = L / L$. Значит, $F_p(G / L) = L / L$. Так как G^f p-разрешима, то отсюда следует, что $L = G^f$. Если $R / L / S / L$ — главный pd-фактор группы G / L, то ввиду p-однородности экрана f имеем

$$(G / L) / C_{G/L}(R / L / S / L) \in f(p).$$

Но тогда ввиду теоремы 4.1.

$$(G / L) / F_p(G / L) \simeq G / L \in f(p).$$

Получили противоречие, так как ввиду f-эксцентральности L группа G / L не принадлежит $f(p)$. Теорема доказана.

Следствие 8.5.1 (Чунихин [6]). *Пусть M и H — максимальные подгруппы π-разрешимой группы G. Если $|G:M|$ и $|G:H|$ являются π-числами и $M_G = H_G$, то M и H сопряжены между собой в G.*

Доказательство. Пусть L / M_G — минимальная нормальная подгруппа группы G / M_G. Тогда $ML = HL = G$, $|G:M| = |G:H| = |L / M_G| = p^\alpha$, где $p \in \pi$. Теперь применяем теорему 8.5 для случая, когда f — пустой экран и $G = G^f$.

Следствие 8.5.2 (Оре [1]). *Максимальные подгруппы M и H разрешимой группы G сопряжены между собой в G тогда и только тогда, когда $M_G = H_G$.*

Лемма 8.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация, K — некоторая нормальная подгруппа группы G. Пусть каждая максимальная подгруппа группы G, не содержащая K, является $\mathfrak{F}$-нормальной. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$;

2) $K / K \cap \Phi(G) \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G / K \cap \Phi(G))$.

Доказательство. Если $K \subseteq \Phi(G)$, то лемма очевидна. Пусть K не входит в $\Phi(G)$. Тогда существует по крайней мере одна максимальная подгруппа M, не содержащая K. Так как M $\mathfrak{F}$-нормальна, то $G / M_G \in \mathfrak{F}$, а значит, $G^{\mathfrak{F}} \neq G$. Ввиду условия леммы $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится в каждой $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппе. Кроме того, $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ содержится в каждой $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппе. Следовательно, $K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G)$.

Пусть R / S — главный фактор группы G, причем $R \subseteq K$, $S \supseteq K \cap \Phi(G)$. Так как $R \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq K \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq S$, то имеем G-изоморфизм:

$$RG^{\mathfrak{F}} / SG^{\mathfrak{F}} \simeq R / R \cap SG^{\mathfrak{F}} = R / S(R \cap G^{\mathfrak{F}}) = R / S.$$

Так как $G / SG^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F}$, то $RG^{\mathfrak{F}} / SG^{\mathfrak{F}}$ $\mathfrak{F}$-централен в $G / SG^{\mathfrak{F}}$, а значит, и в G. Но тогда R / S $\mathfrak{F}$-централен в G. Лемма доказана.

Определение 8.2. Если $\mathfrak{F}$ — непустая формация, то через $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ обозначим пересечение всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G. Если в G все максимальные подгруппы $\mathfrak{F}$-нормальны, то положим $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = G$.

Очевидно, $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ — характеристическая подгруппа группы G.

Обратим внимание на то, что каждая максимальная подгруппа из G, не содержащая $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, является $\mathfrak{F}$-нормальной.

Теорема 8.6 (Шеметков [13]). *Для любой группы G и любой ступенчатой формации $\mathfrak{F}$ имеет место равенство $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) / \Phi(G) = Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / \Phi(G))$.*

Доказательство. Очевидно, $\Phi(G)$ содержится в $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\Phi(G) = 1$. По лемме 8.3 $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$. Обратное включение выполняется ввиду теоремы 8.3.

Лемма 8.4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация. Тогда каждая $\mathfrak{F}$-гиперцентральная нормальная подгруппа любой группы принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме 4.7 для любого простого p формация $f(p)$ является S_n-замкнутой. Возьмем произвольную $\mathfrak{F}$-гиперцентральную подгруппу K группы G. Тогда G f-стабилизирует G-главный ряд группы K:

$$K = K_0 \supset K_1 \supset \ldots \supset K_m = 1. \qquad (*)$$

Таким образом, $G / C_i \in f(K_{i-1} / K_i)$, где $C_i = C_G(K_{i-1} / K_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Так как $KC_i/C_i \lhd G/C_i$ и $f(p)$ S_n-замкнута для любого $p \in \pi(K_{i-1} / K_i)$, то

$$KC_i / C_i \simeq K / C_K(K_{i-1} / K_i) \in f(K_{i-1} / K_i).$$

Значит, ряд $(*)$ является f-центральным рядом группы K, а потому $K \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Теорема 8.7 (Шеметков [13]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация. Тогда $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \subseteq \Phi(G)$, $\pi(B) \cap \pi(\mathfrak{F}) = \phi$.*

Доказательство. Пусть $K = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. Каждая максимальная подгруппа из G, не содержащая K, является $\mathfrak{F}$-нормальной. Поэтому согласно лемме 8.3 $K/\Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-гиперцентром в $G / \Phi(G)$. По лемме 8.4 $K / \Phi(G) \in \mathfrak{F}$. Теперь остается применить теорему 4.2.

Следствие 8.7.1 (Селькин [1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}$. Тогда $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ для любой группы G.*

Теорема 8.8 (Гашюц [2]). *Для любой группы G подгруппа $\Delta^{\mathfrak{N}}(G)$ нильпотентна и $\Delta^{\mathfrak{N}}(G) / \Phi(G) = Z(G / \Phi(G))$.*

Доказательство. Из следствия 8.7.1 вытекает нильпотентность подгруппы $\Delta^{\mathfrak{N}}(G)$. По теореме 8.6 $\Delta^{\mathfrak{N}}(G) / \Phi(G)$ является гиперцентром в $G / \Phi(G)$. Так как подгруппа Фраттини группы $G / \Phi(G)$ единичная, то по лемме 7.9 гиперцентр группы $G / \Phi(G)$ совпадает с центром, и теорема доказана.

Следующая лемма доказана Селькиным [1].

Лемма 8.5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация, $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$ и всякая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ — нефраттиниев главный фактор группы G;*

2) *$\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))$.*

Доказательство. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ не входит в $\Phi(G)$, то $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Пусть $G^{\mathfrak{F}} / H$ — главный фактор группы G. Предположим, что H не содержится в $\Phi(G)$. Тогда $HM = G$, где M — некоторая максимальная подгруппа группы G. Подгруппа M $\mathfrak{F}$-абнормальна и по условию леммы входит в $\mathfrak{F}$. Поэтому

$$G / H \simeq M / M \cap H \in \mathfrak{F},$$

откуда следует, что $H \supseteq G^{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Поэтому $H \subseteq \Phi(G)$, а так как $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$, то ясно, что $G^{\mathfrak{F}} / H$ не содержится в $\Phi(G / H)$.

Пусть $p \in \pi(G^{\mathfrak{F}}) \setminus \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))$. Тогда фактор-группа $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ p-разложима. По лемме 4.4 $G^{\mathfrak{F}}$ также p-разложима, т. е. $G^{\mathfrak{F}} = P \times Q$, где P — p-группа. Ввиду выбора p подгруппа P содержится в $\Phi(G)$. Но тогда Q не содержится в $\Phi(G)$. Значит, в G найдется такая максимальная подгруппа R, что $RQ = G$. Подгруппа R $\mathfrak{F}$-абнормальна и по условию леммы $R \in \mathfrak{F}$. Поэтому $G / Q \simeq R / R \cap Q \in \mathfrak{F}$, откуда $Q \supseteq G^{\mathfrak{F}}$, что невозможно.

Лемма доказана.

Теорема 8.9 (Селькин [1], Шеметков [13]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — ступенчатая формация и $G^{\mathfrak{F}} \not\subseteq \Phi(G)$. Тогда выполняется одно из следующих двух утверждений:*

1) *всякая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$ и $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G;*

2) *G обладает $\mathfrak{F}$-абнормальными максимальными подгруппами, не принадлежащими $\mathfrak{F}$, причем пересечение всех таких максимальных подгрупп совпадает с $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$.*

Доказательство. Пусть всякая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$. По лемме 8.5 $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ — нефраттиниев главный фактор группы G. Следовательно, существует максимальная подгруппа M из G, не покрывающая $G^{\mathfrak{F}} / / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$. Так как M $\mathfrak{F}$-абнормальна, то по теореме 8.1 главный фактор $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-эксцентрален, и первое утверждение теоремы верно.

Пусть G обладает $\mathfrak{F}$-абнормальными максимальными подгруппами, не принадлежащими $\mathfrak{F}$, и пусть D — пересечение всех таких подгрупп. Очевидно, $D \supseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \supseteq \Phi(G)$. Если $D \subseteq \Phi(G)$, то утверждение 2) верно. Пусть D не входит в $\Phi(G)$. Тогда $G = MD$, где M — некоторая максимальная подгруппа из G. Если $M \in \mathfrak{F}$, то $G/D \in \mathfrak{F}$, откуда следует, что D содержится только в $\mathfrak{F}$-нормальных максимальных подгруппах, что невозможно. Поэтому M не входит в $\mathfrak{F}$ и является $\mathfrak{F}$-нормальной. Итак, всякая максимальная подгруппа, не содержащая D, является $\mathfrak{F}$-нормальной, откуда следует, что $D \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. Следовательно, $D = \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$, и теорема доказана.

Теорема 8.10 (Шлык [3]). *Пусть группа G не p-разрешима, $p > 2$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *G имеет по крайней мере одну не нормальную не p-нильпотентную максимальную подгруппу;*

2) *пересечение всех не нормальных не p-нильпотентных максимальных подгрупп группы G нильпотентно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}$ —формация всех p-нильпотентных групп. Ввиду условия теоремы $K = G^{\mathfrak{F}} \notin \mathfrak{F}$. Докажем 1). Можно считать, что $O_p(G) = 1$. Пусть P — силовская p-подгруппа группы K. По теореме Томпсона (см. Хупперт [5], с. 438, либо Бусаркин, Горчаков [1], с. 30) в P найдется такая характеристическая подгруппа $R \neq 1$, что $N_K(R) \notin \mathfrak{F}$. Так как $N_G(R) \supseteq N_G(P)$ и по лемме Фраттини $G = N_G(P)K$, то $G = N_G(R)K$. Пусть M — максимальная подгруппа из G, содержащая $N_G(R)$. Тогда $MK = G$, $M \supseteq N_K(R)$, причем $N_K(R)$ не p-нильпотентна. Следовательно, M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из G, не принадлежащая $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F}$ локальна, то мы можем применить теперь теорему 8.9, согласно которой $\Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Так как M $\mathfrak{F}$-абнормальна, то она не нормальна, и нам остается доказать второе утверждение теоремы.

Пусть D — пересечение всех не нормальных не p-нильпотентных максимальных подгрупп группы G. Так как всякая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа не нормальна, то $D \subseteq \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. Так как, по доказанному, $\Delta^{\mathfrak{F}}(G)$ p-нильпотентна, то и D p-нильпотентна. По теореме 8.8 $\Delta^{\mathfrak{N}}(G) \in \mathfrak{N}$. Предположим, что $\Delta^{\mathfrak{N}}(G) \subset D$. Тогда существует не нормальная p-нильпотентная максимальная подгруппа H, не содержащая D. Но тогда $G = HD$, где D нормальна и p-нильпотентна, H p-нильпотентна. А это противоречит тому, что G не p-разрешима. Теорема доказана.

Т е о р е м а 8.11 (Ш л ы к [3]). *В любой неразрешимой группе G существуют не нормальные ненильпотентные максимальные подгруппы, причем пересечение всех таких подгрупп нильпотентно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Ф е й т а — Т о м п с о н а [1] группа G имеет четный порядок. Следовательно, существует такое простое число $p > 2$, что G не p-разрешима. Поскольку множество всех не нормальных ненильпотентных максимальных подгрупп содержит множество всех не нормальных не p-нильпотентных максимальных подгрупп, то результат следует из теоремы 8.10.

Т е о р е м а 8.12 (С е л ь к и н [1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — S_n-замкнутая локальная формация, содержащая $\mathfrak{N}$. Если $H \lhd G$ и $H / H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $K = H \cap \Delta^{\mathfrak{F}}(G)$. Каждая максимальная подгруппа, не содержащая K, является $\mathfrak{F}$-нормальной. Следовательно, по лемме 8.3

$$K / K \cap \Phi(G) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G / K \cap \Phi(G)).$$

Если $K \cap \Phi(G) \neq 1$, то по индукции $H / K \cap \Phi(G) \in \in \mathfrak{F}$, а значит, согласно следствию 4.2.1 $H \in \mathfrak{F}$. Пусть $K \cap \Phi(G) = 1$. Тогда K $\mathfrak{F}$-гиперцентральна в G. Докажем, что K $\mathfrak{F}$-гиперцентральна в H. Пусть L / S — G-главный pd-фактор группы K. Тогда $G / C \in f(p)$, где $C = C_G(L / S)$, f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Так как по теореме 4.7 $f(p)$ S_n-замкнута, то

$$HC / C \simeq H / C_H(L / S) \in f(p).$$

Следовательно, H f-стабилизирует G-главный ряд группы K. Это означает, что $K \subseteq Z_\infty^{\mathfrak{F}}(H)$. Отсюда и из $H / K \in \in \mathfrak{F}$ вытекает, что $H \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

§ 9. Формационная стабильность

1. f-стабильные группы автоморфизмов. Этот пункт мы посвятим выяснению того, в каких случаях f-стабильная группа автоморфизмов группы принадлежит $\langle f \rangle$.

Лемма 9.1. *Пусть A — некоторая группа автоморфизмов группы G. Пусть H — нормальная A-допустимая подгруппа из G, а B — нормальная подгруппа из A, причем $B \subseteq C_A(H) \cap C_A(G / H)$. Пусть $\Gamma = GA$ — полупрямое произведение группы G и ее группы автоморфизмов A. В этих условиях имеют место следующие утверждения:*

1) $[x, \alpha] \in Z(H)$ *для всех* $x \in G$, $\alpha \in B$;

2) $[x, \alpha\beta] = [x, \alpha][x, \beta]$ *для всех* $x \in G$, α, $\beta \in B$;

3) *если L — некоторая A-допустимая подгруппа из H, $C = C_B(G, L)$, $\{x_iH \mid i \in I\}$ — система образующих группы G / H, то существует мономорфизм группы C в прямое произведение $\times_{i \in I} L_i$, где $L_i = L \cap Z(H)$ для всех $i \in I$;*

4) *B абелева и* $\pi(B) \subseteq \pi(Z(H))$.

Доказательство. Так как по условию леммы $x^\alpha H = xH$ для $\alpha \in B$, то $[x, \alpha] = x^{-1}x^\alpha \in H$. Покажем, что $[x, \alpha] \in Z(H)$. Используя то, что H нормальна в G, а B действует тождественно на H, имеем для всех $x \in G$, $\alpha \in B$, $z \in H$: $[x, \alpha] z = x^{-1}x^\alpha z^\alpha = x^{-1}(xz)^\alpha = z[xz, \alpha] = z[(xzx^{-1})x, \alpha] = z[xzx^{-1}, \alpha]^x [x, \alpha] = z[x, \alpha]$. Тем самым первое утверждение леммы доказано. Второе утверждение следует из первого, ввиду коммутаторного тождества:

$$[x, \alpha\beta] = [x, \beta]\,[x, \alpha]^{\beta}.$$

Докажем третье утверждение леммы. Заметим, что $[x_i, \alpha] \in L$ для $\alpha \in C$, так как $(x_iL)^{\alpha} = x_iL$; кроме того, $[x_i, \alpha] \in Z(H)$. Поэтому, учитывая также доказанное утверждение 2), получаем, что отображение

$$\rho\colon \alpha \to \prod_{i \in I} [x_i, \alpha], \qquad \alpha \in C,$$

проще: ρ — гом-зм C в $L \cap Z(H)$?

является гомоморфизмом группы C в прямое произведение $\times_i L_i$, где $L_i = L \cap Z(H)$ для всех $i \in I$. Если α входит в ядро гомоморфизма ρ, то $[x_i, \alpha] = 1$, т. е. $x_i^{\alpha} = x_i$; кроме того, по условию леммы $h^{\alpha} = h$ для всех $h \in H$, а так как G порождается подгруппой H и элементами x_i, $i \in I$, то из всего этого следует, что α — тождественный автоморфизм группы G. Итак, ρ — искомый мономорфизм.

Утверждение 4) следует непосредственно из 3). Лемма доказана.

Лемма 9.2. *Пусть в условиях леммы* 9.1 *подгруппа H обладает секцией M / N, где M и N — A-допустимые подгруппы. Тогда*

$$C_A(M / N) \cap C_A(G / H) \subseteq C_A(B_1 / B_2),$$

где $B_1 = C_B(G, M)$, $B_2 = C_B(G, N)$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что $B_1 = B \cap C_A(G, M)$ нормальна в A. Аналогично, B_2 также нормальна в A, причем $B_1 \supseteq B_2$. Пусть некоторый элемент γ из A действует тождественно на M / N и G / H. Покажем, что тогда γ централизует B_1 / B_2, т. е. $[\gamma, \alpha] \in B_2$ для всех $\alpha \in B_1$. Зафиксируем $\alpha \in B_1$ и пусть $x^{\gamma^{-1}} = xh$, $h \in H$, $x^{\alpha^{-1}} = xm$, $m \in M$, $m^{\gamma} = mn$, $n \in N$. Так как $m = [x, \alpha^{-1}]$, то по лемме 9.1 имеет место $hm = mh$. Учитывая также то, что B действует тождественно на H, имеем

$$x^{[\gamma,\alpha]} = (xh)^{\alpha^{-1}\gamma\alpha} = (xmh)^{\gamma\alpha} = (xhm)^{\gamma\alpha} = (x^{\gamma^{-1}}m)^{\gamma\alpha} = \\ = x^{\alpha}m^{\gamma\alpha} = x^{\alpha}(mn)^{\alpha} = x^{\alpha}mn = xn.$$

Это значит, что $(xN)^{[\gamma,\alpha]} = xN$, т. е. $[\gamma, \alpha] \in B_2$, что и требовалось.

Лемма 9.3. *Пусть A — стабильная группа автоморфизмов группы G. Тогда $\pi(A) \subseteq \pi(\mathrm{F}(G))$.*

Доказательство. Пусть $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots$ $\ldots \supset G_t = 1$ — центральный относительно A ряд группы G. По определению 7.9 этот ряд A-субнормален. По индукции

$$\pi(A / \mathrm{C}_A(G_1)) \subseteq \pi(\mathrm{F}(G_1)) \subseteq \pi(\mathrm{F}(G)). \qquad (1)$$

Так как $\mathrm{C}_A(G_1)$ действует тождественно на G / G_1 и G_1, то по лемме 9.1 имеет место включение

$$\pi(\mathrm{C}_A(G_1)) \subseteq \pi(\mathrm{Z}(G_1)) \subseteq \pi(\mathrm{F}(G)). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает требуемое утверждение.

Теорема 9.1 (Шеметков [13]). *Пусть f — p-постоянный экран, B — нормальная p-подгруппа некоторой группы автоморфизмов A группы G. Пусть G обладает A-композиционным рядом, который централен относительно B и на каждом p-факторе которого A действует f-тождественно. Тогда $B \subseteq \mathrm{Z}_\infty^f(A)$.*

Доказательство. Предположим, что теорема неверна и G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Если p не делит $|\mathrm{F}(G)|$, то $B = 1$ по лемме 9.3. Поэтому p делит $|\mathrm{F}(G)|$, а значит, среди A-композиционных факторов группы G имеется по крайней мере один p-фактор. Будем считать, что B — нормальная p-подгруппа из A наименьшего порядка, такая, что B действует тождественно на всех факторах A-композиционного ряда группы G, но A не действует f-стабильно на B. Пусть $\Gamma = G \leftthreetimes A$ — расширение группы G посредством A, L — минимальная нормальная подгруппа из Γ, содержащаяся в G. Очевидно, G обладает такой нормальной подгруппой H, что $\mathrm{F}(H) \neq 1$ и G / H — главный фактор группы Γ.

Так как для G / L теорема верна, то $A / \mathrm{C}_A(G / L)$, а значит, и A действует f-стабильно на $B\mathrm{C}_A(G / L) / \mathrm{C}_A(G / L)$. Поэтому A ввиду операторного изоморфизма действует f-стабильно на $B / B \cap \mathrm{C}_A(G / L)$. Учитывая выбор B, заключаем отсюда:

$$B \subseteq \mathrm{C}_A(G / L). \qquad (1)$$

Докажем теперь единственность L. Пусть U — еще одна минимальная нормальная подгруппа из Γ, причем $U \subseteq G$. Тогда $B \subseteq \mathrm{C}_A(G / U)$. Таким образом, если $\alpha \in B$, то $[x, \alpha] = x^{-1}x^{\alpha} \in U \cap L = 1$ для всех $x \in G$. Это значит, что $B = 1$; получили противоречие. Таким образом, L — единственная в Γ минимальная нормальная подгруппа, содержащаяся в G. Так как $\mathrm{F}(H) \neq 1$, то отсюда следует, что $L \subseteq \mathrm{F}(H)$.

Рассматривая $A / \mathrm{C}_A(H)$ как группу автоморфизмов группы H, легко заметить, что $A / \mathrm{C}_A(H)$, $B\mathrm{C}_A(H) / \mathrm{C}_A(H)$ и H удовлетворяют условию теоремы. Поэтому, ввиду $|H| < |G|$, группа $A / \mathrm{C}_A(H)$, а значит, и A, действует на $B\mathrm{C}_A(H) / \mathrm{C}_A(H)$ f-стабильно. Учитывая операторный изоморфизм, получаем, что A действует f-стабильно на $B / B \cap \mathrm{C}_A(H)$. Отсюда ввиду (1) и выбора B получаем

$$B \subseteq \mathrm{C}_A(H) \cap \mathrm{C}_A(G / H). \tag{2}$$

Ввиду (2) можно применить лемму 9.1. Из этой леммы прежде всего следует, что $\mathrm{Z}(H) \neq 1$, а значит, L содержится в $\mathrm{Z}(H)$. Далее, существует мономорфизм группы B в прямое произведение нескольких экземпляров группы L, так что L и B оказываются элементарными абелевыми p-группами. Докажем справедливость следующего предложения:

$$G / H \text{ не является } p\text{-группой.} \tag{3}$$

Предположим, от противного, что G / H есть p-группа. Пусть $L = T_0 \supset T_1 \supset \ldots \supset T_n = 1$ есть A-композиционный ряд группы L, являющийся, конечно, отрезком A-композиционного ряда группы G. Построим следующий ряд для B:

$$B = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_n = 1,$$

где $B_i = B \cap \mathrm{C}_A(G, T_i)$. Так как f p-постоянен, то

$$f(G / H) = f(T_{i-1} / T_i) \subseteq f(B_{i-1} / B_i).$$

Поэтому $A / X_i \in f(B_{i-1} / B_i)$, где $X_i = \mathrm{C}_A(G / H) \cap \mathrm{C}_A(T_{i-1} / T_i)$. Из леммы 9.2, полагая $M = T_{i-1}$, $N = T_i$, получаем, что $X_i \subseteq \mathrm{C}_A(B_{i-1} / B_i)$. Таким образом, $A / \mathrm{C}_A(B_{i-1} / B_i)$ принадлежит $f(B_{i-1} / B_i)$, а это означает, что A действует $\mathfrak{f}$-стабильно на B, что невозможно. Это доказывает утверждение (3).

Предположим, что центр группы G отличен от единицы. Тогда ввиду своей единственности L входит в $Z(G)$. Рассмотрим внешнее прямое произведение $W = L \times (G / H)$. Ввиду (3) G / H — характеристическая подгруппа в W, так как L есть p-группа, а G / H — либо абелева q-группа, $q \neq p$, либо характеристически простая неабелева группа. Возьмем произвольный элемент α из B. Покажем, что отображение

$$\rho\colon (r, xH) \to (r[x, \alpha], xH), \quad r \in L, \quad x \in G,$$

есть автоморфизм группы W. Ввиду (1) $[x, \alpha]$ принадлежит L, так что из $xH = yH$ следует $[x, \alpha] = [y, \alpha]$. Поэтому ρ — (однозначное) отображение W в себя. Если (r, xH) и (s, yH) — элементы из W, то $[xy, \alpha] = [x, \alpha]^y [y, \alpha] = [x, \alpha][y, \alpha]$, так как $[x, \alpha] \in L \subseteq Z(G)$. Таким образом,

$$\rho\colon (r, xH)(s, yH) \to (rs[xy, \alpha], xyH) = \\ = (r[x, \alpha], xH)(s[y, \alpha], yH).$$

Учитывая еще, что ρ действует тождественно на L и W/L, получаем, что ρ — автоморфизм группы W. Ввиду характеристичности G / H в W и изоморфизма $W / L \simeq G / H$, ρ действует тождественно на G / H. Значит, ρ — тождественный автоморфизм группы W, откуда $[x, \alpha] = 1$ для всех $x \in G$. Таким образом, $\alpha = 1$, и тем самым доказано, что $B = 1$. Противоречие, доказывающее, что центр группы G равен единице. Это, с учетом $L \subseteq Z(H)$, позволяет утверждать следующее:

$$C_G(L) = H. \tag{4}$$

Заметим, что подгруппа $C_\Gamma(L)$ нормальна в Γ. Поэтому, если $\beta \in C_\Gamma(L)$, $x \in G$, то ввиду (4) имеем

$$[x, \beta] \in C_\Gamma(L) \cap G = H.$$

Отсюда следует, что $C_A(L)$ действует тождественно на G / H, т. е.

$$C_A(L) \subseteq C_A(G / H). \tag{5}$$

Из (5) и леммы 9.2 при $M = L$, $N = 1$ получаем

$$C_A(L) \subseteq C_A(B). \tag{6}$$

Очевидно, $A^* = A / C_A(L)$ можно рассматривать как некоторую группу автоморфизмов группы L. Ввиду условия теоремы A^* действует f-стабильно на группе L, которая является элементарной абелевой p-группой. Следовательно, $A^* / C_{A^*}(T_{i-1} / T_i) \in f(p)$ для любого A^*-композиционного фактора T_{i-1} / T_i группы L. Обозначив через P пересечение всех $C_{A^*}(T_{i-1} / T_i)$, получим, что $A^* / P \in f(p)$ и P стабилизирует A^*-композиционный ряд группы L. Согласно лемме 9.3 P является p-группой. Пусть R / S — произвольный A-главный фактор группы B. Так как ввиду (6) $C_A(L)$ входит в $C_A(R / S)$, причем $A^* = A / C_A(L) \in \mathfrak{N}_p f(p)$, то

$$A / C_A(R / S) \in \mathfrak{N}_p f(p).$$

Отсюда и из леммы 3.9 выводим, что $A / C_A(R / S)$ принадлежит $f(p)$. Тем самым установлено, что B содержится в $Z_\infty^f(A)$. Теорема доказана.

Теорема 9.2 (Шеметков [13]). *Пусть f — примарно постоянный экран, B — нормальная подгруппа некоторой группы автоморфизмов A группы G. Пусть G обладает A-композиционным рядом, который централен относительно B и на каждом абелевом факторе которого A действует f-тождественно. Тогда $B \subseteq Z_\infty^f(A)$.*

Доказательство. Пусть G / H — главный фактор группы $\Gamma = G \rtimes A$. По индукции A действует f-стабильно на $BC_A(H) / C_A(H) \simeq B / C_B(H)$. По лемме 9.1 $C_B(H)$ абелева. По теореме 9.1 группа A действует f-стабильно на каждой силовской подгруппе из $C_B(H)$, а значит, и на всей $C_B(H)$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 9.3 (Шеметков [13]), Шмид [7]). *Пусть f — внутренний примарно постоянный экран. Тогда всякая f-стабильная группа автоморфизмов произвольной группы принадлежит $\langle f \rangle$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$, $A \subseteq \operatorname{Aut} G$ и A f-стабилизирует ряд

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = 1.$$

Тогда $A / C_A(G_{i-1} / G_i) \in f(G_{i-1} / G_i) \subseteq \mathfrak{F}$, а значит, $A / B \in \mathfrak{F}$, где $B = \bigcap_i C_A(G_{i-1} / G_i)$. По теореме 9.2 $B \subseteq Z_\infty^f(A)$. Поэтому $A \in \mathfrak{F}$, что и требуется.

Следствие 9.3.1. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *композиционная формация,* H — $\mathfrak{F}$-*гиперцентральная нормальная подгруппа группы* G. *Тогда* $G / \mathrm{C}_G(H) \in \mathfrak{F}$.

Следствие 9.3.2. *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *композиционная формация. Тогда* $[G^{\mathfrak{F}}, \mathrm{Z}_\infty^{\mathfrak{F}}(G)] = 1$ *для любой группы* G.

Последний результат может быть усилен следующим образом.

Теорема 9.4 (Шеметков [12], [16]). *Пусть* $\mathfrak{F}$ — *композиционная формация,* H — *такая максимальная* $\mathfrak{F}$-*подгруппа группы* G, *что* $HG^{\mathfrak{F}} = G$. *Тогда* $\mathrm{C}_H(G^{\mathfrak{F}}) = \mathrm{Z}_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.

Доказательство. Пусть $Z = \mathrm{Z}_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$, $C = \mathrm{C}_{ZH}(G^{\mathfrak{F}})$. По следствию 9.3.2 $C \supseteq Z$. Очевидно, $C \lhd G$ и если K / L — ZH-главный фактор подгруппы C, то K / L будет и G-главным фактором, причем

$$G / \mathrm{C}_G(K / L) = ZH\mathrm{C}_G(K / L) / \mathrm{C}_G(K / L) \simeq \simeq ZH / \mathrm{C}_{ZH}(K / L).$$

Пусть $K \subseteq Z$. Тогда K / L $\mathfrak{F}$-централен в G. Поэтому согласно сделанному замечанию K / L — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы HZ. Отсюда, учитывая $H \in \mathfrak{F}$, получаем $HZ \in \mathfrak{F}$. А так как H — максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа в G, то $HZ = H$.

Пусть теперь K / L — любой H-главный фактор группы C. Согласно сказанному выше $C \lhd H$ и K / L — главный фактор группы G, причем

$$G / \mathrm{C}_G(K / L) \simeq H / \mathrm{C}_H(K / L) \in f(K / L),$$

так как $H \in \mathfrak{F}$. Следовательно, K / L — $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G. Тем самым мы доказали, что $C \subseteq Z$. Так как $Z \subseteq C$, то мы получаем требуемое равенство $Z = C$. Теорема доказана.

Замечание 1. Максимальная $\mathfrak{F}$-подгруппа H с условием $HG^{\mathfrak{F}} = G$ всегда существует, если $\mathfrak{F}$ — насыщенная (в частности, локальная) формация. Действительно, если $\mathfrak{F}$ насыщена, D — наименьшая (по вложению) подгруппа, порождающая вместе с $G^{\mathfrak{F}}$ всю группу G, то $D \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(D)$ и, следовательно, $D \in \mathfrak{F}$. Теперь над D надстраиваем максимальную $\mathfrak{F}$-подгруппу. С учетом этого замечания из теоремы 9.4 вытекает

Следствие 9.4.1. *В любой группе G существует такая максимальная нильпотентная подгруппа H, что $HG^{\mathfrak{N}} = G$ и для каждой такой подгруппы H выполняется равенство* $C_H(G^{\mathfrak{N}}) = Z_\infty(G)$.

Следующая теорема лишь на первый взгляд кажется более общей, чем теорема 9.3.

Теорема 9.5. *Пусть f — внутренний примарно постоянный экран, A — подгруппа из* $\mathrm{Aut}\, G$ *и пусть для любого A-композиционного фактора H / K группы G выполняются следующие условия:*

1) *если H / K абелев, то он f-централен относительно A;*

2) *если H / K неабелев, то $A / C_A(H / K) \in \langle f \rangle$. Тогда $A \in \langle f \rangle$.*

Доказательство. По теореме 3.2 формация $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$ имеет максимальный внутренний композиционный экран f^* такой, что:

1) $f^*(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p;

2) $f^*(M) = \mathfrak{F}$ для любой неабелевой элементарной группы M. Применяя лемму 3.9, мы видим, что A f^*-стабилизирует A-композиционный ряд группы G. Следовательно, $A \in \mathfrak{F}$ по теореме 9.3.

2. Оценка f-ступени f-стабильной группы. Сначала мы рассмотрим случай, когда f — постоянный экран, а затем сформулируем общую проблему.

Лемма 9.4. *Пусть f — постоянный экран, A — некоторая группа операторов группы G. Тогда для любого $i \geqslant 1$ фактор-группы $K^f_{i-1}(G, A) / K^f_i(G, A)$ и $Z^f_i(G, A) / Z^f_{i-1}(G, A)$ f-центральны относительно A.*

Доказательство. Пусть A действует f-тождественно на M / H_i, $i = 1, 2$. Пусть $C_i = C_A(M / H_i)$. Если $a \in C_1 \cap C_2$, $x \in M$, то $(xH_1)^a = xH_1$, $(xH_2)^a = xH_2$. Отсюда следует, что $x^a = xh_1 = xh_2$, $h_1 \in H_1$, $h_2 \in H_2$. Очевидно, $h_1 = h_2 \in H_1 \cap H_2$, так что $(x(H_1 \cap H_2))^a = x(M_1 \cap H_2)$ для любых $x \in M$, $a \in C_1 \cap C_2$. Следовательно, $C_1 \cap C_2$ действует тождественно на $M / H_1 \cap H_2$. Так как f — постоянный экран, то легко видеть, что A действует f-тождественно на $M / H_1 \cap H_2$. Тем самым доказано, что факторы нижней A-f-цепи группы G A-f-центральны.

Пусть A действует f-тождественно на M_i / H, $i = 1, 2$. Пусть $C_i = C_A(M_i / H)$. Очевидно, $H \triangleleft M_1 \vee$

$\bigvee M_2$, причем $C_1 \cap C_2 \subseteq \mathrm{C}_A(M_1 \bigvee M_2 / H)$. Учитывая, что f — постоянный экран, мы видим, что $M_1 \bigvee M_2 / H$ A-f-центральна. Значит, факторы верхней A-f-цепи группы G являются A-f-центральными. Лемма доказана.

Лемма 9.5. *Пусть f — постоянный экран, A — f-стабильная группа операторов группы G. Если H — A-допустимая подгруппа из G, то $H^{f,A} = 1$ и $s_f(H, A) \leqslant s_f(G, A)$.*

Доказательство. Пусть $K_i = \mathrm{K}_i^f(G, A)$, $k = s_f(G, A)$. Положим $H_i = K_i \cap H$. Так как $K_i \lhd K_{i-1}$, то $H_i = K_i \cap H_{i-1} \lhd H_{i-1}$. Таким образом, ряд

$$H = H_1 \supseteq H_2 \supseteq \ldots \supseteq H_{k-1} = 1 \qquad (*)$$

является A-субнормальным. Так как A действует f-тождественно на K_{i-1} / K_i, то A действует f-тождественно на $H_{i-1}K_i / K_i \simeq H_{i-1} / H_i$. Следовательно, ряд $(*)$ f-централен относительно A. По теореме 7.17 $s_f(H, A) \leqslant k$. Лемма доказана.

Лемма 9.6. *Пусть H и K — группы из формации $\langle f \rangle$, где f — постоянный экран. Тогда*

$$s_f(H \times K) \leqslant \mathrm{Max}\,\{s_f(H),\ s_f(K)\}.$$

Доказательство. Пусть t — наибольшее из чисел $s_f(H)$ и $s_f(K)$. Тогда, ввиду леммы 9.4, H и K обладают f-центральными рядами длины t:

$$H = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = 1,$$
$$K = K_0 \supseteq K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_t = 1.$$

Положим $G = H \times K$, $C_i = \mathrm{C}_G(H_{i-1} / H_i)$, $S_i = \mathrm{C}_G(K_{i-1} / K_i)$. Формация f по условию постоянна, т. е. $f(R) = \mathfrak{H}$ для любой неединичной группы R. Очевидно, $G / C_i \cap S_i \in \mathfrak{H}$. Ясно, что $C_i \cap S_i$ действует тождественно на $H_{i-1}K_{i-1} / H_iK_i$. Поэтому $G / \mathrm{C}_G(H_{i-1}K_{i-1} / H_iK_i) \in \mathfrak{H}$. Следовательно, ряд

$$G = H_0K_0 \supseteq H_1K_1 \supseteq \ldots \supseteq H_tK_t = 1$$

является f-центральным рядом группы G. Так как ввиду леммы 9.4 и теоремы 7.19 число $s_f(G)$ есть наименьшая из длин f-центральных рядов, то лемма доказана.

Теорема 9.6 (Шеметков [18]). *Пусть f — постоянный экран, A — некоторая f-стабильная группа автоморфизмов группы G. Если L — A-допустимая* *нормальная подгруппа из G, то*

$$s_f(\mathrm{C}_A(\mathrm{K}^f(G, A)\, L) \cap \mathrm{C}_A(G / L),\ A) \leqslant s_f(L, A).$$

Доказательство. Введем обозначения: $K = \mathrm{K}^f(G, A)$, $H = KL$, $B = \mathrm{C}_A(H) \cap \mathrm{C}_A(G / L)$. Возьмем нижний A-f-ряд группы L:

$$L = L_0 \supset L_1 \supset \ldots \supset L_n = 1.$$

Построим ряд

$$B = B_0 \supseteq B_1 \supseteq \ldots \supseteq B_n = 1, \qquad (1)$$

где $B_i = B \cap \mathrm{C}_A(G, L_i)$. Нетрудно заметить, что ряд (1) состоит из нормальных подгрупп группы A. По построению, H нормальна в G и A-допустима, B нормальна в A и содержится в $\mathrm{C}_A(H) \cap \mathrm{C}_A(G / H)$. Применяя лемму 9.2 при $M = L_{i-1}$, $N = L_i$, получаем

$$\mathrm{C}_A(L_{i-1} / L_i) \cap \mathrm{C}_A(G/H) \subseteq \mathrm{C}_A(B_{i-1} / B_i). \qquad (2)$$

Так как A действует f-тождественно на L_{i-1} / L_i и G / H, то из (2) следует, что A действует f-тождественно на B_{i-1} / B_i. Тем самым доказано, что ряд (1) является A-f-центральным. Учитывая лемму 9.4 и теорему 7.19, мы убеждаемся, что теорема верна.

Теорема 9.7 (Калужнин [1]). *Пусть A — некоторая группа автоморфизмов группы G. Если A стабилизирует нормальный ряд длины $m \geqslant 1$ группы G, то A нильпотентна и $s(A) \leqslant m - 1$.*

Доказательство. Пусть f — единичный экран. По теореме 9.3 $A \in \langle f \rangle = \mathfrak{N}$. По условию G обладает центральным относительно A и одновременно нормальным рядом:

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = 1, \qquad m \geqslant 1.$$

Очевидно, $\mathrm{K}(G, A)$ содержится в G_1. Будем доказывать теорему индукцией по длине центрального относительно группы автоморфизмов ряда. Если $m = 1$, то $A = 1$, и теорема верна. Пусть $m > 1$. Так как G / G_{m-1} и G_1 обладают A-центральными нормальными рядами длины $m - 1$, то по индукции

$$s(A / \mathrm{C}_A(G / G_{m-1})) \leqslant m - 2, \quad s(A / \mathrm{C}_A(G_1)) \leqslant m - 2.$$

Положим $C = \mathrm{C}_A(G / G_{m-1}) \cap \mathrm{C}_A(G_1)$. Так как A / C изоморфна подгруппе прямого произведения групп $A / \mathrm{C}_A(G / G_{m-1})$ и $A / \mathrm{C}_A(G_1)$, то $s(A / C) \leqslant m - 2$. Применив теорему 9.6 при $L = G_{m-1}$, получаем

$$s(\mathrm{C}_A(\mathrm{K}(G, A)G_{m-1}) \cap \mathrm{C}_A(G / G_{m-1}), A) \leqslant \leqslant s(G_{m-1}, A) \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что $s(C, A) \leqslant 1$, так как C нормальна в A и содержится в $\mathrm{C}_A([G, A]\, G_{m-1}) \cap \mathrm{C}_A(G / G_{m-1})$. Из $s(A / C) \leqslant m - 2$ и $s(C, A) \leqslant 1$ получаем $s(A) \leqslant \leqslant m - 1$. Теорема доказана.

Теорема 9.8 (Ф. Холл [2]). *Пусть некоторая группа автоморфизмов A группы G стабилизирует субнормальный ряд длины $m \geqslant 1$ группы G. Тогда A нильпотентна и $s(A) \leqslant \frac{m(m-1)}{2}$.*

Доказательство. Если $m = 1$, то $A = 1$, и теорема верна. Пусть $m > 1$. Будем доказывать теорему индукцией по длине ряда. По теореме 9.3 A нильпотентна. Рассмотрим субнормальный A-центральный ряд группы G:

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = 1, \quad m > 1.$$

По индукции,

$$s(A / \mathrm{C}_A(G_1)) \leqslant \frac{(m-1)(m-2)}{2}. \tag{1}$$

Очевидно, G_1 содержит A-коммутант группы G. Применяя теорему 9.6 при $L = G_1$ и учитывая, что $\mathrm{C}_A(G / G_1) = A$, получаем

$$s(\mathrm{C}_A(G_1), A) \leqslant s(G_1, A) \leqslant m - 1. \tag{2}$$

Из (1) и (2) получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Замечание 2. Пусть f — постоянный экран, т. е. $f(H) = \mathfrak{H}$ для любой группы $H \neq 1$. Пусть A — подгруппа из $\mathrm{Aut}\, G$, причем G обладает A-f-центральным рядом $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = 1$, $m \geqslant 1$. Положим $C = \bigcap_{i=1}^{m} \mathrm{C}_A(G_{i-1}/G_i)$. Тогда $A/C \in \mathfrak{H}$ и C нильпотентна. Таким образом, ввиду теоремы 9.8 f-ступень группы A ограничена сверху числом, зависящим от m.

Проблема 13. Дополнить теорему 9.3 оценкой $s_f(A) \leqslant \lambda(s_f(G, A))$, где λ — некоторая функция.

3. Стабильные группы автоморфизмов. В этом пункте мы займемся более детальным изучением стабильных групп автоморфизмов.

Теорема 9.9 (Ф. Холл [2]). *Пусть A — подгруппа из* $\mathrm{Aut}\, G$, *причем G обладает таким A-допустимым рядом*

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_m = 1, \quad m \geqslant 1,$$

что для любого $i = 1, 2, \ldots, m$ выполняется следующее условие: $x^\alpha G_i = xG_i$ для всех $\alpha \in A$, $x \in G_{i-1}$. Тогда A нильпотентна ступени $\leqslant \frac{m(m-1)}{2}$.

Доказательство. Ввиду теоремы 9.8 достаточно доказать $\mathrm{K}_{m+1}(G, A) = 1$. Положим $K_{i-1} = \mathrm{K}_i(G, A)$. Очевидно, $K_i = [K_{i-1}, A]$ для любого $i \geqslant 1$. Так как $x^\alpha G_1 = xG_1$ для любых $\alpha \in A$, $x \in G$, то нетрудно заметить, что $K_1 = [G, A]$ содержится в G_1. Пусть уже доказано, что $K_t \subseteq G_t$ для некоторого $t \geqslant 1$. Тогда, если $x \in K_t$, $\alpha \in A$, то ввиду условия теоремы $x^\alpha G_{t+1} = xG_{t+1}$, а значит, $x^{-1}x^\alpha \in G_{t+1}$. Следовательно, $K_{t+1} = [K_t, A] \subseteq G_{t+1}$. Тем самым доказано, что $K_i \subseteq G_i$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$. Но тогда $K_m = 1$, и теорема доказана.

Замечание 3. Следуя Шмиду [1], введем следующее обозначение. Обозначим через $\mathcal{S}_G$ множество всех тех подгрупп из $\mathrm{Aut}\, G$, которые действуют стабильно на G. В общем случае можно использовать символ $\mathcal{S}^f_G$ для обозначения множества всех тех подгрупп из $\mathrm{Aut}\, G$, которые действуют f-стабильно на G.

Лемма 9.7. *Если $G = \langle H, K\rangle$, то $H^G = H^K = H[H, K]$.*

Доказательство. Очевидно, $H[H, K] \subseteq H^G$. Нетрудно заметить, что справедливо и обратное включение. Действительно, если $x \in K$, $h \in H$, то $x^{-1}hx = h[h, x] \in H[H, K]$. Отсюда и из $[H, K] \lhd G$ получаем, что $\mathrm{N}_G(H[H, K]) \supseteq H \vee K = G$, т. е. $H[H, K] \supseteq H^G$. Далее, нормализатор подгруппы H^K содержит K, и так как $G = H \vee K$, то $H^K = H^G$, и лемма доказана.

Лемма 9.8. *Пусть A — нильпотентная подгруппа из* $\mathrm{Aut}\, G$. *Тогда $A \in \mathcal{S}_G$ в том и только в том случае, когда A субнормальна в полупрямом произведении $G \leftthreetimes A$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{S}_G$. Тогда A стабилизирует субнормальный ряд

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_m = 1,$$

где $G_{i-1} = \mathrm{K}_i(G, A)$. Так как $[G_{i-1}, A] = G_i$, то ввиду леммы 9.7 имеем $A^{G_{i-1}} = AG_i \lhd G_{i-1}A$. Таким образом, цепь

$$GA = G_0A \supset G_1A \supset \ldots \supset G_mA = A$$

является субнормальной $(GA - A)$-цепью.

Пусть теперь $A \lhd\lhd GA$. Тогда согласно следствию 7.7.2 $A \subseteq \mathrm{F}(GA)$. Ввиду следствия 4.1.1 A стабилизирует GA-главный ряд группы G. Следовательно, $A \in \mathcal{S}_G$. Лемма доказана.

Замечание 4. Пусть $A \in \mathcal{S}_G$. Тогда A нильпотентна и субнормальна в $\Gamma = G \rtimes A$. По теореме 7.7 $A \subseteq \mathrm{F}(\Gamma)$, причем ясно, что $\mathrm{F}(\Gamma) \cap G = \mathrm{F}(G)$. Следовательно, $\mathrm{F}(\Gamma) = A\mathrm{F}(G)$. Отсюда вытекает, что $\pi(A) \subseteq \subseteq \pi(\mathrm{F}(G))$ (лемма 9.3).

Лемма 9.9. *Если* $A \in \mathcal{S}_G$ *и* $\Gamma = G \rtimes A$, *то* $A^\Gamma = A[G, A] \subseteq \mathrm{F}(\Gamma)$, $[G, A] \subseteq \mathrm{F}(G)$ *и* $\pi(A) = \pi([G, A])$.

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(A)$. Согласно следствию 7.7.2 A^Γ является нильпотентной π-группой. По лемме 9.7 $A^\Gamma = A[G, A]$. Так как $[G, A]$ нормальна в Γ и нильпотентна, то $[G, A] \subseteq \mathrm{F}(G)$. Допустим, что некоторое простое p из π не делит порядок $[G, A]$. Тогда силовская p-подгруппа из A^Γ нормальна в Γ и является силовской p-подгруппой из A. Получили противоречие. Значит, $\pi \subseteq \pi([G, A])$. Обратное включение также выполняется, так как $[G, A] \subseteq A^\Gamma$ и $\pi(A^\Gamma) = \pi(A) = \pi$. Лемма доказана.

Теорема 9.10 (Шмид [1]). *Если* $A \in \mathcal{S}_G$, *то*

$$\pi(A) \subseteq \pi(\mathrm{F}(G)) \cap (\pi(\mathrm{F}(G) / \mathrm{Z}_\infty(G)) \cup \pi(G / G')).$$

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $|A| = p$ — простое число. По лемме 9.3, $p \in \pi(\mathrm{F}(G))$. Предположим, что p не делит ни $|\mathrm{F}(G) / \mathrm{Z}_\infty(G)|$, ни $|G / G'|$. Тогда p делит $|\mathrm{Z}_\infty(G)|$. Так как $\mathrm{Z}_\infty(G)$ нильпотентна, то G обладает минимальной нормальной подгруппой K, содержащейся в $\mathrm{Z}_\infty(G)$ и являющейся p-группой. Так как K гиперцентральна в G, то K должна содержаться в $\mathrm{Z}(G)$. Итак, p делит $|\mathrm{Z}(G)|$. Следовательно, $\Gamma = G \rtimes A$ обладает минимальной нормальной подгруппой L, содержащейся в $Z(G)$ и являющейся p-группой. Так как $A \subseteq F(\Gamma)$, то A действует тождественно на L. Таким образом, $L \subseteq Z(\Gamma)$, $|L| = p$ и AL абелева.

Рассмотрим G/L. Предположим, что A не действует тождественно на G/L. По индукции

$$p \in \pi(F(G/L)/Z_\infty(G/L)) \cup \pi((G/L)/(G/L)').$$

Так как $L \subseteq Z(G)$, то $F(G)/L = F(G/L)$, $Z_\infty(G/L) = Z_\infty(G)/L$. Кроме того, $(G/L)' = G'L/L$, откуда следует, что $|(G/L)/(G/L)'|$ делит $|G/G'|$. Следовательно, из справедливости теоремы для G/L вытекает справедливость ее и для G.

Предположим теперь, что A действует тождественно на G/L. Это значит, что в группе Γ/L подгруппа AL/L содержится в $Z(\Gamma/L)$. Следовательно, AL — гиперцентральная нормальная подгруппа группы Γ. По следствию 9.3.1 $\Gamma/C_\Gamma(AL) \in \mathfrak{N}$. Так как $\Gamma = GA$, то

$$\Gamma/C_\Gamma(AL) \simeq G/G \cap C_\Gamma(AL) = G/C_G(AL) \in \mathfrak{N}.$$

Отсюда и из того, что p не делит $|G/G'|$, заключаем, что p не делит $|G/C_G(AL)|$. Следовательно, $\Gamma^* = \Gamma/C_\Gamma(AL)$ можно рассматривать как p'-группу автоморфизмов группы AL. Кроме того, $C_\Gamma(AL) \neq \Gamma$, так как $A \subseteq \mathrm{Aut}\, G$. Так как Γ^* действует тождественно на L, то $Z(AL \leftthreetimes \Gamma^*) \cap AL = L$. Согласно лемме 5.10 $AL = L \times L_1$, где L_1 — некоторая Γ^*-допустимая подгруппа. Но тогда $L_1 \triangleleft \Gamma$, и так как AL гиперцентральна в Γ, то $L_1 \subseteq Z(\Gamma)$, а значит, $AL \subseteq Z(\Gamma)$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Лемма 9.10. *Пусть A — некоторая p-подгруппа из* $\mathrm{Aut}\, G$. *Тогда $A \in \mathcal{S}_G$ в том и только в том случае, когда* $A = C_A(G/O_p(G))$.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{S}_G$, то по лемме 9.9 подгруппа $[G, A]$ является нормальной p-подгруппой группы G. Поэтому $[G, A] \subseteq O_p(G)$, и утверждение верно.

Обратно, пусть A действует тождественно на $G/O_p(G)$. Заметим, что $O_p(G)$ как характеристическая подгруппа является A-допустимой. По лемме 3.9 A стабилизирует A-композиционный ряд группы $O_p(G)$. Следовательно, $A \in \mathcal{S}_G$. Лемма доказана.

Лемма 9.11. *Пусть A и B — p-группы из $\mathcal{S}_G$. Тогда $\langle A, B\rangle \in \mathcal{S}_G$ в том и только в том случае, когда $\langle A, B\rangle$ является p-группой.*

Доказательство. По лемме 9.10 группы A и B действуют тождественно на $G / O_p(G)$. Но тогда $H = \langle A, B\rangle$ действует тождественно на $G / O_p(G)$. Если H — p-группа, то $H \in \mathcal{S}_G$ по лемме 9.10. Обратно, если $H \in \mathcal{S}_G$, то по лемме 9.9 выполняется равенство $\pi([G,H]) = \pi(H)$, и так как $[G, H] \subseteq O_p(G)$, то H является p-группой. Лемма доказана.

Теорема 9.11 (Шмид [1]). *Пусть A — π-группа из $\mathcal{S}_G$, B — π'-группа из $\mathcal{S}_G$. Тогда $\langle A, B\rangle \in \mathcal{S}_G$. В частности, $\langle A, B\rangle = A \times B$.*

Доказательство. Пусть N — $\mathfrak{N}_\pi$-радикал группы G. По лемме 9.9 группа A действует тождественно на G / N, т. е. $[G, A] \subseteq N$. Следовательно, A стабилизирует субнормальный ряд

$$G \supseteq N \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_m = 1, \quad m \geqslant 1.$$

Так как B действует стабильно на N, то $B / C_B(N)$ является $\pi(N)$-группой по лемме 9.3. Так как B — π'-группа, N — π-группа, то $B = C_B(N)$. Таким образом, B стабилизирует субнормальный ряд

$$G \supseteq K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_t = N \supseteq 1, \quad t \geqslant 1.$$

Очевидно, что $\langle A, B\rangle$ стабилизирует субнормальный ряд

$$G \supseteq K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_t = N \supseteq N_1 \supseteq \ldots \supseteq N_m = 1.$$

Следовательно, $\langle A, B\rangle$ нильпотентна и $\langle A, B\rangle = A \times B$. Теорема доказана.

Лемма 9.12. *Пусть A — подгруппа из* $\operatorname{Aut} G$. *Если каждая силовская подгруппа из A принадлежит $\mathcal{S}_G$, то $A \in \mathcal{S}_G$.*

Доказательство. Пусть P и Q — силовские подгруппы из A различных порядков. По теореме 9.11 $\langle P, Q\rangle = P \times Q \in \mathcal{S}_G$. Таким образом, A нильпотентна. Представим A в виде $A = A_1 \times A_2$, где $(|A_1|, |A_2|) = 1$, $|A_i| < |A|$, $i = 1, 2$. По индукции, $A_i \in \mathcal{S}_G$, $i = 1, 2$. Но тогда по теореме 9.11 группа A принадлежит $\mathcal{S}_G$, и лемма доказана.

Теорема 9.12 (Шмид [1]). *Пусть $A \in \mathcal{S}_G$, $B \in \mathcal{S}_G$. Тогда $\langle A, B\rangle \in \mathcal{S}_G$ в том и только в том случае, когда $\langle A, B\rangle$ нильпотентна.*

Доказательство. Необходимость вытекает из теоремы 9.8. Пусть $H = \langle A, B\rangle$ нильпотентна. Докажем, что $H \in \mathcal{S}_G$. Очевидно, для любого простого числа p силовская p-подгруппа из H порождается силовской p-подгруппой из A и силовской p-подгруппой из B. Отсюда и из леммы 9.11 вытекает, что каждая силовская подгруппа из H принадлежит $\mathcal{S}_G$. По лемме 9.12 и группа H принадлежит $\mathcal{S}_G$. Теорема доказана.

Замечание 5. Пусть G — нециклическая элементарная абелева p-группа. Если P_1 и P_2 — различные силовские p-подгруппы из $\mathrm{Aut}\, G$, то P_1 и P_2 содержатся в $\mathcal{S}_G$, но $\langle P_1, P_2\rangle \not\subseteq \mathcal{S}_G$. Этот пример показывает, что не всегда $\mathcal{S}_G$ образует подрешетку решетки подгрупп $\mathrm{Aut}\, G$.

Лемма 9.13. *Пусть $A \in \mathfrak{N}$, $A \subseteq \mathrm{Aut}\, G$. Тогда A стабилизирует* $\mathrm{Aut}\, G$*-главный ряд группы G в том и только в том случае, когда A субнормальна в голоморфе группы G.*

Доказательство. Пусть A стабилизирует $\mathrm{Aut}\, G$-главный ряд группы G. Пусть S — пересечение централизаторов в $\mathrm{Aut}\, G$ всех $\mathrm{Aut}\, G$-главных факторов группы G. Тогда $S \lhd \mathrm{Aut}\, G$ и $A \subseteq S$. По теореме 9.8 S нильпотентна. Следовательно, $A \lhd\lhd S \lhd \mathrm{Aut}\, G$, откуда получаем $A \lhd\lhd \mathrm{Aut}\, G$. Отсюда вытекает, что $G \leftthreetimes A \lhd\lhd$ $\lhd\lhd G \leftthreetimes \mathrm{Aut}\, G$. Так как по лемме 9.8 подгруппа A субнормальна в $G \leftthreetimes A$, то мы получаем, что A субнормальна в голоморфе G.

Обратно, пусть $A \lhd\lhd G \leftthreetimes \mathrm{Aut}\, G$. Тогда, по теореме 7.3, $A \lhd\lhd \mathrm{Aut}\, G$ и $A \lhd\lhd G \leftthreetimes A$. По лемме 9.8 группа A содержится в $\mathcal{S}_G$ и является нильпотентной Согласно следствию 7.7.2

$$S = \langle A^\alpha \mid \alpha \in \mathrm{Aut}\, G\rangle \subseteq \mathrm{F}\,(\mathrm{Aut}\, G).$$

Так как $A^\alpha \lhd\lhd G \leftthreetimes \mathrm{Aut}\, G$, то, по доказанному, $A^\alpha \in$ $\in \mathcal{S}_G$. Так как S нильпотентна и порождается подгруппами A^α, $\alpha \in \mathrm{Aut}\, G$, то по теореме 9.12 группа S принадлежит $\mathcal{S}_G$. Следовательно, $\mathrm{K}_m\,(G, S) = 1$ для некоторого m. Так как $S \lhd \mathrm{Aut}\, G$, то $[G, S] = \mathrm{K}_2\,(G, S)$ нормальна в G и $\mathrm{Aut}\, G$-допустима. Если доказано, что $\mathrm{K}_i\,(G, S)$ — характеристическая подгруппа группы G, то ввиду $\mathrm{K}_{i+1}\,(G, S) = [\mathrm{K}_i\,(G, S), S]$ мы получаем, что $\mathrm{K}_{i+1}\,(G, S)$ также характеристична в G. Тем самым доказано, что S стабилизирует следующий характеристический ряд группы G:

$$G = \mathrm{K}_1(G, S) \supseteq \mathrm{K}_2(G, S) \supseteq \ldots \supseteq \mathrm{K}_m(G, S) = 1.$$

Лемма доказана.

Теорема 9.13 (Шмид [2]). *$\mathcal{S}_G$ образует подрешетку решетки* $\mathrm{L}(\mathrm{Aut}\, G)$ *тогда и только тогда, когда каждая группа из $\mathcal{S}_G$ стабилизирует* Aut G*-главный ряд группы G.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{S}_G$ является решеткой. Тогда

$$T = \langle A \mid A \in \mathcal{S}_G \rangle \in \mathcal{S}_G.$$

Очевидно, $T \lhd \mathrm{Aut}\, G$. Применяя теорему 9.8 и лемму 9.8, получаем, что $T \lhd\lhd TG \lhd G \rtimes \mathrm{Aut}\, G$. Значит, T субнормальна в $G \rtimes \mathrm{Aut}\, G$ и по лемме 9.13 стабилизирует Aut G-главный ряд группы G. Необходимость очевидна. Теорема доказана.

4. Внешняя характеризация сверхразрешимости. Теорему 9.9 можно рассматривать как внешнюю характеризацию нильпотентности. В этом пункте мы решим задачу нахождения внешней характеризации сверхразрешимости.

Определение 9.1. Пусть G — группа подстановок множества Ω, т. е. G есть подгруппа симметрической группы $S = \mathrm{S}_\Omega$. Определим гомоморфизм $\varphi\colon \mathrm{N}_S(G) \to \mathrm{Aut}\, G$ следующим равенством:

$$x^{n^\varphi} = n^{-1}xn, \quad n \in \mathrm{N}_S(G), \quad x \in G.$$

Группу $\mathrm{P}(G) = (\mathrm{N}_S(G))^\varphi$ назовем *группой подстановочных автоморфизмов* группы G.

Очевидно, $\mathrm{P}(G) \simeq \mathrm{N}_S(G) / \mathrm{C}_S(G)$ и $\mathrm{In}\, G \subseteq \mathrm{P}(G)$.

Лемма 9.14. *Пусть $\rho\colon G \to \mathrm{S}_\Omega$ есть точное дважды транзитивное подстановочное представление группы G. Пусть H — подгруппа из G индекса $n = |\Omega|$. Пусть φ — правое H-регулярное представление группы G. Если H^ρ интранзитивна на Ω, то справедливы следующие утверждения:*

1) *H^ρ имеет точно две орбиты на Ω;*

2) *характеры представлений ρ и φ равны.*

Доказательство. Пусть χ — характер представления ρ. Так как группа G^ρ дважды транзитивна на Ω, то $\chi = 1_G + \theta$, где 1_G — главный характер, θ — абсолютно неприводимый характер группы G

(см. М. Холл [1], теорема 16.6.15). Пусть s — число орбит группы H^ρ на Ω. По теореме 16.6.13 из книги М. Холла [1] ограничение $\chi|_H$ характера χ на H содержит 1_H с кратностью s. По условию $s > 1$. Очевидно, $\theta|_H$ содержит характер 1_H с кратностью $s - 1$.

Пусть 1_H^* — характер группы G, индуцированный характером 1_H. Известно (М. Холл [1], теорема 16.7.1), что 1_H^* есть характер транзитивного представления φ степени $|G : H| = n$. Следовательно, ввиду теоремы 16.6.13 из книги М. Холла [1] характер 1_H^* содержит главный характер 1_G с кратностью 1. Так как степень характера θ равна $n - 1$, то θ входит в 1_H^* с кратностью $\leqslant 1$.

Применив теорему взаимности Фробениуса (М. Холл [1], теорема 16.7.3) к характерам θ и 1_H, получаем

$$s - 1 = (\theta|_H, 1_H) = (\theta, 1_H^*) \in \{0, 1\}.$$

Так как $s > 1$, то отсюда вытекает, что $s - 1 = 1$. Следовательно, $1_H^* = 1_G + \theta = \chi$. Лемма доказана.

Лемма 9.15. *Пусть G — дважды транзитивная группа подстановок множества Ω, $|\Omega| = n \geqslant 2$. Пусть ρ: $G \to \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{Z})$ — соответствующее представление группы G подстановочными матрицами над кольцом $\boldsymbol{Z}$ всех целых чисел. Тогда централизатор группы G^ρ в $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{Z})$ состоит из матриц вида $aE + bJ$, где E — единичная матрица, $a \in \boldsymbol{Z}$, $b \in \boldsymbol{Z}$, J — матрица, все элементы которой равны* 1.

Доказательство. Пусть (i, j) и (k, l) — элементы $\Omega \times \Omega$, причем $i \neq j$, $k \neq l$. По условию существует такая подстановка $x \in G$, что $ix = k$, $jx = l$. Если $\rho(x) = (x_{rs})$, то $x_{ik} = x_{jl} = 1$. Пусть $A = (a_{rs})$ — такая матрица из $\mathrm{GL}(n, \boldsymbol{Z})$, что $A\rho(x) = \rho(x)A$. Тогда $a_{kk} = a_{ii}$, $a_{ll} = a_{jj}$, $a_{kl} = a_{ij}$, $a_{lk} = a_{ji}$. Так как пары (i, j), (k, l) взяты произвольно, а группа G дважды транзитивна, то мы получаем, что все диагональные элементы матрицы A равны между собой и все недиагональные элементы матрицы A равны между собой. Тем самым лемма доказана.

Лемма 9.16. *Пусть G — дважды транзитивная группа подстановок множества Ω, $|\Omega| = n \geqslant 2$. Пусть α — элемент нечетного порядка r из* $\mathrm{Aut}\, G$. *Пусть* $о \in \Omega$ *и $G_о^\alpha$ имеет на Ω орбиту длины k, взаимно простой с n. Тогда либо $k = 1$, либо $k = n - 1$ и $\alpha \in \mathrm{P}(G)$.*

Доказательство. Если $n = 2$, то лемма тривиальна. Пусть $n > 2$. Не ограничивая общности, будем считать, что множество Ω — это множество всех различных левых смежных классов по G_0:

$$\Omega = \{G_0, G_0g_2, \ldots, G_0g_n\}.$$

Каждой постановке $g \in G$ поставим в соответствие по известному правилу подстановочную матрицу $M(g)$. Мы получаем матричное представление M: $G \to \mathrm{GL}(n, C)$, где C — поле комплексных чисел. Положим $H = G_0^{\alpha}$. Пусть φ — правое H-регулярное представление группы G. Тогда G^{φ} является группой подстановок множества

$$\Omega_1 = \{H, Hg_2^{\alpha}, \ldots, Hg_n^{\alpha}\}.$$

Поставив в соответствие подстановке g^{φ} множества Ω_1 матрицу $M_1(g)$, мы получим матричное представление M_1: $G \to C\mathrm{L}(n, C)$. Так как $|G:H| = n$, то по лемме 9.14 подгруппа H имеет точно две орбиты на Ω и представления M и M_1 имеют одинаковые характеры. Но тогда представления M и M_1 эквивалентны (Кэртис, Райнер [1], теорема 30.14). Следовательно, существует такая невырожденная матрица $K \in \mathrm{GL}(n, C)$, что для любого $x \in G$ выполняется равенство $M_1(x) K = KM(x)$. Из $G_0g_ix^{\alpha^{-1}} = G_0g_j$ следует $Hg_i^{\alpha}x = Hg_j^{\alpha}$, т. е. $M_1(x) = M(x^{\alpha^{-1}}) = M(g)$, где $g = x^{\alpha^{-1}}$. Таким образом, получаем

$$M(g) K = KM(g^{\alpha}) \text{ для любого } g \in G. \tag{1}$$

Из (1) вытекает, что K содержится в нормализаторе $\mathrm{Im}\, M$. Поэтому, если мы найдем подстановочную матрицу K, удовлетворяющую (1), то тем самым и будет доказано, что $\alpha \in \mathrm{P}(G)$.

Равенство (1) означает, что определенные элементы $k_{\tau\beta}$ матрицы K совпадают. Следовательно, существует ненулевая матрица K, удовлетворяющая (1) и такая, что ее элементы $k_{\tau\beta}$ равны 1 либо 0. Ввиду транзитивности группы G каждая строка и каждый столбец матрицы K (отныне эту матрицу мы и будем исследовать) содержат одно и то же число единиц (пусть это число равно l). Специализируя равенство (1) по отношению к элементам $g \in H$, мы находим, что H отображает множество из l

точек Ω на себя. Так как H имеет точно две орбиты на Ω, то либо $l = k$, либо $l = n - k$. Мы можем считать (изменяя обозначение, если необходимо), что $l = k \leqslant \frac{n}{2}$. Так как $(n, k) = 1$ и $n > 2$, то $k < \frac{n}{2}$. Таким образом, мы имеем:

$$1 \leqslant k < \frac{n}{2}, \quad (k, n) = 1, \tag{2}$$

$$Ke = K^*e = ke, \tag{3}$$

где K^* — матрица, эрмитово сопряженная с K, e — столбец, все элементы которого равны 1.

Из (1) мы можем получить две $n \times n$-матрицы, которые перестановочны с $M(g)$ для любого $g \in G$. Во-первых, применяя операцию $*$ к (1) и учитывая, что подстановочные матрицы ортогональны, получаем

$$K^*M(g^{-1}) = M(g^{-\alpha})K^*,$$

$$M(g)KK^* = KK^*M(g) \text{ для любого } g \in G. \tag{4}$$

Во-вторых, заменяя g на g^{α}, $g^{\alpha^2}, \ldots, g^{\alpha^{r-1}}$, мы из (1) получаем

$$M(g^{\alpha})K = KM(g^{\alpha^2}), \ldots, M(g^{\alpha^{r-1}})K = KM(g),$$

что приводит к следующему:

$$M(g)K^r = (M(g)K)K^{r-1} = K(M(g^{\alpha})K)K^{r-2} = \\ = K^2(M(g^{\alpha^2})K)K^{r-3} = \ldots = K^rM(g).$$

Таким образом,

$$M(g)K^r = K^rM(g) \text{ для любого } g \in G. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) показывают, что KK^* и K^r централизуют образ группы G при гомоморфизме M. Следовательно, по лемме 9.15

$$KK^* = aE + bJ, \quad K^r = cE + dJ, \tag{6}$$

где a, b, c, d — целые числа. Умножая (6) на единичный вектор-столбец e и учитывая (3), получаем

$$k^2e = ae + bne, \quad k^re = ce + dne,$$

$$k^2 = a + bn, \quad k^r = c + dn. \tag{7}$$

Первое равенство из (6) показывает, что K — нормальная матрица, т. е. $KK^* = K^*K$. Поэтому K обладает собственным вектором f, который ортогонален e. Если мы обозначим соответствующее собственное значение через m, то $Kf = mf$ и, ввиду нормальности K, имеем $K^*f = \bar{m}f$. Умножая равенства (6) на f, получаем

$$m\bar{m} = a, \quad m^r = c. \tag{8}$$

Так как по условию леммы r нечетно, то из (8) следует, что $|m|$ — рациональное число. Но так как m есть собственное значение матрицы K, элементы которой — целые числа, то m — целое алгебраическое число. Следовательно, $|m|$ — целое рациональное число. Отсюда и из равенств (7) и (8) получаем сравнения:

$$k^2 \equiv |m|^2 \pmod{n}, \tag{9}$$

$$k^r \equiv \pm |m|^r \pmod{n}. \tag{10}$$

Так как k и n взаимно просты, то мы получаем

$$k \equiv \pm |m| \pmod{n}. \tag{11}$$

Так как K состоит из нулей и единиц, то из первого равенства (6) заключаем, что $b \geqslant 0$. Поэтому из (7) и (8) находим

$$|m|^2 = a = k^2 - bn \leqslant k^2. \tag{12}$$

Следовательно, $|m| \leqslant k$; поэтому ввиду (2) имеем

$$0 \leqslant |m| \leqslant k < \frac{n}{2}.$$

Это вместе с (11) приводит к равенству $k = |m|$. Следовательно, ввиду (12) $b = 0$. Таким образом, (6) приводит к $KK^* = aE$. Последнее означает, что любые две различные строки матрицы K ортогональны. Так как элементы из K неотрицательны и каждый столбец из K содержит точно k единиц, то мы имеем $k = 1$. Это означает, что K — подстановочная матрица, что и требуется. Лемма доказана.

Теорема 9.14 (Виландт [8]). *Если G — простая группа, содержащая подгруппу H простого индекса p, то* Out G *сверхразрешима.*

Доказательство. Если $|G| = p$, то утверждение тривиально. Пусть $|G| \neq p$. Тогда правое H-регулярное представление ρ группы G будет транзитивным степени p. Так как $H_G = 1$, то представление ρ точное, а значит, G можно рассматривать как группу подстановок множества своих левых смежных классов по H. По теореме Бернсайда (Хупперт [5], с. 609), группа G дважды транзитивна. Обозначим через H стабилизатор точки. Очевидно, $|G:H| = p > 2$, причем p не делит $|H|$ (последнее вытекает из того, что симметрическая группа p символов имеет порядок $p!$).

Пусть α — автоморфизм нечетного порядка группы G. Тогда орбиты группы H^α имеют длины, делящие $|H|$, а значит, взаимно просты с p. По лемме 9.16 $\alpha \in \mathrm{P}(G)$. Следовательно, 2-корадикал $\mathrm{O}^2(\mathrm{Aut}\, G)$ группы $\mathrm{Aut}\, G$ содержится в $\mathrm{P}(G)$.

Пусть S — симметрическая группа p символов, $N = \mathrm{N}_S(G)$, $C = \mathrm{C}_S(G)$, P — силовская p-подгруппа из G. Имеем

$$\mathrm{P}(G) / \mathrm{In}\, G \simeq N / C / GC / C \simeq N / GC = \\ = \mathrm{N}_N(P)\, G / GC \simeq \mathrm{N}_N(P) / \mathrm{N}_N(P) \cap GC.$$

Известно, что в S подгруппа P самоцентрализуема (Хупперт [5], теорема V.21.1). Поэтому $\mathrm{C}_S(P) = \mathrm{C}_N(P)$ и

$$\mathrm{N}_N(P) \cap GC \supseteq P = \mathrm{C}_N(P).$$

Итак, $\mathrm{P}(G) / \mathrm{In}\, G$ изоморфна секции группы $\mathrm{N}_N(P) / \mathrm{C}_N(P)$, а значит, является циклической группой порядка, делящего $p - 1$. Кроме того, как замечено выше, $R = \mathrm{O}^2(\mathrm{Aut}\, G) \subseteq \mathrm{P}(G)$. Следовательно, $\mathrm{Aut}\, G / \mathrm{In}\, G$ есть расширение циклической группы $R\, \mathrm{In}\, G / \mathrm{In}\, G$ (являющейся подгруппой группы $\mathrm{P}(G) / \mathrm{In}\, G$) с помощью 2-группы $\mathrm{Aut}\, G / R\, \mathrm{In}\, G$. Теорема доказана.

Лемма 9.17. *Пусть f — примарно постоянный экран, A — некоторая группа операторов разрешимой группы G. Пусть G обладает A-допустимым рядом*

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_t = 1, \qquad t \geqslant 1,$$

таким, что для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ индекс $|G_{i-1} : G_i|$ есть степень простого числа и $A / \mathrm{C}_A(G_{i-1}, G_i) \in f(p_i)$, где $p_i \in \pi(G_{i-1} : G_i)$. Тогда A действует f-стабильно на G.

Доказательство. Если G абелева, то утверждение очевидно. Пусть G неабелева и K — нетривиальная характеристическая подгруппа из G. Рассмотрим ряды:

$$G / K = G_0 / K \supseteq G_1K / K \supseteq \ldots \supseteq G_tK / K = K / K,$$

$$K = K \cap G_0 \supseteq K \cap G_1 \supseteq \ldots \supseteq K \cap G_t = 1.$$

Очевидно, $C_A(G_{i-1}, G_i) \subseteq C_A(G_{i-1}K, G_iK) \cap C_A(K \cap G_{i-1}, K \cap G_i)$. Учитывая еще, что $|G_{i-1}K : G_iK| = |G_{i-1} : G_i| : |G_{i-1} \cap K : G_i \cap K|$, получаем, что построенные ряды удовлетворяют условию теоремы. По индукции A действует f-стабильно на G / K и K, что и доказывает лемму.

Лемма 9.18. *Пусть A — некоторая группа операторов разрешимой группы G. Пусть H, K — A-допустимые подгруппы из G такие, что $H \supseteq K$ и $|H : K| = p$ — простое число. Тогда $A / C_A(H, K)$ — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$.*

Доказательство. Можно считать, что $H = G$. Пусть G / M — главный фактор группы $\Gamma = G \leftthreetimes A$. Если $M \subseteq K$, то $M = K$ и лемма верна. Пусть $MK = G$. Легко заметить, что $C_A(G, K) = C_A(M, M \cap K)$, $|M : M \cap K| = p$. Так как для M лемма верна по индукции, то она верна и для G.

Теорема 9.15 (Шеметков [13]). *Пусть f — экран формации $\mathfrak{F}$ всех сверхразрешимых групп, A — некоторая группа автоморфизмов разрешимой группы G, причем G обладает A-допустимым рядом $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = 1$ с простыми индексами $|G_{i-1} : G_i|$. Тогда A сверхразрешима и является f-стабильной группой автоморфизмов группы G.*

Доказательство. Пусть f_1 — такой внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, что для любого простого p формация $f_1(p)$ состоит из всех абелевых групп экспоненты, делящей $p - 1$. По лемме 9.17 и 9.18 A — f_1-стабильная группа автоморфизмов группы G. По теореме 9.3 $A \in \mathfrak{F}$. Так как группа G разрешима, то применение леммы 5.8 завершает доказательство.

Теорема 9.16 (Шеметков [13]). *Пусть A — некоторая группа автоморфизмов группы G, причем G обладает A-допустимым рядом $G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = 1$ с простыми индексами $|G_{i-1} : G_i|$. Тогда A сверхразрешима.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что через каждую нормальную A-допустимую подгруппу K группы G можно провести A-допустимый ряд с простыми индексами. Такой ряд можно получить, выбрасывая повторения, из следующего ряда:

$$G = G_0K \supseteq G_1K \supseteq \ldots \supseteq G_tK = K = K \cap G_0 \supseteq \\ \supseteq K \cap G_1 \supseteq \ldots \supseteq K \cap G_t = 1.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно обратить внимание на равенство:

$$|G_{i-1}K : G_iK| = |G_{i-1} : G_i| : |G_{i-1} \cap K : G_i \cap K|.$$

Итак, условию теоремы удовлетворяют ядро и образ любого A-гомоморфизма группы G, а также любой A-композиционный фактор группы G. В частности, все абелевы A-композиционные факторы группы G имеют простые порядки.

Ввиду теоремы 9.15 будем в дальнейшем считать, что G неразрешима. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть длина A-композиционного ряда группы G больше 1. По индукции A индуцирует сверхразрешимую группу автоморфизмов в каждом A-композиционном факторе группы G. Поэтому A / B сверхразрешима, где B действует тождественно на всех A-композиционных факторах группы G. Беря локальный экран f такой, как в доказательстве теоремы 9.15, и применяя теорему 9.2, получаем, что A сверхразрешима.

Второй случай. Пусть G не имеет нетривиальных нормальных A-допустимых подгрупп. По условию теоремы $|G : G_1| = p$ — простое число. Если H — нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в G_1, то $H^\alpha \subseteq G_1$ для всех $\alpha \in A$, поэтому порождение $\langle H^\alpha | \alpha \in A \rangle$ является A-допустимой нормальной подгруппой группы G. Таким образом, в рассматриваемом случае в G_1 нет неединичных нормальных подгрупп группы G. Отсюда заключаем, что G изоморфна подгруппе симметрической группы p символов, а значит, силовская p-подгруппа G имеет порядок p. Отсюда и из того, что G характеристически проста, заключаем, что G — простая группа.

Так как G проста и содержит подгруппу G_1 индекса p, то по теореме 9.14 группа $\operatorname{Out} G$ сверхразрешима. По индукции $A / \mathrm{C}_A(G_1)$ также сверхразрешима. Поэтому сверхразрешима и группа A / C, где $C = \mathrm{C}_A(G_1) \cap \cap \mathrm{In}\, G$. Пусть ε — изоморфное отображение группы G на группу ее внутренних автоморфизмов $\mathrm{In}\, G$; если $x \in G$, то x^ε — внутренний автоморфизм, производимый элементом x. Пусть L — полный прообраз подгруппы C при изоморфизме ε. Так как G проста и G_1 является A-допустимой, то $L \subseteq G_1$, причем из $C \subseteq \mathrm{C}_A(G_1)$ следует, что L содержится в центре подгруппы G_1. Так как ε является даже A-изоморфизмом, то L и C A-изоморфны, причем L является A-допустимой нормальной подгруппой из G_1. Согласно сделанному вначале замечанию, L обладает A-допустимым рядом с простыми индексами. Отсюда, ввиду A-изоморфизма $L \simeq C$, следует, что и C обладает A-допустимым рядом с простыми индексами. Тем самым доказано, что A сверхразрешима.

Теорема доказана.

5. Внешняя насыщенность локальных формаций. Следующая теорема указывает на свойство локальных формаций, которое можно было бы назвать внешней насыщенностью.

Теорема 9.17 (Шмид [5]). *Пусть f — локальный экран, A — некоторая группа автоморфизмов группы G. Если A действует f-стабильно на $G / \Phi(G)$, то A действует f-стабильно и на G.*

Эту теорему мы докажем несколько позже. Нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 9.19. *Пусть H / K — нормальная секция группы G. Тогда* $\mathrm{C}_{\mathrm{Aut}\, G}(H / K) \subseteq \mathrm{C}_{\mathrm{Aut}\, G}(G / C)$, *где* $C = \mathrm{C}_G(H / K)$.

Доказательство. Пусть $A = \mathrm{C}_{\mathrm{Aut}\, G}(H / K)$. Так как $H \lhd G \leftthreetimes A$, $K \lhd G \leftthreetimes A$, то $\mathrm{C}_{GA}(H / K) \lhd \lhd GA$. Кроме того, $A \subseteq \mathrm{C}_{GA}(H / K)$. Следовательно,

$$[G, A] \subseteq \mathrm{C}_{GA}(H / K) \cap G = C.$$

Отсюда следует, что A действует тождественно на G / C. Лемма доказана.

Следующая лемма представляет собой ту часть известной теоремы Ф. Холла об автоморфизмах p-групп, которая справедлива для произвольных групп (см. М. Холл [1], теорема 12.2.2; Хупперт [5], с. 274).

Лемма 9.20. *Если некоторая группа автоморфизмов A группы G действует тождественно на $G / \Phi(G)$, то $\pi(A) \subseteq \pi(\Phi(G))$.*

Лемма 9.21. *Пусть A — некоторая группа автоморфизмов группы G и пусть A действует тождественно на $\widetilde{\mathrm{F}}(G) / \Phi(G)$. Тогда A действует стабильно на G.*

Доказательство. Будем считать, что для групп, порядок которых меньше $|G|$, лемма верна. Пусть $F = \widetilde{\mathrm{F}}(G)$, $\Phi = \Phi(G)$. Ввиду теоремы 7.11 и следствия 4.1.1 $C_G(F / \Phi) = \mathrm{F}(G)$. По лемме 9.19, A действует тождественно на $G / \mathrm{F}(G)$. Ввиду леммы 7.9 $\mathrm{F}(G) / \Phi \subseteq F / \Phi$. Таким образом, мы получаем, что A действует стабильно на G / Φ.

Предположим, что Φ имеет неединичные силовские подгруппы L_1 и L_2 различных порядков. Очевидно, G/L_i удовлетворяет условию леммы. Поэтому A действует стабильно на G/L_i, $i = 1, 2$. Так как A действует стабильно на $L_iL_j/L_j \simeq L_i$, то мы получаем, что A действует стабильно на G. Остается принять, что Φ является p-группой для некоторого простого p. Пусть $R = O_{p'}(G)$. Так как $\Phi R/R \subseteq \Phi(G/R)$, то нетрудно заметить, что A действует стабильно на $(G/R)/\Phi(G/R)$, причем $\mathrm{F}(G/R)$ является p-группой. Рассмотрим случай $R = 1$ (если $R \neq 1$, то повторяем рассуждения для G/R и учитываем изоморфизм $\Phi R/R \simeq \Phi$). По лемме 9.3

$$A / C_A(G / \Phi) \in \mathfrak{N}_p.$$

По лемме 9.20 $C_A(G / \Phi)$ является p-группой. Следовательно, A является p-группой. Но тогда согласно лемме 3.9 A действует тождественно на каждом A-композиционном факторе группы Φ. Вспоминая, что A действует стабильно на G / Φ, получаем, что для G лемма верна.

Лемма доказана.

Теорема 9.18 (Шеметков [14]). *Пусть A — некоторая группа автоморфизмов группы G и пусть для некоторого простого числа p существует такой p-однородный экран f, что A действует f-стабильно на $\widetilde{\mathrm{F}}(G / O_{p'}(G)) / \Phi(G / O_{p'}(G))$. Тогда A действует f-стабильно на $\Phi(G / O_{p'}(G))$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $O_{p'}(G) = 1$. Тогда $F(G)$ и $\Phi(G)$ являются p-группами. Пусть $L / \Phi(G)$ — минимальная A-допустимая нормальная подгруппа группы $G / \Phi(G)$. Так как $O_{p'}(G) = 1$, то ввиду леммы 4.4 порядок $L / \Phi(G)$ делится на p. Пусть H / K — такой A-композиционный фактор группы $G / \Phi(G)$, что $L \supseteq H \supset K \supseteq \Phi(G)$. Так как $L / \Phi(G)$ элементарна, то H / K является либо p-группой, либо неабелевой элементарной pd-группой. По условию теоремы

$$A / C_A(H / K) \in f(H / K) \subseteq f(p).$$

Отсюда, следует, что $f(p) \neq \phi$ и $A^{f(p)}$ действует стабильно на $L/\Phi(G)$. Так как $L / \Phi(G)$ элементарна, то $F(L / \Phi(G))$ является p-группой. Применяя лемму 9.3, получаем

$$A^{f(p)} / C_{A^{f(p)}}(L / \Phi(G)) \in \mathfrak{N}_p.$$

Следовательно, $A^{\mathfrak{N}_p f(p)}$ действует тождественно на $L/\Phi(G)$. Так как $L / \Phi(G)$ была взята произвольно, то тем самым доказано, что $A^{\mathfrak{N}_p f(p)}$ действует тождественно на $\tilde{F}(G) / \Phi(G)$. По лемме 9.21, $A^{\mathfrak{N}_p f(p)}$ действует стабильно на G. Так как $F(G)$ есть p-группа, то отсюда и из леммы 9.3 получаем, что $A^{\mathfrak{N}_p f(p)}$ является p-группой. Итак, доказано, что $A \in \mathfrak{N}_p f(p)$. Так как $\Phi(G)$ — p-группа, то отсюда и из леммы 3.9 выводим, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 9.17. Пусть A действует f-стабильно на $G / \Phi(G)$ и f локален. Пусть p — любое простое число, $K = O_{p'}(G)$. Так как

$$\Phi(G) K / K \subseteq \Phi(G / K),$$

то A действует f-стабильно на $(G / K) / \Phi(G / K)$, а следовательно, и на $\tilde{F}(G / K) / \Phi(G / K)$. Так как экран f p-однороден, то по теореме 9.18 A действует f-стабильно на $\Phi(G / K)$. Следовательно, A действует f-стабильно на $\Phi(G) K / K$. Пусть Φ_p — силовская p-подгруппа из $\Phi(G)$. Ввиду A-изоморфизма $\Phi(G) K / K \simeq \Phi_p$, группа A действует f-стабильно на Φ_p. Итак, доказано, что A действует f-стабильно на каждой силовской подгруппе из $\Phi(G)$, а значит, и на $\Phi(G)$. Теорема 9.17 доказана.

Замечание 6. При $A = \mathrm{In}\, G$ теорема 9.17 превращается в теорему 4.3.

Замечание 7. В доказательстве теоремы 9.17 использовалась лишь однородность экрана f. Поэтому в условии теоремы 9.17 условие локальности экрана f может быть ослаблено до однородности.

Проблема 14. Пусть f — однородный экран, $A \subseteq \mathrm{Aut}\, G$. Пусть A действует f-стабильно на $\widetilde{\mathrm{F}}(G) / \Phi(G)$. Доказать, что A действует f-стабильно на $\Phi(G)$.

6. $\langle f \rangle$-группы автоморфизмов. Рассмотрим задачу, обратную по отношению к той, которой был посвящен п. 1. Мы будем изучать группу, обладающую некоторой группой автоморфизмов, принадлежащей заданной локальной формации. Напомним, что обозначение f' было введено в определении 3.1.

Теорема 9.19 (Шмид [7], Шмигирев [2]). *Пусть f — локальный экран, A — некоторая группа автоморфизмов группы G. Если $A \supseteq \mathrm{In}\, G$ и $A \in \langle f \rangle$, то $G = Z_\infty^f(G, A) \times Z_\infty^{f'}(G, A)$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Тогда

$$N = Z_\infty^f(G, A) \times Z_\infty^{f'}(G, A) \subset G.$$

Пусть X — собственная A-допустимая подгруппа из G. Так как $A \supseteq \mathrm{In}\, G$, то $X \lhd G$. Группа A является группой операторов группы X, причем каждый внутренний автоморфизм группы X производится некоторым оператором из A. Следовательно, $A / C_A(X) \simeq A^* \subseteq \mathrm{Aut}\, X$, $A^* \in \langle f \rangle$, $A^* \supseteq \mathrm{In}\, X$. Так как для X теорема верна по предположению, то

$$X = Z_\infty^f(X, A) \times Z_\infty^{f'}(X, A) \subseteq N.$$

Таким образом, мы установили свойство (1): всякая собственная A-допустимая подгруппа группы G содержится в N. В частности, G / N — A-главный фактор группы G. Заметим также, что $N \neq 1$, так как всякая минимальная A-допустимая нормальная подгруппа из G входит либо в A-f-гиперцентр, либо в A-f'-гиперцентр группы G.

Если G / N A-f-централен (A-f'-централен), то $Z_\infty^{f'}(G, A) \neq 1$ (соответственно $Z_\infty^{f}(G, A) \neq 1$) и существует A-f'-центральный (соответственно A-f-центральный) A-главный фактор N / R группы G. Таким образом, G / R имеет A-f-центральные и A-f'-центральные главные факторы. $A / C_A(G/R) \in \langle f \rangle$, причем каждый внутренний автоморфизм группы G / R производится некоторым оператором из A. Если $R \neq 1$, то для G / R теорема верна и, следовательно,

$$G / R = Z_\infty^{f}(G / R, A) \times Z_\infty^{f'}(G / R, A).$$

Множители этого разложения неединичны, так как A-f-мера и A-f'-мера группы G / R не равны 1. Но это противоречит (1). Остается принять, что N — минимальная A-допустимая нормальная подгруппа из G. Отсюда и из (1) мы получаем свойство (2): N — единственная минимальная A-допустимая нормальная подгруппа группы G.

и совпадает с G

Так как $\operatorname{In} G \subseteq A$ и $A \in \langle f \rangle$, то A действует f-стабильно на $\operatorname{In} G$. Так как группы $G / Z(G)$ и $\operatorname{In} G$ являются A-изоморфными, то A действует f-стабильно на $G / Z(G)$. Если $Z(G) = 1$, то $Z_\infty^{f}(G, A) = G$, и теорема для G верна. Следовательно, $Z(G) \neq 1$.

Предположим, что $Z(G) \neq G$. Тогда, ввиду свойств (1) и (2), $Z(G) = N$, $G^{\mathfrak{N}} \neq 1$, $N \subseteq G^{\mathfrak{N}}$. По лемме 8.3, $N \cap G^{\mathfrak{N}} = N$ содержится в $\Phi(G)$. Кроме того, как отмечалось, A действует f-стабильно на G / N. Следовательно, по теореме 9.17 группа A действует f-стабильно на G. Пришли к противоречию. Остается единственная возможность: $Z(G) = G$. Отсюда и из свойства (2) получаем свойство (3): G является абелевой p-группой для некоторого простого числа p.

Если бы формация $f(p)$ была пустой, то тогда G совпадала бы со своим A-f'-гиперцентром. Поэтому $f(p) \neq \phi$. Пусть B — $\mathfrak{N}_p f(p)$-корадикал группы A. По лемме 4.5 B является p'-группой. По лемме 5.10, примененной к группе $GB = G \times B$ и ее абелевой силовской p-подгруппе G, имеем:

$$G = [G, B] \times C_G(B).$$

Так как $B \lhd A$, то $[G, B]$ и $C_G(B)$ A-допустимы. Ввиду свойства (2) возможны два случая.

Предположим сначала, что $[G, B] = G$, $C_G(B) = 1$. Тогда B не действует тождественно ни на G/N, ни на N. Следовательно, G/N и N A-f'-центральны, а значит, $G = Z_\infty^{f'}(G, A)$. Получаем противоречие.

Пусть теперь $[G, B] = 1$, $C_G(B) = G$. Тогда B действует тождественно на G, и по лемме 3.9 группа A действует f-стабильно на G. Снова получаем противоречие. Теорема доказана.

Следующая теорема является, по сути дела, другой формулировкой теоремы 9.19.

Теорема 9.20 (Шмид [7], Шмигирев [2]). *Пусть f — локальный экран, K — такая нормальная подгруппа группы G, что $G / C_G(K) \in \langle f \rangle$. Тогда*

$$K = (Z_\infty^f(G) \cap K) \times (Z_\infty^{f'}(G) \cap K),$$

причем $Z_\infty^{f'}(G) \cap K \subseteq Z(G^f)$.

Доказательство. Искомая факторизация есть прямое следствие теоремы 9.19, так как $G / C_G(K)$ можно рассматривать как некоторую группу автоморфизмов группы K, содержащую $\mathrm{In}\, K$. Так как $G / C_G(K) \in \langle f \rangle$, то $G^f \subseteq C_G(K)$. Пусть $R = Z_\infty^{f'}(G) \cap K$. Очевидно, RG^f / G^f f-гиперцентральна в G / G^f. Отсюда, учитывая G-изоморфизм $RG^f / G^f \simeq R / R \cap G^f$, получаем, что G действует f-стабильно на $R / R \cap G^f$. Кроме того, G действует f'-стабильно на $R / R \cap G^f$, так как $R \subseteq Z_\infty^{f'}(G)$. Следовательно, $R = R \cap G^f$, т. е. $R \subseteq G^f$. Так как $G^f \subseteq C_G(K) \subseteq C_G(R)$, то окончательно получаем: $R \subseteq Z(G^f)$. Теорема доказана.

Теорема 9.21. *Для любой группы G и любого внутреннего локального экрана f справедливо следующее равенство*:

$$C_G(G^f) = Z_\infty^f(G) \times (Z_\infty^{f'}(G) \cap Z(G^f)).$$

Доказательство. Применяя теорему 9.20 для группы $K = C_G(G^f)$, получаем $K = K_1 \times K_2$ где $K_1 = Z_\infty^f(G) \cap K$, $K_2 = Z_\infty^{f'}(G) \cap K$, причем $K_2 \subseteq Z(G^f)$. Ввиду следствия 9.3.2, $K_1 = Z_\infty^f(G)$. Так как $Z(G^f) \subseteq$

$\subseteq C_G(G^f)$ и

$$Z(G^f) = (Z_\infty^f(G) \cap Z(G^f)) \times (Z_\infty^{f'}(G) \cap Z(G^f)),$$

то $K_2 = Z_\infty^{f'}(G) \cap Z(G^f)$. Теорема доказана.

Проблема 15. Расширить теорему 9.19, не требуя выполнения условия $A \supseteq \mathrm{In}\, G$. Как при этом изменится утверждение теоремы 9.19?

§ 10. Комментарии

1. В случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ проблема 11 решена Виландтом [7].

2. Обозначим через $W(G)$ и назовем *подгруппой Виландта* пересечение нормализаторов всех субнормальных подгрупп группы G. Если $G \neq 1$, то ввиду теоремы 7.10 подгруппа $W(G)$ является неединичной характеристической подгруппой из G. С помощью подгруппы $W(G)$ Камина [1] ввел и изучил понятие виландтовской длины разрешимой группы.

3. Материал второй половины § 7 в сжатом виде представлен в заметке Шеметкова [18]. Основополагающие понятия $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппы и $\mathfrak{F}$-центрального главного фактора введены и изучены в классе разрешимых групп Картером и Хоуксом [1]. В § 8, излагая общие результаты о $\mathfrak{F}$-нормальности и $\mathfrak{F}$-центральности, мы следовали статье Шеметкова [13].

4. История теоремы 9.3 начинается с известных теорем Калужнина [1] и Ф. Холла [2] о стабильных группах автоморфизмов, а также теоремы Бэра, относящейся к случаю формации сверхразрешимых групп (Хупперт [5], теорема VI.9.8). Хупперт [6] доказал следующий важный частный случай теоремы 9.3: если f — внутренний локальный экран и G действует f-стабильно на своей разрешимой нормальной подгруппе K, то $G / C_G(K) \in \langle f \rangle$. Эта теорема послужила базой и стимулом для нахождения общей формационной закономерности. Окончательный результат получен Шмидом [7], и Шеметковым [13], [16] (статья Шеметкова [16] представляет собой доклад, прочитанный на XII Всесоюзном алгебраическом коллоквиуме

в Свердловске в сентябре 1973 г.). Мы привели теорему 9.3 в редакции Шеметкова [13], [16]; у Шмида [7] доказательство когомологическое, а сам результат формально менее общий. Шмид [7] пользуется понятием локальной функции, которое соответствует нашему понятию композиционного экрана. Согласно лемме 3.15 из наличия у формации внутреннего примарно постоянного экрана вытекает существование внутреннего композиционного экрана.

5. Виландт [8] указал на то, что утверждение теоремы 9.14 может быть усилено следующим образом: Out G — циклическая группа порядка, делящего $p - 1$. Доказательство этого факта содержится в статье Камерона [1].

6. Теорема 9.19 для разрешимых групп была получена Бэром [3].

ГЛАВА III

ДОПОЛНЕНИЯ И ДОБАВЛЕНИЯ К НОРМАЛЬНЫМ ПОДГРУППАМ

§ 11. Дополнения и π-дополнения

1. Основные понятия и вспомогательные результаты. Основным в этом параграфе является следующее

Определение 11.1. Скажем, что подгруппа K группы G *обладает π-дополнением H в группе G*, если $HK = G$ и $|H \cap K|$ не делится на числа из π. Подгруппу H с этим свойством будем называть π-дополнением для подгруппы (к подгруппе) H в группе G, а подгруппу K — π-дополняемой подгруппой группы G.

В случае, когда π — множество всех простых чисел, определение 11.1 превращается в определение дополнения. Если же π пусто, то группа G является π-дополнением для любой своей подгруппы.

При разыскании π-дополнений оказывается полезным следующее понятие.

Определение 11.2. *Добавлением* к нормальной подгруппе K группы G называется такая подгруппа H из G, что $HK = G$, но $H_1K \neq G$ для любой собственной подгруппы H_1 из H.

Понятно, что каждая нормальная подгруппа обладает по крайней мере одним добавлением. Если нормальная подгруппа обладает дополнениями, то все они, конечно, являются добавлениями. Однако не всякое добавление является дополнением.

Другое определение добавления дает следующая лемма.

Лемма 11.1. *Подгруппа H тогда и только тогда является добавлением к нормальной подгруппе K группы G, когда $HK = G$ и $H \cap K \subseteq \Phi(H)$.*

Доказательство. Пусть подгруппа H удовлетворяет условию леммы, но не является добавлением. Тогда в H имеется собственная подгруппа H_1 с условием $H_1K = G$. Но тогда $H_1(H \cap K) = H \cap H_1K = H$. Отсюда, ввиду $H \cap K \subseteq \Phi(H)$, получаем $H_1 = H$. Приходим к противоречию.

Обратно, пусть H — добавление к K в G. Если $H \cap K$ не входит в $\Phi(H)$, то H обладает максимальной подгруппой M, не содержащей $H \cap K$. Поэтому $H = M(H \cap K)$, а значит, $HK = MK = G$, что противоречит определению добавления. Лемма доказана.

Лемма 11.2. *Пусть H — добавление к нормальной подгруппе K группы G. Тогда $\pi(H) = \pi(G / K)$.*

Доказательство. Очевидно, $|H| = |H \cap K| \cdot |G / K|$. Поэтому $\pi(G / K) \subseteq \pi(H)$. Пусть $p \in \pi(H)$, причем p не делит $|G / K|$. Тогда силовская p-подгруппа P из $H \cap K$ является силовской подгруппой в H. Так как P дополняема в H и содержится в $\Phi(H)$, то это противоречит тому, что $\Phi(H)$ состоит из необразующих элементов группы H.

Лемма доказана.

Лемма 11.3. *Пусть $G = NK$. Тогда любое π-дополнение (добавление) к $N \cap K$ в N является π-дополнением (добавлением) к K в группе G. В частности, любое дополнение к $N \cap K$ в N является дополнением к K в G.*

Доказательство. Пусть C — π-дополнение (добавление) к $N \cap K$ в N. Тогда $CK = C(N \cap K)K = NK = G$, $C \cap K = C \cap N \cap K$. Поэтому ясно, что C — π-дополнение (добавление) к K в G.

С помощью теоремы Силова легко получить следующую лемму.

Лемма 11.4. *Если $K \triangleleft G$ и P — силовская p-подгруппа группы G, то $P \cap K$ является силовской p-подгруппой в K, а PK / K является силовской p-подгруппой группы G / K.*

Лемма 11.5. *Пусть $G = G_1G_2$. Для любых элементов x, y из G имеет место равенство $G = G_1^xG_2^y$, причем существует такой элемент $z \in G$, что $G_1^z = G_1^x$, $G_2^z = G_2^y$.*

Доказательство. Пусть $xy^{-1} = x_1y_1$, где $x_1 \in G_1$, $y_1 \in G_2$. Положим $z = x_1^{-1}x$. Тогда $x = x_1z, y = y_1^{-1}z$.

Поэтому

$$G_1^x = G_1^z, \quad G_2^y = G_2^z,$$
$$G_1^x G_2^y = G_1^z G_2^z = G^z = G,$$

и лемма доказана.

Лемма 11.6. *Пусть $G = G_1 G_2$. Тогда для любого простого числа p существуют такие силовские p-подгруппы P, P_1 и P_2 соответственно в G, G_1 и G_2, что $P = P_1 P_2$.*

Доказательство. Пусть R, R_1 и R_2 — силовские p-подгруппы соответственно в G, G_1 и G_2. По теореме Силова $R_i^{x_i} \subseteq R$ для некоторого $x_i \in G$, $i = 1, 2$. По лемме 11.5 существует такой элемент $z \in G$, что $G_i^{x_i z} = G_i$, $i = 1, 2$. Положим $R_i^{x_i z} = P_i$, $R^z = P$. Тогда P_1, P_2, P — силовские p-подгруппы соответственно в группах G_1, G_2, G, причем

$$P_i = R_i^{x_i z} \subseteq R^z = P.$$

Установим теперь справедливость равенства $P = P_1 P_2$. Пусть $|P| = a$, $|P_i| = a_i$, $|G| = an$, $|G_i| = a_i n_i$, $|G_1 \cap G_2| = a' n'$, где a' делит (a_1, a_2), n' делит (n_1, n_2). Имеем:

$$|G| = an = |G_1 G_2| = \frac{a_1 a_2}{a'} \cdot \frac{n_1 n_2}{n'}.$$

Так как $P_1 \cap P_2 \subseteq G_1 \cap G_2$, то $|P_1 \cap P_2|$ делит a'. Поэтому

$$|P_1 P_2| = \frac{a_1 a_2}{|P_1 \cap P_2|} \geqslant \frac{a_1 a_2}{a'} = a = |P|.$$

Отсюда и из $P_1 P_2 \subseteq P$ получаем $P = P_1 P_2$. Лемма доказана.

Теорема 11.1 (Гашюц [1]). *Пусть K — нормальная подгруппа группы G со следующими свойствами:*

1) *G / K является p-группой;*
2) *$K = O^p(K)$;*
3) *K имеет абелеву силовскую p-подгруппу P.*

Тогда K обладает дополнением в G.

Доказательство. По лемме Фраттини $G = NK$, где $N = N_G(P)$. Так как $O^p(K) = K$, то по теореме Грюна $O^p(N \cap K) = N \cap K$. Так как $G / K \simeq N / N \cap K$, то мы видим, что условие теоремы выполняется для N и ее нормальной подгруппы $N \cap K$. Так как N p-разрешима, то по лемме 8.2 подгруппа $N \cap K$ обладает дополнением P_1 в N. По лемме 11.3, K дополняема в G. Теорема доказана.

Лемма 11.7. *Пусть нормальная подгруппа K группы G обладает π-дополнением в G. Тогда для любого $p \in \pi$ силовская p-подгруппа из K дополняема в любой ее содержащей силовской p-подгруппе группы G.*

Доказательство. Пусть H — π-дополнение к K в G, $p \in \pi$. По лемме 11.6 найдутся силовские p-подгруппы P_1 и P_2 соответственно в H и K такие, что $G_p = P_1P_2$ является силовской p-подгруппой группы G. Так как $P_1 \cap P_2 \subseteq (H \cap K)_p = 1$, то мы получаем, что P_2 дополняема в G_p. Предположим, что P_2 содержится еще в одной силовской p-подгруппе G_p^y. Тогда

$$G_p^y \cap K = \langle P_2, P_2^y \rangle = P_2 = P_2^y.$$

Следовательно, $G_p^y = P_1^yP_2$ и P_2 дополняема в G_p^y. Лемма доказана.

Теорема 11.2 (Виландт [4]). *Пусть группа G имеет циклическую силовскую p-подгруппу. Тогда G либо p-разрешима, либо имеет главный фактор, являющийся простой группой порядка, делящегося на $|G|_p$.*

Доказательство. Пусть G_p — силовская p-подгруппа группы G и пусть K — p-разрешимый корадикал группы G. Так как $O^p(K) = K$, то по теореме 11.1 и лемме 11.7 подгруппа $P = G_p \cap K$ дополняема в G_p. Так как G_p циклическая и, следовательно, содержит точно по одной подгруппе каждого возможного порядка, то мы получаем, что либо $P = 1$, либо $P = G_p$. Если $P = 1$, то G p-разрешима. Пусть $P = G_p$. Так как каждый главный pd-фактор группы G является простой группой и, значит, является композиционным фактором, то, применяя теорему 5.11, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Лемма 11.8. *Пусть группа G имеет циклические силовские p_i-подгруппы, $i = 1, 2$. Если $p_1 < p_2$ и N — нормализатор в G некоторой ее силовской p_1-подгруппы, то либо $|N|$, либо $|G : N|$ не делится на p_2.*

Доказательство. Пусть P_1 — силовская p_1-подгруппа из G, Q — силовская p_2-подгруппа из $N = N_G(P_1)$. Предположим, что $Q \neq 1$. Так как $p_1 < p_2$, то P_1Q — циклическая группа. По теореме 11.2 подгруппа $\mathrm{N}_G(Q)$ является p_2-разрешимой. Значит, $\mathrm{N}_G(Q)$ $\{p_1, p_2\}$-отделима и по теореме о π-отделимых группах (Чунихин [7], теорема 1.15.1) обладает $\{p_1, p_2\}$-холловской подгруппой $H = P_1P_2$, где P_2 — некоторая силовская p_2-подгруппа из G. Так как $Q \lhd \mathrm{N}_G(Q)$, то $Q \subseteq P_2$. Следовательно, $P_1Q \subseteq H$. Так как $p_1 < p_2$ и силовские подгруппы из H циклические, то $P_2 \lhd H$. Так как P_1Q циклическая, то ясно, что $Q = \mathrm{Z}(H) \cap P_2$. Применяя теперь лемму 5.10 по отношению к H и ее нормальной силовской подгруппе P_2, получаем $P_2 = Q$. Лемма доказана.

2. Существование π-дополнений. Во многих задачах о существовании дополнений и π-дополнений сопряженные силовские подгруппы равноправны. Поэтому будет удобно символом G_p обозначать некоторую силовскую p-подгруппу группы G.

Теорема 11.3 (Гашюц [1]). *Пусть K — нормальная абелева подгруппа группы G. Если для любого простого p подгруппа $G_p \cap K$ дополняема в G_p, то K дополняема в G.*

Эта теорема вошла в монографии М. Холла [1] и Хупперта [5].

Теорема 11.4 (Шеметков [9]). *Пусть $\pi = \sigma \cup \tau$. Нормальная подгруппа K группы G обладает π-дополнением в G, если выполняются следующие условия:*

1) любое добавление к K в G является σ-дополнением;

2) для любого $p \in \tau$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.

Доказательство. Предположим, что существуют группы, для которых теорема не выполняется. Выберем среди них группу G, имеющую наименьший порядок. Существует, следовательно, множество простых чисел π, являющееся суммой двух своих подмножеств σ и τ, нормальная подгруппа K группы G, относительно которых выполняется условие теоремы, но не ее утверждение.

Возьмем теперь наименьшее подмножество ω из π, содержащее σ и такое, что K не обладает ω-дополнением в G. Другими словами, выбираем такое подмножество ω множества π, для которого выполняются следующие условия: 1) $\omega \supseteq \sigma$; 2) подгруппа K обладает ω_1-дополнением в G для любого такого подмножества ω_1 из ω, что $\omega_1 \supseteq \sigma$ и $\omega_1 \neq \omega$; 3) не существует ни одного ω-дополнения к подгруппе K в группе G. Множество ω не пусто, так как в случае $\omega = \phi$ группа G является ω-дополнением для K. Кроме того, $\omega \setminus \sigma$ содержит по крайней мере один простой делитель порядка K, так как в противном случае любое σ-дополнение к K, существующее по условию, было бы одновременно и ω-дополнением.

Пусть p — некоторый элемент из $\omega \setminus \sigma$, делящий $|K|$. Пусть $\omega_1 = \omega \setminus \{p\}$. Тогда K обладает ω_1-дополнением H в группе G.

Так как $HK = G$, то в H содержится некоторое добавление M к подгруппе K. По лемме 11.1 $M \cap K$ лежит в $\Phi(M)$ и потому нильпотентна. Так как $M \cap K$ входит в $H \cap K$, а H является ω_1-дополнением для K, то и M является ω_1-дополнением для K в G. Заметим также, что p делит $|M \cap K|$, так как K не обладает ω-дополнениями.

Так как $MK = G$, то по лемме 11.6 найдутся такие силовские p-подгруппы M_p, P и G_p соответственно из M, K и G, что

$$M_pP = G_p. \tag{1}$$

Обозначим через P_1 пересечение $M_p \cap K$. Очевидны следующие равенства:

$$P_1 = M_p \cap (M \cap K) = M_p \cap K = M_p \cap G_p \cap K = M_p \cap P. \tag{2}$$

Так как $M \cap K$ нормальна в M, то из (2) и леммы 11.4 вытекает, что P_1 является силовской p-подгруппой в $M \cap K$. Порядок $M \cap K$ делится на p, поэтому $P_1 \neq 1$. Рассмотрим нормализатор N подгруппы P_1 в группе G.

Предположим сначала, что $N \neq G$. Так как $M \cap K$ нильпотентна и нормальна в M, то N содержит подгруппу M. Так как P по условию 2) теоремы абелева и согласно (2) содержит P_1, то $P \subseteq N$. Учитывая (1), получаем теперь, что $G_p = M_pP$ содержится в N.

Покажем, что условия теоремы выполняются для N и ее нормальной подгруппы $N \cap K$. Пусть A — добавление к $N \cap K$ в N. По лемме 11.3 A — добавление к K в G. Согласно условию 1) теоремы подгруппа A является σ-дополнением для K. Так как $A \cap K = A \cap (N \cap K)$, то ясно, что A является также σ-дополнением для $N \cap K$

в N. Проверим теперь выполнимость условия 2) доказываемой теоремы. Так как $G_p = M_pP$ входит в N, причем $P = G_p \cap K = G_p \cap (N \cap K)$, то ввиду условия 2) теоремы P абелева и обладает дополнением в G_p. Пусть $q \in \omega \setminus \sigma$, $q \neq p$. Так как $M(N \cap K) = N$, то по лемме 11.6 существуют такие силовские подгруппы M_q и N_q соответственно из M и N, что $N_q = M_qQ$, где $Q = N_q \cap (N \cap K) = N_q \cap K$ есть силовская q-подгруппа из $N \cap K$. Пересечение $M_q \cap Q$ равно единице, так как $M_q \cap Q$ содержится в $M \cap K$, порядок которой не делится на q. Таким образом, $N_q \cap \cap (N \cap K)$ абелева и дополняема в N_q. Так как $N \neq G$, то для N теорема верна, т. е. $N \cap K$ обладает ω-дополнением в N, являющимся ввиду леммы 11.3 ω-дополнением для K в G. Получили противоречие.

Предположим теперь, что $N = G$, т. е. подгруппа P_1 является нормальной в G. Согласно следствию 5.11.1 $l_p(K) \leqslant 1$. Поэтому K обладает характеристической подгруппой R со следующими свойствами: а) PR / R является нормальной силовской p-подгруппой группы K / R; б) R не имеет композиционных факторов порядка p. По условию имеет место факторизация $G_p = P\bar{P}$, $P \cap \bar{P} = 1$. Так как $G_p \cap K = P$ есть силовская подгруппа в K, то $\bar{P} \cap K = 1$, а значит,

$$\bar{P}R / R \cap PR / R = (\bar{P}R \cap PR) / R = \\ = R(\bar{P} \cap PR) / R = R / R.$$

Таким образом, $\bar{P}R / R$ является дополнением к PR / R в силовской p-подгруппе G_pR / R группы MPR / R. По теореме 11.3 существует дополнение U / R к подгруппе PR / R в группе MPR / R. Отсюда

$$UPR = MPR, \quad U \cap PR = R. \tag{3}$$

Так как $P_1 \subseteq K$ и R не имеет композиционных факторов порядка p, то $P_1 \cap R = 1$, а значит, $PR \neq R$. Поэтому, учитывая (3), получаем

$$U \neq G, \quad UK = G. \tag{4}$$

Из (3) и из того, что $M \cap PR$ входит в $M \cap K$, являющуюся ω_1'-группой, вытекает еще следующее соотношение:

$$|U|_{\omega_1} = |M|_{\omega_1} |R|_{\omega_1} = |MPR|_{\omega_1}. \tag{5}$$

Согласно (4) $|U| = |G : K|\,|U \cap K|$. Отсюда, учитывая (5) и то, что $|M|_{\omega_1} = |G / K|_{\omega_1}$, получаем равенство

$$|U \cap K|_{\omega_1} = |R|_{\omega_1} \qquad (6)$$

Пусть P_2— силовская p-подгруппа из $U \cap K$. Так как $P_2 \subseteq PR$ (напомним, что PR нормальна в K и содержит ее силовскую подгруппу P), то ввиду (3) P_2 содержится в R, а значит,

$$|U \cap K|_p = |R|_p . \qquad (7)$$

Применяя полученные сведения о подгруппе U, покажем, что U и ее нормальная подгруппа $U \cap K$ удовлетворяют условию теоремы. Если A — добавление к $U \cap K$ в U, то из условия теоремы и леммы 11.3 вытекает, что $|A \cap K|$ не делится на числа из σ. Отсюда, учитывая равенство $A \cap K = A \cap (U \cap K)$, получаем, что A — σ-дополнение для $U \cap K$ в U.

Пусть $q \in \omega_1 \setminus \sigma$. Согласно лемме 11.6 существуют силовские q-подгруппы M_q и Q_1 из M и PR такие, что $Q = M_qQ_1$ — силовская q-подгруппа из MPR. Так как P — p-группа и $p \neq q$, то $Q_1 \subseteq R$. Учитывая, что $|M \cap K|$ не делится на q, получаем, что $M_q \cap Q_1 = 1$. Ввиду (5), силовские q-подгруппы в U и MPR имеют одинаковые порядки, поэтому $Q^x \subseteq U$ для некоторого $x \in MPR$. Так как согласно (6) Q_1 есть силовская подгруппа как в R, так и в $U \cap K$, то $Q \cap R = Q \cap K = Q_1$. Отсюда $Q^x \cap (U \cap K) = Q^x \cap K = Q_1^x$. Таким образом, получается, что силовская q-подгруппа из $U \cap K$ абелева и дополняема в содержащей ее силовской q-подгруппе из U.

Ввиду (7) и отмеченного выше свойства подгруппы R проходящий через R композиционный ряд группы $U \cap K$ не имеет факторов порядка p. Поэтому $U \cap K = O^p(U \cap K)$, причем, как мы знаем, силовская p-подгруппа из $U \cap K$ абелева. Следовательно, ввиду теоремы 11.1 и леммы 11.7 силовская p-подгруппа из $U \cap K$ дополняема в некоторой силовской p-подгруппе из U.

Итак, условие теоремы для U и ее нормальной подгруппы $U \cap K$ выполняется. Так как по (4) имеет место неравенство $|U| < |G|$, то для U теорема верна. Значит, $U \cap K$ обладает ω-дополнением L в группе U. По лемме

11.3 подгруппа L является ω-дополнением к K в G. Снова пришли к противоречию. Теорема 11.4 доказана.

При $\sigma = \phi$ из теоремы 11.4 получаем

Следствие 11.4.1 (Шеметков [7]). *Нормальная подгруппа K группы G обладает π-дополнением в G, если для любого $p \in \pi$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

Теорема 11.5 (Шеметков [7]). *Нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если для любого простого делителя p индекса $|G : K|$ подгруппа $G_p \cap K$ абелева и дополняема в G_p.*

Доказательство. Пусть π — множество всех простых чисел, σ — множество всех тех простых q, которые делят $|G|$, но не делят $|G : K|$. По лемме 11.2 каждое добавление к K в G является σ-дополнением. Доказательство завершается применением теоремы 11.4.

Следствие 11.5.1. *Если силовская p-подгруппа из $O^{\pi}(G)$ абелева для любого $p \in \pi$, то $O^{\pi}(G)$ обладает дополнением в G.*

Этот результат прямо следует из теорем 11.1 и 11.5 точно так же, как и следующий факт.

Следствие 11.5.2. *Неразрешимая минимальная нормальная подгруппа K группы G обладает дополнением в G, если для любого простого p, делящего $|G : K|$, силовская p-подгруппа из K абелева.*

Проблема 16. Пусть группа G и ее нормальная подгруппа K удовлетворяют условию теоремы 11.5. Пусть C_1 и C_2 — дополнения к K в G, причем для любого простого p силовская p-подгруппа из C_1 сопряжена с силовской p-подгруппой из C_2. Доказать, что C_1 и C_2 сопряжены.

Решение этой проблемы в случае, когда K абелева, дает теорема Гашюца (Хупперт [5], с. 121).

3. Дополнения и π-дополнения к корадикалам. Докажем сначала один вспомогательный результат, имеющий и самостоятельное значение.

Теорема 11.6 (Шеметков [10]). *Пусть f — внутренний однородный экран. Если для некоторого простого p силовская p-подгруппа из G^f абелева, то $\mu_f(G^f, G)$ не делится на p.*

Доказательство. Предположим, что G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Это значит, что существует такой внутренний однородный экран f, что G^f не удовлетворяет утверждению теоремы. Таким образом, $G^f \neq 1$, $f(p) \neq \varnothing$ и G обладает f-центральными главными факторами на участке между G^f и 1.

Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Так как $(G / N)^f = G^fN / N$ и теорема для G / N верна, то ясно, что $N \subseteq G^f$ и $G / \mathrm{C}_G(N) \in \in f(p) \subseteq \langle f \rangle$. Отсюда следует, что $G^f \subseteq \mathrm{C}_G(N)$, а значит, N — абелева p-группа, входящая в центр подгруппы G^f. Ясно также, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа группы G.

Используя включение $N \subseteq \mathrm{Z}(G^f)$ и применяя теорему 5.11, получаем, что пересечение N с p-разрешимым корадикалом группы G^f равно 1. Отсюда, ввиду единственности N, вытекает, что G^f p-разрешима. Согласно следствию 5.11.1 $l_p(G^f) = 1$. Поэтому, ввиду единственности N, группа G^f имеет нормальную силовскую p-подгруппу P. По лемме 5.10

$$P = (\mathrm{Z}(G^f) \cap P) \times [G^f, P].$$

Так как $N \subseteq \mathrm{Z}(G^f)$ и $[G^f, P] \lhd G$, то, снова используя единственность N, получаем $[G^f, P] = 1$. Следовательно, $P \subseteq \mathrm{Z}(G^f)$ и потому $P = G^f$.

Пусть C — пересечение централизаторов в G всех f-центральных главных pd-факторов группы G. Тогда $\mathrm{C}_G(N) \supseteq C \supseteq G^f$. Так как $G / G^f \in \langle f \rangle$, то каждый главный pd-фактор группы G/G^f является f-центральным. Следовательно, C / G^f — пересечение централизаторов в G / G^f всех главных pd-факторов группы G / G^f. Кроме того, ясно, что $G / C \in f(p)$. Согласно теореме 4.1 группа C / G^f p-нильпотентна и, значит, ее силовская p-подгруппа обладает нормальным дополнением R / G^f. Рассмотрим два случая.

Пусть R p-нильпотентна. Тогда, ввиду единственности N, подгруппа R, а значит, и C являются p-группой. Отсюда, ввиду леммы 3.9, заключаем, что каждый главный pd-фактор группы G f-централен. Следовательно, $G^f = 1$, что невозможно

Пусть R не p-нильпотентна. По лемме 5.10

$$G^f = [G^f, R] \times (G^f \cap \mathrm{Z}(R)).$$

сли $H \trianglelefteq G$, $H \in \mathfrak{N}$, $H \cap \Phi(G) = 1$, то
каждое добавление D к H есть дополнение

Д-во. $D \cap H \trianglelefteq G$ и $D \cap H \subseteq \Phi(D) \Rightarrow D \cap H \subseteq \Phi$

Так как $N \subseteq Z(R)$, то ввиду единственности N получаем $[G^f, R] = 1$. Но это противоречит тому, что R не p-нильпотентна. Теорема доказана.

Т е о р е м а 11.7 (Ш е м е т к о в [10], [13]). *Пусть f — внутренний однородный экран. Если f-корадикал G^f группы G абелев, то для любого расширения Γ группы G справедливо следующее утверждение: каждое добавление к G^f в Γ является $\pi(\langle f\rangle)$-дополнением.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть Γ — расширение группы G и G^f абелев. Пусть H — добавление к G^f в Γ. По лемме 11.1 $H \cap G^f \subseteq \Phi(H)$. Пересечение $N = H \cap G$ нормально в H, причем

$$NG^f = G^f(H \cap G) = G^fH \cap G = G.$$

Так как $G / G^f \in \langle f\rangle$, то $N / N \cap G^f \in \langle f\rangle$, а так как $N \cap G^f = H \cap G^f$ содержится в $\Phi(H)$, то согласно теореме 4.2 должно быть $N = N_1 \times N_2$, где $N_1 \in \langle f\rangle$, $\pi(N_2) \cap \pi(\langle f\rangle) = \phi$. Так как N_1 и N_2 — холловские нормальные подгруппы в N, то

$$N \cap G^f = (N_1 \cap G^f) \times (N_2 \cap G^f).$$

Предположим, что $|H \cap G^f| = |N \cap G^f|$ делится на числа из $\pi(\langle f\rangle)$. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа из N, входящая в $N_1 \cap G^f$. Так как G^f абелев и $G^fN = G$, то L нормальна в G. Учитывая $N = N_1 \times N_2$ и $N_1 \in \langle f\rangle$, получаем:

$$N / C_N(L) = N_1C_N(L) / C_N(L) \simeq N_1 / C_{N_1}(L) \in f(L).$$

А так как $G^fN = G$ и $C_G(L) \supseteq G^f$, то

$$G / C_G(L) = C_G(L)N / C_G(L) \simeq N / C_N(L) \in f(L).$$

Следовательно, L f-центральна в G, что противоречит теореме 11.6. Теорема доказана.

Т е о р е м а 11.8 (Ш е м е т к о в [13]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — некоторая группа. Пусть ω — множество всех тех $p \in \pi(\mathfrak{F})$, для которых $G^{\mathfrak{F}}$ обладает абелевой силовской p-подгруппой. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ обладает ω-дополнением в любом расширении группы G.*

$H \cap \Phi(G) = \Phi(H).$

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по порядку корадикала. Пусть Γ — расширение группы G, а R — $\mathfrak{N}_\omega$-корадикал группы $G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду условия теоремы $G^{\mathfrak{F}} / R$ абелева и является к тому же $\mathfrak{F}$-корадикалом группы G / R. Рассмотрим два случая.

Предположим сначала, что $R \neq G^{\mathfrak{F}}$. Так как $|R| < |G^{\mathfrak{F}}|$, то по индукции R обладает ω-дополнением L в группе Γ. Это значит, что $LR = \Gamma$ и $|L \cap R|$ не делится на числа из ω. Так как $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $G^{\mathfrak{F}}$ представима в виде произведения $G^{\mathfrak{F}} = R\,(G^{\mathfrak{F}} \cap L)$. Аналогично, $G = R\,(G \cap L)$. Рассмотрим отображение

$$\delta\colon lR \to l\,(R \cap L), \qquad l \in L.$$

Легко заметить, что δ есть изоморфное отображение группы $\Gamma / R = LR / R$ на группу $L / R \cap L$, причем ввиду отмеченных выше факторизаций δ отображает G / R на $G \cap L / R \cap L$, а группу $G^{\mathfrak{F}} / R$ — на $G^{\mathfrak{F}} \cap L / R \cap L$. Учитывая этот изоморфизм, получаем следующую ситуацию: $L / R \cap L$ есть расширение группы $G \cap L / R \cap L$, $\mathfrak{F}$-корадикалом которой является $G^{\mathfrak{F}} \cap L / R \cap L$, причем последняя группа является абелевой ω-группой. По теореме 11.7 существует дополнение $H / R \cap L$ к $G^{\mathfrak{F}} \cap L / R \cap L$ в группе $L / R \cap L$, откуда получаем

$$H\,(G^{\mathfrak{F}} \cap L) = L,\ H \cap (G^{\mathfrak{F}} \cap L) = H \cap G^{\mathfrak{F}} = R \cap L.$$

Учитывая равенство $\Gamma = RL$, получаем теперь $\Gamma = H\,(G^{\mathfrak{F}} \cap L)\,R = HG^{\mathfrak{F}}$, причем $H \cap G^{\mathfrak{F}} = R \cap L$ имеет порядок, не делящийся на числа из ω. Итак, H — искомое ω-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в группе Γ.

Предположим теперь, что $R = G^{\mathfrak{F}}$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ совпадает со своим $\mathfrak{N}_p$-корадикалом для любого $p \in \omega$. Применяя теорему 11.1 и лемму 11.7 по отношению к группе $\Gamma_p G^{\mathfrak{F}}$ и ее нормальной подгруппе $G^{\mathfrak{F}}$, получаем, что $\Gamma_p \cap G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в Γ_p для любого $p \in \omega$. Следовательно, согласно следствию 11.4.1 $G^{\mathfrak{F}}$ обладает ω-дополнением в Γ. Теорема доказана.

Следствие 11.8.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если $\pi\,(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \pi\,(\mathfrak{F})$ и каждая силовская подгруппа* *из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $G^{\mathfrak{F}}$ обладает дополнением в любом расширении группы G.*

Следствие 11.8.2. *Если все силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{N}}$ абелевы, то $G^{\mathfrak{N}}$ дополняема в любом расширении группы G.*

Следствие 11.8.3 (Ф. Холл). *Пусть все силовские подгруппы группы G абелевы. Тогда G' дополняема в любом расширении группы G.*

Теорема 11.9 (Шеметков [10], [13]). *Пусть Γ — некоторое расширение группы G, $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Пусть любое простое число p, делящее $(|\Gamma : G^{\mathfrak{F}}|, |G^{\mathfrak{F}}|)$, входит в $\pi(\mathfrak{F})$, причем силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ обладает дополнением в* Γ.

Доказательство. Пусть ω — множество всех тех простых чисел p, о которых говорится в теореме. По теореме 11.8 существует ω-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. Тогда, очевидно, существует добавление H к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ, являющееся одновременно и ω-дополнением. По лемме 11.2 $\pi(H) = \pi(\Gamma/G^{\mathfrak{F}})$. Теперь из того, что $\pi(H \cap G^{\mathfrak{F}}) \subseteq \omega$ и $|H \cap G^{\mathfrak{F}}|$ не делится на числа из ω, заключаем, что H — искомое дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. Теорема доказана.

При $\Gamma = G$ из теоремы 11.9 получаем

Следствие 11.9.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если для любого простого p, делящего $|G : G^{\mathfrak{F}}|$, силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$ абелева, то $G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в G.*

Следствие 11.9.2. *Пусть Γ — некоторое расширение группы G. Пусть для любого простого числа p, делящего $|\Gamma : G'|$, силовская p-подгруппа из G абелева. Тогда G' дополняема в* Γ.

Теорема 11.10 (Шеметков [10], [13]). *Пусть Γ — некоторое расширение группы G, $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Пусть ω — такое непустое подмножество из $\pi(\mathfrak{F})$, что силовские подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$, относящиеся к числам из ω, циклические. Тогда в Γ существует ω-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$, нормализующее некоторую силовскую p-подгруппу из $G^{\mathfrak{F}}$, где p — наименьшее число из ω.*

Доказательство. По теореме 11.8 существует ω-дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. Значит, по лемме 11.7 каждая силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$, $q \in \omega$, дополняема в любой ее содержащей силовской подгруппе из Γ.

Пусть N — нормализатор в Γ силовской p-подгруппы P из $G^{\mathfrak{F}}$, p — наименьшее простое число из ω. По лемме

Фраттини $NG^{\mathfrak{F}} = G$. Пусть q — любое число из ω, Q — силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}} \cap N$. По лемме 11.8 либо $Q = 1$, либо Q есть силовская q-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$. В последнем случае Q входит в силовскую q-подгруппу $\overline{Q}$ из N, являющуюся силовской q-подгруппой в Γ, а значит, Q дополняема в $\overline{Q}$. Итак, для любого $q \in \omega$ силовская q-подгруппа из $N \cap G^{\mathfrak{F}}$ дополняема в силовской q-подгруппе из N. Согласно следствию 11.4.1 подгруппа $N \cap G^{\mathfrak{F}}$ имеет ω-дополнение в N, являющееся, очевидно, искомым ω-дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в Γ. Теорема доказана.

Следствие 11.10.1. *Пусть K — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа группы G и множество $\omega = \pi(K) \cap \pi(G / K)$ не пусто. Если силовские подгруппы из K, относящиеся к числам из ω, циклические, то существует дополнение к K в G, содержащееся в нормализаторе некоторой силовской p-подгруппы из K, где p — наименьшее число из ω.*

Доказательство. Пусть $\pi = \pi(G / K)$. Очевидно, $\pi \supseteq \omega$. Так как K неразрешима, то K не является π-группой. Ясно, что $K = G^{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_{\pi}$. По теореме 11.10 K обладает π-дополнением S в G, нормализующим некоторую силовскую p-подгруппу из K. Если $M \subseteq S$ и M — добавление к K в G, то ввиду $M \cap K \subseteq \Phi(M)$ подгруппа M — искомое дополнение к K.

§ 12. Добавления и π-добавления

1. Коммутативные треугольники гомоморфизмов. Этот пункт носит вспомогательный характер. Здесь приводятся результаты, необходимые для более глубокого изучения добавлений.

Определение 12.1. Пусть даны группы A, B, C и гомоморфизмы α: $A \to C$, β: $B \to C$. Обозначим через $A_{\alpha} \times {}_{\beta}B$ множество всех упорядоченных пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$, $a^{\alpha} = b^{\beta}$. Очевидно, $A_{\alpha} \times {}_{\beta}B$ является подгруппой прямого произведения $A \times B$. Если $(a, b) \in A_{\alpha} \times {}_{\beta}B$, то отображения

$$\delta_1: (a, b) \to a,$$

$$\delta_2: (a, b) \to b$$

назовем соответственно *левой* и *правой проекциями* группы $A_\alpha \times {}_\beta B$. Очевидно, δ_1 и δ_2 являются гомоморфизмами группы $A_\alpha \times {}_\beta B$ соответственно в A и B. $\operatorname{Ker} \delta_1$ будем называть *левым ядром* группы $A_\alpha \times {}_\beta B$, а $\operatorname{Ker} \delta_2$ — ее *правым ядром*.

Лемма 12.1. *Если δ_1 и δ_2 — соответственно левая и правая проекции группы $A_\alpha \times {}_\beta B$, то*

$$\operatorname{Ker} \delta_1 \simeq \operatorname{Ker} \beta, \ \operatorname{Ker} \delta_2 \simeq \operatorname{Ker} \alpha.$$

Доказательство. Если $(1, b) \in \operatorname{Ker} \delta_1$, то $1^\alpha = b^\beta = 1$, т. е. $b \in \operatorname{Ker} \beta$. Обратно, если $b \in \operatorname{Ker} \beta$, то $b^\beta = 1$, откуда $(1, b) \in A_\alpha \times {}_\beta B$, т. е. $(1, b) \in \operatorname{Ker} \delta_1$. Следовательно, отображение $(1, b) \to b$ является изоморфным отображением группы $\operatorname{Ker} \delta_1$ на $\operatorname{Ker} \beta$. Так же легко показать, что отображение $(a, 1) \to a$ является изоморфным отображением $\operatorname{Ker} \delta_2$ на $\operatorname{Ker} \alpha$.

Лемма 12.2. *Пусть треугольник гомоморфизмов*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\beta"'] & C \end{tikzcd}$$

коммутативен, т. е. $\alpha = \gamma\beta$. Тогда $\operatorname{Im} \alpha \subseteq \operatorname{Im} \beta$, а группа $\operatorname{Im} \gamma \operatorname{Ker} \beta$ совпадает с полным прообразом группы $\operatorname{Im} \alpha$ при гомоморфизме β. В частности, если $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta$, то $B = \operatorname{Im} \gamma \operatorname{Ker} \beta$.

Доказательство. Включение $\operatorname{Im} \alpha \subseteq \operatorname{Im} \beta$ следует из того, что $a^\alpha = (a^\gamma)^\beta$ для всех $a \in A$. Функция β осуществляет эпиморфизм группы $\operatorname{Im} \gamma$ на $\operatorname{Im} \alpha$. Поэтому

$$\operatorname{Ker} \beta \operatorname{Im} \gamma / \operatorname{Ker} \beta \simeq \operatorname{Im} \gamma / \operatorname{Im} \gamma \cap \operatorname{Ker} \beta \simeq \operatorname{Im} \alpha. \quad (1)$$

Пусть S — полный прообраз группы $\operatorname{Im} \alpha$ при гомоморфизме β. Тогда

$$S / \operatorname{Ker} \beta \simeq \operatorname{Im} \alpha. \quad (2)$$

Из (1) и (2) вытекает равенство порядков:

$$|S| = |\operatorname{Im} \gamma \operatorname{Ker} \beta|.$$

Отсюда, ввиду включения $\operatorname{Im} \gamma \operatorname{Ker} \beta \subseteq S$, получаем требуемую факторизацию: $S = \operatorname{Im} \gamma \operatorname{Ker} \beta$. Лемма доказана.

Лемма 12.3. *Пусть даны гомоморфизмы* $\alpha\colon A \to C$, $\beta\colon B \to C$. *Для существования гомоморфизма* $\gamma\colon A \to B$ *такого, что* $\alpha = \gamma\beta$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1) $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$;

2) *в группе* $A_\alpha \times {}_\beta B$ *ее левое ядро дополняемо.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$ и в группе $G = A_\alpha \times {}_\beta B$ ее левое ядро K обладает дополнением H.

Для любого $a \in A$ найдется такой $b \in B$, что $(a, b) \in G$. Действительно, если $a \in A$, то по условию 1) $a^\alpha \in \operatorname{Im}\beta$, т. е. $a^\alpha = b^\beta$ для некоторого $b \in B$. Следовательно, левая проекция δ_1 группы G является эпиморфизмом. Поэтому $G/K \simeq A$ и если δ — ограничение δ_1 на H, то

$$\delta\colon H \to A$$

есть изоморфизм. Определим теперь отображение γ по правилу: если $(a, b) \in H$, то $a^\gamma = b$. Так как $\delta\colon H \to A$ есть изоморфизм, то областью определения функции γ является A. Кроме того, для любых двух элементов (a, b) и (a_1, b_1) из H имеем

$$(a, b)(a_1, b_1) = (aa_1, bb_1) \in H,$$

откуда $(aa_1)^\gamma = bb_1 = a^\gamma a_1^\gamma$. Поэтому $\gamma\colon A \to B$ есть гомоморфизм.

Пусть $x \in A$, $(x, y) \in H$. Согласно построению $x^\alpha = y^\beta$, $x^\gamma = y$. Таким образом, $x^{\gamma\beta} = x^\alpha$.

Необходимость. Пусть имеется гомоморфизм $\gamma\colon A \to B$ такой, что $a^\alpha = (a^\gamma)^\beta$ при всех $a \in A$. По лемме 12.2 $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$. Пусть H — множество всех пар вида (a, a^γ). Так как $a^\alpha = (a^\gamma)^\beta$, то $(a, a^\gamma) \in G = A_\alpha \times {}_\beta B$. Пусть (x, y) и (x_1, y_1) — любые элементы из H. Тогда

$$(x, y)(x_1, y_1) = (xx_1, yy_1),\ (xx_1)^\gamma = x^\gamma x_1^\gamma = yy_1.$$

Значит, $(xx_1, yy_1) \in H$, т. е. H — подгруппа группы G, изоморфная, как легко заметить, группе A. Ясно, что левая проекция δ_1 группы G есть эпиморфизм, поэтому $G/\operatorname{Ker}\delta_1 \simeq A$. Так как H изоморфна A и пересекается с $\operatorname{Ker}\delta_1$ лишь по единице, то $G = H\operatorname{Ker}\delta_1$.

Лемма доказана.

Теорема 12.1 (Шеметков [9]). *Пусть даны гомоморфизмы* $\alpha\colon A \to C$, $\beta\colon B \to C$, *причем* $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \mathrm{Im}\,\beta$, *и пусть для любого простого* p, *делящего* $(|\mathrm{Ker}\,\beta|, |A|)$, *выполняются следующие условия*:

1) *силовская* p-*подгруппа из* $\mathrm{Ker}\,\beta$ *абелева*;

2) *существует гомоморфизм* γ_p *некоторой силовской* p-*подгруппы* A_p *группы* A *в группу* B *такой, что* $\gamma_p\beta = \alpha \mid A_p$, *где* $\alpha \mid A_p$ — *ограничение* α *на* A_p.

Тогда существует гомоморфизм $\gamma\colon A \to B$ *такой, что* $\alpha = \gamma\beta$.

Доказательство. Пусть $G = A_\alpha \times {}_\beta B$, K — левое ядро группы G. Ввиду леммы 12.3 достаточно показать, что K обладает дополнением в G. Так как по условию теоремы $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq \mathrm{Im}\,\beta$, то левая проекция группы G есть эпиморфизм, откуда

$$G / K \simeq A. \tag{1}$$

Так как по лемме 12.1 $\mathrm{Ker}\,\beta \simeq K$, то, учитывая условие теоремы и (1), получаем, что для любого простого p, делящего $|G : K|$, силовские p-подгруппы из K абелевы.

Зафиксируем простое число p, делящее $(|K|, |A|)$. По условию 2) существует гомоморфизм $\gamma_p\colon A_p \to B$ такой, что $a^\alpha = (a^{\gamma_p})^\beta$ для любого $a \in A_p$. Пусть P — множество всех пар вида (a, a^{γ_p}), где $a \in A_p$. Так как $a^\alpha = (a^{\gamma_p})^\beta$, то $(a, a^{\gamma_p}) \in G$. Пусть (a, a^{γ_p}), $(a_1, a_1^{\gamma_p})$ — любые элементы из P. Так как $(aa_1)^{\gamma_p} = a^{\gamma_p}a_1^{\gamma_p}$, то $(a, a^{\gamma_p})(a_1, a_1^{\gamma_p}) \in P$. Значит, P — подгруппа группы G, причем отображение $(a, a^{\gamma_p}) \to a$ есть изоморфизм P на A_p. Так как

$$|G/K|_p = |A|_p = |P| \text{ и } PK/K \simeq P/P \cap K \simeq P,$$

то PK/K — силовская p-подгруппа в G/K. По лемме 11.6 в K имеется такая силовская p-подгруппа K_p, что K_pP — силовская p-подгруппа в PK. Ясно, что K_pP будет силовской подгруппой и в G. Таким образом, получается, что силовская p-подгруппа из K дополняема в некоторой силовской p-подгруппе из G. По теореме 11.5 K обладает дополнением в G. Теперь остается применить лемму 12.3. Теорема доказана.

Следствие 12.1.1. *Пусть даны гомоморфизмы* $\alpha\colon A \to C$, $\beta\colon B \to C$, *и пусть для любого простого* p, *делящего* $|A|$, *выполняются условия* 1) *и* 2) *теоремы* 12.1. *Тогда существует гомоморфизм* $\gamma: A \to B$ *такой, что* $\alpha = \gamma\beta$.

Доказательство. Так как A_p^α входит по лемме 12.2 в $\operatorname{Im}\beta$ и является силовской p-подгруппой в $\operatorname{Im}\alpha$, то ясно, что $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$. Теперь применяем теорему 12.1.

Теорема 12.2 (Шеметков [9]). *Пусть даны гомоморфизмы* $\alpha: A \to C$, $\beta: B \to C$, *причем* $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$, *и пусть для любого простого* p, *делящего* $(|\operatorname{Ker}\beta|, |A|)$, *выполняются следующие условия*:

1) *силовская* p-*подгруппа из* $\operatorname{Ker}\beta$ *абелева*;

2) *некоторая силовская* p-*подгруппа* A_p *из* A *представима в виде* $A_p = L \leftthreetimes P$, *где* $L \subseteq \operatorname{Ker}\alpha$, *причем существует гомоморфизм* $\gamma_p : P \to B$ *такой, что* $\gamma_p\beta$ *совпадает с ограничением* α *на* P.

Тогда существует гомоморфизм $\gamma: A \to B$ *такой, что* $\alpha = \gamma\beta$.

Доказательство. Покажем, что гомоморфизм γ_p: $P \to B$ можно продолжить до гомоморфизма A_p в B, удовлетворяющего условию 2) теоремы 12.1.

Пусть x, x_1 — любые элементы из A_p. Они единственным образом представимы в виде $x = la$, $x_1 = l_1a_1$, где $l, l_1 \in L$, $a, a_1 \in P$. Очевидно, найдется такой элемент $l_2 \in L$, что

$$xx_1 = lal_1a_1 = l_2aa_1.$$

Расширим теперь область опеределения функции γ_p, полагая $x^{\gamma_p} = (la)^{\gamma_p} = a^{\gamma_p}$. Тогда

$$(xx_1)^{\gamma_p} = (l_2aa_1)^{\gamma_p} = (aa_1)^{\gamma_p} = a^{\gamma_p}a_1^{\gamma_p} = x^{\gamma_p}x_1^{\gamma_p},$$

т. е. γ_p: $A_p \to B$ есть гомоморфизм. Кроме того,

$$(x^{\gamma_p})^\beta = (a^{\gamma_p})^\beta = a^\alpha = (la)^\alpha = x^\alpha.$$

Теперь применяем теорему 12.1. Теорема доказана.

2. Свойства добавлений и π-добавлений. Введем следующее определение.

Определение 12.2. Подгруппу H назовем π-*добавлением* к нормальной подгруппе K группы G, если выполняются следующие условия:

1) $HK = G$;

2) $H \cap K$ обладает нормальной $S_{\pi'}$-подгруппой R;

3) $(H \cap K)/R \subseteq \Phi(H/R)$.

Очевидно, каждое добавление к K является также π-добавлением для любого множества простых чисел π. Если π — множество всех простых чисел, то всякое π-добавление к K является добавлением.

Лемма 12.4. *Пусть $HK = G$, $K \lhd G$, и пусть R и R_1 — такие нормальные подгруппы из H, что $R \subseteq R_1 \subseteq H \cap K$, $(H \cap K)/R \subseteq \Phi(H/R)$. Тогда $(H \cap K)/R_1 \subseteq \Phi(H/R_1)$.*

Доказательство. Пусть $H/R = \bar{H}$, $H_1/R = \bar{H}_1$, $R_1/R = \bar{R}_1$. По условию $\bar{H}_1 \subseteq \Phi(\bar{H})$. Так как $\bar{R}_1$ входит в $\bar{H}_1$ и нормальна в $\bar{H}$, то $\bar{H}_1/\bar{R}_1$ содержится в $\Phi(\bar{H}/\bar{R}_1)$. Хорошо известно, что существует изоморфизм δ, переводящий $\bar{H}/\bar{R}_1$ в H/R_1, а $\bar{H}_1/\bar{R}_1$ в H_1/R_1 (Чунихин [7], лемма 3.6.2). Поэтому H_1/R_1 содержится в $\Phi(H/R_1)$. Лемма доказана.

Лемма 12.5. *Если H — π-добавление к нормальной подгруппе K группы G и $\omega \subseteq \pi$, то H является ω-добавлением к K в G.*

Доказательство. Пусть R и R_1 — соответственно π'-холловская и ω'-холловская подгруппа из $H \cap K$. По условию леммы $(H \cap K)/R$ содержится в $\Phi(H/R)$. По лемме 12.4 $H \cap K/R_1$ содержится в $\Phi(H/R_1)$, что и требуется.

Теорема 12.3 (Шеметков [9]). *Пусть H — некоторое p-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Пусть некоторая силовская p-подгруппа G_p группы G представима в виде $G_p = L \rtimes P$, где $L \subseteq K$, $P \subseteq H$. Если p делит $|H \cap K|$, то $O^p(K) \neq K$.*

Доказательство. Пусть p делит $|H \cap K|$. Так как по условию теоремы $H \cap K$ p-нильпотентна, то H существует такая нормальная подгруппа R, что $R \subseteq H \cap K$ и $(H \cap K)/R$ является неединичной абелевой p-группой. По лемме 12.4 $(H \cap K)/R$ содержится в $\Phi(H/R)$.

Пусть α — естественный гомоморфизм группы G на G/K, т. е. $x^\alpha = xK$ для любого $x \in G$. Отображение β: $hR \to hK$, где $h \in H$, является гомоморфизмом группы H/R на G/K. Ясно, что $\operatorname{Ker}\beta = (H \cap K)/R$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\beta$ — абелева p-группа.

Очевидно, отображение γ_p: $a \to aR$, где $a \in P$, является гомоморфизмом группы P в H/R. Пусть x —

любой элемент из P. Тогда

$$x^{\alpha} = xK,\ x^{\gamma p} = xR,\ (x^{\gamma p})^{\beta} = (xR)^{\beta} = xK.$$

Таким образом, $x^{\alpha} = (x^{\gamma p})^{\beta}$ для всех $x \in P$.

Применим теперь теорему 12.2, полагая в ней $A = G$, $B = H/R$, $C = G/K$. По теореме 12.2 существует гомоморфизм γ: $G \to H/R$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & G \arrow[dl, "\gamma"'] \arrow[d, "\alpha"] \\ H/R \arrow[r, "\beta"'] & G/K \end{tikzcd} \tag{1}$$

коммутативна. Так как $\operatorname{Im} \alpha = \operatorname{Im} \beta = G/K$, то по лемме 12.2 выполняется равенство

$$H/R = \operatorname{Im} \gamma \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \gamma\, ((H \cap K)/R).$$

Так как $(H \cap K)/R$ содержится в $\Phi\,(H/R)$, то отсюда вытекает, что $H/R = \operatorname{Im} \gamma$, т. е. γ — эпиморфизм. Ввиду коммутативности треугольника (1) из $x^{\gamma} = R$ вытекает $x^{\alpha} = K$. Таким образом

$$G/\operatorname{Ker} \gamma \simeq H/R,\ \operatorname{Ker} \gamma \subseteq K. \tag{2}$$

Используя (2) и равенство $HK = G$, получаем

$$|\,K\colon \operatorname{Ker} \gamma\,| = |\,(H \cap K)\colon R\,| = p^{\varepsilon},\ \varepsilon > 0.$$

Тем самым теорема доказана.

Теорема 12.4 (Шеметков [9]). *Пусть H — некоторое p-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Если H содержит по крайней мере одну силовскую p-подгруппу группы K, то K p-нильпотентна.*

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по $|\,K\,|$. Если $|\,H \cap K\,|$ не делится на p, то ввиду условия теоремы $|\,K\,|$ не делится на p, т. е. K p-нильпотентна. Предположим, что p делит $|\,H \cap K\,|$. Тогда по теореме 12.3 подгруппа $K_1 = O^p\,(K)$ отлична от K, т. е.

$$|\,K : K_1\,| = p^{\varepsilon},\ \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Так как $H \cap K$ содержит силовские p-подгруппы из K, то $(H \cap K)K_1 = K$, а значит, $HK_1 = G$. Покажем, что H является p-добавлением к K_1 в G. Пусть S — нормальная

$\mathrm{S}_{p'}$-подгруппа из $H \cap K$. Ввиду (1) $S \subseteq K_1$. Поэтому

$$H \cap K \supseteq H \cap K_1 \supseteq S.$$

Так как H — p-добавление к K в G, то $\Phi(H/S)$ содержит $(H \cap K)/S$, а значит, и $(H \cap K_1)/S$. Следовательно, H — p-добавление к K_1 в G. Так как $|K_1| < |K|$, то по индукции K_1 p-нильпотентна, а значит, ввиду (1) и подгруппа K p-нильпотентна. Теорема доказана.

Следствие 12.4.1. *Пусть H — добавление к нормальной подгруппе K группы G. Если для некоторого простого p подгруппа H содержит по крайней мере одну силовскую p-подгруппу из K, то K p-нильпотентна.*

Следствие 12.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — такая непустая формация, что $\mathfrak{N}_{\pi(\mathfrak{F})}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$. Тогда любое добавление к $G^{\mathfrak{F}}$ не содержит ни одной неединичной силовской подгруппы из $G^{\mathfrak{F}}$.*

Следствие 12.4.3. *Любое добавление к $\mathrm{O}^{\pi}(G)$ не содержит ни одной неединичной силовской подгруппы из $\mathrm{O}^{\pi}(G)$.*

Следствие 12.4.4. *Пусть K — неразрешимая минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда любое добавление к K в G не содержит ни одной неединичной силовской подгруппы из K.*

Следствие 12.4.5 (Рокетт [1]). *Пусть $K \lhd G$ и H — подгруппа из G со следующими свойствами:*

1) $H \cap K \subseteq \Phi(H)$;

2) $(|H \cap K|, |G:H|) = 1$.

Тогда K $\pi(H \cap K)$-нильпотентна.

Теорема 12.5 (Шеметков [9]). *Пусть H — некоторое p-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Если $G_p \cap K \subseteq \Omega_1(\mathrm{Z}(G_p))$, то G имеет нормальную подгруппу N такую, что $N \subseteq K$, $HN = G$, $(p, |H \cap \cap N|) = 1$.*

Доказательство. Пусть P — силовская p-подгруппа группы H. По лемме 11.6 существует такая силовская p-подгруппа K_p из K, что $PK_p = G_p$ — силовская p-подгруппа из G. Так как по условию теоремы $K_p \subseteq \Omega_1(\mathrm{Z}(G_p))$, то в K_p найдется такая подгруппа L, что $PL = P \times L = G_p$. По теореме 12.3 в G найдется такая нормальная подгруппа K^*, что

$$|K:K^*| = p^{\varepsilon},\ \varepsilon > 0. \tag{1}$$

Рассмотрим группу $G^* = HK^*$. Нетрудно показать, что H является p-добавлением к K^* в G^*. Ввиду условия теоремы $G_p^* \cap K^* \subseteq \Omega_1(Z(G_p^*))$. Так как $|K^*| < |K|$, то по индукции G^* имеет такую нормальную подгруппу K_1, что $K_1 \subseteq K^*$, $HK_1 = G^*$ и $|H \cap K_1|$ не делится на p. Пусть $S = O^p(K^*)$. Тогда S нормальна в G и обладает следующими свойствами:

$$|K : S| = p^\omega, \ \omega > 0, \ (|S \cap H|, p) = 1. \qquad (2)$$

Рассмотрим группу $\overline{G} = G/S$ и ее подгруппы $\overline{H} = HS/S$ и $\overline{K} = K/S$. Так как $G_p \cap K \subseteq \Omega_1(Z(G_p))$, то $\overline{K}$ — элементарная абелева группа и порядок группы $\Gamma = \overline{G}/C_{\overline{G}}(\overline{K})$ не делится на p. Группу Γ можно рассматривать как группу автоморфизмов для $\overline{K}$. По теореме 11.3 подгруппа $\overline{H} \cap \overline{K}$ дополняема в $\overline{K}\lambda\Gamma$. Следовательно, $\overline{K}$ разлагается в прямое произведение своих Γ-допустимых подгрупп:

$$\overline{K} = (\overline{H} \cap \overline{K}) \times \overline{N}.$$

Если $\overline{N} = N/S$, то N — искомая подгруппа группы G. Действительн›,

$$\overline{H} \cap \overline{K} = (H \cap K)S/S, \quad \overline{H}\overline{N} = \overline{G}, \quad \overline{H} \cap \overline{N} = S/S,$$

поэтому $HN = G$, $HS \cap N = S$, $H \cap N \subseteq H \cap S$. Используя (1), получаем, что $|H \cap N|$ не делится на p. Теорема доказана.

Теорема 12.6 (Шеметков [9]). *Пусть H — некоторое π-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Пусть для любого $p \in \pi$ выполнено одно из следующих двух условий:*

1) $|H|_p = |G|_p$,

2) $G_p \cap K \subseteq \Omega_1(Z(G_p))$.

Тогда H является π-дополнением к некоторой содержащейся в K нормальной подгруппе группы G.

Доказательство. Индукцией по $|G|_\pi$. Пусть p — простой делитель $|G|$, входящий в π, $\omega = \pi \setminus \{p\}$. По индукции H является ω-дополнением к содержащейся в K нормальной подгруппе R из G. Так как $H \cap K$ обладает нормальной $S_{\pi'}$-подгруппой A, то можно считать, что $A \subseteq R$. Легко проверить, что H есть π-добавление, а значит, и p-добавление к R в G. Теперь применяем теоремы 12.4 и 12.5 к группе G и ее подгруппам H и R. Теорема доказана.

Следствие 12.6.1. *Добавление H к нормальной подгруппе K группы G обладает в G нормальным дополнением, содержащимся в K, если для любого простого p либо $|H|_p = |G|_p$, либо $G_p \cap K \subseteq \Omega_1(Z(G_p))$.*

§ 13. $\mathfrak{F}$-добавления

В этом параграфе $\mathfrak{F}$ обозначает некоторую ступенчатую формацию.

1. $\mathfrak{F}$-критические подгруппы. Определение 13.1. Нормальную подгруппу R группы G назовем *$\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппой*, если $R/R \cap \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-эксцентральным главным фактором группы G.

Лемма 13.1. *Пусть $K \lhd G$, причем $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ не содержится в $\Phi(G)$. Тогда G имеет $\mathfrak{F}$-предельную нормальную подгруппу, содержащуюся в $K \cap G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Предположим, что $H = K \cap G^{\mathfrak{F}}$ не входит в $\Phi(G)$. Тогда $L = H \cap \Phi(G) \neq H$. Пусть R/L — содержащаяся в H/L минимальная нормальная подгруппа группы G/L. Так как $\Phi(G/L) = \Phi(G)/L$, то главный фактор R/L нефраттиниев и, ввиду следствия 8.1.2, $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Значит, R $\mathfrak{F}$-предельна в G, и лемма доказана.

Лемма 13.2. *Пусть R — $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа группы G, $\pi = \pi(R/K)$, $K = \Phi(G) \cap R$. Тогда R имеет нормальную S_π-подгруппу S, причем следующие группы G-изоморфны и, следовательно, являются $\mathfrak{F}$-эксцентральными главными факторами:*

$$R\Phi(G)/\Phi(G) \simeq S/S \cap \Phi(G) \simeq R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}} \simeq R/K.$$

Кроме того, любая максимальная подгруппа группы G, не покрывающая R/K, не покрывает ни один из указанных главных факторов. В частности, подгруппы $R\Phi(G)$, S и $R \cap G^{\mathfrak{F}}$ являются $\mathfrak{F}$-предельными нормальными подгруппами группы G.

Доказательство. По лемме 4.4 $R = S \times T$, где $T \subseteq \Phi = \Phi(G)$, S — S_π-подгруппа из R. Очевидно, $R\Phi/\Phi = S\Phi/\Phi$, R/K и $S/S \cap \Phi$ между собой попарно G-изоморфны. Так как R/K $\mathfrak{F}$-эксцентрален, то по теореме 8.4 имеет место G-изоморфизм:

$$R/K \simeq R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}.$$

Пусть максимальная подгруппа M не покрывает R/K. Очевидно, M не покрывает $R\Phi/\Phi$ и $S/S \cap \Phi$. По теореме 8.4 M не покрывает и $R \cap G^{\mathfrak{F}}/K \cap G^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

Определение 13.2. Пусть $K \lhd G$. Максимальную подгруппу M группы G назовем *$\mathfrak{F}$-критической в G относительно K*, если в G найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R, что $R \subseteq K$ и $MR = G$.

Будем называть *$\mathfrak{F}$-критической подгруппой* группы G всякую ее подгруппу, являющуюся максимальной в G и $\mathfrak{F}$-критической относительно G. Из определения и леммы 13.2 следует, что максимальная подгруппа $\mathfrak{F}$-критична в G тогда и только тогда, когда она $\mathfrak{F}$-критична относительно $G^{\mathfrak{F}}$. Заметим, что всякая $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой.

Лемма 13.3. *Пусть $M\mathrm{F}(G) = G$, где M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы $G \neq 1$. Тогда M $\mathfrak{F}$-критична в G*

Доказательство. Рассмотрим $G/\Phi = (M/\Phi)(F/\Phi)$, где $\Phi = \Phi(G)$, $F = \mathrm{F}(G)$. По лемме 7.9, F/Φ записывается в виде прямого произведения

$$F/\Phi = R_1/\Phi \times R_2/\Phi \times \ldots \times R_t/\Phi,$$

где R_i/Φ — минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ. Так как M не содержит F, то R_k/Φ не содержится в M/Φ для некоторого k. Тогда M не покрывает R_k/Φ, а значит, ввиду теоремы 8.1 R_k/Φ $\mathfrak{F}$-эксцентрален в G. Следовательно, R_k $\mathfrak{F}$-предельна в G. Так как $G = MR_k$, то M $\mathfrak{F}$-критична, что и требуется.

Теорема 13.1. *Пусть $G = MR$, где M максимальна в G, а R — $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. Пусть L — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа из G, содержащя R. Тогда $M \cap L$ является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой в M.*

Доказательство. Так как $MR = G$ и $L \supseteq R$, то $ML = G$, $L = R(L \cap M)$. Отображение φ: $mR \to m(M \cap R)$, $m \in M$, является изоморфизмом группы G/R на $M/M \cap R$. Ввиду равенства $L = R(L \cap M)$, функция φ при $m \in L \cap M$ переводит максимальную подгруппу L/R из G/R в $M \cap L/M \cap R$. Поэтому $L \cap M$ максимальна в M. Так как $MR = G$, $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, то $M^{\mathfrak{F}}R = G^{\mathfrak{F}}$. Поэтому, ввиду $L \supseteq R$, мы видим, что

$L \cap M$ не содержит $M^{\mathfrak{F}}$, т. е. $L \cap M$ $\mathfrak{F}$-абнормальна в M. Теорема доказана.

Теорема 13.2. *Пусть $G = M_1R_1 = M_2R_2$, где M_1 и M_2 — максимальные подгруппы из G, а R_1 и R_2 — содержащиеся в $G^{\mathfrak{F}}$ различные нильпотентные $\mathfrak{F}$-предельные нормальные подгруппы группы G, причем $R_1 \cap R_2 \supseteq G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *подгруппа $R = M_1 \cap R_1R_2$ является $\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппой группы G, причем $R_1R = R_1R_2$ и следующие группы G-изоморфны:*

$$R_1R_2/R_1 \simeq R_2/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \simeq R/G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G);$$

2) *если $R_1 \subseteq M_2$, то $M_1 \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-критична как в M_1, так и в M_2.*

Доказательство. Положим $\Phi = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$. Так как $R \lhd M_1$, причем R_1R_2/Φ абелева, то $R \lhd G$. Далее, $RR_1 = R_1(M_1 \cap R_1R_2) = R_1R_2$. Пусть $R \cap R_1 = K$. Тогда $K \supseteq \Phi$ и если $K \neq \Phi$, то $K = R_1$, поскольку R_1/Φ — минимальная нормальная подгруппа в G/Φ. Но тогда $R_1 \subseteq R$ и $R_1R_2 = RR_1 = R \subseteq M_1$, что невозможно. Поэтому $R \cap R_1 = \Phi$. Очевидно, $R_1 \cap R_2 = \Phi$. Отсюда сразу следует G-изоморфизм:

$$RR_1 / R_1 = R_1R_2 / R_1 \simeq R_2 / \Phi \simeq R / \Phi.$$

Следовательно, R/Φ $\mathfrak{F}$-эксцентрален, а R $\mathfrak{F}$-предельна. Утверждение 1) доказано. Докажем теперь 2).

Предположим, что $R_1 \subseteq M_2$. Так как $M_2R_2 = G$ и R_2 нильпотентна, то ввиду следствия 4.1.1 группа G индуцирует на R_1 / Φ ту же группу автоморизмов, что и M_2. Поэтому R_1 / Φ есть $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы M_2. Так как $(M_1 \cap M_2)R_1 = M_2$, то ясно, что $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой в M_2. Так как R_1 нильпотентна, то $(M_1 \cap M_2)\mathrm{F}(M_2) = M_2$, а значит, по лемме 13.3, $M_1 \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-критична в M_2. Если $R_2 \subseteq M_1$, то по тем же соображениям $M_1 \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-критична в M_1. Следовательно, осталось рассмотреть случай $M_1R_2 = G$.

Пусть $M_1R_2 = G$. Заметим, что согласно теореме 13.1 подгруппа $M_1 \cap M_2$ является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой в M_1. По условию теоремы $R_1 \neq R_2$. По доказанному, $R = M_1 \cap R_1R_2$ является $\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппой группы G, причем $RR_1 = R_1R_2$. Подгруппа R не содержится в M_2, так как в противном случае $R_2 \subseteq R_1R_2 = RR_1 \subseteq M_2$, что невозможно. Значит, $M_2R = G$, $(M_1 \cap M_2)R = M_1$. Так как R нильпотентна, а $M_1 \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-абнормальна в M_1, то ввиду леммы 13.3 подгруппа $M_1 \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-критична в M_1, и теорема доказана.

2. $\mathfrak{F}$-добавления. Сейчас мы дадим формационное обобщение понятия добавления.

Определение 13.3. Пусть $K \lhd G$. Если $K \cap G^{\mathfrak{F}}$ не содержится в $\Phi(G)$, то G обладает максимальной подгруппой M_1, не содержащей $K \cap G^{\mathfrak{F}}$. Если $M_1^{\mathfrak{F}} \cap K$ не содержится в $\Phi(M_1)$, то M_1 имеет максимальную подгруппу M_2, не содержащую $M_1^{\mathfrak{F}} \cap K$. Продолжая этот процесс и дальше, мы построим максимальную цепь

$$G = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \ t \geqslant 0.$$

обладающую следующими свойствами:

1) M_i не содержит $M_{i-1}^{\mathfrak{F}} \cap K$ при любом $i > 0$;

2) $H^{\mathfrak{F}} \cap K \subseteq \Phi(H)$.

Подгруппу H назовем *$\mathfrak{F}$-добавлением к K в G*, а указанную цепь — *$\mathfrak{F}$-добавляющей цепью для подгруппы K*.

Понятие добавления получается отсюда в случае, когда $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$. Заметим, что при построении $\mathfrak{F}$-добавляющей цепи можно было воспользоваться леммой 13.1. Это приводит к следующему определению.

Определение 13.4. Пусть $K \lhd G$. Используя лемму 13.1, построим максимальную цепь

$$G = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \ t \geqslant 0,$$

обладающую следующими свойствами:

1) M_i $\mathfrak{F}$-критична в M_{i-1} относительно $M_{i-1} \cap K$ для любого $i > 0$;

2) $H^{\mathfrak{F}} \cap K \subseteq \Phi(H)$.

Подгруппу H будем называть *критическим $\mathfrak{F}$-добавлением к K в G*, а указанную цепь — *критически $\mathfrak{F}$-добавляющей цепью для K*.

При $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$ мы получаем понятие критического добавления.

Подчеркнем, что каждая нормальная подгруппа обладает по крайней мере одним критическим $\mathfrak{F}$-добавлением.

Лемма 13.4. *При $K = G^{\mathfrak{F}}$ условие 1) в определении 13.4 равносильно следующему: M_i $\mathfrak{F}$-критична в M_{i-1} для любого $i > 0$.*

Доказательство. Пусть M_i $\mathfrak{F}$-критична в M_{i-1}, $i > 0$. Это значит, что в M_{i-1} найдется такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа R_i, что $M_iR_i = M_{i-1}$. Ввиду леммы 13.2 можно считать, что $R_i \subseteq M_{i-1}^{\mathfrak{F}}$. Применяя лемму 1.2, мы видим, что $M_i^{\mathfrak{F}} \subseteq M_{i-1}^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Поэтому $R_i \subseteq M_{i-1}^{\mathfrak{F}} \cap G^{\mathfrak{F}} = M_{i-1}^{\mathfrak{F}} \cap K$, а это и означает, что M_i $\mathfrak{F}$-критична в M_{i-1} относительно $M_{i-1}^{\mathfrak{F}} \cap K$. Лемма доказана.

Следующая лемма прямо вытекает из определения $\mathfrak{F}$-добавления и леммы 1.2.

Лемма 13.5. *Пусть H — $\mathfrak{F}$-добавление к нормальной подгруппе K группы G. Тогда $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$.*

Лемма 13.6. *Если ступенчатая формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной, то всякое $\mathfrak{F}$-добавление к $G^{\mathfrak{F}}$ принадлежит $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}$-добавление к $G^{\mathfrak{F}}$. По определению, $H^{\mathfrak{F}} \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(H)$. По лемме 13.5 $H^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Поэтому $H^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(H)$, значит, $H^{\mathfrak{F}} = 1$ ввиду насыщенности $\mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 13.7. *Пусть H — критическое $\mathfrak{F}$-добавление к нормальной подгруппе K группы G, а F — критическое $\mathfrak{F}$-добавление к нормальной подгруппе L группы H. Если $KL \cap H^{\mathfrak{F}} = L$, то F — критическое $\mathfrak{F}$-добавление к KL в группе G.*

Доказательство. Пусть

$$H = F_0 \supset F_1 \supset \ldots \supset F_t = F, \qquad t \geqslant 0,$$
$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_r = H, \qquad r \geqslant 0,$$

— критически $\mathfrak{F}$-добавляющие цепи соответственно для L в H и для K в G. Рассмотрим цепь

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_r = H = F_0 \supset F_1 \supset \ldots \\ \ldots \supset F_t = F.$$

По условию леммы для любого i, $0 < i \leqslant r$, подгруппа H_i $\mathfrak{F}$-критична в H_{i-1} относительно $H_{i-1} \cap K$. А так как $H_{i-1} \cap K \subseteq H_{i-1} \cap KL$, то H_i будет $\mathfrak{F}$-критична в H_{i-1} и относительно $H_{i-1} \cap KL$. Далее, для любого j, $0 < j \leqslant t$, подгруппа F_j $\mathfrak{F}$-критична в F_{j-1} относительно $F_{j-1} \cap L$, а значит, и относительно $F_{j-1} \cap KL$. Пусть выполняется условие $KL \cap H^{\mathfrak{F}} = L$. Так как $F^{\mathfrak{F}} \cap L \subseteq \Phi(F)$ и, по лемме 13.5, $F^{\mathfrak{F}} \subseteq H^{\mathfrak{F}}$, то $F^{\mathfrak{F}} \cap \cap KL = F^{\mathfrak{F}} \cap H^{\mathfrak{F}} \cap KL = F^{\mathfrak{F}} \cap L \subseteq \Phi(F)$. Лемма доказана.

3. Существование $\mathfrak{F}$-разложений. Определение 13.5. *Главным $\mathfrak{F}$-рядом* группы G назовем ряд

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t \subseteq G_{t+1} = G, \quad t \geqslant 0, \qquad (R)$$

в котором $G_t = G^{\mathfrak{F}}$, а участок от 1 до G_t является G-главным рядом группы $G^{\mathfrak{F}}$. Совокупность подгрупп $R_1, R_2, \ldots, R_{t+1}$ назовем *$\mathfrak{F}$-разложением группы G, соответствующим ряду (R)*, если выполняются следующие условия:

1) $G_i = R_i G_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, t+1$;

2) $N_G(R_i) \supseteq R_j$ при любых $i \leqslant j$;

3) $\pi(R_i) = \pi(G_i/G_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, t$;

4) $R_i R_{i+1} \ldots R_{t+1}$ является критическим $\mathfrak{F}$-добавлением к G_{i-1} в группе G для любого $i = 1, 2, \ldots t+1$.

При $G^{\mathfrak{F}} = 1$ главный $\mathfrak{F}$-ряд принимает вид $1 = G_0 \subseteq \subseteq G_1 = G$ и ему соответствует $\mathfrak{F}$-разложение, состоящее из одной тривиальной подгруппы G.

Теорема 13.3 (Шеметков [19]). *Пусть ступенчатая формация $\mathfrak{F}$ является насыщенной. Тогда любому главному $\mathfrak{F}$-ряду группы G соответствует по крайней мере одно $\mathfrak{F}$-разложение группы G.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Тогда G имеет главный $\mathfrak{F}$-ряд

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t \subseteq G_{t+1} = G, \qquad (1)$$

где $G_t = G^{\mathfrak{F}}$, но G не имеет $\mathfrak{F}$-разложений, соответствующих ряду (1). Обозначим $\pi(G_i/G_{i-1})$ через π_i.

Выберем среди членов ряда (1) тот G_n, для которого выполняется следующее: G_n не входит в $\Phi(G)$, но G_{n-1} входит в $\Phi(G)$. Возможность для такого выбора имеется, так как $1 = G_0 \subseteq \Phi(G)$, а подгруппа G_t не входит в $\Phi(G)$, так как формация $\mathfrak{F}$ насыщенная.

Подгруппа G_i при $0 < i < n$ нильпотентна и, значит, обладает S_{π_i}-подгруппой R_i, нормальной в G. Так как

$G_{n-1} \subseteq \Phi(G)$, то по лемме 4.4 G_n имеет S_{π_n}-подгруппу R_n, нормальную в G. Предположим, что $n = t$, и рассмотрим критическое $\mathfrak{F}$-добавление H к G_t в G. Нетрудно видеть, что система $R_1, R_2, \ldots, R_t, H$ является искомым $\mathfrak{F}$-разложением группы G. Таким образом, в дальнейшем будем считать, что $n < t$. Буквой H будем обозначать, как и раньше, некоторое критическое $\mathfrak{F}$-добавление к G_n в группе G. Посмотрим, что представляет собой ряд

$$1 \subseteq H_n \subseteq H_{n+1} \subseteq \ldots \subseteq H_t \subseteq H_{t+1} = H, \tag{2}$$

где $H_i = H^{\mathfrak{F}} \cap G_i$, $i = n, n+1, \ldots, t$. По лемме 1.2 $H^{\mathfrak{F}} G_n = G^{\mathfrak{F}}$, $H_t = H^{\mathfrak{F}}$. Так как при $t \geqslant i \geqslant n$ имеет место

$$G_n(G_i \cap H^{\mathfrak{F}}) = G_i \cap G_n H^{\mathfrak{F}} = G_i \cap G^{\mathfrak{F}} = G_i,$$

то справедливо равенство

$$G_n H_i = G_i, \quad i = n, n+1, \ldots, t+1. \tag{3}$$

Из определения H_i следует, что при любом $i = n, n+1, \ldots, t$ имеет место равенство $H_i \cap G_n = H_n$. Используя этот факт и (3), получаем H-изоморфизм

$$G_{i+1}/G_i \simeq H_{i+1}/H_i, \quad i = n, n+1, \ldots, t-1. \tag{4}$$

Так как $HG_n = G$, то G_{i+1}/G_i будет при $i \leqslant t-1$ H-главным фактором группы G, а потому из полученного H-изоморфизма (4) следует, что факторы ряда (2) на участке от H_n до H_t являются главными факторами группы H. Уплотнив теперь ряд (2), мы получим главный $\mathfrak{F}$-ряд группы H:

$$1 = A_0 \subset A_1 \subset \ldots \subset A_s = H_n \subset H_{n+1} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset H_t \subseteq H_{t+1} = H. \tag{5}$$

Так как $H \neq G$, то для H теорема верна. Таким образом, H имеет $\mathfrak{F}$-разложение

$$B_1, B_2, \ldots, B_s, R_{n+1}, R_{n+2}, \ldots, R_{t+1}, \tag{6}$$

соответствующее ряду (5). При $H_n = 1$ будет $s = 0$ и система $\{B_1, \ldots, B_s\}$ вырождается в пустое множество. Так как $H_n = H^{\mathfrak{F}} \cap G_n \subseteq \Phi(H)$ по определению $\mathfrak{F}$-добавления, то при $s > 0$ подгруппы $B_1, B_2, \ldots, B_s$ содержатся в $\Phi(H)$. В частности, отсюда следует, что

$R_{n+1}R_{n+2}\ldots R_{t+1} = H$. По определению $\mathfrak{F}$-разложения система подгрупп (6) обладает следующими свойствами:

$$H_i = R_i H_{i-1}, \quad i = n+1, \ldots, t+1;$$
$$\mathrm{N}_H(R_i) \supseteq R_j \text{ при } i \leqslant j;$$
$$\pi(R_i) = \pi(H_i/H_{i-1}), \quad i = n+1, \ldots, t.$$

Отсюда, учитывая (3) — (4) и вспоминая сделанное в начале доказательства определение подгруппы R_i при $i \leqslant n$, получаем

$$\left.\begin{aligned} G_i &= R_i G_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, t+1; \\ \mathrm{N}_G(R_i) &\supseteq R_j \text{ при } i \leqslant j; \\ \pi(R_i) &= \pi(G_i/G_{i-1}), \quad i = 1, 2, \ldots, t+1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Система (6) обладает по определению еще и таким свойством: для любого $i = n+1, \ldots, t+1$ подгруппа $R_i R_{i+1} \ldots R_{t+1}$ является критическим $\mathfrak{F}$-добавлением к H_{i-1} в группе H. Так как $H_{i-1}G_n = G_{i-1}$ и $H^{\mathfrak{F}} \cap G_{i-1} = H_{i-1}$ при $n+1 \leqslant i \leqslant t+1$, то, применяя лемму 13.7 при $K = G_n$, $L = H_{i-1}$, $F = R_i R_{i+1} \ldots R_{t+1}$, получаем следующее утверждение:

$$R_i R_{i+1} \ldots R_{t+1} \text{ есть критическое } \mathfrak{F}\text{-добавление к } G_{i-1} \text{ в группе } G, \ i = n+1, \ldots, t+1. \tag{8}$$

Так как $H = R_{n+1}R_{n+2}\ldots R_{t+1}$ есть критическое $\mathfrak{F}$-добавление к G_n в G, причем $G_{n-1} \subseteq \Phi(G)$, то мы видим, что утверждение (8) верно для любого $i = 1, 2, \ldots, t+1$.

Теорема доказана.

Теорема 13.4 (Шеметков). *Пусть*

$$1 = G_0 \subset G_1 \subset \ldots \subset G_t = G, \quad t \geqslant 1,$$

— любой главный ряд группы $G \neq 1$. Тогда в группе G существуют такие подгруппы $R_1, R_2, \ldots, R_t$, что для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ выполняются следующие условия:

1) $G_i = R_i G_{i-1}$;
2) $\mathrm{N}_G(R_i) \supseteq R_j$ *при* $i \leqslant j$;
3) $\pi(R_i) = \pi(G_i / G_{i-1})$;
4) $(R_i R_{i+1} \ldots R_t) \cap G_{i-1} \subseteq \Phi(R_i R_{i+1} \ldots R_t)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$. По теореме 13.3 группа G имеет $\mathfrak{F}$-разложение $R_1, \ldots, R_t, R_{t+1}$. Очевидно, $R_{t+1} = 1$, а подгруппы $R_1, \ldots, R_t$ являются искомыми.

Лемма 13.8. *Пусть дана подгруппа H и некоторый нормальный ряд группы G:*

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_t = G, \quad t \geqslant 1.$$

Тогда порядок H делится на произведение всех тех $|G_i : G_{i-1}|$, для которых $HG_{i-1} \supseteq G_i$.

Доказательство. Индукцией по длине ряда t. Если $t = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $t > 1$. Легко видеть, что для любого $i < t$ подгруппа $H \cap G_{t-1}$ покрывает G_i / G_{i-1} тогда и только тогда, когда H покрывает G_i / G_{i-1}. Для G_{t-1} и ее подгруппы $H \cap G_{t-1}$ лемма верна по индукции. Если H не покрывает G / G_{t-1}, то из справедливости леммы для G_{t-1} вытекает ее справедливость и для G. Пусть $HG_{t-1} = G$. Тогда $|H| = |G : G_{t-1}|\,|H \cap G_{t-1}|$, и снова мы видим, что из справедливости леммы для группы G_{t-1} и ее подгруппы $H \cap G_{t-1}$ вытекает справедливость леммы и для G.

Теорема 13.5. (Чунихин [7]). *Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_\mu$ — такие непустые подмножества множества M всех индексов некоторого главного ряда группы G, что их объединение равно M. Обозначим произведение всех элементов множества M_i через m_i. Тогда G представима в виде произведения попарно перестановочных подгрупп $G = \bar{M}_1\bar{M}_2 \ldots \bar{M}_\mu$, где $|\bar{M}_i| = m_i c_i$, $\pi(c_i) \subseteq \pi(m_i)$, причем при $M_i \cap M_j = \phi$ пересечение $\bar{M}_i \cap \bar{M}_j$ разрешимо.*

Доказательство. Для построения факторизации воспользуемся системой подгрупп $R_1, R_2, \ldots, R_t$, существование которой утверждается теоремой 13.4. Обозначим через $\bar{M}_i$ произведение всех тех подгрупп R_j, которые соответствуют индексам из M_i. Ввиду леммы 13.8 нам остается показать лишь разрешимость пересечений $\bar{M}_i \cap \bar{M}_j$.

Пусть $M_i \cap M_j = \phi$. Тогда для любого $k = 0, 1, \ldots, t-1$ имеет место включение:

$$\bar{M}_i \cap \bar{M}_j \subseteq R_1R_2 \ldots R_kR_{k+2} \ldots R_t. \tag{1}$$

Положим $R_{k+2}R_{k+3} \ldots R_t = S_{k+1}$. Так как $G_k = R_1R_2 \ldots R_k$, то (1) перепишется в виде

$$\bar{M}_i \cap \bar{M}_j \subseteq G_kS_{k+1}. \tag{2}$$

Так как пересечение $S_{k+1} \cap G_{k+1}$ нильпотентно, то нильпотентной будет и следующая группа:

$$S_{k+1}G_k/G_k \cap G_{k+1}/G_k = (S_{k+1} \cap G_{k+1})\,G_k/G_k.$$

Отсюда и из (2) вытекает нильпотентность следующих групп:

$$((\tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j)\,G_k \cap G_{k+1})/G_k \simeq G_k\,(\tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j \cap G_{k+1})/G_k \simeq$$
$$\simeq (\tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j \cap G_{k+1})/(\tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j \cap G_k), \quad k = 0, 1, \ldots, t-1.$$

Следовательно, каждый фактор нормального ряда

$$\tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j = \tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j \cap G_t \supseteq$$
$$\supseteq \tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j \cap G_{t-1} \supseteq \ldots \supseteq \tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j \cap G_0 = 1$$

является нильпотентной группой. Теорема доказана.

Следствие 13.5.1. *Пусть $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$ — некоторые попарно не пересекающиеся множества простых чисел, $n > 1$. Пусть каждый индекс главного ряда группы G является $(\pi_0 \cup \pi_i)$-числом для некоторого i. Тогда существует такая факторизация группы G попарно перестановочными подгруппами $G = H_1H_2 \ldots H_n$, что H_i является $(\pi_0 \cup \pi_i)$-группой, $i = 1, 2, \ldots, n$, причем пересечение $H_i \cap H_j$ при $i \neq j$ является разрешимой π_0-группой.*

Определение 13.6. Множество подгрупп $\{P_1, P_2, \ldots, P_t\}$ группы $G \neq 1$ называется *силовской системой*, если выполняются следующие условия:

1) P_i является неединичной силовской подгруппой из G для любого i;

2) для любых $i \neq j$ имеет место $|P_i| \neq |P_j|$, $P_iP_j = P_jP_i$;

3) $G = P_1P_2 \ldots P_t$.

Если $G = 1$, то ее силовской системой будем считать $\{G\}$.

Понятно, что из теоремы 13.5 непосредственно вытекает

Следствие 13.5.2 (Ф. Холл). *Каждая разрешимая группа обладает силовской системой.*

§ 14. Комментарии

1. В обзорном докладе Виландта [1] большое внимание было уделено задаче о дополнениях к нормальным подгруппам. Виландт подчеркнул важность устранения условия коммутативности в теореме 11.3 Гашюца,

одновременно отметив невозможность отбросить это условие (соответствующий пример есть в книге Х у п п е р т а [5], с. 131). Теорема 11.5 устраняет указанное условие, заменяя его гораздо более слабым требованием абелевости некоторых силовских подгрупп.

2. Дополняемостью $\mathfrak{F}$-корадикалов занимались многие авторы (см. литературу в статье Ш е м е т к о в а [10]). Следствие 11.9.1 для разрешимых групп доказано в статье З е й ц а и Р а й т а [1]. В статьях Р а й т а [2], [4] находятся дополнения для обобщенных корадикалов. Существование дополнений к корадикалам исследовалось также в статьях Б е й д л е м а н а [2], Х у п п е р т а [6] и Ш м и д а [7].

3. Теорема 13.4 представляет собой усиление теоремы К а р г а п о л о в а [1]. В оригинале у Ч у н и х и н а [7] утверждения о разрешимости $\tilde{M}_i \cap \tilde{M}_j$ нет, оно добавлено нами.

ГЛАВА IV

ПРОЕКТОРЫ

§ 15. Существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-проекторов

Определение 15.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Подгруппу H группы G назовем *$\mathfrak{F}$-проектором*, если выполняются следующие условия:

1) $H \in \mathfrak{F}$;

2) из $H \subseteq U \subseteq G$ и $U / U_0 \in \mathfrak{F}$ всегда следует $HU_0 = U$.

Из определения следует, что $\mathfrak{F}$-проектор группы является $\mathfrak{F}$-проектором и в любой его содержащей подгруппе. Кроме того, $\mathfrak{F}$-проектор является максимальной $\mathfrak{F}$-подгруппой в группе.

Лемма 15.1. *Для любого непустого гомоморфа $\mathfrak{F}$ и для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *если H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G и $N \triangleleft G$, то HN / N является $\mathfrak{F}$-проектором группы G / N;*

2) *если R / N — $\mathfrak{F}$-проектор группы G / N и H — $\mathfrak{F}$-проектор группы R, то H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G и $N \triangleleft G$. Тогда $HN / N \simeq H / H \cap N \in \mathfrak{F}$. Пусть $HN / N \subseteq U / N$, причем

$$U / N / U_0 / N \simeq U / U_0 \in \mathfrak{F}.$$

Тогда $HU_0 = U$, а следовательно,

$$(HN / N)(U_0N / N) = HU_0N / N = U / N.$$

Тем самым доказано, что HN / N — $\mathfrak{F}$-проектор в G / N.

Докажем 2). Пусть R / N — $\mathfrak{F}$-проектор в G / N, H — $\mathfrak{F}$-проектор в R и пусть $H \subseteq U \subseteq G$, $U_0 \triangleleft U$,

$U / U_0 \in \mathfrak{F}$. Тогда

$$UN / N / U_0N / N \simeq UN / U_0N \simeq \simeq U / U_0(U \cap N) \in \mathfrak{F}.$$

Так как R / N — $\mathfrak{F}$-проектор в G / N, то

$$(R / N)(U_0N / N) = RU_0N / N = UN / N.$$

Отсюда получаем $UN = RU_0$. По доказанному, HN / N является $\mathfrak{F}$-проектором в $R / N \in \mathfrak{F}$. Значит, $HN = R$ и мы получаем

$$UN = HU_0N, \quad U = U \cap HU_0N = H(U \cap U_0N) = = HU_0(U \cap N).$$

Но тогда, ввиду $H(U \cap N) \subseteq U \cap R$, выполняется равенство $U = (U \cap R)U_0$. Кроме того,

$$U / U_0 = (R \cap U)U_0 / U_0 \simeq R \cap U / R \cap U_0 \in \mathfrak{F}.$$

Так как H является $\mathfrak{F}$-проектором в $R \cap U$, то отсюда получаем

$$H(R \cap U_0) = U \cap R,$$
$$U = (U \cap R)U_0 = H(R \cap U_0)U_0 = HU_0.$$

Следовательно, H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Лемма доказана.

Теорема 15.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторая формация. Подгруппа H из G является $\mathfrak{F}$-проектором группы G тогда и только тогда, когда $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.*

Доказательство. Предположим, что H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Тогда $H \in \mathfrak{F}$. Допустим, что существует такая цепь

$$H \subseteq K \subset L \subseteq G,$$

что K — $\mathfrak{F}$-нормальная максимальная подгруппа из L. Тогда $L^{\mathfrak{F}} \subseteq K$ и, по определению $\mathfrak{F}$-проектора, $HL^{\mathfrak{F}} = HK = K = L$. Пришли к противоречию. Остается принять, что H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G.

Предположим теперь, что $H \in \mathfrak{F}$ и H $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Тогда, если $H \subseteq U$, $U/U_0 \in \mathfrak{F}$, $HU_0 \neq U$, в U существует такая максимальная подгруппа M, что

$$U \supset M \supseteq HU_0 \supseteq H.$$

Так как $U / U_0 \in \mathfrak{F}$, то $U^{\mathfrak{F}} \subseteq U_0$, а значит, M $\mathfrak{F}$-нормальна в U. Но это противоречит тому, что H $\mathfrak{F}$-абнормальна.

Теорема доказана.

Лемма 15.2. *Пусть H — S_π-подгруппа группы G. Если $KH = HK$, то $H \cap K$ есть S_π-подгруппа из K, причем $|G : K|_\pi = |HK : K|$. В частности, если $K \lhd G$, то HK / K — S_π-подгруппа группы G/K.*

Доказательство. Пусть $HK = KH$. Тогда HK является подгруппой и ее порядок равен

$$|HK| = |H| \cdot \frac{|K|}{|H \cap K|} = |H| \cdot |HK : H|.$$

Так как H является S_π-подгруппой в HK, то отсюда вытекает, что $|K| : |H \cap K|$ является π'-числом, а значит, $H \cap K$ — S_π-подгруппа в K. Используя это, получаем равенство:

$$|G : K|_\pi = |G|_\pi : |K|_\pi = |H| : |H \cap K| = |HK : K|.$$

Лемма доказана.

Лемма 15.3. *Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, содержащая все циклические $\pi(\mathfrak{F})$-группы простых порядков (ввиду леммы 4.2 этому условию удовлетворяют все локальные формации). Пусть H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Тогда из $H \subseteq U \subseteq G$ всегда следует, что $|N_G(U) : U|$ не делится на числа из $\pi(\mathfrak{F})$. В частности, H является $\pi(\mathfrak{F})$-холловской подгруппой в $N_G(H)$.*

Доказательство. Предположим, что $N_G(U) / U$ имеет подгруппу Q / U порядка $q \in \pi(\mathfrak{F})$. По условию леммы $Q / U \in \mathfrak{F}$, а по определению проектора $HU = Q$, что невозможно, так как $H \subseteq U$.

Теорема 15.2. *Для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *для любого простого p множество всех силовских p-подгрупп из G совпадает с множеством всех $\mathfrak{N}_p$-проекторов из G;*

2) *если H — S_π-подгруппа из G, то H является $\mathfrak{G}_\pi$-проектором группы G;*

3) *если G разрешима, то для любого множества простых чисел π множество всех S_π-подгрупп из G совпадает с множеством всех $\mathfrak{G}_\pi$-проекторов из G.*

Доказательство. Пусть H — S_π-подгруппа и $H \subseteq U \subseteq G$, $U / U_0 \in \mathfrak{S}_\pi$. Так как H является S_π-подгруппой в U, то ввиду леммы 15.2 имеем $U = HU_0$. Значит, H — $\mathfrak{S}_\pi$-проектор в G.

Если F — $\mathfrak{S}_\pi$-проектор группы G, то F не содержится ни в какой другой π-подгруппе из G. Поэтому если G разрешима, то по теореме Ф. Холла (М. Холл [1], теорема 9.3.1) подгруппа F является S_π-подгруппой в G. Если же $\pi = \{p\}$, то по теореме Силова F является S_p-подгруппой в G. Теорема доказана.

Теорема 15.3 (Гашюц [3], Шунк [1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый гомоморф. Тогда для любой разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *любые два $\mathfrak{F}$-проектора группы G сопряжены в G;*

2) *если $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, то G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-проектором.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой утверждение 1) неверно. Пусть H_1 и H_2 — несопряженные между собой $\mathfrak{F}$-проекторы группы G, а L — минимальная нормальная подгруппа группы G. Считаем, что $G \neq 1$, иначе теорема верна. Ввиду леммы 15.1 H_1L / L и H_2L / L являются $\mathfrak{F}$-проекторами в G / L. Так как для G / L теорема верна, то

$$H_1L / L = H_2^xL / L$$

для некоторого $x \in G$. Подгруппа H_2^x является $\mathfrak{F}$-проектором в G, а значит, и в H_2^xL. Если $H_1L \neq G$, то теорема для H_1L верна, а значит, H_1 и H_2^x сопряжены в H_1L. Получили противоречие. Следовательно,

$$H_1L = H_2^xL = G. \qquad (*)$$

Если бы ядро подгруппы H_1 в G было не равно 1, то мы могли бы выбрать L содержащейся в H_1 и получили бы $H_1L = H_1 = G$, что невозможно. Следовательно, ядра подгрупп H_1 и H_2 в группе G равны 1. Из равенства (*) и того, что L — абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, легко заключить, что H_1 и H_2^x — максимальные подгруппы группы G. Согласно следствию 8.5.2 H_1 и H_2^x сопряжены в G. Снова пришли к противоречию. Утверждение 1) доказано.

Предположим, что $\mathfrak{F}$ — непустая насыщенная формация, и докажем существование $\mathfrak{F}$-проекторов в разрешимой группе G. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа из G. По индукции G / K имеет $\mathfrak{F}$-проектор R / K. Если $R \neq G$, то по индукции R обладает $\mathfrak{F}$-проектором, который согласно лемме 15.1 будет $\mathfrak{F}$-проектором группы G. Пусть $R = G$. Тогда $G / K \in \mathfrak{F}$. Ввиду насыщенности $\mathfrak{F}$ подгруппа K не входит в $\Phi(G)$. Учитывая это, а также абелевость K, получаем факторизацию:

$$G = HK,\ H \cap K = 1,\quad G / K \simeq H \in \mathfrak{F}.$$

Легко видеть, что H является максимальной подгруппой в G. Пусть $H \subseteq U$, $U / U_0 \in \mathfrak{F}$. Если $U = H$, то $U = U_0H$. Если же $U = G$, то либо $HU_0 = G$, либо $HU_0 = H$. В последнем случае получаем

$$U_0 \cap K = 1,\quad G / U_0 \in \mathfrak{F},\quad G / K \in \mathfrak{F},$$

откуда вытекает $G / U_0 \cap K \simeq G \in \mathfrak{F}$.

Теорема доказана.

Определение 15.2. Подгруппа H группы G называется *подгруппой Картера* (или *картеровской подгруппой*), если H нильпотентна и $N_G(H) = H$.

Теорема 15.4 (Картер [1]). *Для любой разрешимой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) *множество подгрупп Картера группы G совпадает с множеством всех $\mathfrak{N}$-проекторов группы G;*

2) *G обладает по крайней мере одной подгруппой Картера и любые две из них сопряжены в G.*

Доказательство. Ввиду леммы 15.3 каждый $\mathfrak{N}$-проектор группы G совпадает со своим нормализатором и, следовательно, является подгруппой Картера.

Пусть H — подгруппа Картера группы G. Докажем, что H является $\mathfrak{N}$-проектором. Пусть $H \subseteq U$, $U / U_0 \in \mathfrak{N}$. Пусть $HU_0 \neq U$. Тогда U обладает такой максимальной подгруппой M, что $U \supset M \supseteq HU_0$. Так как U / U_0 нильпотентна, то $M \lhd U$. Для любого $x \in U$ подгруппа H^x является подгруппой Картера в G, а значит, и в M. Так как для M теорема верна по индукции, то H и H^x сопряжены между собой в M. Следовательно, по лемме 4.3

$$N_U(H)\, M = U,$$

что противоречит тому, что $H \subseteq M \subset U$ и $H = N_G(H)$.

Тем самым утверждение 1) доказано. Утверждение 2) есть следствие утверждения 1) и теоремы 15.3.

Теорема доказана.

Определение 15.3. Подгруппа H группы G называется *подгруппой Гашюца*, если H сверхразрешима и при $H \neq G$ каждый индекс любой максимальной $(G - H)$-цепи является составным числом.

Теорема 15.5 (Гашюц [3]). *Любая разрешимая группа G обладает по крайней мере одной подгруппой Гашюца, причем любые две подгруппы Гашюца из G сопряжены между собой в G.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая группа, $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп. В § 4 мы установили, что $\mathfrak{F}$ является локальной, а значит, по теореме 4.3 и насыщенной формацией. По теореме 15.3 G имеет $\mathfrak{F}$-проектор H. Подгруппа H сверхразрешима и $\mathfrak{F}$-абнормальна в G. Согласно замечанию 2 из § 8 H — подгруппа Гашюца.

Обратно, если H — подгруппа Гашюца в G, то по замечанию 2 из § 8 она $\mathfrak{F}$-абнормальна в G и по теореме 15.1 является $\mathfrak{F}$-проектором. Следовательно, сопряженность подгрупп Гашюца есть следствие теоремы 15.3. Теорема доказана.

Теорема 15.6 (Шмигирев [2], Шмид [7]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-проектором и любые два из них сопряжены в G.*

Доказательство. По теореме 4.3 $\mathfrak{F}$ — насыщенная формация. Кроме того, $\mathfrak{F}$ непуста, так как содержит единичную группу. Доказательство существования $\mathfrak{F}$-проекторов такое же, как и у теоремы 15.3. Рассматриваем минимальную нормальную подгруппу K. Ввиду леммы 15.1 доказательство сводится к случаю, когда

$$G / K \in \mathfrak{F}, \qquad K \nsubseteq \Phi(G).$$

Тогда максимальная подгруппа, не содержащая K, является $\mathfrak{F}$-проектором в G.

Пусть M и H — $\mathfrak{F}$-проекторы группы G. Докажем, что M и H сопряжены в G. Будем считать, что G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. Заметим, что $\mathfrak{F}$-корадикал группы G / L разрешим, так как $G^{\mathfrak{F}}$ разрешим и по теореме 1.2

$$(G / L)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}} / L.$$

Для G / L теорема верна. Поэтому, применяя лемму 15.1, получаем, что

$$H_1L / L = H_2^xL / L$$

для некоторого $x \in G$. Подгруппы H_1 и H_2^x являются $\mathfrak{F}$-проекторами в H_1L, причем

$$H_1L / L \simeq H_1 / H_1 \cap L \in \mathfrak{F}.$$

Так как L абелева, то отсюда следует, что $(H_1L)^{\mathfrak{F}}$ абелев. Поэтому если $H_1L \neq G$, то для H_1L теорема верна и, следовательно, H_1 и H_2^x сопряжены. Таким образом, остается рассмотреть следующий случай:

$$G = H_1L = H_2^xL, \ L = G^{\mathfrak{F}}.$$

Так как L — абелева минимальная нормальная подгруппа группы G, то H_1 и H_2^x — максимальные подгруппы в G, являющиеся дополнениями к L. Теперь сопряженность подгрупп H_1 и H_2^x прямо следует из теоремы 8.5.

Теорема доказана.

Теорему 15.6 можно несколько расширить.

Т е о р е м а 15.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-проектором и любые два из них сопряжены между собой в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так же, как и при доказательстве теорем 15.3 и 15.6, рассуждения приводят к случаю, когда $G / K \in \mathfrak{F}$, $K = G^{\mathfrak{F}}$, K — минимальная нормальная подгруппа группы G. Если K абелева, то применяем теорему 15.6. Если же K неабелева, то $|K|$ не делится на числа из $\pi(\mathfrak{F})$. Тогда по теореме Ф е й т а — Т о м п с о н а [1] группа G / K разрешима, и утверждение теоремы является следствием теорем Шура — Цассенхауза (Ч у н и х и н [7], теоремы 1.5.1 и 1.5.2). Теорема доказана.

При $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ из теоремы 15.7 формально вытекает

Следствие 15.7.1. *Пусть G имеет нормальную $\mathrm{S}_{\pi'}$-подгруппу. Тогда G имеет по крайней мере одну S_π-подгруппу и любые две из них сопряжены между собой в G.*

Подчеркнем, что этот результат является формальным следствием теоремы 15.7, поскольку используется в ее доказательстве.

Теорема 15.8 (Кохно [3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — π-разрешимая группа. Если H — $\mathfrak{F}$-проектор некоторой S_π-подгруппы из G, то справедливы следующие утверждения:*

1) *H является $(\mathfrak{S}_\pi \cap \mathfrak{F})$-проектором группы G;*

2) *H является $\mathfrak{F}$-проектором в любой ее содержащей π-подгруппе из G.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}$-проектор S_π-подгруппы G_π группы G. Положим $\mathfrak{H} = \mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\pi$. Формация $\mathfrak{H}$ является локальной (как пересечение двух локальных формаций). Так как $\pi(\mathfrak{H}) \subseteq \pi$ и по условию G π-разрешима, то G и $\pi(\mathfrak{H})$-разрешима. По теореме 15.7 группа G обладает $\mathfrak{H}$-проектором S, причем любые два $\mathfrak{H}$-проектора из G сопряжены. По теореме Чунихина о π-разрешимых группах (Чунихин [7], теорема 1.8.2), $S^x \subseteq G_\pi$ для некоторого $x \in G$. Очевидно, S^x является $\mathfrak{H}$-проектором в G_π. Более того, легко видеть, что S^x является $\mathfrak{F}$-проектором в G_π. Следовательно, $S^{xy} = H$ для некоторого $y \in G_\pi$. Так как подгруппа, сопряженная с $\mathfrak{H}$-проектором, также является $\mathfrak{H}$-проектором, то мы получаем, что H — $\mathfrak{H}$-проектор группы G. Утверждение 2) есть прямое следствие утверждения 1.) Теорема доказана.

Из теоремы 15.8, с учетом теоремы 15.4, получаем

Следствие 15.8.1. *Нильпотентная подгруппа H π-разрешимой группы G является $\mathfrak{N}_\pi$-проектором в G тогда и только тогда, когда H является π-холловской подгруппой в $\mathrm{N}_G(H)$.*

Теорема 15.9 (Картер, Хоукс [1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть H — такая $\mathfrak{F}$-подгруппа из G, что $H\mathrm{F}(G) = G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *H содержится в некотором $\mathfrak{F}$-проекторе группы G;*

2) *если $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, то $\mathrm{N}_G(H)$ содержится в некотором $\mathfrak{F}$-проекторе группы G;*

3) *если* $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$, *то* H *содержится только в одном* $\mathfrak{F}$*-проекторе группы* G.

Доказательство. Докажем теорему индукцией по $|G|$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то утверждение очевидно. Будем считать, что G не входит в $\mathfrak{F}$. Пусть N — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $\mathrm{F}(G)$,

$$HN / N \in \mathfrak{F},\ \mathrm{F}(G)N / N \subseteq \mathrm{F}(G / N),$$
$$G / N = (HN / N)(\mathrm{F}(G / N)).$$

Так как для G / N теорема верна, то HN / N (а при $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ и $\mathrm{N}_{G/N}(HN / N)$) содержится в $\mathfrak{F}$-проекторе U / N группы G / N. Ввиду леммы 15.1 подгруппа U представима в виде $U = FN$, где F — некоторый $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Таким образом, $H \subseteq FN$, а при $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ имеем включение

$$\mathrm{N}_G(H) \subseteq \mathrm{N}_G(HN) \subseteq FN.$$

Предположим, что $FN \neq G$. Ввиду равенства
$$FN = H\mathrm{F}(G) \cap FN = H(\mathrm{F}(G) \cap FN) = H\mathrm{F}(FN)$$
группа FN и ее подгруппа H удовлетворяют условию теоремы. Для FN теорема верна, причем $\mathfrak{F}$-проекторы в FN сопряжены по теореме 15.6. Поэтому H (при $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ подгруппа $\mathrm{N}_G(H) = \mathrm{N}_{FN}(H)$) содержится в подгруппе, сопряженной с F.

Пусть теперь $FN = G$. Так как $N \subseteq \mathrm{F}(G)$, то ввиду следствия 4.1.1 имеем $N \subseteq \mathrm{Z}(\mathrm{F}(G))$. Учитывая это, а также то, что $F \cap \mathrm{F}(G) \lhd F$, получаем

$$\mathrm{N}_G(F \cap \mathrm{F}(G)) \supseteq \langle F, \mathrm{F}(G)\rangle = G.$$

Поэтому если $F \cap \mathrm{F}(G) \neq 1$, то из справедливости теоремы для $G / F \cap \mathrm{F}(G)$ вытекает ее справедливость и для G. Пусть $F \cap \mathrm{F}(G) = 1$. Тогда из $G = FN$, $N \subseteq \mathrm{F}(G)$ вытекает, что $N = \mathrm{F}(G)$, $G = HN$. Из минимальности N и того, что $H \in \mathfrak{F}$, $G \notin \mathfrak{F}$, вытекает, что H — максимальная подгруппа группы G. Но тогда ясно, что H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Если $\mathrm{N}_G(H) \neq H$, то из максимальности H следует, что $H \lhd G$, $G = H \times N$. Поэтому при $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$ имеем $G = H \times N \in \mathfrak{F}$. Итак, утверждения 1) и 2) доказаны.

Докажем 3). Пусть $\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{N}$. Пусть N — содержащаяся в $\mathrm{F}(G)$ минимальная нормальная подгруппа из G.

Предположим, что в G существуют такие $\mathfrak{F}$-проекторы F_1и F_2, что $H \subseteq F_1 \cap F_2$. Так как по лемме 15.1 F_1N / N и F_2N / N являются $\mathfrak{F}$-проекторами в G / N и

$$HN / N \subseteq F_1N / N \cap F_2N / N,$$

то ввиду индукции $F_1N = F_2N$. Если $F_1N \neq G$, то для F_1N теорема верна, и мы получаем $F_1 = F_2$. Поэтому будем считать, что $G = F_1N = F_2N$. Из $G \notin \mathfrak{F}$ и минимальности N теперь следует, что F_1 и F_2 — максимальные подгруппы группы G, причем $F_1 \cap N = F_2 \cap N = 1$. Учитывая это, получаем

$$HN \cap F_i = H(F_i \cap N) = H, \quad i = 1,2.$$

По теореме 15.6 F_1 и F_2 сопряжены в $G = F_1N$. Поэтому найдется такой $x \in N$, что $F_1^x = F_2$. Поэтому

$$H^x = (HN)^x \cap F_1^x = HN \cap F_2 = H,$$

т. е. $x \in \mathrm{N}_G(H)$. Получается, что любые два $\mathfrak{F}$-проектора, содержащие H, сопряжены между собой с помощью элемента из $\mathrm{N}_G(H)$. Кроме того, по доказанному $\mathrm{N}_G(H)$ содержится в некотором $\mathfrak{F}$-проекторе группы G. Отсюда заключаем, что все $\mathfrak{F}$-проекторы, содержащие H, совпадают.

Теорема доказана.

Замечание 1. Картер и Хоукс [1] доказывали теорему 15.9 для разрешимой группы G. Применение теоремы 15.6 позволило, сохраняя то же доказательство, отбросить условие разрешимости. Это же замечание относится и к следующей теореме.

Теорема 15.10 (Хоукс [3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть H и M — такие подгруппы из G, что $H \in \mathfrak{F}$, $H \subseteq M$, $H\,\mathrm{F}(G) = G$. Если H $\mathfrak{F}$-субнормальна в M, то $M \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Если $H = M$, то доказывать нечего. Пусть $H \neq M$. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда H является $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппой в M.

Пусть $M = G$. Тогда H является $\mathfrak{F}$-нормальной максимальной подгруппой группы G. Следовательно, $H \supseteq G^{\mathfrak{F}}$. Так как по условию теоремы $\mathrm{F}(G)H = G$, то по теореме

15.9 подгруппа H является $\mathfrak{F}$-проектором в G. По определению $\mathfrak{F}$-проектора $HG^{\mathfrak{F}} = G$. Отсюда и из $H \supseteq G^{\mathfrak{F}}$ получаем $H = G$.

Пусть $M \neq G$. Подгруппа M представима в виде

$$M = H(\mathrm{F}(G) \cap M) = H\mathrm{F}(M).$$

Поэтому M и ее подгруппа H удовлетворяют условию теоремы. Так как $M \neq G$, то для M теорема верна по индукции. Значит, $M \in \mathfrak{F}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Из теоремы 15.10 и утверждения 1) теоремы 15.9 вытекает утверждение 2) теоремы 15.9.

Теорема 15.11 (Хоукс [3]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — разрешимая группа. Пусть H — подгруппа группы G и*

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_t = G$$

— нормальный ряд группы G с нильпотентными факторами G_{i+1} / G_i. Если HG_i / G_i является максимальной $\mathfrak{F}$-подгруппой группы G / G_i для любого $i = 0, 1, \ldots, t-1$, то H является $\mathfrak{F}$-проектором группы G.

Доказательство. Доказываем теорему индукцией по t. При $t = 1$ из теоремы 15.9 следует, что H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Пусть $t > 1$. По индукции HG_1 / G_1 является $\mathfrak{F}$-проектором группы G / G_1. Так как $G_1 \in \mathfrak{N}$, то согласно теореме 15.9 подгруппа H является $\mathfrak{F}$-проектором в HG_1. Следовательно, по лемме 15.1 подгруппа H является $\mathfrak{F}$-проектором в G. Теорема доказана.

Проблема 17. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Доказать, что существует такая функция θ, что $l_{\mathfrak{F}}(G) \leqslant \theta(c_{\mathfrak{F}}(G))$, где $c_{\mathfrak{F}}(G)$ — длина композиционного ряда некоторого $\mathfrak{F}$-проектора группы G.

§ 16. Формации $E_\pi \mathfrak{F}$-групп См. Замечание на с. 143

Определение 16.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Подгруппу H группы G назовем $S_\pi \mathfrak{F}$*-подгруппой*, если H принадлежит $\mathfrak{F}$ и является S_π-подгруппой группы G. Введем классы групп $E_\pi \mathfrak{F}$ и $C_\pi \mathfrak{F}$ следующим образом:

$G \in E_\pi \mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда G имеет по крайней мере одну $S_\pi \mathfrak{F}$-подгруппу;

нужно C_π, E_π, т.к. …

понимать как произведение формаций

$G \in C_\pi\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда $G \in E_\pi\mathfrak{F}$ и любые две S_π-подгруппы сопряжены в G. Положим $E_\pi\mathfrak{G} = E_\pi$, $C_\pi\mathfrak{G} = C_\pi$.

Теорема 16.1 (Слепова [2]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация и пусть $\mathfrak{X}$ — такая формация, что $\mathfrak{X} \neq \phi$, $C_\pi\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{X} \supseteq C_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}$. Тогда $\mathfrak{X}$ имеет примарно постоянный экран g, удовлетворяющий следующим двум условиям:*

1) $g(M) = \bigcap\limits_{p \in \pi(M)} g(p)$ *для любой неединичной π-группы M;*

2) $g(M) = \mathfrak{X}$ *для любой неединичной π'-группы M.*

Доказательство. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. Построим функцию g следующим образом. Положим $g(1) = \mathfrak{G}$. Если $p \in \pi$, то пусть $g(p) = \mathfrak{X} \cap E_\pi f(p)$. Если M — элементарная неединичная π-группа, то пусть $g(M) = \bigcap\limits_{p \in \pi(M)} g(p)$. Если M — элементарная группа, не являющаяся π-группой, то пусть $g(M) = \mathfrak{X}$. Для любой группы $G \neq 1$ положим $g(G) = \bigcap g(C_i)$, где C_i пробегает все композиционные факторы группы G. Таким образом, g — примарно постоянный экран. Если мы установим, что $\langle g \rangle = \mathfrak{X}$, то тем самым теорема будет доказана.

Покажем вначале, что $\mathfrak{X} \subseteq \langle g \rangle$. Предположим, что $\mathfrak{X}$ не входит в $\langle g \rangle$, и выберем в $\mathfrak{X}$ группу G наименьшего порядка, не содержащуюся в $\langle g \rangle$. Тогда ясно, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу M. Из выбора G следует, что $G / M \in \langle g \rangle$. Так как $\mathfrak{X}$ — гомоморф, то $G / C_G(M) \in \mathfrak{X}$.

Если M не является π-группой, то $G / C_G(M) \in \mathfrak{X} = g(M)$, т. е. $G \in \langle g \rangle$. Поэтому M — π-группа.

Если M — p-группа, $p \in \pi$, то очевидно, что $M \subseteq H$, где H — $S_\pi\mathfrak{F}$-подгруппа из G. Пусть L / K — любой H-главный фактор группы M. Тогда $H / C_H(L / K) \in f(p)$. Следовательно, $H / D \in f(p)$, где $D = \bigcap\limits_{L/K} C_H(L/K)$. Как стабильная группа автоморфизмов p-группы, $D / C_D(M)$ содержится в $\mathfrak{N}_p$. Группа $H / C_D(M)$ принадлежит $\mathfrak{N}_p f(p)$, так как является расширением p-группы $D / C_D(M)$ с помощью группы H / D из $f(p)$. Отсюда и из $C_D(M) \subseteq C_H(M)$ получаем $H / C_H(M) \in$

$\in \mathfrak{N}_p f(p)$. Так как $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$, то $H / \mathrm{C}_H(M) \in f(p)$. Итак, $G / \mathrm{C}_G(M)$ имеет $\mathrm{S}_\pi f(p)$-подгруппу $H\mathrm{C}_G(M) / \mathrm{C}_G(M)$. Это означает, что M g-центральна в G, т. е. $G \in \langle g \rangle$. Пришли к противоречию.

Пусть теперь M является неабелевой π-группой. Так так $M \cap \mathrm{C}_G(M) \lhd G$, M неабелева и минимальная нормальная подгруппа в G, то $M \cap \mathrm{C}_G(M) = 1$. Ввиду единственности M, имеем $\mathrm{C}_G(M) = 1$. Нужно показать, что $G \in g(M) = \bigcap_{p \in \pi(M)} g(p)$.

Пусть H — $\mathrm{S}_\pi\mathfrak{F}$-подгруппа из G. Если L / K — любой H-главный фактор группы M и $\omega = \pi(M)$, то $\pi(L / K) = \omega$ и справедливо следующее:

$$H/\mathrm{C}_H(L/K) \in f(L/K) = \bigcap_{p \in \omega} f(p) = f(M).$$

Тогда $H / D \in f(M)$, где $D = \bigcap_{L/K} C_H(L/K)$. Стабильная группа автоморфизмов $D / \mathrm{C}_D(M)$ группы M является $\pi(\mathrm{F}(M))$-группой по лемме 9.3. Так как $\mathrm{F}(M) = \mathrm{C}_G(M) = 1$, то получается, что $H \in f(M)$. Это означает, что $G \in g(M)$, что невозможно.

Итак, доказано, что $\mathfrak{X} \subseteq \langle g \rangle$. Установим справедливость обратного включения. Заметим, что каждая группа G, содержащаяся в $\langle g \rangle$, принадлежит классу C_π. Действительно, пусть $G \in \langle g \rangle$, L / K — любой главный фактор группы G. Тогда $G / \mathrm{C}_G(L / K) \in \mathfrak{X}$. Так как пересечение всех $\mathrm{C}_G(L / K)$ равно $\mathrm{F}(G)$ и $\mathfrak{X}$ — формация, то $G / \mathrm{F}(G) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathrm{C}_\pi$. Если $R / \mathrm{F}(G)$ — S_π-подгруппа из $G / \mathrm{F}(G)$, то согласно следствию 15.7.1 имеем $R \in \mathrm{C}_\pi$. Если H_1 и H_2 — S_π-подгруппы из G, то

$$H_1^x\mathrm{F}(G) / \mathrm{F}(G) = H_2^y\mathrm{F}(G) / \mathrm{F}(G) = R / \mathrm{F}(G)$$

для некоторых $x, y \in G$. Так как $R \in \mathrm{C}_\pi$, то мы получаем сопряженность H_1 и H_2. Значит, $G \in \mathrm{C}_\pi$.

Допустим, что $\mathfrak{X}$ не содержит $\langle g \rangle$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\langle g \rangle$, не принадлежащая $\mathfrak{X}$. Тогда ясно, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа M, причем $G / M \in \mathfrak{X}$, $M \subseteq \mathrm{F}(G)$. Предположим, что M — π'-группа. Так как $G / M \in \mathfrak{X} \subseteq \mathrm{C}_\pi\mathfrak{F}$, то ясно, что в G имеется S_π-подгруппа, изоморфная $\mathrm{S}_\pi\mathfrak{F}$-подгруппе из G / M. Значит,

$$G \in \mathrm{C}_\pi \cap \mathrm{E}_\pi\mathfrak{F} = \mathrm{C}_\pi\mathfrak{F}.$$

Так как к тому же $G \in \mathfrak{N}\mathfrak{X}$, то ввиду условия теоремы $G \in \mathfrak{X}$.

Рассмотрим теперь случай, когда M — p-группа, $p \in \pi$. Так как $G/C_G(M) \in g(p) \subseteq \mathfrak{X}$, то все S_π-подгруппы $C_\pi\mathfrak{F}$-группы $G / C_G(M)$ принадлежат $f(p)$. Следовательно,

$$HC_G(M) / C_G(M) \simeq H / C_H(M) \in f(p).$$

Отсюда вытекает, что $H \in \mathfrak{F}$. Значит,

$$G \in C_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}.$$

Отсюда, ввиду условия теоремы получаем $G \in \mathfrak{X}$.

Теорема доказана.

Теорема 16.2 (Слепова [2]). *Для любой локальной формации $\mathfrak{F}$ класс всех π-обособленных $E_\pi\mathfrak{F}$-групп является локальной формацией.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс всех π-обособленных $E_\pi\mathfrak{F}$-групп. Очевидно, $\mathfrak{X}$ — формация. Ввиду теоремы Фейта — Томпсона [1] каждая группа из $\mathfrak{X}$ либо π-разрешима, либо π'-разрешима. По теореме Чунихина о π-разрешимых группах (Чунихин [7], теорема 1.8.2) $\mathfrak{X} \subseteq C_\pi$. Так как $\mathfrak{X} \subseteq E_\pi\mathfrak{F}$, то мы имеем

$$C_\pi\mathfrak{F} \supseteq \mathfrak{X} \supseteq C_\pi\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}\mathfrak{X}.$$

По теореме 16.1 $\langle g \rangle = \mathfrak{X}$, где g — экран, удовлетворяющий утверждению теоремы 16.1. Построим локальный экран g_1 такой, что $g_1(p) = g(p)$ для любого простого p. Тогда легко заметить, что $\langle g_1 \rangle = \mathfrak{X}$.

Теорема доказана.

Следствие 16.2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, K — нормальная π-обособленная подгруппа группы G. Если K обладает такой S_π-подгруппой H, что $H / H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех π-обособленных $E_\pi\mathfrak{F}$-групп. Ввиду условия следствия

$$H\Phi(G) / \Phi(G) \subseteq K\Phi(G) / \Phi(G) \simeq K / K \cap \Phi(G) \in \mathfrak{X}.$$

Так как формация $\mathfrak{X}$ локальна, то применение теоремы 4.2 дает $K \in \mathfrak{X}$, что и требуется.

Следствие 16.2.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, H — S_π-подгруппа π-обособленной группы G. Если $H / H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Следствие 16.2.3 (Блессеноль [1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, H — холловская подгруппа разрешимой группы G. Если $H / H \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$, то $H \in \mathfrak{F}$.*

Проблема 18. Доказать, что для любого множества простых чисел π класс E_π является формацией.

Проблема 19. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Доказать, что $C_\pi\mathfrak{F}$ — локальная формация.

§ 17. Пронормальные дисперсивные проекторы

1. Пронормальные и абнормальные подгруппы. Определение 17.1. Подгруппа H группы G называется:

1) *пронормальной в* G, если для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x сопряжены между собой в $\langle H, H^x\rangle$;

2) *абнормальной*, если $x \in \langle H, H^x\rangle$ для любого $x \in G$.

Очевидно, каждая абнормальная подгруппа пронормальна. Пронормальными подгруппами являются: силовские подгруппы любых групп, S_π-подгруппы π-разрешимых групп, $\mathfrak{F}$-проекторы групп с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом ($\mathfrak{F}$ — локальная формация).

Лемма 17.1. *Если подгруппа H пронормальна в G, то $N_G(H)$ абнормальна в G.*

Доказательство. Положим $U = N_G(H)$. Пусть $x \in G$. Тогда найдется такой $y \in \langle H, H^x\rangle$, что $H^{xy} = H$, т. е. $xy \in U$. Так как $H \subseteq U$, то $\langle H, H^x\rangle \subseteq \langle U, U^x\rangle$. Следовательно, $y \in \langle U, U^x\rangle$. Отсюда и из $xy \in U$ заключаем, что $x \in \langle U, U^x\rangle$. Лемма доказана.

Замечание 1. Из леммы 17.1 следует, что нормализаторы силовских подгрупп являются абнормальными подгруппами.

Лемма 17.2. *Пусть H — подгруппа группы G. Следующие условия эквивалентны:*

1) *H абнормальна в G;*

2) *из $H \subseteq U \subseteq G$ и $H \subseteq U \cap U^x$ всегда следует $x \in U$;*

3) *H пронормальна в G и $U = N_G(U)$ для любой подгруппы $U \supseteq H$;*

4) *H пронормальна в G и $H = N_G(H)$.*

Доказательство. Пусть H абнормальна в G. Если $H \subseteq U \cap U^x$, то по определению абнормальности

$$x^{-1} \in \langle H,\ H^{x^{-1}} \rangle \subseteq U,$$

откуда следует $x \in U$.

Пусть выполняется 2). Положим $U = \langle H,\ H^x \rangle$. Тогда $H \subseteq U \cap U^{x^{-1}}$, $x^{-1} \in U$, $x \in U$. Значит, H абнормальна в G. Если $D \supseteq H$, $x \in \mathrm{N}_G(D)$, то $H \subseteq D \cap D^x$ и по условию $x \in D$. Таким образом, из 2) следует 3). Так как 3) влечет 4), а по лемме 17.1 из 4) следует 1), то лемма доказана.

Лемма 17.3. *Пусть U и H — подгруппы группы G, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) *U содержится в H и пронормальна в G;*

2) *для любого $x \in \mathrm{N}_G(U)$ подгруппы H и H^x сопряжены в $\langle H,\ H^x \rangle$.*

Тогда H пронормальна в G.

Доказательство. По условию 1) для любого $x \in G$ найдется такой элемент $y \in \langle U,\ U^x \rangle$, что $xy \in \mathrm{N}_G(U)$. Согласно условию 2) существует такой $z \in \langle H, H^{xy} \rangle$, что $xyz \in \mathrm{N}_G(H)$. Так как $U \subseteq H$ и $y \in \langle U,\ U^x \rangle$, то $y \in \langle H,\ H^x \rangle$, а значит, $\langle H,\ H^{xy} \rangle \subseteq \langle H,\ H^x \rangle$. Но тогда $yz \in \langle H,\ H^x \rangle$, $xyz \in N_G(H)$. Это означает, что H и H^x сопряжены в $\langle H,\ H^x \rangle$. Лемма доказана.

Лемма 17.4. *Пусть $N \lhd G$ и H — такая подгруппа из G, что NH абнормальна в G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $\mathrm{N}_{NH}(H) = H$, то $\mathrm{N}_G(H) = H$;*

2) *если H абнормальна в NH, то H абнормальна в G.*

Доказательство. Докажем 1). Предположим, что H совпадает со своим нормализатором в NH. Пусть $x \in \mathrm{N}_G(H)$. Ввиду абнормальности NH получаем

$$x \in \langle NH, (NH)^x \rangle = NH.$$

Следовательно, $\mathrm{N}_G(H) \subseteq \mathrm{N}_{HN}(H) = H$.

Докажем 2). Пусть g — любой элемент из G. Ввиду условия леммы

$$g \in \langle NH,\ NH^g \rangle = N\langle H,\ H^g \rangle.$$

Поэтому $g = nh$, где $n \in N$, $h \in \langle H, H^g \rangle$. Если H абнормальна в NH, то

$$n \in \langle H, H^n \rangle = \langle H, H^{gh^{-1}} \rangle \subseteq \langle H, H^g \rangle.$$

Но тогда $g = nh \in \langle H, H^g \rangle$, т. е. H абнормальна в G. Лемма доказана.

Лемма 17.5. *Пусть H — подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если H пронормальна в G, то H пронормальна и в любой ее содержащей подгруппе из G;

2) если $N \lhd G$ и $N \subseteq H$, то H пронормальна в G тогда и только тогда, когда H / N пронормальна в G / N;

3) если $N \lhd G$ и H пронормальна в G, то HN / N пронормальна в G / N;

4) если $N \lhd G$ и H пронормальна в G, то $\mathrm{N}_G(HN) = \mathrm{N}_G(H)N$;

5) если H одновременно и субнормальна и пронормальна в G, то $H \lhd G$.

Доказательство. Первые три утверждения проверяются без труда. Докажем 4). Очевидно, $\mathrm{N}_G(H)N \subseteq \mathrm{N}_G(HN)$. Пусть x — любой элемент из $\mathrm{N}_G(HN)$. Тогда, ввиду $N \lhd G$, имеем $HN = H^xN$, а значит, $\langle H, H^x \rangle \subseteq HN$. Так как H пронормальна в G, то найдется такой элемент $y \in \langle H, H^x \rangle$, что $H^x = H^y$. Элемент y представим в виде $y = hn$, где $h \in H$, $n \in N$. Тогда $H^x = H^y = H^n$, $xn^{-1} \in \mathrm{N}_G(H)$, а следовательно, $x \in \mathrm{N}_G(H)N$. Утверждение 4) доказано.

Докажем 5). Пусть H пронормальна и субнормальна в G. Пусть $H \neq G$. Тогда в G существует такая нормальная подгруппа M, что $H \subseteq M \subset G$. По индукции $H \lhd M$. Для любого $x \in G$ подгруппы H и H^x содержатся в M и сопряжены в $\langle H, H^x \rangle$. Отсюда и из $H \lhd M$ получаем $H^x = H$.

Лемма доказана.

Следующая теорема устанавливает связь между определениями 17.1 и 8.1.

Теорема 17.1. *Пусть H — подгруппа разрешимой группы G. Подгруппа H абнормальна в G тогда и только тогда, когда H $\mathfrak{N}$-абнормальна в G.*

Доказательство. Если H абнормальна в G, то по лемме 17.2 для любой подгруппы $U \supseteq H$ имеет место $N_G(U) = U$. Отсюда следует, что H $\mathfrak{N}$-абнормальна в G.

Обратно, пусть H $\mathfrak{N}$-абнормальна в G. Пусть $H \neq G$ и N — минимальная нормальная подгруппа группы G. Очевидно, HN / N $\mathfrak{N}$-абнормальна в G / N. По индукции HN / N абнормальна в G / N, а значит, HN абнормальна в G. Если $HN \neq G$, то H абнормальна в HN по индукции. Но тогда по лемме 17.4 подгруппа H абнормальна в G.

Пусть $HN = G$. Так как G разрешима, то H — максимальная подгруппа из G. Так как H $\mathfrak{N}$-абнормальна в G, то H не нормальна в G. Очевидно, в этом случае H абнормальна в G.

Теорема доказана.

Проблема 20. Доказать, что $\mathfrak{N}$-абнормальная подгруппа произвольной группы G является абнормальной в G.

2. Формация τ-дисперсивных групп. Введем следующее формационное обобщение понятия дисперсивной группы.

Определение 17.2. Конечное или счетное непустое множество неединичных локальных формаций $\Sigma = \{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots\}$ с условием $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(\mathfrak{F}_j) = \varnothing$ при $i \neq j$ назовем *формационной базой*. Через $\pi(\Sigma)$ будем обозначать объединение всех $\pi(\mathfrak{F}_i)$.

Пусть τ — некоторое линейное упорядочение формационной базы Σ. Запись $\mathfrak{F}_i \tau \mathfrak{F}_j$ означает, что формация $\mathfrak{F}_i$ предшествует формации $\mathfrak{F}_j$ в упорядочении τ и $\mathfrak{F}_i \neq \mathfrak{F}_j$. Формационную базу Σ вместе с заданным ее линейным упорядочением τ будем называть *формационной τ-базой*. Группу G назовем *τ-дисперсивной*, если G обладает нормальным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G, \qquad n \geqslant 1,$$

таким, что для любого i группа G_i / G_{i-1} принадлежит $\mathfrak{F}_{k_i} \in \Sigma$ и при $n > 1$ имеет место $\mathfrak{F}_{k_1} \tau \mathfrak{F}_{k_2} \tau \ldots \tau \mathfrak{F}_{k_n}$. Указанный ряд будем называть *τ-дисперсивным рядом*. По определению, единичная группа τ-дисперсивна.

Лемма 17.6. *Класс всех τ-дисперсивных групп Q-замкнут.*

Доказательство. Пусть G обладает τ-дисперсивным рядом

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G,$$

где $G_i / G_{i-1} \in \mathfrak{F}_{k_i}$, $\mathfrak{F}_{k_i} \tau \mathfrak{F}_{k_j}$ при $i < j$. Пусть $N \lhd G$. Если $n = 1$, то ясно, что G / N τ-дисперсивна. Пусть $n > 1$. Очевидно, для любого $i \geqslant 1$ имеет место равенство $G_i = G_{i-1} \leftthreetimes P_i$, где $P_i \in \mathfrak{F}_{k_i}$, причем G_i является нормальной холловской подгруппой группы G. По лемме 15.2 G_iN / N является нормальной $\pi(G_i)$-холловской подгруппой группы G / N, причем

$$G_iN / N = (G_{i-1}N / N)(P_iN / N),$$

$$P_iN / N \simeq P_i / P_i \cap N \in \mathfrak{F}_{k_i}.$$

Отсюда заключаем, что G / N τ-дисперсивна. Лемма доказана.

Лемма 17.7. *Класс всех τ-дисперсивных групп* R_0-*замкнут.*

Доказательство. Пусть G / N_i τ-дисперсивна, $i = 1,2$, причем $N_1 \cap N_2 = 1$. Не ограничивая общности, считаем, что $\Sigma = \{\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_n\}$ — конечная формационная τ-база, $\pi(G) \subseteq \pi(\Sigma)$, $\mathfrak{F}_1 \tau \mathfrak{F}_2 \tau \ldots \tau \mathfrak{F}_n$. Допустим, что $n > 1$, и докажем, что G τ-дисперсивна. По условию леммы G / N_1 и G / N_2 обладают τ-дисперсивными рядами

$$1 = G_0^1 / N_1 \subseteq G_1^1 / N_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n^1 / N_1 = G / N_1, \quad (1)$$

$$1 = G_0^2 / N_2 \subseteq G_1^2 / N_2 \subseteq \ldots \subseteq G_n^2 / N_2 = G / N_2, \quad (2)$$

где $G_i^j / N_j / G_{i-1}^j / N_j \in \mathfrak{F}_i$. Положим $\pi_r = \bigcup_{i=1}^{r} \pi(\mathfrak{F}_i)$, $r = 1, \ldots, n$. Так как класс всех π-замкнутых групп R_0-замкнут, то из существования (1) и (2) вытекает, что G имеет нормальный ряд

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_n = G, \quad (3)$$

где G_i — нормальная S_{π_i}-подгруппа группы G. Ввиду леммы 15.2 получаем $G_i^j / N_j = G_iN_j / N_j$ для всех i, j. Следовательно, $G_iN_j / G_{i-1}N_j \in \mathfrak{F}_i$. Но тогда

$$G_iN_j / G_{i-1}N_j \simeq G_i / G_i \cap G_{i-1}N_j \in \mathfrak{F}_i. \quad (4)$$

Так как G_{i-1} является нормальной $\mathrm{S}_{\pi_{i-1}}$-подгруппой в G, то группа $G_{i-1}N_j$ является либо π_{i-1}-разрешимой, либо

π'_{i-1}-разрешимой. Поэтому справедливы равенства

$$G_{i-1}N_1 = G_{i-1} \leftthreetimes K_1, \quad G_{i-1}N_2 = G_{i-1} \leftthreetimes K_2,$$
$$G_{i-1}N_1 \cap G_{i-1}N_2 = G_{i-1} \leftthreetimes K,$$

причем $K_1 \subseteq N_1$, $K_2 \subseteq N_2$, $K \subseteq K_1^x \cap K_2^y$ для некоторых x, $y \in G$. Следовательно, $K \subseteq N_1 \cap N_2 = 1$, а значит,

$$G_{i-1}N_1 \cap G_{i-1}N_2 = G_{i-1}.$$

Отсюда и из (4) получаем $G_i / G_{i-1} \in \mathfrak{F}_i$, и лемма доказана.

Теорема 17.2. *Пусть Σ — формационная τ-база. Тогда класс $\mathfrak{F}$ всех τ-дисперсивных групп является локальной формацией.*

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ — фиксированная формационная τ-база. Из лемм 17.6 и 17.7 вытекает, что класс $\mathfrak{F}$ всех τ-дисперсивных групп является формацией, так что нам надо установить лишь локальность этой формации. Положим $\pi = \pi(\Sigma)$, $\pi_i = \pi(\mathfrak{F}_i)$. Составим формационную базу $\Sigma^* = \{\mathfrak{S}_{\pi_i} \mid i \in I\}$. Введем линейное упорядочение τ^* базы Σ^* следующим образом: $\mathfrak{S}_{\pi_i} \tau^* \mathfrak{S}_{\pi_j}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}_i \tau \mathfrak{F}_j$. Пусть

$$\omega_k = \bigcup \pi(\mathfrak{F}_j) \text{ для всех } \mathfrak{F}_j \tau \mathfrak{F}_k$$

и $\mathfrak{H}_k$ — класс всех ω_k-замкнутых групп. Очевидно, класс $\mathfrak{F}^*$ всех τ^*-дисперсивных групп совпадает с $\mathfrak{S}_\pi \cap (\bigcap_k \mathfrak{H}_k)$. В § 4 мы видели, что формации $\mathfrak{S}_\pi$ и $\mathfrak{H}_k$ локальны. Значит, согласно леммам 3.4 и 3.7 формация $\mathfrak{F}^*$ локальна. Обозначим через $\mathfrak{M}_s$ класс всех π_s-обособленных $E_{\pi_s}\mathfrak{F}_s$-групп. Нетрудно заметить, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^* \cap (\bigcap_s \mathfrak{M}_s).$$

Так как по теореме 16.2 формации $\mathfrak{M}_s$ локальны, то, снова применяя леммы 3.4 и 3.7, получаем, что формация $\mathfrak{F}$ локальна. Теорема доказана.

Следствие 17.2.1. *Для любой формационной τ-базы Σ класс всех τ-дисперсивных групп является насыщенной формацией.*

Замечание 2. Под примарной формацией будем подразумевать формацию всех p-групп для некоторого фиксированного простого числа p. Множество Σ всех примарных формаций является, конечно, формационной базой. Пусть τ — линейное упорядочение Σ. Отношение τ индуцирует линейное упорядочение φ множества всех простых чисел: $p\varphi q$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}_p\tau\mathfrak{N}_q$. Теперь легко заметить, что группа G τ-дисперсивна тогда и только тогда, когда G φ-дисперсивна. Таким образом, обычное определение дисперсивной группы получается из определения 17.2 в случае, когда формационная база состоит из примарных формаций.

3. Существование τ-дисперсивных проекторов. Определение 17.3. Пусть Σ — некоторая формационная база. Группа G называется *Σ-наполненной*, если для любой подгруппы A из G и любой формации $\mathfrak{F}_i$ из Σ выполняется следующее условие: A обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}_i$-проектором, причем любые два $\mathfrak{F}_i$-проектора из A сопряжены в A.

Определение 17.4. Пусть Σ — некоторая формационная τ-база, G — Σ-наполненная группа. Выберем в Σ конечное непустое подмножество Σ^*, содержащее все те $\mathfrak{F}_i \in \Sigma$, для которых $\pi(\mathfrak{F}_i) \cap \pi(G) \neq \phi$. Пусть

$$\Sigma^* = \{\mathfrak{F}_{k_1}, \mathfrak{F}_{k_2}, \ldots, \mathfrak{F}_{k_t}\}, \quad \mathfrak{F}_{k_1}\tau\mathfrak{F}_{k_2}\tau\ldots\tau\mathfrak{F}_{k_t}.$$

Ввиду Σ-наполненности группы G, существует нормальный ряд

$$1 = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_t = H$$

такой, что для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ имеет место $H_i = H_{i-1}F_i$, где F_i — $\mathfrak{F}_{k_i}$-проектор из $N_G(H_{i-1})$. Подгруппу H назовем *$d\tau$-подгруппой* группы G.

Замечание 3. Определение $d\tau$-подгруппы не зависит от выбора Σ^*. В качестве Σ^* можно взять любое подмножество из Σ, содержащее все те $\mathfrak{F}_i \in \Sigma$, для которых $\pi(G) \cap \pi(\mathfrak{F}_i) \neq \phi$. При любом таком выборе Σ^* получается с точностью до сопряженности одна и та же $d\tau$-подгруппа.

Лемма 17.8. *В ситуации, описанной в определении 17.4, справедливо следующее утверждение: для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ подгруппа H_i пронормальна в G и является* $\bigcup_{j=1}^{i} \pi(\mathfrak{F}_{k_j})$*-холловской подгруппой в* $N_G(H_i)$.

Доказательство. По условию леммы H_1 является $\mathfrak{F}_{k_1}$-проектором группы G, причем любая подгруппа из G имеет точно один сопряженный класс $\mathfrak{F}_{k_1}$-проекторов. Следовательно, H_1 пронормальна в G. По лемме 15.3 подгруппа H_1 является $\pi(\mathfrak{F}_{k_1})$-холловской подгруппой в $\mathrm{N}_G(H_1)$. Таким образом, при $i = 1$ утверждение леммы справедливо.

Положим $\pi_i = \bigcup_{j=1}^{i} \pi(\mathfrak{F}_{k_j})$. Пусть n — такой номер, что $1 < n \leqslant t$ и для любого $i < n$ утверждение леммы справедливо. Тогда H_{n-1} пронормальна в G и является π_{n-1}-холловской подгруппой в $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$. По условию леммы $H_n = H_{n-1} \rtimes F_n$, где F_n — $\mathfrak{F}_{k_n}$-проектор из $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$. Так как H_{n-1} нормальна, а F_n пронормальна в $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$, то $H_n = H_{n-1}F_n$ пронормальна в $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$. Значит, по лемме 17.3 подгруппа H_n пронормальна в G. Так как $(|H_{n-1}|, |F_n|) = 1$, то H_{n-1} нормальна в $\mathrm{N}_G(H_n)$. Поэтому $\mathrm{N}_G(H_n) \subseteq \mathrm{N}_G(H_{n-1})$, т. е. $\mathrm{N}_G(H_n)$ совпадает с нормализатором подгруппы H_n в $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$. Применяя теперь утверждение 4) леммы 17.5 к группе $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$, ее нормальной подгруппе H_{n-1} и пронормальной подгруппе F_n, получаем

$$\mathrm{N}_G(H_n) = \mathrm{N}_G(H_{n-1}F_n) = H_{n-1}N,$$

где N — нормализатор подгруппы F_n в $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$. Следовательно,

$$|\mathrm{N}_G(H_n) : H_n| = \frac{|N| : |F_n|}{|H_{n-1} \cap N|}. \qquad (*)$$

Так как $\mathrm{N}_G(H_n) \subseteq \mathrm{N}_G(H_{n-1})$ и H_{n-1} является π_{n-1}-холловской подгруппой в $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$, то $|\mathrm{N}_G(H_n) : H_n|$ не делится на числа из π_{n-1}. По лемме 15.3 $|N : F_n|$ не делится на числа из $\pi(\mathfrak{F}_{k_n})$. Отсюда, учитывая $(*)$ и равенство $\pi_n = \pi_{n-1} \bigcup \pi(\mathfrak{F}_{k_n})$, получаем, что $|\mathrm{N}_G(H_n) : H_n|$ не делится на числа из π_n. Мы доказали, что из справедливости утверждения леммы для всех $i < n$ вытекает его справедливость и для n. Тем самым лемма доказана.

Теорема 17.3. (Сементовский [3]). *Пусть G — Σ-наполненная группа, где Σ — некоторая формационная τ-база. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *G обладает по крайней мере одной $d\tau$-подгруппой, причем любые две из них сопряжены в G;*

2) *если H — $d\tau$-подгруппа из G, то H пронормальна в G и является $\pi(\Sigma)$-холловской подгруппой в $N_G(H)$;*

3) *если $\pi(G) \subseteq \pi(\Sigma)$, то каждая $d\tau$-подгруппа из G абнормальна в G.*

Доказательство. Утверждения 2) и 3) прямо следуют из леммы 17.8 и эквивалентности условий 1) и 4) леммы 17.2. Существование $d\tau$-подгрупп не нуждается в доказательстве, так как в определении 17.4 $d\tau$-подгруппа строится явным образом. Докажем сопряженность $d\tau$-подгрупп.

Пусть мы имеем ситуацию, описанную в определении 17.4, и пусть имеется еще одна $d\tau$-подгруппа R группы G. Тогда R имеет нормальный ряд

$$1 = R_0 \subseteq R_1 \subseteq \ldots \subseteq R_t = R$$

такой, что для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ имеет место $R_i = R_{i-1}S_i$, где S_i — $\mathfrak{F}_{k_i}$-проектор из $N_G(R_{i-1})$. По условию теоремы H_1 и S_1 сопряжены в G. Пусть уже доказано, что для некоторого $n > 1$ подгруппы H_{n-1} и R_{n-1} сопряжены, т. е. $H_{n-1} = R_{n-1}^x$ для некоторого $x \in G$. Подгруппы F_n и S_n^x являются $\mathfrak{F}_{k_n}$-проекторами в $N_G(H_{n-1}) = N_G(R_{n-1}^x)$. Поэтому найдется такой элемент $y \in N_G(H_{n-1})$, что $F_n = S_n^{xy}$. Но тогда

$$R_n^{xy} = R_{n-1}^{xy}S_n^{xy} = R_{n-1}^x F_n = H_{n-1}F_n = H_n.$$

Тем самым утверждение 1) доказано.

Следствие 17.3.1 (Цаппа [1]). *Пусть H_1 и H_2 — φ-дисперсивные S_π-подгруппы группы G, где φ — некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел. Тогда H_1 и H_2 сопряжены между собой в G.*

Доказательство. Пусть $|H_1| = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots$ $\ldots p_k^{\alpha_k}$, $k \geqslant 1$, $p_1\varphi p_2\varphi\ldots\varphi p_k$. Построим формационную τ-базу $\Sigma = \{\mathfrak{N}_{p_1}, \mathfrak{N}_{p_2}, \ldots, \mathfrak{N}_{p_k}\}$ так, что $\mathfrak{N}_{p_i}\tau\mathfrak{N}_{p_j}$ при $p_i\varphi p_j$. Теперь остается заметить, что H_1 и H_2 — $d\tau$-подгруппы группы G.

Лемма 17.9. *Пусть Σ — формационная τ-база, H — $d\tau$-подгруппа Σ-наполненной группы G. Тогда H является максимальной τ-дисперсивной подгруппой группы G.*

Доказательство. Пусть имеет место ситуация, описанная в определении 17.4. Положим $\pi_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} \pi(\mathfrak{F}_{k_j})$. Докажем, что при любом $i = 1, 2, \ldots, t$ подгруппа H_i является максимальной τ-дисперсивной π_i-подгруппой группы G. При $i = 1$ это утверждение верно, так как H_1 является $\mathfrak{F}_{k_1}$-проектором группы G. Пусть наше утверждение доказано для всех $i < n$, где $n > 1$. Тогда H_{n-1} является максимальной τ-дисперсивной π_{n-1}-подгруппой группы G.

Предположим, что H_n содержится в некоторой τ-дисперсивной π_n-подгруппе K группы G. Тогда K представима в виде $K = A \leftthreetimes B$, где A — τ-дисперсивная π_{n-1}-подгруппа, $B \in \mathfrak{F}_{k_n}$. Очевидно, $H_{n-1} \subseteq A$, а так как H_{n-1} — максимальная τ-дисперсивная π_{n-1}-подгруппа, то $H_{n-1} = A$. Так как H_n либо π_n-разрешима, либо π_n'-разрешима, то по теореме Чунихина [7] о π-разрешимых группах $F_n \subseteq B^x$ для некоторого $x \in K$. Так как $B^x \subseteq \mathrm{N}_G(H_{n-1})$ и F_n является $\mathfrak{F}_{k_n}$-проектором в $\mathrm{N}_G(H_{n-1})$, то $B^x = F_n$. Таким образом, $K = AB^x = H_{n-1}F_n = H_n$. Тем самым и доказано, что для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ подгруппа H_i является максимальной τ-дисперсивной π_i-подгруппой группы G. Лемма доказана.

Лемма 17.10. *Пусть Σ — формационная τ-база, H — $d\tau$-подгруппа Σ-наполненной группы G. Если $N \lhd G$, то HN / N является $d\tau$-подгруппой группы G / N.*

Доказательство. Пусть $N \lhd G$ и имеет место ситуация, описанная в определении 17.4. Тогда для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ имеет место равенство $H_i = H_{i-1}F_i$, где F_i — $\mathfrak{F}_{k_i}$-проектор из $\mathrm{N}_G(H_{i-1})$. По лемме 15.1 F_iN / N является $\mathfrak{F}_{k_i}$-проектором в $\mathrm{N}_G(H_{i-1})N / N$. Так как по лемме 17.8 подгруппа H_{i-1} пронормальна в G, то согласно утверждению 4 леммы 17.5 выполняется равенство

$$\mathrm{N}_G(H_{i-1})N / N = \mathrm{N}_G(H_{i-1}N) / N = \mathrm{N}_{G/N}(H_{i-1}N / N).$$

Итак, $H_iN / N = (H_{i-1}N / N)(F_iN / N)$, где F_iN / N — $\mathfrak{F}_{k_i}$-проектор группы $\mathrm{N}_{G/N}(H_{i-1}N / N)$. Но это и означает, что HN / N является $d\tau$-подгруппой группы G / N. Лемма доказана.

Теорема 17.4 (Сементовский [3]). *Пусть Σ — некоторая формационная τ-база, $\mathfrak{F}$ — формация всех τ-дисперсивных групп. Если G — Σ-наполненная группа, то любая $d\tau$-подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-проектором в G.*

Доказательство. Пусть G — Σ-наполненная группа, H — ее $d\tau$-подгруппа. Пусть $H \subseteq L \subseteq G$, $L / / N \in \mathfrak{F}$. По лемме 17.10 HN / N является $d\tau$-подгруппой группы L / N. Так как $L / N \in \mathfrak{F}$, то ввиду леммы 17.9 имеет место равенство $HN / N = L / N$, т. е. $HN = L$. Теорема доказана.

Определение 17.5. Пусть φ — некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел, $\mathfrak{F}$ — класс всех φ-дисперсивных групп. Подгруппу H группы G назовем *φ-дисперсивным проектором* (*φ_π-дисперсивным проектором*), если H является $\mathfrak{F}$-проектором (соответственно $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{S}_\pi$-проектором) группы G.

Теорема 17.5. (Сементовский [3]). *Пусть φ — некоторое линейное упорядочение множества всех простых чисел. Тогда для любой группы G справедливы следующие утверждения:*

1) G обладает по крайней мере одним пронормальным φ_π-дисперсивным проектором для любого непустого множества простых чисел π;

2) G обладает по крайней мере одним абнормальным φ-дисперсивным проектором.

Доказательство. Пусть $\Sigma = \{\mathfrak{N}_p \mid p \in \pi\}$, $\pi \neq \phi$. Пусть τ — линейное упорядочение Σ такое, что для любых неравных чисел $p \in \pi$ и $q \in \pi$ из $p\varphi q$ следует $\mathfrak{N}_p\tau\mathfrak{N}_q$. По теореме Силова группа G является Σ-наполненной. По теореме 17.3 группа G имеет пронормальную $d\tau$-подгруппу H, причем при $\pi(G) \subseteq \pi$ подгруппа H абнормальна. По теореме 17.4 подгруппа H является φ_π-дисперсивным проектором группы G. Теорема доказана.

Определение 17.6. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — некоторые классы групп. Обозначим через $\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}$ класс всех групп G, представимых в виде $G = A \times B$, где $A \in \mathfrak{F}$, $B \in \mathfrak{H}$. Класс $\mathfrak{F}\times\mathfrak{H}$ назовем *прямым произведением классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$*.

Можно заметить, что если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — локальные формации и $\pi(\mathfrak{F}) \cap \pi(\mathfrak{H}) = \phi$, то $\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}$ также является локальной формацией (в этом случае $\mathfrak{F} \times \mathfrak{H}$ является пересечением трех локальных формаций: $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$, формации всех $\pi(\mathfrak{F})$-замкнутых групп и формации всех $\pi(\mathfrak{H})$-замкнутых групп).

Проблема 21. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимая группа, $\mathfrak{H}$ — формация всех φ-дисперсивных $(\pi(G) \setminus \pi(\mathfrak{F}))$-групп, где φ — линейное упорядочение множества всех простых чисел. Доказать, что G имеет абнормальный $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{H})$-проектор.

§ 18. Вложение подгрупп в проекторы

1. Постановка задачи. Понятие проектора является обобщением понятия силовской подгруппы. Важнейшим свойством силовских p-подгрупп является то, что они сопряжены и их подгруппами исчерпываются все p-подгруппы данной группы. В этом параграфе исследуется задача распространения этого свойства силовских подгрупп на проекторы. Сразу заметим, что если H — $\mathfrak{F}$-проектор группы G, $\mathfrak{F}$ — локальная формация и каждая $\mathfrak{F}$-подгруппа из G содержится в одной из сопряженных с H, то H — $\pi(\mathfrak{F})$-холловская подгруппа группы G.

Определение 18.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Введем класс групп $D_\pi\mathfrak{F}$ следующим образом: $G \in D_\pi\mathfrak{F}$ тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

1) $G \in C_\pi\mathfrak{F}$;

2) для любой π-подгруппы A из G и любой S_π-подгруппы S из G найдется такой элемент $x \in G$, что $A^x \subseteq S$.

Положим $D_\pi\mathfrak{G} = D_\pi$. Таким образом, $D_\pi\mathfrak{F} = D_\pi \cap E_\pi\mathfrak{F}$.

Теорему, дающую условие принадлежности некоторой группы классу D_π, называют D-*теоремой*. Известные теоремы Силова, Ф. Холла и Чунихина могут быть сформулированы теперь следующим образом.

Теорема 18.1 (Силов). $D_p = \mathfrak{G}$ *для любого простого* p.

Теорема 18.2. (Ф. Холл). *Для любой разрешимой группы* G *и любого множества простых чисел* π *имеет место* $G \in D_\pi$.

Теорема 18.3 (Чунихин). $G \in (D_\pi\mathfrak{S}) \cap D_{\pi'}$ *для любой* π-*разрешимой группы* G.

Можно поставить и такую задачу: найти условия, при которых фиксированная $\mathfrak{F}$-подгруппа содержится в $\mathfrak{F}$-проекторе. Результатов, относящихся к этой задаче, известно пока немного.

2. Вложение подгрупп в $\mathfrak{N}_\pi$-проекторы. Нам понадобится следующее обобщение понятия пронормальности.

Определение 18.2. Подгруппу A группы G назовем *слабо пронормальной в G*, если для любого $x \in G$ выполняется следующее условие: если A и A^x нормальны в $\langle A, A^x \rangle$, то $A = A^x$.

Очевидно, всякая пронормальная подгруппа является слабо пронормальной.

Лемма 18.1. *Если подгруппа A группы G одновременно субнормальна и слабо пронормальна в G, то $A \lhd G$.*

Доказательство. Пусть $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \ldots \supseteq G_t = A$ — субнормальная $(G - A)$-цепь. Если $t = 1$, то $A \lhd G$. Пусть $t > 1$, $A \lhd G_m$, $1 \leqslant m \leqslant t$. Если же $x \in G_{m-1}$, то A и A^x нормальны в G_m, а значит, $A = A^x$. Следовательно, $A \lhd G_{m-1}$, и лемма доказана.

Теорема 18.4 (Шеметков [17]). *Пусть A — слабо пронормальная подгруппа π-разрешимой группы G. Тогда A содержится в некотором $\mathfrak{N}_\pi$-проекторе группы G в том и только в том случае, когда в G найдется нормальная подгруппа N такая, что $N \cap A = 1$ и AN / N содержится в некотором $\mathfrak{N}_\pi$-проекторе группы G / N.*

Доказательство. Мы будем без оговорок использовать тот факт, что по теореме 15.7 $\mathfrak{N}_\pi$-проекторы в группе G существуют и сопряжены между собой. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть AN / N содержится в $\mathfrak{N}_\pi$-проекторе F / N группы G / N, причем $N \cap A = 1$. Ввиду леммы 15.1 справедливо равенство $F / N = CN / N$, где C — некоторый $\mathfrak{N}_\pi$-проектор группы G. Рассмотрим теперь два случая.

1. Пусть $F = CN \neq G$. Очевидно, A слабо пронормальна в F, причем C — $\mathfrak{N}_\pi$-проектор в F. По индукции, $A \subseteq C^x$, где $x \in F$, и теорема в этом случае доказана, так как C^x является, конечно, $\mathfrak{N}_\pi$-проектором в группе G.

2. Пусть теперь $F = CN = G$, т. е. G / N — нильпотентная π-группа. Рассмотрим $G_1 = \mathrm{N}_G(A)$ и ее нормальную подгруппу $N_1 = N_G(A) \cap N$. Так как $N_1 \cap \cap A = 1$, то A и AN_1 / N_1 являются G_1-изоморфными (мы рассматриваем G_1 как группу операторов группы A

и группы N_1A / N_1). Так как $G_1 / N_1 \simeq G_1N / N \in \mathfrak{N}_\pi$, то G_1 / N_1 обладает проходящим через AN_1 / N_1 центральным рядом, на факторах которого G_1 действует тождественно. Отсюда и из G_1-изоморфизма между A и AN_1 / N_1 вытекает, что A является гиперцентральной нормальной подгруппой группы G_1. Согласно следствию 9.4.1 A содержится в некотором $\mathfrak{N}_\pi$-проекторе C_1 группы G_1. Докажем, что C_1 является $\mathfrak{N}_\pi$-проектором группы G, чем и завершим доказательство. Ввиду следствия 15.8.1 достаточно показать, что C_1 является π-холловской подгруппой в $\mathrm{N}_G(C_1)$.

По лемме 18.1 A нормальна в C_1. Пусть $C_1^x = C_1$ для некоторого π-элемента $x \in G$. Тогда $\langle A, A^x\rangle \subseteq C_1^x$, причем A и A^x нормальны в C_1^x. По определению слабой пронормальности $A = A^x$, т. е. $x \in G_1$. Но тогда $x \in C_1$, так как C_1 — $\mathfrak{N}_\pi$-проектор группы G_1. Теорема доказана.

При $\pi(G) = \pi$ из теоремы получаем следующий результат.

Следствие 18.4.1. *Пусть G — разрешимая группа, A — ее некоторая слабо пронормальная подгруппа. Тогда A содержится в некоторой картеровской подгруппе группы G в том и только в том случае, когда G имеет нормальную подгруппу N такую, что $N \cap A = 1$ и AN / N содержится в некоторой картеровской подгруппе группы G / N.*

Следствие 18.4.2 (Романовский [1]). *Пусть холловская подгруппа H разрешимой группы G обладает нормальным дополнением. Тогда картеровская подгруппа A из H содержится в некоторой картеровской подгруппе группы G.*

В условии этого следствия подгруппа A является даже пронормальной в G, так как она является $\mathfrak{N}_{\pi(H)}$-проектором группы G.

Лемма 18.2. *Пусть каждая собственная подгруппа группы G p-нильпотентна. Тогда G либо p-нильпотентна, либо p-замкнута и бипримарна.*

Доказательство. Если G не p-нильпотентна, то по теореме 14.4.7 из книги М. Холла [1] в G имеется ненильпотентная подгруппа $H = P \leftthreetimes \langle x\rangle$, где P — p-группа, x — p'-элемент. Если $H \neq G$, то по условию H p-нильпотентна, а значит, и нильпотентна. Поэтому

$H = G$. Ясно, что $C_G(P)$ содержит все собственные подгруппы из $\langle x \rangle$. Поэтому ввиду ненильпотентности G $\langle x \rangle$ должна быть примарной. Лемма доказана.

Теорема 18.5 (Виландт [3]). *Пусть* $\pi = \sigma \cup \tau$, $\sigma \cap \tau = \phi$. *Если* $G \in (E_\pi(\mathfrak{N}_\sigma \times \mathfrak{S}_\tau)) \cap D_\tau$, *то* $G \in D_\pi$.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай $\sigma = \{p\}$. По условию теоремы G имеет S_π-подгруппу $H = P \times Q$, где P — p-группа, Q — τ-группа. Предположим, что существуют π-подгруппы, не содержащиеся ни в одной из подгрупп, сопряженных с H. Выберем среди таких подгрупп подгруппу M, имеющую наименьший порядок. Тогда каждая собственная подгруппа из M содержится в сопряженной с H, а значит, p-нильпотентна. По лемме 18.2 M либо p-нильпотентна, либо бипримарна и p-замкнута. В частности, $M = P_1Q_1$, где P_1 — p-группа, Q — τ-группа.

Пусть M p-нильпотентна, т. е. $M = Q_1 \rtimes P_1$. Так как $G \in D_\tau$, то $Q_1^x \subseteq Q$ для некоторого $x \in G$. Очевидно, $N_G(Q_1^x)$ содержит P_1^x и P. По теореме Силова, $P_1^{xy} \subseteq P$ для некоторого $y \in N_G(Q_1^x)$. Поэтому

$$M^{xy} = (P_1Q_1)^{xy} = P_1^{xy}Q_1^x \subseteq PQ = H.$$

Получили противоречие.

Пусть теперь M бипримарна и p-замкнута. Тогда $M = P_1 \rtimes Q_1$, где Q_1 — q-группа, $q \in \tau$. По теореме Силова, $P_1^x \subseteq P$ для некоторого $x \in G$. Тогда $N_G(P_1^x)$ содержит Q_1^x и Q. Применяя теорему Силова к группе $N_G(P_1^x)$, получаем, что $Q_1^{xy} \subseteq Q$ для некоторого $y \in N_G(P_1^x)$. Теперь получаем

$$M^{xy} = (P_1Q_1)^{xy} = P_1^xQ_1^{xy} \subseteq PQ.$$

Снова пришли к противоречию. Теорема доказана.

Следствие 18.5.1 (Виландт [2]). $E_\pi\mathfrak{N} \subseteq D_\pi$.

Этот результат получается из теоремы 18.5 при $\tau = \phi$.

Теорема 18.6 (Виландт [2]). *Если* $G \in E_\pi\mathfrak{N}$ *и* M — *π-подгруппа из* G, *то* $N_G(M) \in E_\pi$.

Доказательство. Пусть H — нильпотентная S_π-подгруппа группы G. Если $M = 1$, то теорема верна.

Пусть $M \neq 1$. Обозначим через P неединичную силовскую p-подгруппу из M. Положим $N = \mathrm{N}_G(M)$, $N_1 = \mathrm{N}_G(P)$. Очевидно, $N \subseteq N_1$. Если $N_1 = G$, то по индукции $\mathrm{N}_{G/P}(M / P) = N / P$ обладает S_π-подгруппой L / P. Подгруппа L и будет искомой. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $N_1 \neq G$.

Пусть P_1 — силовская p-подгруппа из N_1. Ввиду теоремы Силова $P \subseteq P_1 \subseteq H^x$, $x \in G$. Так как $H = H_p \times H_{p'}$, то ясно, что $P_1 \times H^x_{p'}$ является S_π-подгруппой группы N_1. Итак, $N_1 \in \mathrm{E}_\pi\mathfrak{R}$. Так как для N_1 теорема верна по индукции и $N \subseteq N_1$, то $N_1 \in \mathrm{E}_\pi$. Теорема доказана.

3. **S_π-подгруппы с циклическими силовскими подгруппами.** Теорема 18.7 (Русаков [1]). *Пусть для любого $p \in \pi$ группа G имеет циклическую силовскую p-подгруппу. Тогда для любых двух π-подгрупп A и B группы G таких, что $|A|$ делит $|B|$, найдется такой элемент $x \in G$, что $A^x \subseteq B$.*

Доказательство. Если $A = 1$, то утверждение верно. Пусть $\omega = \pi(A) \neq \phi$ и p — наибольшее число из ω. Хорошо известно, что $\mathfrak{Z}$-группы сверхразрешимы. Поэтому A имеет нормальную S_p-подгруппу A_p. Подгруппа B имеет S_ω-подгруппу B_ω, причем $|A|$ делит $|B_\omega|$. Ясно, что достаточно рассмотреть лишь случай $B_\omega = B$.

Подгруппа $B = B_\omega$ имеет нормальную циклическую силовскую p-подгруппу B_p. Пусть P — содержащая B_p силовская p-подгруппа из G. Существует такой $x \in G$, что $A_p^x \subseteq P$. Так как P циклическая и содержит только одну подгруппу порядка $|A_p|$, то $A_p^x \subseteq B_p$. Так как A_p^x характеристична в A^x и B, то $N = \mathrm{N}_G(A_p^x)$ содержит $\langle A^x, B\rangle$. Рассмотрим N / A_p^x. Так как $|A^x / A_p^x|$ делит $|B / A_p^x|$, то по индукции $A^{xy} / A_p^x \subseteq B / A_p^x$ для некоторого $y \in N$. Следовательно, $A^{xy} \subseteq B$, и теорема доказана.

Следствие 18.7.1 (Бэр [1]). $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{Z} \subseteq \mathrm{D}_\pi$.

Теорема 18.8 (Шеметков [3]). *Пусть $\pi = \sigma \bigcup \tau$, $\sigma \bigcap \tau = \phi$. Если $G \in (\mathrm{E}_\pi(\mathfrak{Z}_\sigma \times \mathfrak{S}_\tau)) \bigcap \mathrm{D}_\tau$, то $G \in \mathrm{D}_\pi$.*

Доказательство. По условию теоремы G имеет S^π-подгруппу $H = P \times Q$, где $P \in \mathfrak{Z}_\sigma$, $Q \in \mathfrak{S}_\tau$. Предположим, что в G существуют π-подгруппы, не входящие ни в одну из подгрупп, сопряженных с H. Выберем среди них π-подгруппу M, имеющую наименьший порядок. Если $\sigma_1 = \pi(M) \cap \sigma$, то ясно, что $G \in \mathrm{E}_{\sigma_1 \cup \tau}(\mathfrak{Z}_{\sigma_1} \times \mathfrak{G}_\tau)$. Поэтому можно считать, что $\pi(M) \cap \sigma = \sigma \neq \phi$. Ввиду теоремы 18.7 можно также считать, что M не является σ-группой.

Пусть p — наименьшее простое число из σ. Согласно выбору M, каждая собственная подгруппа из M представима в виде прямого произведения сверхразрешимой σ-подгруппы и некоторой τ-подгруппы. Следовательно, каждая собственная подгруппа из M p-нильпотентна. Ввиду леммы 18.2 возможны два случая.

Первый случай. Пусть M p-нильпотентна. Тогда M представима в виде $M = Q_1 \leftthreetimes P_1$, где $Q_1 \in \mathfrak{G}_\tau$, $P_1 \in \mathfrak{Z}_\sigma$. Так как $G \in \mathrm{D}_\tau$, то $Q_1^x \subseteq Q$ для некоторого $x \in G$. По следствию 18.7.1 $\mathrm{N}_G(Q_1^x) \in \mathrm{D}_\sigma$. Поэтому $P_1^{xy} \subseteq P$ для некоторого $y \in \mathrm{N}_G(Q_1^x)$. Отсюда получаем

$$M^{xy} = (P_1Q_1)^{xy} = P_1^{xy}Q_1^x \subseteq PQ.$$

Приходим к противоречию.

Второй случай. Пусть M бипримарна, т. е. $\pi(M) = \{p, q\}$, $q \in \tau$. Очевидно, H имеет нильпотентную $\{p, q\}$-холловскую подгруппу H_1. Согласно следствию 18.5.1, M содержится в H_1^x для некоторого $x \in G$. Снова пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Замечание 1. Теорему 18.8 можно расширить так, чтобы она включала в себя теорему 18.7 (Шеметков [3]).

Теорема 18.9 (Шеметков [2]). *Если $G \in \mathrm{E}_\pi\mathfrak{Z}$ и M — π-подгруппа из G, то $\mathrm{N}_G(M) \in \mathrm{E}_\pi$.*

Доказательство. Предположим, что $M \neq 1$ и что теорема верна для всех групп, порядки которых меньше $|G|$. По теореме 18.7 M содержится в некоторой S_π-подгруппе H из G. Так как M сверхразрешима, то она содержит нормальную силовскую подгруппу $P \neq 1$. Ясно, что $N = \mathrm{N}_G(M) \subseteq N_1 = \mathrm{N}_G(P)$. Если P нормальна в G, то по индукции в группе G/P нормализатор N/P подгруппы M/P обладает S_π-подгруппой L/P. Подгруппа L и будет искомой S_π-подгруппой из N. Поэтому в дальнейшем считаем, что $N_1 \neq G$. Пусть Q — силовская q-подгруппа из N_1, $q \in \pi$. Так как $G \in \mathrm{D}_\pi$, то $P^x Q^x \subseteq H$ для некоторого $x \in G$. По теореме 18.7 подгруппы P и P^x сопряжены в H. Следовательно, $|\,\mathrm{N}_H(P)\,|$ делится на $|\,Q\,|$. Отсюда, ввиду произвольности q, следует, что $\mathrm{N}_H(P)$ является S_π-подгруппой из N_1. Так как $M \subseteq N \subseteq N_1 \subset G$ и теорема для N_1 верна по индукции, то $N \in \mathrm{E}_\pi$. Теорема доказана.

Теорема 18.10 (Шеметков [5]). *Пусть G имеет S_π-подгруппу H, представимую в виде $H = A \times B$, где $(|\,A\,|, \ |\,B\,|) = 1$, $A \in \mathfrak{N}$, $B \in \mathfrak{Z}$. Тогда $\mathrm{N}_G(M) \in \mathrm{E}_\pi$ для любой π-подгруппы M группы G.*

Доказательство. По теореме 18.5 и следствию 18.7.1, $G \in \mathrm{D}_\pi$. Значит, можно считать, что $M \subseteq H$, $M = A_1 \times B_1$, $A_1 \subseteq A$, $B_1 \subseteq B$. Пусть $\pi(A) = \sigma$, $\pi(B) = \tau$.

Пусть $A_1 \neq 1$. По теореме 18.6 $\mathrm{N}_G(A_1)$ имеет S_σ-подгруппу A_2. Так как $G \in \mathrm{D}_\pi$, то $A_2 \subseteq A^x$ для некоторого $x \in G$. Следовательно, $A_2 \times B^x$ является S_π-подгруппой группы $\mathrm{N}_G(A_1)$. Если $\mathrm{N}_G(A_1) \neq G$, то по индукции $\mathrm{N}_G(M) \in \mathrm{E}_\pi$, так как $\mathrm{N}_G(M)$ содержится в $\mathrm{N}_G(A_1)$ и совпадает с нормализатором M в $\mathrm{N}_G(A_1)$. Если $A_1 \lhd G$, то из справедливости теоремы для G / A_1 вытекает ее справедливость и для G.

Случай $A_2 \neq 1$ разбирается аналогично (с применением теоремы 18.9).

Теорема доказана.

4. D-теоремы для непростых групп. Получение D-теорем для непростых групп основывается на следующих двух теоремах Чунихина.

Теорема 18.11 (Чунихин [6]). *Всякое расширение C_π-группы с помощью E_π-группы является E_π-группой.*

Теорема 18.12 (Чунихин [5]). *Всякое расширение C_π-группы с помощью C_π-группы является C_π-группой.*

Эти теоремы приведены в монографии Чунихина [7]. При их доказательстве используются обобщенная лемма Фраттини и теоремы Шура — Цассенхауза. В оригинальной формулировке теоремы 18.12 присутствовало еще условие разрешимости π-подгрупп или π'-подгрупп, которое отбрасывается ввиду теоремы Фейта — Томпсона [1].

Виландт [1] поставил следующую проблему.

Проблема 22. Доказать, что всякое расширение D_π-группы с помощью D_π-группы является D_π-группой.

Во всех доказательствах специальных случаев этой проблемы приходится изучать свойства гипотетического минимального контрпримера. Накопленный в этом отношении опыт мы изложим в виде следующей леммы.

Лемма 18.3. *Пусть* θ *и* η — *S-замкнутые гомоморфы. Пусть* G — *группа, удовлетворяющая следующим двум условиям:*

1) G *имеет нормальную подгруппу* K *такую, что* $K \in D_\pi \cap \theta$, $G / K \in D_\pi \cap \eta$;

2) G *не принадлежит* D_π, *но все ее нетривиальные подгруппы и фактор-группы, удовлетворяющие условию* 1), *принадлежат* D_π.

Тогда G *обладает* S_π-*подгруппой* G_π *и максимальной* π-*подгруппой* M, *не совпадающей с* G_π^x *ни при каком* $x \in G$, *причем справедливы следующие утверждения:*

а) $G / K \in \mathfrak{G}_\pi$, $MK = G$, $O_\pi(G) = 1$;

б) G *не имеет ни одной нетривиальной нормальной подгруппы* R, *относительно которой были бы одновременно выполнены следующие условия:*

б1) $R \supseteq K$;

б2) $R \cap M$ *обладает нормальной холловской подгруппой* $L \neq 1$;

б3) $N_K(L) \in D_\pi$;

б4) *если* L *не является холловской подгруппой в* R, *то* L *не является холловской подгруппой и в* $N_R(L)$;

б5) $G_\pi \cap R \in C_{\pi(L)}$.

Доказательство. То, что G принадлежит E_π, есть следствие теоремы 18.11. Обозначим через G_π некоторую S_π-подгруппу группы G. Так как G не принадлежит D_π, то в G имеется π-подгруппа M, не входящая ни в одну из подгрупп, сопряженных с G_π. Будем считать, что M — максимальная π-подгруппа, т. е. не содержится ни в какой другой π-подгруппе из G.

Пусть G_1 / K — некоторая S_π-подгруппа группы G / K. Так как G / K принадлежит S-замкнутому классу η, то $G_1 / K \in \eta$. Предположим, что $G_1 \neq G$. Тогда G_1 принадлежит D_π, а следовательно, имеет S_π-подгруппу H, являющуюся S_π-подгруппой и в группе G. Пусть A — произвольная π-подгруппа группы G. Так как

$G / K \in D_\pi$, то

$$A^x K / K \subseteq G_1 / K$$

для некоторого $x \in G$. Отсюда $A^x \subseteq G_1$, а так как $G_1 \in \in D_\pi$, то $A^{xy} \subseteq H$ для некоторого $y \in G_1$. Получили, что G принадлежит D_π. Пришли к противоречию. Таким образом, $G_1 = G$, т. е. $G / K \in \mathfrak{G}_\pi$.

Предположим, что MK является собственной подгруппой группы G. Очевидно, MK удовлетворяет условию 1) леммы. Поэтому ввиду условия 2) подгруппа MK принадлежит D_π. Ввиду $G / K \in \mathfrak{G}_\pi$ и леммы 15.2 $KG_\pi = G$. Поэтому подгруппы MK и G_π перестановочны (более того, их произведение совпадает с G). Следовательно, по лемме 15.2, $MK \cap G_\pi$ является S_π-подгруппой группы MK. А так как последняя принадлежит D_π, то

$$M \subseteq (MK \cap G_\pi)^x \subseteq G_\pi^x$$

для некоторого $x \in G$. Пришли к противоречию. Значит, $MK = G$.

Допустим, что G имеет минимальную нормальную π-подгруппу $X \neq 1$. Рассмотрим два случая.

Пусть $X \cap K = 1$. Тогда KX / X изоморфна K и, следовательно, принадлежит D_π и θ. Кроме того,

$$G / X / KX / X \simeq G / K / KX / K. \qquad (1)$$

Так как, по доказанному, G / K является π-группой и принадлежит η, то и группы (1) также являются π-группами и принадлежат η. Таким образом, группа G / X удовлетворяет условию 1), причем ее порядок не равен $|G|$. Значит, по 2), G / X принадлежит D_π. Но тогда и G принадлежит D_π. Получили противоречие. Пусть $X \cap \cap K \neq 1$. Тогда $X \subseteq K$. Очевидно, $K / X \in D_\pi \cap \theta$. Так как $G / X / K / X$ изоморфна G / K, а G / K принадлежит D_π и η, то мы видим, что группа G / X удовлетворяет условию 1). Значит, G / X, а вместе с ней и G принадлежит D_π. Получили противоречие. Остается принять, что $O_\pi(G) = 1$.

Предположим, что G имеет нетривиальную нормальную подгруппу R, относительно которой выполнены условия б1) — б5). Очевидно, M содержится в $N_G(L)$. Кроме того, $MK = G$. Поэтому

$$G / K \simeq N_G(L) / N_K(L).$$

Ясно, что $N_G(L)$ и R удовлетворяют условию 1). Так как R — нетривиальная подгруппа, а $N_G(L) \neq G$ ввиду $O_\pi(G) = 1$, то $N_G(L)$ и R являются D_π-группами. Таким образом, подгруппа M (она выбрана максимальной) является S_π-подгруппой группы $N_G(L)$. $M \cap (N_G(L) \cap R) = M \cap R$ является S_π-подгруппой группы $N_G(L) \cap R = N_R(L)$. Поэтому из того, что L является холловской подгруппой группы $M \cap R$, вытекает, что L — холловская подгруппа группы $N_R(L)$. Отсюда, ввиду условия б4) леммы, вытекает, что L является холловской подгруппой группы R.

Далее, $G_\pi \cap R$ является S_π-подгруппой группы R, причем R, как отмечалось, принадлежит D_π. Значит,

$$L \subseteq M \cap R \subseteq G_\pi^x \cap R, \tag{2}$$

где x — некоторый элемент из R. А так как $G_\pi^x \cap R$ нормальна в G_π^x и по условию леммы принадлежат $C_{\pi(L)}$, то

$$(G_\pi^x \cap R)(N_G(L) \cap G_\pi^x) = G_\pi^x. \tag{3}$$

Учитывая (2) и то, что $M \cap R$ является S_π-подгруппой группы $N_R(L)$, получаем

$$(N_G(L) \cap G_\pi^x) \cap (G_\pi^x \cap R) = N_R(L) \cap G_\pi^x = M \cap R.$$

Это вместе с равенством (3) позволяет установить следующее соотношение:

$$|N_G(L) \cap G_\pi^x| = |G_\pi^x : R \cap G_\pi^x| \cdot |M \cap R|. \tag{4}$$

Здесь в правой части равенства первый множитель равен, очевидно, порядку G/R. Но так как $MR = G$, то $|G/R|$ равен индексу подгруппы $M \cap R$ в M. Таким образом, (4) принимает следующий вид:

$$|N_G(L) \cap G_\pi^x| = |M|.$$

Вспоминая теперь, что M является S_π-подгруппой D_π-группы $N_G(L)$, приходим к следующему:

$$M = (N_G(L) \cap G_\pi^x)^y \subseteq G_\pi^{xy},$$

где y — некоторый элемент из $N_G(L)$. Но это невозможно, так как по условию леммы M не содержится ни в одной из подгрупп, сопряженных с G_π.

Лемма доказана.

Теорема 18.13 (Чунихин [2], Ф. Холл [1]). *Каждая π-отделимая группа принадлежит* $\mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$.

Доказательство. Пусть $\theta = \eta$ — класс всех π-отделимых групп. Класс θ является S-замкнутой формацией, причем $\mathfrak{S}_\pi \cap \theta \subseteq \mathfrak{S}$. Пусть G — π-отделимая группа наименьшего порядка, не принадлежащая D_π. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа из G. Согласно определению π-отделимости $|K|$ не может делиться на два различных простых числа из π. Мы видим, что K удовлетворяет условию леммы 18.3.

Пусть G_π — S_π-подгруппа из G, M — максимальная π-подгруппа, не сопряженная с G_π. Тогда $MK = G$. Выберем теперь среди нормальных подгрупп группы G, содержащих K и пересекающихся с M не по единице, подгруппу R минимального порядка. Если $R \neq K$, то R/K — минимальная нормальная подгруппа разрешимой π-группы G/K, причем $|R/K| = |R \cap M|$. При $R = K$ порядок $R \cap M$ также есть степень числа из π. Таким образом, R удовлетворяет условиям б1) — б5) леммы 18.3. Итак, $R = G$. Но тогда $M = M \cap R$ примарна и по теореме Силова сопряжена с G_π. Теорема доказана.

Замечание 2. С помощью леммы 18.3 можно быстро получить доказательство теоремы 18.3. Действительно, пусть $\theta = \eta$ — класс всех π'-разрешимых групп, G — группа наименьшего порядка из $\theta \setminus \mathrm{D}_\pi$, K — минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда G удовлетворяет условию леммы 18.3, и если M и G_π такие же, как в лемме 18.3, то $MK = G_\pi K = G$, K — π'-группа. По теореме Шура — Цассенхауза M и G_π сопряжены между собой, что и требуется. То, что $\theta \subseteq \mathrm{D}_{\pi'}$, есть следствие теоремы 18.13.

Лемма 18.4. *Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, R — нормальная ω-отделимая подгруппа группы G, $\Sigma = \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$, $r \geqslant 1$, — силовская система S_π-подгруппы H из R. Тогда $G = NR$, где* $N = \bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathrm{N}_G(P_i)$.

Доказательство. Пусть x — любой элемент из G. Так как $R \lhd G$, то H^x — S_π-подгруппа из R. По теореме 18.13 $H^{xy} = H$ для некоторого $y \in R$. Значит,

$$\Sigma^{xy} = \{P_1^{xy}, P_2^{xy}, \ldots, P_r^{xy}\} \text{ — силовская система } H.$$

По теореме Ф. Холла силовские системы разрешимой группы сопряжены (этот результат приведен, например, в книге К у р о ш а [1]). Значит, найдется такой $z \in H$, что

$$P_1^{xyz} = P_1,\ P_2^{xyz} = P_2,\ \ldots,\ P_r^{xyz} = P_r.$$

Следовательно, $xyz \in N = \bigcap_i \mathrm{N}_G(P_i)$, $yz \in R$. Отсюда получаем $x \in N\,(yz)^{-1} \subseteq NR$. Так как x — любой элемент из G, то тем самым установлено равенство $NR = G$. Лемма доказана.

Л е м м а 18.5. *Пусть M — некоторая разрешимая π-группа операторов группы K. Тогда либо K является π'-группой, либо K имеет неединичную разрешимую M-допустимую π-подгруппу.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть K — группа наименьшего порядка, для которой лемма не выполняется. Группа K имеет разрешимую π-группу операторов M, но не удовлетворяет утверждению леммы. Ясно, что $|K|$ делится на числа из π, но любая M-допустимая подгруппа из K является π'-группой. Не ограничивая общности, будем считать, что M — некоторая группа автоморфизмов группы K. Пусть $G = KM$ — расширение группы K посредством группы M.

Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы M. Так как M разрешима и является π-группой, то L является p-группой для некоторого $p \in \pi$. Так как M — группа автоморфизмов для K, то $\mathrm{N}_K(L)$ не совпадает с K. Так как $\mathrm{N}_K(L) = \mathrm{N}_G(L) \cap K$ нормальна в $\mathrm{N}_G(L)$, причем $M \subseteq \mathrm{N}_G(L)$, то $\mathrm{N}_K(L)$ является M-допустимой подгруппой. Учитывая равенство $G = MK$, получаем

$$\mathrm{N}_G(L) = M\,(\mathrm{N}_G(L) \cap K) = M\mathrm{N}_K(L), \tag{1}$$

где $\mathrm{N}_K(L)$ — M-допустимая π'-подгруппа из K.

Ввиду нормализаторного свойства p-групп получаем теперь, что p не делит $|K|$. Значит, $R = LK$ является ω-отделимой группой, где $\omega = \{p, q\}$, q — любое число из π, делящее порядок K. Применим теперь лемму 18.4. Пусть $\Sigma = \{L, Q\}$ — силовская система S_ω-подгруппы R_ω группы R. Тогда $G = NR$, где $N = \mathrm{N}_G(L) \cap \mathrm{N}_G(Q)$. Так как $Q = LQ \cap K$ нормальна в LQ, то $L \subseteq N$. Поэтому $G = NK$. Используя это равенство и тождество Дедекинда, получаем

$$\mathrm{N}_G(L) = N(\mathrm{N}_G(L) \cap K) = N\mathrm{N}_K(L). \qquad (2)$$

Учитывая (1) и (2) и применяя теорему 18.3, получаем, что $M \subseteq N^x$ для некоторого $x \in \mathrm{N}_G(L)$. Так как $N \subseteq \mathrm{N}_G(Q)$, то отсюда получаем, что $M \subseteq \mathrm{N}_G(Q^x)$. Лемма доказана.

Определение 18.3. Класс групп W назовем π-*классом Виландта*, если выполняются следующие условия:

1) W — S-замкнутый гомоморф;

2) если $G \in W$, то существует такое линейное упорядочение φ множества всех простых чисел, что каждая π-подгруппа из G φ-дисперсивна;

3) если $G \in W \cap \mathrm{E}_\pi$, то $\mathrm{N}_G(M) \in E_\pi$ для любой π-подгруппы M из G.

Ввиду теоремы 18.6 класс всех групп с нильпотентными π-подгруппами является π-классом Виландта. Ввиду теоремы 18.9 π-классом Виландта является класс всех групп с циклическими примарными π-подгруппами.

Лемма 18.6. *Всякая* E_π-*группа, принадлежащая некоторому* π-*классу Виландта, является* D_π-*группой.*

Доказательство. Пусть группа G принадлежит некоторому π-классу Виландта и обладает S_π-подгруппой H. Пусть φ — такое линейное упорядочение множества всех простых чисел, что каждая π-подгруппа из G является φ-дисперсивной. Если G обладает нормальной π-подгруппой $L \neq 1$, то, по индукции, $G/L \in \mathrm{D}_\pi$. Но тогда $G \in \mathrm{D}_\pi$. Поэтому будем считать, что G не имеет неединичных нормальных π-подгрупп.

Предположим, что G имеет максимальную π-подгруппу M, не сопряженную с H в G. Не ограничивая общности, будем считать, что φ-минимальный простой делитель p порядка H делит также и $|M|$. Так как M φ-дисперсивна, то она имеет нормальную силовскую p-подгруппу P. По условию леммы $N = \mathrm{N}_G(P)$ обладает S_π-подгруппой H_1. Так как $N \neq G$, то по индукции $M \subseteq H_1^x$ для некоторого $x \in N$. Так как M — максимальная π-подгруппа, то $M = H_1^x$. С другой стороны, так как $P \subseteq H^y$ для некоторого $y \in G$ и H^y φ-дисперсивна, то ясно, что $|M| < |N|_\pi$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Теорема 18.14 (Шеметков [11]). *Всякое расширение* E_π*-группы, принадлежащей некоторому* π*-классу Виландта, с помощью* $\mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$*-группы является* $\mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$*-группой.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Тогда G не принадлежит $\mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$, но имеет нормальную E_π-подгруппу K, входящую в некоторый π-класс Виландта, причем $G / K \in \mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$. По лемме 18.6 $K \in \mathrm{D}_\pi$. Ясно, что G удовлетворяет условию леммы 18.3. Пусть G_π — S_π-подгруппа из G, а M — максимальная π-подгруппа, не сопряженная с G_π. Ввиду условия и изоморфизма $MK / K \simeq M / M \cap K$ подгруппа M разрешима. По лемме 18.3 $G = G_\pi K = MK$. Поэтому ясно, что K не является π'-группой. Ввиду леммы 18.5 $M \cap K \neq 1$. Так как по условию теоремы $M \cap K$ дисперсивна, то $M \cap K$ имеет нормальную силовскую подгруппу $L \neq 1$. По условию теоремы $\mathrm{N}_K(L)$ принадлежит E_π, а значит, ввиду леммы 18.6 $\mathrm{N}_K(L) \in \mathrm{D}_\pi$. Полученная ситуация противоречит лемме 18.3 (с подгруппой K в качестве R).

Теорема доказана.

Теорема 18.15 (Ф. Холл [1]). *Всякое расширение* $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{N}$*-группы с помощью* $\mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$*-группы является* $\mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$*-группой.*

Доказательство. Мы уже отмечали, что класс всех групп с нильпотентными π-подгруппами является π-классом Виландта. Поэтому теорема 18.15 вытекает из теоремы 18.14.

Теорема 18.16 (Шеметков [2], [11]). *Всякое расширение* $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{Z}$*-группы с помощью* $\mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$*-группы является* $\mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$*-группой.*

Доказательство. Класс всех групп, у которых силовские p-подгруппы для любого $p \in \pi$ циклические, является π-классом Виландта. Поэтому теорема 18.16 есть следствие теоремы 18.14.

Теорема 18.17 (Шеметков [11]). *Всякое расширение* $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{Z}$*-группы с помощью* D_π*-группы является* D_π*-группой.*

Доказательство. Предположим, что G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Таким образом, G не принадлежит D_π, но имеет такую нормальную подгруппу K, что $K \in \mathrm{E}_\pi\mathfrak{Z}$,

$G / K \in \mathrm{D}_\pi$. По теореме 18.7 $K \in \mathrm{D}_\pi$. Следовательно, G удовлетворяет условию леммы 18.3. В частности, G / K является π-группой. Ввиду теоремы 18.16 и теоремы Фейта — Томпсона [1] $2 \in \pi$. Но тогда K разрешима, так как имеет циклическую силовскую 2-подгруппу. Так как к тому же G / K — π-группа, то G оказывается либо π-разрешимой, либо π'-разрешимой. По теореме 18.3 $G \in \mathrm{D}_\pi$. Теорема доказана.

Теорема 18.18 (Ф. Холл [1]). *Пусть G обладает субнормальным рядом, каждый фактор которого принадлежит $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{R}$. Тогда $G \in \mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$.*

Доказательство. Ввиду леммы 15.2 всякая нормальная подгруппа и фактор-группа $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{R}$-группы принадлежат $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{R}$. Поэтому если G обладает субнормальным рядом с $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{R}$-факторами, то G обладает и композиционным рядом с тем же свойством. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы $G \neq 1$, удовлетворяющей условию теоремы. По индукции $G / K \in \mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$. Так как K представима в виде прямого произведения простых $\mathrm{E}_\pi\mathfrak{R}$-групп (изоморфных композиционным факторам), то $K \in \mathrm{E}_\pi\mathfrak{R}$. По теореме 18.15 $G \in \mathrm{D}_\pi\mathfrak{S}$.

Теорема доказана.

§ 19. Комментарии

1. Теорема 15.3 для случая, когда $\mathfrak{F}$ — локальная формация, доказана Гашюцом [3]. Существование и сопряженность $\mathfrak{F}$-проекторов в случае, когда $\mathfrak{F}$ — гомоморф, изучал Шунк [1]. В настоящее время классом Шунка называют такой гомоморф $\mathfrak{H}$, что $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{S}$ и каждая разрешимая группа обладает $\mathfrak{H}$-проекторами. Понятие проектора обобщил Трокколо [1].

2. На множестве классов Шунка введем отношение сильного вложения $\ll$. Положим $\mathfrak{H} \ll \mathfrak{F}$, если в любой разрешимой группе $\mathfrak{H}$-проектор содержится в одном из $\mathfrak{F}$-проекторов. Отношение $\ll$ изучалось в работах Клайна [1], Дарси [3], Дёрка [2], [5], Вуда [1], [3] и Хоукса [12].

3. Характеризации $\mathfrak{F}$-проекторов с помощью определенных цепей подгрупп можно найти в работах Шамаша [1], Картера и Хоукса [1], Прентис [1], Йена [1], Райта [3], Греддона [1], Дарси [2].

4. Проблема 17 в случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ решена Дейдом [1].

5. Хупперт [6] доказал, что если $G \in \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{F}$ — локальная формация, то для любого $\mathfrak{F}$-проектора H из G и любых нормальных подгрупп N_1 и N_2 из G имеет место $H \cap N_1N_2 = (H \cap N_1)(H \cap N_2)$.

6. Пронормальные подгруппы изучались Пенгом [1], [2], Манном [5], Йеном [2], Шаллером [2], Вудом [2].

7. Фаттахи [2] изучал группы, в которых каждая подгруппа либо нормальна, либо абнормальна. Более общая задача рассматривалась Эбертом и Бауманом [1].

8. Формационное обобщение понятия пронормальности изучала Подуфалова [1].

9. Сегал [2], [4] рассматривал условия существования обобщенных подгрупп Картера в неразрешимых группах.

10. В работах Дёрка [2], Дёрка и Хоукса [1] изучались локальные формации $\mathfrak{F}$ такие, что в каждой разрешимой группе $\mathfrak{F}$-проектор либо покрывает, либо изолирует главные факторы группы.

11. Чунихин [2] доказал существование и сопряженность S_π-подгрупп в π-отделимых группах; в полном объеме теорема 18.13 доказана Ф. Холлом [1].

ГЛАВА V

ФОРМАЦИОННЫЕ НОРМАЛИЗАТОРЫ

§ 20. $\check{C}$-системы

Определение 20.1. Пусть σ — разбиение множества всех простых чисел на попарно непересекающиеся подмножества, которые будем называть *σ-слоями*. Пересекая каждый σ-слой с $\pi(G)$, где $G \neq 1$, и отбрасывая получающиеся при этом пустые множества, мы получаем *σ-разбиение* $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ множества $\pi(G)$.

Если $G = 1$, то σ-разбиением группы G будем считать пустое множество.

Определение 20.2. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — σ-разбиение множества $\pi(G)$. Систему подгрупп $H_1, H_2, \ldots, H_n$ назовем *$\check{C}_\sigma$-системой* группы G, если выполнены следующие условия:

1) H_i является σ_i-холловской подгруппой в G для любого $i = 1, 2, \ldots, n$;

2) $H_iH_j = H_jH_i$ при любых i, j;

3) существует такое t, $1 \leqslant t \leqslant n$, что группа G σ_i-разрешима для любого i, не равного t.

Если G — единичная группа, то будем считать, что ее $\check{C}_\sigma$-система состоит из одной G. Если разбиение σ нам безразлично, то значок σ будем опускать. Таким образом, $\check{C}$-система — это $\check{C}_\sigma$-система при некотором σ.

Лемма 20.1. *Пусть s — мера разрешимости группы G. Группа G обладает $\check{C}_\sigma$-системой тогда и только тогда, когда $\pi(|G| : s)$ содержится в одном из σ-слоев.*

Этот факт вытекает прямо из следствия 13.5.1 при $\pi_0 = \Phi$.

Определение 20.3. $\check{C}$-система $H_1, H_2, \ldots, H_n$ группы G называется *минимальной $\check{C}$-системой*, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ выполняется одно из следующих двух условий:

1) H_i примарна;

2) H_i непримарна и для любого $p \in \pi(H_i)$ группа G не p-разрешима.

Таким образом, все члены минимальной Č-системы, кроме, может быть, одного, являются силовскими подгруппами. В случае разрешимой группы понятия минимальной Č-системы и силовской системы совпадают.

Определение 20.4. Пусть $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ — некоторая система подгрупп группы G. Если $x \in G$, то систему $\mathcal{T}^x = \{T_1^x, T_2^x, \ldots, T_n^x\}$ будем называть *сопряженной* с $\mathcal{T}$ в G (с помощью элемента x). Подгруппу $\mathrm{N}_G(\mathcal{T}) = \{x \in G \mid \mathcal{T}^x = \mathcal{T}\}$ назовем *нормализатором* системы $\mathcal{T}$ в группе G. В случае $\mathrm{N}_G(\mathcal{T}) = G$ скажем, что $\mathcal{T}$ *нормальна* в G.

Группу G назовем *σ-разложимой*, если она обладает нормальной $\check{C}_\sigma$-системой. Другими словами, группа G σ-разложима, если она представима в виде прямого произведения $G = G_{\sigma_1} \times G_{\sigma_2} \times \ldots \times G_{\sigma_n}$, где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — σ-разбиение множества $\pi(G)$, G_{σ_i} — S_{σ_i}-подгруппа из G.

Лемма 20.2. *Если индексы подгрупп A и B в группе G взаимно просты, то $G = AB$ и $|G : A \cap B| = |G : A| \cdot |G : B|$.*

Доказательство. Используем формулу $|AB| = |A| \cdot |B : A \cap B|$.

Лемма 20.3. *Пусть G обладает $\check{C}_\sigma$-системой $\mathcal{S}$. Тогда G имеет ровно $|G : \mathrm{N}_G(\mathcal{S})|$ различных $\check{C}_\sigma$-систем и любые две $\check{C}_\sigma$-системы в G сопряжены.*

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — σ-разбиение множества $\pi(G)$. Считаем, что $G \neq 1$. Так как G является σ_i-обособленной для любого i, то мы имеем возможность применить теорему 18.3. Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ возьмем σ_i-холловскую подгруппу R_i группы G. Систему подгрупп $\mathcal{R} = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ назовем *дополнительной σ-системой* группы G. Число всех дополнительных σ-систем равно

$$k = \prod_{i=1}^{n} |G : \mathrm{N}_G(R_i)|.$$

В нашей ситуации индексы $|G : \mathrm{N}_G(R_i)|$ попарно взаимно просты. Поэтому применение леммы 20.2 приводит к равенству

$$k = \prod_{i=1}^{n} |G : \mathrm{N}_G(R_i)| = |G : \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{N}_G(R_i)| = |G : \mathrm{N}_G(\mathscr{R})|.$$

Так как число всех систем подгрупп, сопряженных с $\mathscr{R}$ в G, равно $|G : \mathrm{N}_G(\mathscr{R})|$, то отсюда делаем вывод, что любые две дополнительные σ-системы группы G сопряжены

Пусть $\tilde{H}_t = \bigcap_{i \neq t} R_i$. Применяя несколько раз лемму 20.2, получаем, что $\tilde{H}_t$ — σ_t-холловская подгруппа группы G. При любых $r \neq t$ пересечение $\bigcap_{i \neq r,\, t} R_i$ является $(\sigma_r \bigcup \sigma_t)$-холловской подгруппой группы G. Поэтому

$$\tilde{H}_r\tilde{H}_t = (\bigcap_{i \neq r} R_i)(\bigcap_{i \neq t} R_i) = \bigcap_{i \neq r,\, t} R_i = \tilde{H}_t\tilde{H}_r.$$

Таким образом, $\mathscr{S} = \{\tilde{H}_1, \tilde{H}_2, \ldots, \tilde{H}_n\}$ — $\check{C}_\sigma$-система группы G. Обратно, путем перемножения членов системы $\mathscr{S}$ мы можем построить дополнительную σ-систему $\mathscr{R}$. Очевидно $\mathrm{N}_G(\mathscr{S}) = \mathrm{N}_G(\mathscr{R})$ и число всех $\check{C}_\sigma$-систем группы G совпадает с числом всех дополнительных σ-систем. Это число равно

$$|G : \mathrm{N}_G(\mathscr{S})| = |G : \mathrm{N}_G(\mathscr{R})|,$$

и мы получаем, что любые две $\check{C}_\sigma$-системы сопряжены. Лемма доказана.

Определение 20.5. Пусть $\mathscr{R}$ и $\mathscr{S}$ те же, что и в доказательстве леммы 20.3. Тогда $\mathscr{R}$ будем называть *дополнительной σ-системой, соответствующей $\check{C}_\sigma$-системе $\mathscr{S}$.*

Лемма 20.4. *Пусть $\mathscr{S}$ — $\check{C}_\sigma$-система группы G. Тогда $\mathrm{N}_G(\mathscr{S})$ σ-разложим.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{S} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$, где H_i — σ_i-холловская подгруппа группы $G \neq 1$. Положим $N = \mathrm{N}_G(\mathscr{S})$. Так как $H_iN = NH_i$, то по лемме 15.2 пересечение $H_i \bigcap N$ является σ_i-холловской подгруппой в N. Так как H_i и N нормальны в H_iN, то $H_i \bigcap N \triangleleft N$. Тем самым лемма доказана.

Определение 20.6. Пусть $\mathscr{S} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ — $\check{C}_\sigma$-система группы G, $\sigma_i = \pi(H_i)$. Пусть $\sigma^*_{k_1}, \sigma^*_{k_2}, \ldots, \sigma^*_{k_t}$ — σ-разбиение множества $\pi(R)$, где

R — некоторая подгруппа группы G, $\sigma^*_{k_i} \subseteq \sigma_{k_i}$. Если $\mathscr{R} = \{H_{k_1} \cap R,\ H_{k_2} \cap R,\ \ldots,\ H_{k_t} \cap R\}$ является $\check{C}_\sigma$-системой подгруппы R, то говорят, что $\mathscr{S}$ *редуцируется в подгруппу* R. В этом случае применяют обозначение $\mathscr{R} = \mathscr{S} \cap R$, а систему $\mathscr{S}$ называют *расширением* системы $\mathscr{R}$.

Определение 20.7. Если K — ядро гомоморфизма χ группы G, то через $\mathscr{T}^\chi$ (через $\mathscr{T}K / K$) будем обозначать ту $\check{C}$-систему группы H^χ (группы HK / K), в которую переходит $\check{C}$-система $\mathscr{T}$ подгруппы H группы G при гомоморфизме χ (при естественном гомоморфизме G на G / K).

Здесь надо учитывать, что если группа H^χ неединична, то члены ее $\check{C}$-систем неединичны, а значит, $\mathscr{T}^\chi$ состоит из неединичных образов элементов системы $\mathscr{T}$.

Лемма 20.5. *Пусть G имеет $\check{C}_\sigma$-систему $\mathscr{S}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если H — подгруппа из G, то существует такой элемент $x \in G$, что $\mathscr{S}^x$ редуцируется в H;*

2) *если χ — гомоморфизм группы G, то* $\mathrm{N}_G(\mathscr{S})^\chi = \mathrm{N}_{G^\chi}(\mathscr{S}^\chi)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Если $H = 1$, то утверждение очевидно. Пусть $H \neq 1$. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — σ-разбиение $\pi(G)$. Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ по теореме 18.3 σ_i'-холловская подгруппа H_i из H содержится в некоторой σ_i'-холловской подгруппе R_i из G. В доказательстве леммы 20.3 мы видели, что из системы $\{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ путем пересечения ее членов можно получить $\check{C}_\sigma$-систему $\{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ группы G. Аналогично, из системы $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ можно получить путем пересечения ее членов систему $\{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ группы H. Итак,

$$S_r = \bigcap_{i \neq r} R_i, \quad T_r = \bigcap_{i \neq r} H_i, \quad R_r \cap H = H_r.$$

Отсюда получаем:

$$T_r = \bigcap_{i \neq r} H_i = H \cap \left(\bigcap_{i \neq r} R_i\right) = H \cap S_r.$$

Следовательно, $\check{C}_\sigma$-система $S_1, S_2, \ldots, S_n$ редуцируется в H. Так как $\check{C}_\sigma$-системы группы G сопряжены по лемме

20.3, то $\mathcal{S}^x = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ для некоторого $x \in G$. Утверждение 1) доказано.

Докажем 2). Пусть $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ — $\check{C}_\sigma$-система группы G. Положим $N = N_G(\mathcal{S})$. Будем вести доказательство индукцией по порядку ядра гомоморфизма. Пусть K — произвольная нормальная подгруппа L группы G такая, что $L \subset K$. Рассмотрим эпиморфизмы

$$\alpha\colon x \to xL, \qquad \beta\colon xL \to xK, \qquad x \in G,$$

групп G и G / L соответственно на G / L и G / K. Так как порядки ядер $\operatorname{Ker}\alpha = L$, $\operatorname{Ker}\beta = K / L$ меньше $|K|$, то, по индукции, $N^\alpha = N_{G^\alpha}(\mathcal{S}^\alpha)$, $N^{\alpha\beta} = N_{G^{\alpha\beta}}(\mathcal{S}^{\alpha\beta})$, что и требуется.

Рассмотрим теперь случай, когда K — минимальная нормальная подгруппа группы G. Тогда K содержится в одной из S_i. Очевидно, NK / K содержится в $N_{G/K}(\mathcal{S}K / K)$. Установим справедливость обратного включения. Пусть $H_r = \prod\limits_{i \neq r} S_i$. Как показано в доказательстве леммы 20.3, нормализатор системы подгрупп $\mathcal{R} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ в группе G равен N, причем

$$S_r = \bigcap_{i \neq r} H_i, \qquad r = 1, 2, \ldots, n.$$

Если $xK \in N_{G/K}(\mathcal{S}K / K)$, то для любого i выполняется равенство $H_i^x K = H_i K$. Пусть, для определенности, K входит в S_1. Тогда $K \subseteq H_i$ для любого $i \neq 1$. Так как H_1^x и H_1 сопряжены в $H_1 K$, то $H_1^{xz} = H_1$ для некоторого $z \in K$. Для любого $i \neq 1$ из $K \subseteq H_i$ и $H_i^x K = H_i K$ следует, что $H_i^x = H_i = H_i^{xz}$. Следовательно, $H_i^{xz} = H_i$ для любого i. Значит, $xz \in N_G(\mathcal{R}) = N$. Отсюда вытекает, что $x \in NK$. Таким образом, $NK / K \supseteq N_{G/K}(\mathcal{S}K / K)$. Лемма доказана.

Лемма 20.6. *Пусть p — фиксированное простое число, $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Пусть G — группа с p-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Пусть силовская p-подгруппа P из $G^{\mathfrak{F}}$ является элементом некоторой $\check{C}$-системы $\mathcal{S}$ группы G. Пусть G обладает $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой M, индекс которой в G есть степень p, причем $M \cap G^{\mathfrak{F}}$ не нормальна в G и $\mathcal{S}$ редуцируется в $M^{\mathfrak{F}}$. Тогда $N_G(\mathcal{S}) \subseteq N_M(\mathcal{S} \cap M^{\mathfrak{F}})$.*

Доказательство. По лемме 1.2 $M^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Пусть $\mathcal{T} = \mathcal{S} \cap M^{\mathfrak{F}}$. Предположим вначале, что ядро L подгруппы $M \cap G^{\mathfrak{F}}$ в G не равно единице, и рассмотрим естественный гомоморфизм χ: $G \to G / L$. Очевидно, M^χ удовлетворяет условию леммы. Понятно, что Č-система $\mathcal{S}^\chi$ группы $(G^{\mathfrak{F}})^\chi = G^{\mathfrak{F}} / L$ является расширением Č-системы $\mathcal{T}^\chi$ группы $(M^{\mathfrak{F}})^\chi = M^{\mathfrak{F}} / L$, причем $P^\chi \in \mathcal{S}^\chi$. По индукции $\mathrm{N}_{G^\chi}(\mathcal{S}^\chi) \subseteq \mathrm{N}_{M^\chi}(\mathcal{T}^\chi)$. Так как по лемме 20.5 имеет место $\mathrm{N}_G(\mathcal{S})L / L = \mathrm{N}_{G^\chi}(\mathcal{S}^\chi)$, $\mathrm{N}_{M^\chi}(\mathcal{T}^\chi) = \mathrm{N}_M(\mathcal{T})L / L$, то мы и получаем требуемое включение $\mathrm{N}_G(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{N}_M(\mathcal{T})$. **Итак, в дальнейшем считаем, что** $M \cap G^{\mathfrak{F}}$ **не содержит нееденичных нормальных подгрупп** группы G. Пусть $\mathcal{S} = \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$, $H_1 = P$. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ p-разрешима, то G имеет минимальную нормальную подгруппу K такую, что $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, $MK = G$, $M \cap K = 1$, $|K| = p^\beta$. По лемме 1.2 $M^{\mathfrak{F}}K = G^{\mathfrak{F}}$, причем $M \cap G^{\mathfrak{F}} = M^{\mathfrak{F}}$ не нормальна в G. Но тогда $P \neq G^{\mathfrak{F}}$, т. е. $n \geqslant 2$. Пусть F — минимальная нормальная подгруппа из M, содержащаяся в $M^{\mathfrak{F}}$. Так как $\mathcal{S}$ является расширением $\mathcal{T}$, то $H_i \in \mathcal{T}$ для любого $i > 1$. Ясно, что F содержится в H_t для некоторого $t > 1$. Подгруппа $\mathrm{N}_G(\mathcal{S})$ **нормализует** H_t **и** FK, **поскольку** $FK \lhd G$. Следовательно, $N_G(\mathcal{S})$ нормализует и пересечение $H_t \cap FK = F$, т. е. $\mathrm{N}_G(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{N}_G(F) = M$. Итак, $\mathrm{N}_G(\mathcal{S})$ нормализует M и H_i для любого i. Значит, $\mathrm{N}_G(\mathcal{S})$ нормализует $\mathcal{S} \cap M = \mathcal{T}$.

Лемма доказана.

Лемма 20.7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, $O_{\pi'}(G^{\mathfrak{F}}) = 1$, $G^{\mathfrak{F}}$ ненильпотентна. Пусть $\mathcal{S}$ — такая Č-система группы $G^{\mathfrak{F}}$, каждый элемент которой является либо примарной π-группой, либо π'-группой. Тогда существует такой $x \in G$ и такая $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа M группы G, что $\mathcal{S}^x$ редуцируется в $M^{\mathfrak{F}}$ и выполняется включение $\mathrm{N}_G(\mathcal{S}^x) \subseteq \mathrm{N}_M(\mathcal{S}^x \cap M^{\mathfrak{F}})$.*

Доказательство. Пусть $F = \mathrm{F}(G^{\mathfrak{F}})$, $\Phi = \Phi(G) \cap F$. Согласно лемме 7.9 F / Φ можно записать в виде прямого произведения некоторых минимальных нормальных подгрупп группы G / Φ:

$$F/\Phi = \mathop{\times}_{i=1}^{n} L_i/\Phi, \qquad n \geqslant 1.$$

Ввиду леммы 4.4 $O_{\pi'}(G^{\mathfrak{F}} / \Phi) = \Phi / \Phi$, $F(G^{\mathfrak{F}} / \Phi) = F / \Phi$. Согласно лемме 7.9 F / Φ имеет дополнение D / Φ в G / Φ. Пусть C_i / Φ — дополнение к L_i / Φ в G / Φ, содержащее D / Φ. Ясно, что C_i $\mathfrak{F}$-критична в G. Если $C_i \cap G^{\mathfrak{F}} \lhd G$ для любого i, то L_i / Φ и $C_i \cap G^{\mathfrak{F}} / \Phi$ поэлементно перестановочны, а значит, $D \cap G^{\mathfrak{F}} / \Phi \subseteq C_{G/\Phi}(F / \Phi)$. Тогда $D \cap G^{\mathfrak{F}} / \Phi \lhd G^{\mathfrak{F}} / \Phi$, а так как F / Φ есть подгруппа Фиттинга в $G^{\mathfrak{F}} / \Phi$, отсюда заключаем, что $F / \Phi = G^{\mathfrak{F}} / \Phi$, т. е. $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна. А это противоречит условию. Итак, $C_j \cap G^{\mathfrak{F}}$ не нормальна в G для некоторого j. Теперь остается применить леммы 20.6 и 20.5.

§ 21. $\mathfrak{F}$-нормализаторы

Определение 21.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Подгруппа H называется *$\mathfrak{F}$-нормализатором* группы G, если выполняется одно из следующих равносильных условий:

1) H является критическим $\mathfrak{F}$-добавлением к $G^{\mathfrak{F}}$ в G;
2) $H \in \mathfrak{F}$ и существует максимальная цепь

$$G = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_t = H, \quad t \geqslant 0,$$

в которой M_i $\mathfrak{F}$-критична в M_{i-1} для любого $i = 1, 2, \ldots, t$.

Эквивалентность условий 1) и 2) есть следствие лемм 13.4 и 13.6. По определению, каждая группа G обладает по крайней мере одним $\mathfrak{F}$-нормализатором H, причем $HG^{\mathfrak{F}} = G$. Если $G \in \mathfrak{F}$, то G совпадает со своим $\mathfrak{F}$-нормализатором. $\mathfrak{N}$-нормализатор группы G будем называть иначе *нильпотентным нормализатором. Сверхразрешимым нормализатором* группы G будем называть ее $\mathfrak{F}$-нормализатор, где $\mathfrak{F}$ — формация всех сверхразрешимых групп.

Лемма 21.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G нормализует некоторую минимальную $\mathfrak{C}$-систему группы $G^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство. Пусть H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. Рассмотрим критически $\mathfrak{F}$-добавляющую цепь для $G^{\mathfrak{F}}$ в G:

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_t = H, \quad t \geqslant 0.$$

Если $H = G$, то лемма тривиальна. Пусть $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Ввиду леммы 13.2 для любого $i = 1, 2, \ldots, t$ группа H_{i-1} имеет

$\mathfrak{F}$-предельную нормальную подгруппу F_i со следующими свойствами:

а) $F_i H_i = H_{i-1}$;

б) $F_i \subseteq H_{i-1}^{\mathfrak{F}}$;

в) $\pi(F_i) = \pi(F_i / F_i \cap \Phi(H_{i-1}))$.

Заметим еще, что $H_i^{\mathfrak{F}} \supseteq H_j^{\mathfrak{F}}$ при $i > j$. Таким образом, $G = F_1 F_2 \ldots F_t H$, $F_1 F_2 \ldots F_t = G^{\mathfrak{F}}$, причем подгруппы $F_1, F_2, \ldots, F_t$ попарно перестановочны, а $|F_i / F_i \cap \cap \Phi(H_{i-1})|$ делят порядки G-главных факторов группы $G^{\mathfrak{F}}$. Если $G^{\mathfrak{F}}$ не p-разрешима для любого $p \in \pi(G^{\mathfrak{F}})$, то искомой минимальной $\check{C}$-системой группы $G^{\mathfrak{F}}$ будет $\mathcal{S} = \{G^{\mathfrak{F}}\}$. Предположим, что

$$\pi = \{p \in \pi(G^{\mathfrak{F}}) \mid G^{\mathfrak{F}} \ p\text{-разрешима}\} \neq \phi.$$

Пусть $\pi = \{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$. Обозначим через P_i произведение всех тех подгрупп совокупности $F_1, F_2, \ldots, F_t$, которые являются p_i-группами, $1 \leqslant i \leqslant r$. Если $G^{\mathfrak{F}}$ разрешима, то H нормализует силовскую систему $P_1, P_2, \ldots, P_r$ группы $G^{\mathfrak{F}}$. Если же $G^{\mathfrak{F}}$ неразрешима, то пусть S — произведение всех тех подгрупп совокупности $F_1, F_2, \ldots, F_t$, которые являются π'-группами. Тогда $P_1, P_2, \ldots, P_r, S$ является искомой минимальной $\check{C}$-системой группы $G^{\mathfrak{F}}$. Лемма доказана.

Теорема 21.1 (Шеметков [19]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *H покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы G;*

2) *H не покрывает ни один неабелев $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор G;*

3) *H изолирует все те абелевы $\mathfrak{F}$-эксцентральные главные факторы L / K группы G, для которых группа $G^{\mathfrak{F}} / C_{G^{\mathfrak{F}}}(L / K)$ является $\pi(L / K)$-разрешимой.*

Доказательство. Пусть дана критически $\mathfrak{F}$-добавляющая цепь для $G^{\mathfrak{F}}$ в G:

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_t = H.$$

Если $t = 0$, то $H = G$, и теорема верна. Пусть в дальнейшем $t > 0$. Так как H_1 $\mathfrak{F}$-критическая в G, то $H_1 R = G$, где R — некоторая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа группы G. Ввиду леммы 13.2 будем, не ограничивая общности, считать, что $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, $\pi(\Phi) \subseteq \pi(R / \Phi)$, где

$\Phi = R \cap \Phi(G)$. Пусть L / K — некоторый фиксированный главный фактор группы G. Положим $C = C_G(L / K)$ и рассмотрим следующие случаи.

1) H_1 не покрывает L / K.

Тогда $K \subseteq H_1$, $LH_1 = G$. Так как H_1 $\mathfrak{F}$-абнормальна, то L / K $\mathfrak{F}$-эксцентрален в G. Так как $H \subseteq H_1$, то H не покрывает L / K. Если L / K абелева, то $H \cap L \subseteq H_1 \cap L = K$, а это означает, что H изолирует L / K. Мы видим, что в случае 1) теорема верна.

2) H_1 покрывает L / K.

Тогда $KH_1 \supseteq L$, $K(H_1 \cap L) = L$ и, следовательно, имеет место H_1-изоморфизм

$$L / K \simeq L \cap H_1 / K \cap H_1. \qquad (1)$$

Разберем отдельно две имеющиеся возможности.

2.1) L / K $\mathfrak{F}$-централен в G, т. е. $G / C \in f(L / K)$, где f — внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$.

Так как f — внутренний экран, то $G / C \in \mathfrak{F}$, откуда следует, что $C \supseteq G^{\mathfrak{F}}$. Но тогда $H_1C = G$ и, значит, G индуцирует на L / K ту же группу автоморфизмов, что и H_1. Отсюда и из (1) вытекает, что $L \cap H_1 / K \cap H_1$ есть $\mathfrak{F}$-центральный главный фактор группы H_1. Так как H есть $\mathfrak{F}$-нормализатор группы H_1, то по индукции H покрывает $L \cap H_1 / K \cap H_1$, т. е.

$$H(K \cap H_1) = HK \cap H_1 \supseteq L \cap H_1.$$

Отсюда получаем $HK \supseteq K(L \cap H_1) = L \cap KH_1 = L$, т. е. H покрывает L / K, что и требуется.

2.2) L / K $\mathfrak{F}$-эксцентрален в G.

Предположим, что $H_1C = G$. Тогда из H_1-изоморфизма (1) следует, что $L \cap H_1 / K \cap H_1$ есть $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы H_1. Если $HK \supseteq L$, то $H(H_1 \cap K) = HK \cap H_1 \supseteq L \cap H_1$. Если же $H \cap (L \cap H_1) = H \cap L \subseteq H_1 \cap K$, то это значит, что H изолирует L / K. Заметим еще, что из $H_1C = G$ следует, что

$$G^{\mathfrak{F}}C / C = H_1^{\mathfrak{F}}C / C \simeq H_1^{\mathfrak{F}} / C \cap H_1^{\mathfrak{F}},$$

причем ввиду (1) выполняется включение

$$C \cap H_1^{\mathfrak{F}} \subseteq C_{H_1}(L \cap H_1 / K \cap H_1).$$

Из всего этого можно сделать вывод, что при $H_1C = G$

теорема по индукции верна для H_1, а значит, и для G. Поэтому нам нужно рассмотреть лишь тот случай, когда $H_1 \supseteq C$, откуда следует $H_1 \supseteq L$ (так как $K \subseteq C$ и H_1 покрывает L / K). Таким образом, в дальнейшем будем считать, что

$$H_1 \supseteq CL. \tag{2}$$

Так как $\Phi \subseteq \mathrm{F}(G) \subseteq C$, то из (2) и равенства $H_1R = G$ вытекает, что $R \cap C = \Phi$. Поэтому имеет место G-изоморфизм

$$R / \Phi \simeq RC / C. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь два подслучая случая 2.2).

2.2.1) L / K абелева.

Пусть $\pi(L / K) = \{p\}$ и $G^{\mathfrak{F}}C / C$ p-разрешима. Тогда RC / C также p-разрешима. Отсюда и из (3) следует, что R / Φ p-разрешима. Но тогда группа R / Φ, а вместе с ней, ввиду $\pi(\Phi) \subseteq \pi(R / \Phi)$, и R является либо p-группой, либо p'-группой. Согласно теореме 4.1 $R \subseteq C$, что противоречит (2) и равенству $H_1R = G$.

2.2.2) L / K неабелева.

Нам нужно показать, что H не покрывает L / K. Пусть, от противного, $HK \supseteq L$. Неабелевость L / K влечет за собой равенство $L \cap C = K$. Поэтому имеет место G-изоморфизм:

$$LC / C \simeq L / K. \tag{4}$$

Пусть H_1 имеет $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор S / T такой, что $L \supseteq S \supset T \supseteq K$. Так как L / K неабелева, то и S / T неабелева. По индукции H не покрывает S / T, что противоречит тому, что HK содержит L. Пусть теперь все H_1-главные факторы группы L / K $\mathfrak{F}$-центральны в H_1. Учитывая $C \subseteq H_1$ и применяя следствие 9.3.1, получаем $H_1 / C \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует $H_1^{\mathfrak{F}} \subseteq C$, а значит, $HC = H_1$. Рассмотрим $G / C = (HC / C)(RC / C)$. Так как R не входит в H_1, то RC / C не входит в HC / C. Учитывая, что $LC / C \subseteq HC / C$, получаем, что LC / C и RC / C, являясь по (3) и (4) минимальными нормальными подгруппами, поэлементно перестановочны. Это значит, что RC централизует LC / C. Ввиду G-изоморфизма (4), отсюда следует, что $R \subseteq C$, а это невозможно.

Теорема доказана.

Следствие 21.1.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, то H покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G. В частности, пересечение всех $\mathfrak{F}$-нормализаторов группы G совпадает с $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.*

Следствие 21.1.2 (Картер, Хоукс [1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, H — $\mathfrak{F}$-нормализатор разрешимой группы G. Тогда H покрывает каждый $\mathfrak{F}$-центральный и изолирует каждый $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор группы G.*

Теорема 21.2 (Шеметков [19]). *Если χ — гомоморфизм группы G и H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G ($\mathfrak{F}$ — локальная формация), то H^χ является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G^χ.*

Доказательство. Рассмотрим критически $\mathfrak{F}$-добавляющую цепь для $G^{\mathfrak{F}}$ в G:

$$G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n = H.$$

Если $n = 0$, то $G \in \mathfrak{F}$ и теорема очевидна. Пусть $n > 0$. Подгруппа H является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы H_1. По индукции, H^χ — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы H_1^χ. Если $H_1^\chi = G^\chi$, то теорема доказана. Пусть $H_1^\chi \neq G^\chi$, т. е. H_1^χ — максимальная подгруппа группы G^χ. Пусть R — такая $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа группы G, что $H_1R = G$, $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. Положим $\Phi = R \cap \Phi(G)$. Так как $G^\chi = H_1^\chi R^\chi$ и $H_1^\chi \neq G^\chi$, то R^χ не содержится в H_1^χ. Кроме того, $\Phi^\chi \subseteq \Phi(G^\chi)$. Поэтому ясно, что R^χ / Φ^χ есть главный фактор группы G^χ. Так как $R^\chi \subseteq (G^\chi)^{\mathfrak{F}}$, то мы получаем, что H_1^χ есть $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы G^χ. Отсюда и из того, что H^χ есть $\mathfrak{F}$-нормализатор группы H_1^χ, следует, что H^χ есть $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G^χ. Теорема доказана.

Теорема 21.3 (Шеметков [19]). *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — локальные формации, причем $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}_2$. Тогда для любого $\mathfrak{F}_2$-нормализатора H_2 группы G существует такой $\mathfrak{F}_1$-нормализатор H_1 группы H_2 ,что H_1 является $\mathfrak{F}_1$-нормализатором группы G.*

Доказательство. Если $G \in \mathfrak{F}_2$, то утверждение очевидно. Пусть $G^{\mathfrak{F}_2} \neq 1$. Тогда по лемме 13.1 группа G обладает $\mathfrak{F}_2$-предельной нормальной подгруппой R, содержащейся в $G^{\mathfrak{F}_2}$. Так как $G^{\mathfrak{F}_2} \subseteq G^{\mathfrak{F}_1}$, то R является $\mathfrak{F}_1$-предельной нормальной подгруппой в G. Поэтому каждая $\mathfrak{F}_2$-критическая подгруппа будет и $\mathfrak{F}_1$-критической. Поэтому мы можем получить $\mathfrak{F}_1$-нормализатор группы G путем продолжения критически $\mathfrak{F}_2$-добавляющей цепи для $G^{\mathfrak{F}_2}$ в G. Теорема доказана.

Теорема 21.4 (Шеметков [19]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема неверна. Тогда теорема верна для всех $\mathfrak{F}$-абнормальных максимальных подгрупп группы G, так как ввиду леммы 1.2 их $\mathfrak{F}$-корадикалы $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимы. Рассмотрим такие две критически $\mathfrak{F}$-добавляющие цепи для $G^{\mathfrak{F}}$ в G,

$$H_1 \subset \ldots \subset M_1 \subset G,$$
$$H_2 \subset \ldots \subset M_2 \subset G,$$

что H_1 и H_2 не сопряжены в G. Тогда ясно, что подгруппы M_1 и M_2 также не сопряжены.

Пусть $\pi = \pi(\mathfrak{F})$. Предположим, что G имеет нормальную π'-подгруппу $Z \neq 1$. По теореме 21.2 H_1Z / Z и H_2Z / Z являются $\mathfrak{F}$-нормализаторами в G / Z, причем $(G / Z)^{\mathfrak{F}}$ π-разрешим. Поэтому H_1Z / Z и H_2Z / Z сопряжены в G / Z. Так как H_1 и H_2 — π-группы, а Z — π'-группа, то H_1 и H_2 сопряжены в G. Получаем противоречие. Поэтому $O_{\pi'}(G) = 1$, а значит, $F(G^{\mathfrak{F}}) / / \Phi(G) \cap G^{\mathfrak{F}}$ совпадает с произведением всех содержащихся в $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ минимальных нормальных подгрупп группы $G / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$. Положим $\Phi = \Phi(G) \cap \cap G^{\mathfrak{F}}$, $F / \Phi = F(G^{\mathfrak{F}} / \Phi)$. Предположим, что F / Φ есть минимальная нормальная подгруппа группы G/Φ. Так как M_1 и M_2 $\mathfrak{F}$-критические, то $M_1F = M_2F = G$. Пусть S_i — пересечение с $G^{\mathfrak{F}}$ ядра подгруппы M_i в G, $i = 1, 2$. Очевидно, $S_iF / S_i \simeq F / S_i \cap F = F / \Phi$. Поэтому $(S_i / \Phi) \cap (F / \Phi) = \Phi / \Phi$, $i = 1, 2$. Если $S_1 = S_2 = \Phi$, то по теореме 8.5 M_1 и M_2 сопряжены. Поэтому одна из подгрупп S_1, S_2 не совпадает с Φ. Пусть $S_1 \neq \Phi$. Тогда в S_1 / Φ содержится минимальная нормальная подгруппа A / Φ группы G / Φ. Так как F / Φ есть подгруппа Фиттинга в $G^{\mathfrak{F}} / \Phi$ и одновременно минимальная нормальная подгруппа в G / Φ, то A / Φ является π'-группой. Но тогда ввиду леммы 4.4 $O_{\pi'}(G) \neq 1$, что невозможно.

Итак, F / Φ не является минимальной нормальной подгруппой группы G / Φ. Пусть $\Sigma = \{L_i / \Phi \mid i \in I\}$ — множество всех минимальных нормальных подгрупп группы G / Φ, содержащихся в F / Φ. Имеются две возможности: либо M_1 и M_2 дополняют один и тот же главный фактор множества Σ, либо они дополняют два различных главных фактора из Σ. Эти два случая мы и рассмотрим.

Первый случай: $M_1L_1 = M_2L_1 = G$.

Поскольку $|I| > 1$, то, применяя теорему 13.2, мы видим, что M_1 содержит L_i для некоторого $i \neq 1$. Пусть $L_2 / \Phi \in \Sigma$, $L_2 \subseteq M_1$. По лемме 7.9 L_1L_2 / Φ имеет дополнение D / Φ в G / Φ. Пусть $S = DL_1$. Подгруппа S максимальна в G, причем

$$G = M_2L_1 = SL_2 = M_1L_1, \quad L_1 \subseteq S, \quad L_2 \subseteq M_1.$$

По теореме 13.2 $S \cap M_1$ $\mathfrak{F}$-критична как в S, так и в M_1, а подгруппа $S \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-критична как в S, так и в M_2. Поэтому сопряженность подгрупп H_1 и H_2 между собой будет следовать из справедливости теоремы для M_1, M_2 и S (в этом случае каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор из $S \cap M_1$ является $\mathfrak{F}$-нормализатором в группах S и M_1, а каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор из $S \cap M_2$ является $\mathfrak{F}$-нормализатором в группах S и M_2).

Второй случай: $M_1L_i = M_2L_j = G$, $i \neq j$.

Очевидно, $L_i \subseteq M_2$, $L_j \subseteq M_1$, так как в противном случае получаем рассмотренный выше первый случай. По теореме 13.2 $M_1 \cap M_2$ $\mathfrak{F}$-критична как в M_1, так и в M_2. Поэтому сопряженность подгрупп H_1 и H_2 между собой следует из справедливости теоремы для M_1 и M_2.

Теорема доказана.

Следствие 21.4.1 (Картер, Хоукс [1]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — разрешимая группа. Тогда любые два $\mathfrak{F}$-нормализатора группы G сопряжены.*

Теорема 21.5 (Шеметков [19]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G — группа с π-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G и пусть $\mathcal{S}$ — такая $\mathfrak{C}$-система группы $G^{\mathfrak{F}}$, что каждый элемент из $\mathcal{S}$ является либо примарной π-группой, либо π'-группой. Тогда существует такой $x \in G$, что H^x является $\mathfrak{F}$-проектором в $\mathrm{N}_G(\mathcal{S})$.*

Доказательство. Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой теорема не выполняется. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа группы G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. Очевидно, $K \neq G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что K является π'-группой. Учитывая лемму 20.5 и теорему 21.2, получаем существование $x \in G$ такого, что H^xK / K является $\mathfrak{F}$-проектором в NK / K, где $N = \mathrm{N}_G(\mathcal{S})$. Так как H^x есть $\mathfrak{F}$-проектор в H^xK, то по лемме 15.1 H^x является $\mathfrak{F}$-проектором в NK. Так как $NG^{\mathfrak{F}} = G$ и $K \subseteq (NK)^{\mathfrak{F}}$, то по лемме 1.2 имеем

$$(NK)^{\mathfrak{F}} = N^{\mathfrak{F}}K, \quad N^{\mathfrak{F}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}.$$

Поэтому по лемме 20.4 $(NK)^{\mathfrak{F}}$ есть полупрямое произведение нильпотентной π-группы и π'-группы. Но тогда каждый главный фактор группы NK является либо π-группой, либо π'-группой. Следовательно, ввиду теоремы Фейта—Томпсона [1], NK либо π-разрешима, либо π'-разрешима. По теореме 18.3 $H^{xn} \subseteq N$ для некоторого $n \in NK$. Так как H^{xn} есть $\mathfrak{F}$-проектор в NK, то H^{xn} будет $\mathfrak{F}$-проектором и в группе N. Получаем противоречие.

Пусть $\mathrm{O}_{\pi'}(G^{\mathfrak{F}}) = 1$. Заметим, что теорема выполняется для $\mathfrak{F}$-абнормальнах максимальных подгрупп. Если $G^{\mathfrak{F}}$ нильпотентна, то H является одновременно $\mathfrak{F}$-нормализатором и $\mathfrak{F}$-проектором в любой ее содержащей максимальной подгруппе, а значит, и в самой группе G. Поэтому $G^{\mathfrak{F}}$ ненильпотентна. По лемме 20.7 G имеет такую $\mathfrak{F}$-критическую подгруппу M, что выполняется следующее условие: $\mathcal{S}$ редуцируется в $M^{\mathfrak{F}}$, причем $\mathrm{N}_G(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{N}_M(\mathcal{S} \cap M^{\mathfrak{F}})$, а $\mathfrak{F}$-нормализатор T группы M является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G. Ввиду теоремы 21.4 имеет место $H^y = T$ для некоторого $y \in G$. Так как для M теорема верна, то существует такой $z \in M$, что H^{yz} является $\mathfrak{F}$-проектором в $\mathrm{N}_M(\mathcal{S} \cap M^{\mathfrak{F}})$. Так как $\mathrm{N}_G(\mathcal{S}) \subseteq \mathrm{N}_M(\mathcal{S} \cap M^{\mathfrak{F}})$, то нам осталось показать, что $H^{yz} \subseteq \mathrm{N}_G(\mathcal{S})$.

Так как M $\mathfrak{F}$-критична в G, то $MR = G$, где R — $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа из G. Ввиду леммы 13.2 будем считать, что $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, $\pi(R \cap \Phi(G)) \subseteq \subseteq \pi(R / R \cap \Phi(G))$. Так как $O_{\pi'}(G^{\mathfrak{F}}) = 1$, то отсюда следует, что R является p-группой, $p \in \pi$. Пусть $\mathcal{S} \cap \cap M^{\mathfrak{F}} = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$, где P_1 есть p-группа. Так как $M^{\mathfrak{F}}R = G^{\mathfrak{F}}$, то ясно, что $\mathcal{S} = \{RP_1, P_2, \ldots, P_n\}$. Так как H^{yz} нормализует $\mathcal{S} \cap M^{\mathfrak{F}}$, то H^{yz} нормализует и $\mathcal{S}$. Теорема доказана.

Следствие 21.5.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G, имеющей $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал. Тогда существует такая минимальная Č-система $\mathcal{S}$ группы $G^{\mathfrak{F}}$, что H является $\mathfrak{F}$-проектором в $N_G(\mathcal{S})$.*

Следствие 21.5.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с нильпотентным $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда множество всех $\mathfrak{F}$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-проекторов.*

Теорема 21.6 (Шеметков [19]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\pi = \pi(\mathfrak{F})$, G — группа с π-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $S\mathrm{F}(G) = G$ и T — $\mathfrak{F}$-нормализатор подгруппы S, то $T = H \cap S$ для некоторого $\mathfrak{F}$-нормализатора H группы G;*

2) *если $SO_{\pi'}(G) = G$, то каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор подгруппы S является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G;*

3) *если M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G, то $\mathfrak{F}$-нормализатор подгруппы M содержит некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G.*

Доказательство. Заметим, что лемма 1.2 гарантирует сохранение условия π-разрешимости корадикала для рассматриваемых в доказательстве подгрупп. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $G = SF$, где $F = \mathrm{F}(G)$. Рассмотрим сначала случай, когда S максимальна в G. Если S $\mathfrak{F}$-абнормальна, то она $\mathfrak{F}$-критична, а ее $\mathfrak{F}$-нормализатор будет $\mathfrak{F}$-нормализатором и группы G. Пусть S $\mathfrak{F}$-нормальна в G и A / B — дополняемый ею $\mathfrak{F}$-центральный главный p-фактор группы G, $B \subseteq \Phi(G)$, $p \in \pi$, $A \subseteq F$. Не ограничивая общности, будем считать, что B — p-группа. Предположим, что G имеет минимальную нормальную подгруппу K, являющуюся π'-группой. Так как S $\mathfrak{F}$-нормальна, то $S \supseteq K$. Так как для G / K теорема верна по индукции, то $TK / K = HK / K \cap S / K$, где T и H — $\mathfrak{F}$-нормализаторы соответственно в S и G. Тогда $TK = HK \cap S = K(H \cap \cap S)$, а значит, $T = H^x \cap S$ для некоторого $x \in K$. Таким образом, в рассматриваемом случае можно считать, что $O_{\pi'}(G) = 1$.

Пусть $MR = G$, где M максимальна в G, R — $\mathfrak{F}$-предельная нормальная подгруппа в G. Положим $\Phi = R \cap \Phi(G)$. Ввиду леммы 13.2 будем считать, что $R \subseteq G^{\mathfrak{F}}$, $\pi(\Phi) \subseteq \pi(R / \Phi)$. Так как $O_{\pi'}(G) = 1$ и $G^{\mathfrak{F}}$ π-разрешима, то R примарна. Очевидно, S покрывает R / Φ, а M покрывает A / B. Поэтому $S \supseteq R$, $MB \supseteq A$. Следовательно,

$$S = (M \cap S) R, \quad A = B(A \cap M),$$
$$G = SA = S(A \cap M),$$
$$M = M \cap G = M \cap S(A \cap M) = \\ = (A \cap M)(M \cap S) = \mathrm{F}(M)(M \cap S).$$

Так как $G = S\mathrm{F}(G)$ и S индуцируют одну и ту же группу автоморфизмов на R / Φ, то $M \cap S$ максимальна и $\mathfrak{F}$-критична в S. Поэтому $\mathfrak{F}$-нормализатор T группы $M \cap S$ будет $\mathfrak{F}$-нормализатором и в S. Так как теорема для M верна по индукции, то $H \cap (M \cap S) = H \cap S = T$ для некоторого $\mathfrak{F}$-нормализатора H группы M, являющегося $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G.

Итак, мы установили справедливость первого утверждения теоремы для каждой максимальной подгруппы группы G, не содержащей $F = \mathrm{F}(G)$. Пусть теперь $SF = G$ и S не максимальна в G. Пусть S_1 содержит S и является максимальной подгруппой группы G. Тогда $S_1 = S(S_1 \cap \cap F)$. По индукции, $H_1 \cap S = T$, где H_1 и T — $\mathfrak{F}$-нормализаторы соответственно групп S_1 и S. Так как $S_1F = G$ и для S_1 теорема верна по доказанному, то $H_1 = H \cap S_1$, где H — некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. Тогда $T = (H \cap S_1) \cap S = H \cap S$, что и требуется. Первое утверждение теоремы доказано.

Докажем второе утверждение. Пусть $G = SK$, где $K = O_{\pi'}(G)$. Пусть S_1 содержит S и является максимальной в G. Очевидно, $S_1 = S(S_1 \cap K)$, причем S_1 $\mathfrak{F}$-критична в G и для S_1 теорема верна по индукции. Тогда каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор из S будет $\mathfrak{F}$-нормализатором как в S_1, так и в G (см. определение $\mathfrak{F}$-нормализатора). Мы видим, что второе утверждение теоремы справедливо.

Докажем третье утверждение теоремы. Пусть M — $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G. Если M $\mathfrak{F}$-критична, то теорема верна. Пусть M не $\mathfrak{F}$-критична. Пусть C — $\mathfrak{F}$-критическая подгруппа группы G, причем $CR = G$, где R принадлежит $G^{\mathfrak{F}}$ и является $\mathfrak{F}$-предельной нормальной подгруппой в G. Ввиду леммы 13.2 будем считать, что $\pi(R / R \cap \Phi(G)) \supseteq \pi(R \cap \Phi(G))$. Очевидно, $R \subseteq M$, и по теореме 13.1 $M \cap C$ является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой группы C. По индукции $\mathfrak{F}$-нормализатор X из $M \cap C$ содержит $\mathfrak{F}$-нормализатор H группы C, являющийся $\mathfrak{F}$-нормализатором в G. Так как $G^{\mathfrak{F}}$ π-разрешима, то R является либо p-группой для некоторого простого $p \in \pi$, либо π'-группой. Но тогда, по доказанному первому и второму утверждению теоремы, $\mathfrak{F}$-нормализатор T группы $M = R(M \cap C)$ содержит X. Следовательно, $T \supseteq H$, и теорема доказана.

Т е о р е м а 21.7 (П о д у ф а л о в а [1]). *Пусть M — максимальная подгруппа группы G, $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда M $\mathfrak{F}$-абнормальна в G в том и только в том случае, когда M содержит хотя бы один $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M содержит $\mathfrak{F}$-нормализатор H группы $G \neq 1$. По определению $\mathfrak{F}$-нормализатора $HG^{\mathfrak{F}} = G$. Так как $H \subseteq M \subset G$, то M не содержит $G^{\mathfrak{F}}$ и, следовательно, $\mathfrak{F}$-абнормальна.

Обратно, пусть M $\mathfrak{F}$-абнормальна в $G \neq 1$. Тогда $MG^{\mathfrak{F}} = G$. Если M $\mathfrak{F}$-критична в G, то $\mathfrak{F}$-нормализатор подгруппы M является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G. Пусть M не $\mathfrak{F}$-критична в G. Ввиду леммы 13.2 группа G имеет такую $\mathfrak{F}$-критическую максимальную подгруппу C и такую $\mathfrak{F}$-предельную нормальную подгруппу R, что $CR = G$, $\pi(R / R \cap \Phi(G)) \supseteq \pi(R \cap \Phi(G))$. Очевидно, $R \subseteq M$, и по теореме 13.1 пересечение $M \cap C$ является $\mathfrak{F}$-абнормальной максимальной подгруппой в C. По индукции $M \cap C$ содержит $\mathfrak{F}$-нормализатор группы C, являющийся $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G. Теорема доказана.

Определение 21.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — непустая формация. Подгруппа H группы G называется *$\mathfrak{F}$-субабнормальной*, если $H = G$, либо $H \neq G$ и существует максимальная $(G - H)$-цепь

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = H, \quad t \geqslant 1,$$

такая, что G_i $\mathfrak{F}$-абнормальна в G_{i-1} для любого $i = 1, 2, \ldots, t$. Цепь с указанным свойством называется *$\mathfrak{F}$-субабнормальной $(G - H)$-цепью*.

Очевидно, всякая $\mathfrak{F}$-абнормальная подгруппа является также $\mathfrak{F}$-субабнормальной подгруппой. При $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ в определении 21.2 условимся $\mathfrak{F}$ опускать.

Теорема 21.8. *Пусть G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *всякая $\mathfrak{F}$-субабнормальная подгруппа содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G;*

2) *каждый $\mathfrak{F}$-проектор группы G содержит по крайней мере один $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G;*

3) *каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G содержится по крайней мере в одном $\mathfrak{F}$-проекторе группы G.*

Доказательство. Будем считать, что G не входит в $\mathfrak{F}$. Пусть дана $\mathfrak{F}$-субабнормальная $(G - F)$-цепь:

$$G = G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_t = F.$$

Согласно утверждению 3) теоремы 21.6 $\mathfrak{F}$-нормализатор подгруппы G_i содержит $\mathfrak{F}$-нормализатор подгруппы G_{i-1}, $i = 1, 2, \ldots, t$.

Следовательно, существует цепь

$$H = H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots \subseteq H_t \subseteq F,$$

где H_i — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G_i, $i = 0, 1, \ldots, t$. Таким образом, F содержит некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор H группы G. Утверждение 1) доказано. Утверждение 2) вытекает из 1), так как $\mathfrak{F}$-проекторы по теореме 15.1 $\mathfrak{F}$-абнормальны. Утверждение 3) следует из 2), так как $\mathfrak{F}$-проекторы попарно сопряжены и $\mathfrak{F}$-нормализаторы попарно сопряжены (теоремы 15.7 и 21.4). Теорема доказана.

Лемма 21.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Если*

$G = S\mathrm{F}(G)$, то существует такой $\mathfrak{F}$-проектор F группы G, что $F \cap S$ является $\mathfrak{F}$-проектором в S.

Доказательство. Рассмотрим естественный гомоморфизм φ группы G на $G / \mathrm{F}(G)$. Ввиду леммы 1.2 $S^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешим. Значит, по теореме 15.3 S обладает $\mathfrak{F}$-проектором L. Так как $S^{\varphi} = G / \mathrm{F}(G)$, то по лемме 15.1 $L\mathrm{F}(G) / \mathrm{F}(G)$ является $\mathfrak{F}$-проектором группы $G / \mathrm{F}(G)$. Согласно теореме 15.9 $L \subseteq F$, где F — $\mathfrak{F}$-проектор группы $L\mathrm{F}(G)$. По лемме 15.1 F является $\mathfrak{F}$-проектором группы G. Так как $F \cap S \supseteq L$ и L $\mathfrak{F}$-максимальна в S, то $F \cap S = L$ (с учетом теоремы 2.3).

Теорема 21.9 (Картер, Хоукс [1]). *Пусть $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ — локальные формации, G — разрешимая группа, у которой множество всех $\mathfrak{F}_1$-проекторов совпадает с множеством всех $\mathfrak{F}_2$-проекторов. Тогда множество всех $\mathfrak{F}_1$-нормализаторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}_2$-нормализаторов.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$. Формация $\mathfrak{F}$ локальна. Пусть F — $\mathfrak{F}_1$-проектор группы G. По условию теоремы F является $\mathfrak{F}_2$-проектором группы G. Нетрудно заметить, что F является $\mathfrak{F}$-проектором в G. Пусть H — $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. По теореме 21.3 H есть $\mathfrak{F}$-нормализатор $\mathfrak{F}_1$-нормализатора H_1 группы G. Будем считать, что G не принадлежит $\mathfrak{F}$ (иначе утверждение тривиально). Очевидно, H_1 содержится в некоторой $\mathfrak{F}_1$-критической максимальной подгруппе M группы G. Из $\mathfrak{F}_1$-критичности M и разрешимости G следует $\mathrm{F}(G)M = G$. Понятно, что M является и $\mathfrak{F}$-критической в G. Следовательно, H и H_1 являются соответственно $\mathfrak{F}$-нормализатором и $\mathfrak{F}_1$-нормализатором в M. Ввиду леммы 21.2 будем считать, что $F \cap M$ есть $\mathfrak{F}_1$-проектор группы M (здесь, как и раньше, F — $\mathfrak{F}_1$-проектор G). Так как $F \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$, то $F \cap M$ является $\mathfrak{F}$-проектором группы M. Следовательно, множество всех $\mathfrak{F}_1$-проекторов группы M совпадает с множеством ее $\mathfrak{F}$-проекторов. Для M теорема верна по индукции, поэтому $H = H_1$. Мы доказали, что каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G является ее $\mathfrak{F}_1$-нормализатором. Теорема доказана.

Теорема 21.10. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с абелевым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда $G^{\mathfrak{F}}$ обладает* *дополнением в G, причем каждое дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в G является одновременно $\mathfrak{F}$-проектором и $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G.*

Доказательство. По теореме 11.6 $G^{\mathfrak{F}}$ не имеет $\mathfrak{F}$-центральных G-главных факторов. Ввиду следствия 21.1.1 каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор является дополнением к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. По теореме 21.5 множество всех $\mathfrak{F}$-проекторов группы G совпадает с множеством всех ее $\mathfrak{F}$-нормализаторов. Пусть R — дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Тогда $R \in \mathfrak{F}$ и по теореме 15.9 R содержится в $\mathfrak{F}$-проекторе группы G. Поэтому, ввиду вышесказанного, R является $\mathfrak{F}$-проектором в G. Теорема доказана.

Теорема 21.11. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом, $\mathfrak{F}$-проекторы которой являются дополнениями к $G^{\mathfrak{F}}$ в G. Тогда любые два дополнения к $G^{\mathfrak{F}}$ в G сопряжены между собой.*

Доказательство. Ввиду теоремы 15.7 достаточно доказать, что каждое дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в G является $\mathfrak{F}$-проектором в G. Пусть C — дополнение к $G^{\mathfrak{F}}$ в G, K — минимальная нормальная подгруппа из G, $K \subseteq G^{\mathfrak{F}}$. По индукции CK / K является $\mathfrak{F}$-проектором в G / K. Если K является $\pi(\mathfrak{F})'$-группой, то C является $\mathfrak{F}$-проектором в CK, а значит, ввиду леммы 15.1, и в группе G. Пусть K — абелева $\pi(\mathfrak{F})$-группа. По теореме 15.9 C содержится в $\mathfrak{F}$-проекторе F группы CK. Согласно лемме 15.1 F — $\mathfrak{F}$-проектор группы G. Так как по условию теоремы $F \cap G^{\mathfrak{F}} = 1$, то $F = C$, и теорема доказана.

Теорема 21.12. *Если G разрешима, то каждый ее $\mathfrak{N}$-нормализатор совпадает с нормализатором некоторой силовской системы группы G.*

Доказательство. Пусть $G^{\mathfrak{N}} \neq 1$, $\pi(G) = \{p_1, \ldots, p_t\}$. Так как разрешимые группы имеют силовскую систему (следствие 13.5.2), то $G^{\mathfrak{N}}$ имеет систему попарно перестановочных силовских подгрупп

$$\mathcal{S} = \{P_1, P_2, \ldots, P_t\}, \text{ где } P_i \text{ — } p_i\text{-группа}, \quad i = 1, 2, \ldots, t.$$

Ввиду теоремы 21.5 G обладает таким $\mathfrak{N}$-нормализатором D, что D является $\mathfrak{N}$-проектором в $N_G(\mathcal{S})$. Так как D нильпотентна, то ее силовская p_i-подгруппа D_i нормальна в D. Ясно, что $\mathcal{T} = \{P_1 D_1, P_2 D_2, \ldots, P_t D_t\}$ есть силовская система группы G, причем $D \subseteq \mathrm{N}_G(\mathcal{T}) \subseteq \mathrm{N}_G(\mathcal{S})$. Так как $\mathrm{N}_G(\mathcal{T})$ нильпотентна (лемма 20.4) и D является $\mathfrak{N}$-проектором в $\mathrm{N}_G(\mathcal{S})$, то $D = \mathrm{N}_G(\mathcal{T})$. Теорема доказана.

Из теорем об $\mathfrak{F}$-нормализаторах в случае $\mathfrak{F} = \mathfrak{N}$ вытекает следующий классический результат Ф. Холла.

Теорема 21.13 (Ф. Холл). *Пусть $\mathcal{S}$ — силовская система разрешимой ненильпотентной группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *подгруппа $\mathrm{N}_G(\mathcal{S})$ нильпотентна;*

2) *$\mathrm{N}_G(\mathcal{S})$ покрывает каждый центральный и изолирует каждый эксцентральный главный фактор группы G;*

3) $\bigcap\limits_{x \in G} \mathrm{N}_G(\mathcal{S}^x) = \mathrm{Z}_\infty(G)$, $\langle \mathrm{N}_G(\mathcal{S}^x) \mid x \in G \rangle = G$;

4) *$\mathrm{N}_G(\mathcal{S})$ субабнормальна в G;*

5) *если R — субабнормальная подгруппа группы G, то $R \supseteq \mathrm{N}_G(\mathcal{S}^x)$ для некоторого $x \in G$.*

В заключение этого параграфа сформулируем свойства сверхразрешимых нормализаторов.

Теорема 21.14 (Шеметков [19]). *Каждая группа G обладает нильпотентным нормализатором D и сверхразрешимым нормализатором H со следующими свойствами:*

1) *D нильпотентна, H сверхразрешима и $D \subseteq H$;*

2) *D покрывает каждый центральный главный фактор группы G;*

3) *H покрывает каждый циклический главный фактор группы G.*

Теорема 21.15 (Картер, Хоукс [1]). *Пусть H — сверхразрешимый нормализатор разрешимой, но не сверхразрешимой группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *H сверхразрешима, и каждый $\mathfrak{N}$-нормализатор группы H является $\mathfrak{N}$-нормализатором группы G;*

2) *H покрывает каждый циклический и изолирует каждый нециклический главный фактор G;*

3) *существует максимальная $(G - H)$-цепь, все индексы которой — составные числа;*

4) *если существует максимальная $(G - R)$-цепь, все индексы которой — составные числа, то $R \supseteq H^x$ для некоторого $x \in G$.*

§ 22. Применение $\mathfrak{F}$-нормализаторов к нахождению максимальных экранов

Напомним, что любое множество экранов мы считаем частично упорядоченным в смысле определения 3.5.

Определение 22.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — формация, $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, f — локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$. Если f является максимальным элементом множества всех локальных $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$, то f называется *максимальным локальным $\mathfrak{X}$-экраном* формации $\mathfrak{F}$.

Аналогично вводятся *максимальный композиционный $\mathfrak{X}$-экран* и *максимальный однородный $\mathfrak{X}$-экран* формации $\mathfrak{F}$. Максимальный локальный (однородный, композиционный) $\mathfrak{F}$-экран формации $\mathfrak{F}$ — это уже знакомый нам по § 3 максимальный внутренний локальный (соответственно однородный, композиционный) экран $\mathfrak{F}$.

Теорема 22.1 (Шеметков). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, каждая из которых имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал. Тогда каждый максимальный однородный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$ является локальным экраном.*

Доказательство. Пусть f — максимальный однородный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$. Построим локальный экран h, удовлетворяющий следующему условию: $f(p) = h(p)$ для любого простого p. Очевидно, $f \leqslant h$ и $\mathfrak{F} \subseteq \langle h \rangle$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\langle h \rangle \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, совпадающую с $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G \in \langle h \rangle$, то

$$G / C_G(K) \in h(p) = f(p) \subseteq \mathfrak{X}$$

для любого простого $p \in \pi(K)$. Если K абелева, то она f-центральна в G и, значит, $G \in \mathfrak{F}$. Если же K неабелева, то $C_G(K) = 1$, ввиду единственности K. Но тогда $G \in \mathfrak{X}$, и по условию теоремы $G^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешим. Так как $\pi(\mathfrak{F}) = \pi(\langle h \rangle)$, то G является $\pi(\mathfrak{F})$-группой. Значит, $K = G^{\mathfrak{F}}$ разрешима, что противоречит неабелевости K. Мы доказали, таким образом, что $\mathfrak{F} = \langle h \rangle$. Но тогда $h = f$ ввиду $f \leqslant h$ и максимальности f. Теорема доказана.

Теорема 22.2 (Воробьев [1]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — класс групп, содержащий локальную формацию $\mathfrak{F}$. Тогда* *существует по крайней мере один максимальный однородный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{F}$ локальна, то она имеет внутренний локальный экран, являющийся $\mathfrak{X}$-экраном. Следовательно, множество Σ всех однородных $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$ не пусто. Возьмем в Σ произвольную цепь $\Omega = \{f_i \mid i \in I\}$. Ввиду леммы 3.5 объединение f цепи Ω является однородным $\mathfrak{X}$-экраном. Очевидно, $\mathfrak{F}$ содержится в $\langle f \rangle$. Установим справедливость обратного включения. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\langle f \rangle \setminus \mathfrak{F}$, K — минимальная нормальная подгруппа из G. Тогда $G / K \in \mathfrak{F}$ и $G / C_G(K) \in f_i(K)$ для некоторого $i \in I$. Так как $\langle f_i \rangle = \mathfrak{F}$, то ясно, что G обладает f_i-центральным главным рядом, т. е. $G \in \mathfrak{F}$. Итак, f — однородный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$, являющийся верхней гранью цепи Ω. По теореме Куратовского — Цорна, каждый элемент из Σ содержится в некотором максимальном элементе. Теорема доказана.

Из теоремы 22.2 и теоремы 22.1 получаем следующий факт.

Следствие 22.2.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{X}$ — некоторый класс групп, содержащий $\mathfrak{F}$, и пусть каждая группа из $\mathfrak{X}$ обладает $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$\mathfrak{F}$ имеет по крайней мере один максимальный локальный $\mathfrak{X}$-экран;*

2) *каждый максимальный однородный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$ является локальным.*

Определение 22.2. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{H}$ — формация. Определим класс $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ следующим образом: $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ тогда и только тогда, когда каждый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G принадлежит $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H} = \phi$, то $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}} = \phi$.

Лемма 22.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{H}$ — формация, $\mathfrak{X}$ — класс всех групп с $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом. Тогда $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{X}$ — формация, а $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}$ — ее подформация.*

Доказательство. То, что $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{X}$ — формация, легко получить, используя тот факт, что по теореме 21.4 в группах из $\mathfrak{X}$ все $\mathfrak{F}$-нормализаторы сопряжены. Докажем, что $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}$ содержится в $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$. Допустим, что это не так. Выберем в классе $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}) \setminus \mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ группу G, имеющую наименьший порядок. Очевидно, $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа из G, содержащаяся в $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G / K \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{H}} \cap \mathfrak{X}$, то $HK / K \in \mathfrak{H}$, где H — некоторый $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G. Так как по условию леммы $G^{\mathfrak{F}}$ $\pi(\mathfrak{F})$-разрешим, то либо $|K|$ не делится на числа из $\pi(\mathfrak{F})$, либо $|K|$ есть степень простого числа из $\pi(\mathfrak{F})$. В первом случае $HK / / K \simeq H \in \mathfrak{H}$, что невозможно. Остается второй случай: K является $\pi(\mathfrak{F})$-группой. Таким образом, G не имеет неединичных нормальных $\pi(\mathfrak{F})'$-подгрупп. Применяя леммы 13.1 и 13.2, мы видим, что G имеет $\mathfrak{F}$-предельную нормальную подгруппу R, содержащуюся в $G^{\mathfrak{F}}$ и являющуюся p-группой для некоторого $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Пусть M — максимальная подгруппа из G, не содержащая R. Тогда M $\mathfrak{F}$-критична в G. Следовательно, $\mathfrak{F}$-нормализатор S группы M является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G. По теореме 2.3 $M \in \mathfrak{H} \cap \mathfrak{X}$. Поэтому, ввиду $|M| < |G|$, имеем $S \in \mathfrak{H}$. Отсюда, ввиду сопряженности $\mathfrak{F}$-нормализаторов в G, следует, что $G \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$. Получаем противоречие.

Лемма доказана.

Т е о р е м а 22.3 (В о р о б ь е в [1]). *Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ — некоторые формации, причем $\mathfrak{F}$ локальна, а каждая группа из $\mathfrak{X}$ имеет $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимый $\mathfrak{F}$-корадикал. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *$\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный локальный $\mathfrak{X}$-экран f;*

2) *если ψ — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$, то $f(p) = \mathfrak{F}_{\psi(p)} \cap \mathfrak{X}$ для любого простого p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 3.3 формация $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний локальный экран ψ. Пусть f — такой локальный экран, что $f(p) = \mathfrak{F}_{\psi(p)} \cap \mathfrak{X}$ для любого простого p (заметим, что по лемме 22.1 класс $\mathfrak{F}_{\psi(p)} \cap \mathfrak{X}$ является формацией). Очевидно, $\psi \leqslant f$. Поэтому $\mathfrak{F} \subseteq \langle f \rangle$.

Докажем, что $\langle f \rangle$ содержится в $\mathfrak{F}$. Предположим, что множество $\langle f \rangle \setminus \mathfrak{F}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K, совпадающую с $G^{\mathfrak{F}}$. Предположим, что K неабелева. Тогда $C_G(K) = 1$, а значит,

$$G / C_G(K) \simeq G \in f(K) \subseteq \mathfrak{X}.$$

Так как группы из $\mathfrak{X}$ имеют $\pi(\mathfrak{F})$-разрешимые $\mathfrak{F}$-корадикалы, то мы приходим к выводу, что $|K|$ не делится на числа из $\pi(\mathfrak{F})$. Но тогда $\psi(K) = \varPhi$, что влечет $f(p) = \varPhi$. Получаем противоречие. Остается принять, что K — абелева p-группа, $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Согласно выбору G имеем $G / C_G(K) \in \mathfrak{F}$. Следовательно,

$$G / C_G(K) \in f(p) \cap \mathfrak{F} = \psi(p),$$

откуда следует $G \in \mathfrak{F}$. Итак, мы доказали, что $\mathfrak{F} = \langle f \rangle$.

Пусть f_1 — произвольный локальный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$. Пусть φ — такой локальный экран $\mathfrak{F}$, что $\varphi(p) = f_1(p) \cap \mathfrak{F}$ для любого простого p. Тогда $\varphi \leqslant \psi$. Из леммы 22.1 и того факта, что $\mathfrak{F}$-нормализаторы групп принадлежат $\mathfrak{F}$, получаем

$$f_1(p) \subseteq \mathfrak{F}_{f_1(p)} \cap \mathfrak{X} = \mathfrak{F}_{\varphi(p)} \cap \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}_{\psi(p)} \cap \mathfrak{X} = f(p).$$

Значит, $f_1 \leqslant f$. Теорема доказана.

Следствие 22.3.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, $\mathfrak{X}$ — формация, причем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный локальный $\mathfrak{X}$-экран f, причем для любого простого p справедливо равенство $f(p) = \mathfrak{F}_{\psi(p)} \cap \mathfrak{X}$, где ψ — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$.*

Следствие 22.3.2 (Дёрк [4]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная подформация формации $\mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный локальный $\mathfrak{S}$-экран f, причем для любого простого p справедливо равенство $f(p) = \mathfrak{F}_{\psi(p)} \cap \mathfrak{S}$, где ψ — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$.*

Проблема 23. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная подформация формации $\mathfrak{X}$. Доказать, что каждый максимальный однородный $\mathfrak{X}$-экран формации $\mathfrak{F}$ является локальным.

Проблема 24. Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная подформация формации $\mathfrak{X}$, Ω — множество всех максимальных однородных $\mathfrak{X}$-экранов формации $\mathfrak{F}$. Найти способ построения элементов из Ω с помощью максимального внутреннего локального экрана формации $\mathfrak{F}$. Что можно сказать о мощности Ω?

§ 23. Комментарии

1. Картер и Хоукс [1] дают определение $\mathfrak{F}$-нормализатора, опираясь на наличие силовской системы в разрешимой группе. Их определение Райт [1] расширил следующим образом. Пусть f — локальный экран, $\mathscr{S}$ — силовская система разрешимой группы G. Обозначим через S_ω произведение всех ω-подгрупп из $\mathscr{S}$. Если $\pi = \pi(\langle f\rangle)$, то

$$L = S_\pi \bigcap \left(\bigcap_{p\in\pi} \mathrm{N}_G(G^{f(p)} \bigcap S_{p'})\right)$$

называется *f-атором* группы G. Если f — внутренний экран, то f-атор называется *f-нормализатором* и совпадает с $\langle f\rangle$-нормализатором в смысле определения 21.1.

2. В работе Дёрка [2] содержатся сведения о классе групп, в которых $\mathfrak{F}$-проекторы совпадают с $\mathfrak{F}$-нормализаторами.

3. В разрешимых группах с абелевыми силовскими подгруппами $\mathfrak{F}$-нормализаторы пронормальны (Чамберс [1]); однако без условия абелевости это утверждение неверно (Хоукс [5]).

4. $\mathfrak{F}$-нормализатор в разрешимой группе нельзя охарактеризовать лишь свойством покрывать, либо изолировать главные факторы (Хоукс [2]). Однако при некоторых дополнительных условиях это можно сделать (Чамберс [1], Гиллам [1], Томкинсон [3]). Ряд свойств $\mathfrak{F}$-нормализаторов найден Хоуксом [1], [3], Дарси [2], [4], Шмигиревым [3].

5. Венцке [1] определяет квазинормализатор $\mathrm{N}_G^*(\mathscr{S})$ силовской системы $\mathscr{S}$ разрешимой группы G как подгруппу, порожденную всеми теми $x \in G$, для которых $\langle x\rangle$ перестановочна с каждым элементом $\mathscr{S}$. Подгруппа $\mathrm{N}_G^*(\mathscr{S})$ сверхразрешима и содержит сверхразрешимый нормализатор группы G.

ГЛАВА VI

МИНИМАЛЬНЫЕ ГРУППЫ, НЕ ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ФОРМАЦИИ

§ 24. Общие свойства минимальных не $\mathfrak{F}$-групп

Определение 24.1. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторый класс групп. Группа G называется *минимальной не $\mathfrak{F}$-группой*, если G не принадлежит $\mathfrak{F}$, а каждая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$.

Если подгруппа некоторой группы является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, то она называется *минимальной не $\mathfrak{F}$-подгруппой*. Минимальная не $\mathfrak{N}$-группа (минимальная ненильпотентная группа) называется *группой Шмидта*. Минимальная неабелева группа называется *группой Миллера — Морено*.

Теорема 24.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — группа, каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа которой принадлежит $\mathfrak{F}$. Если $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$, то $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ — главный фактор группы G, причем $\pi(G^{\mathfrak{F}}) = \pi(G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G))$.*

Доказательство. То, что $G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$ — главный фактор, вытекает из теоремы 8.9. Предположим, что простое число p делит $|G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)|$, но не делит $|G^{\mathfrak{F}} / G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)|$. По лемме 4.4 $G^{\mathfrak{F}} = P \times Q$, где P — содержащаяся в $\Phi(G)$ силовская p-подгруппа из $G^{\mathfrak{F}}$. Тогда

$$(G / Q)^{\mathfrak{F}} = PQ / Q \subseteq \Phi(G / Q).$$

Отсюда и из насыщенности $\mathfrak{F}$ получаем $G / Q \in \mathfrak{F}$. Но тогда $Q \supseteq G^{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Теорема доказана.

Теорема 24.2 (Семенчук). *Пусть $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — локальная формация. Если $G^{\mathfrak{F}} \neq 1$ и каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G принадлежит $\mathfrak{F}$, то справедливы следующие утверждения:*

1) $G^{\mathfrak{F}}$ *является* p-*группой для некоторого простого* p;

2) $G^{\mathfrak{F}} / \Phi(G^{\mathfrak{F}})$ — $\mathfrak{F}$-*эксцентральный главный фактор группы* G;

3) $\Phi(G^{\mathfrak{F}}) = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$;

4) *если группа* $G^{\mathfrak{F}}$ *неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту* p;

5) *если* $G^{\mathfrak{F}}$ *абелева, то она элементарна*;

6) *если* $p > 2$, *то* $G^{\mathfrak{F}}$ *имеет экспоненту* p; *при* $p = 2$ *экспонента* $G^{\mathfrak{F}}$ *не превышает* 4;

7) $\Phi(G) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$;

8) *любые две* $\mathfrak{F}$-*абнормальные максимальные подгруппы группы* G *сопряжены в* G.

Доказательство. Пусть $G^{\mathfrak{F}} / T$ — главный фактор группы G. Ввиду теоремы 24.1 $G^{\mathfrak{F}}$ является p-группой и $T = G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G)$. Следовательно, каждая $\mathfrak{F}$-абнормальная максимальная подгруппа группы G является $\mathfrak{F}$-нормализатором группы G. Так как по теореме 21.1 $\mathfrak{F}$-нормализатор группы G покрывает только $\mathfrak{F}$-центральные главные факторы, то мы получаем, что $\Phi(G)$ $\mathfrak{F}$-гиперцентральна в G. Согласно следствию 9.3.1 $G / C_G(T) \in \mathfrak{F}$. Отсюда следует, что $C_G(T) \supseteq G^{\mathfrak{F}}$, т. е. $T \subseteq Z(G^{\mathfrak{F}})$.

Обозначим через K коммутант группы $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $G^{\mathfrak{F}} / K$ — $\mathfrak{F}$-корадикал группы G / K, то по теореме 11.6 каждый главный фактор группы G на участке от $G^{\mathfrak{F}}$ до K $\mathfrak{F}$-эксцентрален. Отсюда и из $\mathfrak{F}$-гиперцентральности T заключаем, что $T = K$. Так как $G^{\mathfrak{F}} \cap \Phi(G) \supseteq \Phi(G^{\mathfrak{F}}) \supseteq K$, то мы получаем также равенство $\Phi(G^{\mathfrak{F}}) = T$. Таким образом, утверждения 1) — 5), 7) и 8) верны.

Докажем 6). Предположим, что $G^{\mathfrak{F}}$ неабелева. Пусть x — произвольный элемент из $G^{\mathfrak{F}}$. Ввиду 3), $x^p \in Z(G^{\mathfrak{F}})$, причем $s(G^{\mathfrak{F}}) = 2$. Следовательно, $[x, y]^p = [x^p, y] = 1$ для всех элементов x, y из $G^{\mathfrak{F}}$. Это означает, что $(G^{\mathfrak{F}})'$ имеет экспоненту p. Учитывая это и то, что $(G^{\mathfrak{F}})'$ содержится в $Z(G^{\mathfrak{F}})$, получаем для любых x, y из $G^{\mathfrak{F}}$ при $p > 2$:

$$(xy)^p = x^p y^p [y, x]^{\frac{p(p-1)}{2}} = x^p y^p.$$

Значит, отображение α: $x \to x^p$ является G-эндоморфизмом группы $G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\operatorname{Im} \alpha \subseteq \Phi(G^{\mathfrak{F}}) \subseteq Z_{\infty}^{\mathfrak{F}}(G)$, то

$G^{\mathfrak{F}} / \operatorname{Ker}\alpha$ $\mathfrak{F}$-гиперцентральна в $G / \operatorname{Ker}\alpha$. Вспоминая, что $G / \Phi(G^{\mathfrak{F}})$ — $\mathfrak{F}$-эксцентральный главный фактор, получаем равенство $\operatorname{Ker}\alpha = G^{\mathfrak{F}}$. Так как $\operatorname{Ker}\alpha$ имеет экспоненту p, то утверждение 6) при $p > 2$ доказано.

Пусть $p = 2$. Тогда $(xy)^4 = x^4y^4\ [y, x]^6 = x^4y^4$, где $x, y \in G^{\mathfrak{F}}$. Рассматривая отображение β: $x \to x^4$, $x \in G^{\mathfrak{F}}$, получаем (как и выше), что $\operatorname{Ker}\ \beta = G^{\mathfrak{F}}$. Значит, $G^{\mathfrak{F}}$ имеет экспоненту не больше 4. Теорема доказана.

Теорема 24.3 (Семенчук). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа. Если $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$, то* $\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$ *и* $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) = \tilde{F}(G)$.

Доказательство. По теореме 24.2 $\Phi(G)$ содержится в $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Предположим, что в G существует максимальная подгруппа M, не содержащая $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. По условию теоремы $M \in \mathfrak{F}$, поэтому $G / Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Но тогда $G \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие, доказывающее равенство $\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$.

Ввиду утверждения 2) и 3) теоремы 24.2 $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) / \Phi(G)$ является минимальной нормальной подгруппой в $G / \Phi(G)$. Так как $\mathfrak{F}$-гиперцентр группы $G / \Phi(G)$ единичный, а $\mathfrak{F}$-корадикал равен $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) / \Phi(G)$, то ясно, что $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G) / \Phi(G)$ есть цоколь группы $G / \Phi(G)$. Теорема доказана.

Теорема 24.4 (Семенчук). *Пусть $G \in \mathfrak{S}\mathfrak{F}$, где $\mathfrak{F}$ — локальная S-замкнутая формация. Тогда G является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия:*

1) $\Phi(G) = Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$;

2) $G / \Phi(G)$ *является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 24.3. Докажем достаточность. Пусть группа G удовлетворяет условиям 1) и 2). Возьмем произвольную максимальную подгруппу M из G. Тогда $M / Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$. Пусть L / K — G-главный фактор группы $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$. Положим $C = C_G(L / K)$. Рассмотрим два случая.

Пусть C не входит в M. Тогда $MC = G$ и $G / C \simeq M / M \cap C$. Отсюда делаем вывод, что L / K $\mathfrak{F}$-централен в M.

Пусть $C \subseteq M$. Тогда $C = C_M(L / K)$. Пусть f — максимальный внутренний локальный экран формации $\mathfrak{F}$. По теореме 4.7 формация $f(p)$ является S-замкнутой для любого простого p. Поэтому из $G / C \in f(L / K)$ следует, что $M / C \in f(L / K)$. Следовательно, фактор L/K $\mathfrak{F}$-централен в M. Таким образом, подгруппа $Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G)$ является $\mathfrak{F}$-гиперцентральной в M. Отсюда и из $M / Z_\infty^{\mathfrak{F}}(G) \in \mathfrak{F}$ получаем $M \in \mathfrak{F}$.

Теорема доказана.

Теорема 24.5 (Семенчук). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальная формация, G — минимальная не $\mathfrak{F}$-группа, имеющая нормальную силовскую p-подгруппу $G_p \neq 1$ для некоторого простого числа p. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) $G_p = G^{\mathfrak{F}}$;

2) $F(G) = F_p(G) = G_p\Phi(G)$;

3) $G_{p'} \cap C_G(G_p / \Phi(G_p)) = \Phi(G) \cap \Phi(G_{p'}) = \Phi(G) \cap G_{p'}$, *где $G_{p'}$ — любое дополнение к G_p в G.*

Доказательство. Так как $G_{p'} \in \mathfrak{F}$, то $G / G_p \in \mathfrak{F}$, а значит, $G^{\mathfrak{F}} \subseteq G_p$. Так как $\Phi(G_p) \subseteq \Phi(G)$ и формация $\mathfrak{F}$ насыщенная, то $G^{\mathfrak{F}}$ не содержится в $\Phi(G_p)$. Так как $G_p / \Phi(G_p)$ — элементарная группа, то по теореме 11.3 $G^{\mathfrak{F}}\Phi(G_p) / \Phi(G_p)$ обладает G-допустимым дополнением $C / \Phi(G_p)$ в $G_p / \Phi(G_p)$. Тогда $G^{\mathfrak{F}}C = G_p$, $C \cap G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G_p)$. Если $G^{\mathfrak{F}} \neq G_p$, то $G_{p'}G^{\mathfrak{F}}$ отлична от G и, значит, принадлежит $\mathfrak{F}$. Но тогда, ввиду равенства $G_{p'}G^{\mathfrak{F}}C = G$, имеем

$$G / C \simeq G_{p'}G^{\mathfrak{F}} / C \cap G_{p'}G^{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{F},$$

откуда следует $G^{\mathfrak{F}} \subseteq C$ и $G^{\mathfrak{F}} \subseteq \Phi(G_p)$. Тем самым доказано, что $G^{\mathfrak{F}} = G_p$. Утверждение 2) теперь прямо следует из теоремы 24.3.

Докажем 3). Ввиду теорем 24.2 и 24.3, $F(G) / \Phi(G)$ является $\mathfrak{F}$-корадикалом и единственной минимальной нормальной подгруппой группы $G / \Phi(G)$, причем $\Phi(G_p) = G_p \cap \Phi(G)$. Поэтому, ввиду теоремы 7.11,

$$C_G(G_p\Phi(G) / \Phi(G)) = C_G(G_p / \Phi(G_p)) = G_p\Phi(G).$$

Очевидно, $G_{p'} \cap G_p\Phi(G) = G_{p'} \cap \Phi(G)$. Если $G_{p'} = H(G_{p'} \cap \Phi(G))$, то $G = G_pG_{p'} = G_pH(G_{p'} \cap \Phi(G)) = G_pH$, откуда $H = G_{p'}$. Значит, $G_{p'} \cap \Phi(G) = \Phi(G_{p'}) \cap \Phi(G)$. Теорема доказана.

Теорема 24.6 (Крамер [2]). *Пусть непустой класс групп $\mathfrak{F}$ является Σ_t-замкнутым, $t \geqslant 2$. Тогда для* *любой разрешимой минимальной не $\mathfrak{F}$-группы G имеет место* $|\pi(G)| \leqslant t-1$.

Доказательство. Пусть G разрешима и является минимальной не $\mathfrak{F}$-группой. Предположим, что $|\pi(G)| \geqslant t$. Пусть $\pi(G) = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$, H_i — p_i'-холловская подгруппа группы G. Тогда $H_i \in \mathfrak{F}$, причем индексы подгрупп H_i попарно взаимно просты. Так как число подгрупп H_i равно $k \geqslant t$ и класс $\mathfrak{F}$ Σ_t-замкнут, то $G \in \mathfrak{F}$. Получаем противоречие. Теорема доказана.

§ 25. Экстремальные классы

Определение 25.1. Пусть $\mathfrak{H}$ — некоторый непустой класс групп. Класс групп $\mathfrak{X}$ называется *$\mathfrak{H}$-экстремальным классом*, если выполняются следующие условия:

1) $\mathfrak{X}$ — непустой насыщенный гомоморф;

2) $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{H}$;

3) если $\mathfrak{H}$-группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу K и $G / K \in \mathfrak{X}$, то $G \in \mathfrak{X}$.

Пересечение любого множества $\mathfrak{H}$-экстремальных классов является, очевидно, $\mathfrak{H}$-экстремальным классом. *Минимальным $\mathfrak{H}$-экстремальным классом* мы будем называть пересечение всех $\mathfrak{H}$-экстремальных классов, если таковые имеются.

Если $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, то в этом определении $\mathfrak{H}$ опускается, и мы получаем понятие экстремального класса, а также минимального экстремального класса.

Лемма 25.1. *Пусть $\mathfrak{X}$ — непустой насыщенный гомоморф, причем $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}$. Тогда $\mathfrak{X}$ является $\mathfrak{S}$-экстремальным классом в том и только в том случае, когда каждая разрешимая группа, обладающая хотя бы одним $\mathfrak{X}$-проектором, принадлежит $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть класс $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{S}$-экстремален и разрешимая группа G имеет $\mathfrak{X}$-проектор H. Пусть K — минимальная нормальная подгруппа из G. По лемме 15.1 HK / K — $\mathfrak{X}$-проектор G / K. По индукции $G / K \in \mathfrak{X}$, а значит, $HK = G$ и $H_G = 1$. Предположим, что G имеет еще одну минимальную нормальную подгруппу K_1. Тогда $G = HK_1 = HKK_1$, $KK_1 \cap H \lhd G$. Последнее противоречит $H_G = 1$. Значит, K единственна, и по определению $\mathfrak{S}$-экстремального класса $G \in \mathfrak{X}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{X}$ содержит каждую разрешимую группу, обладающую $\mathfrak{X}$-проектором. Пусть G — разрешимая группа, имеющая единственную минимальную нормальную подгруппу K, причем $G / K \in \mathfrak{X}$. Если $K \subseteq \Phi(G)$, то по условию леммы $G \in \mathfrak{X}$. Пусть K не входит в $\Phi(G)$. Тогда максимальная подгруппа из G, не содержащая K, является $\mathfrak{X}$-проектором в G. Поэтому $G \in \mathfrak{X}$. Лемма доказана.

Лемма 25.2. *Пусть $r \geqslant 2$ — натуральное число. Тогда множество $\mathfrak{X}$ всех разрешимых r-порожденных групп является $\mathfrak{S}$-экстремальным классом.*

Доказательство. Ясно, что $\mathfrak{X}$ является насыщенным гомоморфом. Пусть разрешимая группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, причем $G / N \in \mathfrak{X}$. Тогда $G = HN$, $H \cap N = 1$, где H — максимальная подгруппа группы G. Так как N единственна, то $H_G = 1$. Пусть $H = \langle h_1, h_2, \ldots, h_r\rangle$, $h_1 \neq 1$, $N = \langle n_1 = 1, n_2, \ldots, n_s\rangle$, $s = |N|$. Построим подгруппу $H_i = \langle h_1, h_2, \ldots, h_{r-1}, h_r n_i\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, s$. Предположим, что все H_i отличны от G. Так как $H_iN = G$, то тогда H_i является дополнением к N в G. Если подгруппы H_i составляют полный класс сопряженных подгрупп в G, то элемент h_1 попадет в каждую из этих подгрупп, т. е. $h_1 \in H_G = 1$. Получили противоречие. Значит, $H_i = H_j$ для некоторых $i \neq j$. В последнем случае H_i содержит неединичный элемент

$$(h_r n_i)(h_r n_j)^{-1} = h_r n_i n_j^{-1} h_r^{-1} \in N,$$

что противоречит равенству $H_i \cap N = 1$. Снова получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 25.3. *Пусть группа G разрешима и $\mathrm{F}(G) / \Phi(G)$ является ее главным фактором. Тогда G имеет не более одной нефраттиниевой минимальной нормальной подгруппы.*

Доказательство. Предположим, что G имеет две различные нефраттиниевы минимальные нормальные подгруппы K_1 и K_2. Ввиду условия леммы $K_1\Phi(G) = K_2\Phi(G) = \mathrm{F}(G)$. Положим $F / \mathrm{F}(G) = \mathrm{F}(G / \mathrm{F}(G))$. Если $G = \mathrm{F}(G)$, то $|K_1| = |K_2| = p$ и G циклическая. Поэтому считаем, что $F \supset \mathrm{F}(G)$. Очевидно, $\Phi(G)K_1 / K_1$ содержится в $\Phi(G / K_1)$. Кроме того, $F / K_1 / \Phi(G)K_1 / K_1$ нильпотентна. Отсюда и из леммы 4.4 получаем нильпотентность группы F / K_1. По теореме 4.1 подгруппа F действует тождественно на K_1K_2 / K_1, а значит, и на K_2. Следовательно, $F \subseteq C_G(\mathrm{F}(G) / \Phi(G))$. Согласно следствию 4.1.3 справедливо равенство $C_G(\mathrm{F}(G) / \Phi(G)) = \mathrm{F}(G)$. Таким образом, мы получили, что F входит в $\mathrm{F}(G)$, т. е. противоречие. Лемма доказана.

Теорема 25.1 (Картер, Фишер, Хоукс [1]). *Минимальный $\mathfrak{S}$-экстремальный класс состоит из тех и только тех разрешимых групп, у которых каждый гомоморфный образ содержит не более одной нефраттиниевой минимальной нормальной подгруппы.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D}$ — минимальный $\mathfrak{S}$-экстремальный класс и пусть $\mathfrak{H}$ — класс всех разрешимых групп G, удовлетворяющих следующему условию: если $K \triangleleft G$, то G / K имеет не более одной нефраттиниевой минимальной нормальной подгруппы. Докажем, что $\mathfrak{D} = \mathfrak{H}$.

Покажем, что $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{S}$-экстремальный класс. Очевидно, $\mathfrak{H}$ является гомоморфом. Докажем с помощью индукции по порядку группы, что класс $\mathfrak{H}$ Ext_Φ-замкнут. Пусть $G / R \in \mathfrak{H}$, где $R \subseteq \Phi(G)$. Тогда

$$G / K / RK / K \simeq G / RK \simeq G / R / KR / R \in \mathfrak{H},$$

где RK / K содержится в $\Phi(G / K)$. Если $K \neq 1$, то по индукции G / K содержится в $\mathfrak{H}$ и, значит, имеет не более одной нефраттиниевой минимальной нормальной подгруппы. Поэтому, чтобы установить $G \in \mathfrak{H}$, достаточно доказать, что G имеет не более одной нефраттиниевой минимальной нормальной подгруппы. Допустим, что G имеет две различные не содержащиеся в $\Phi(G)$ минимальные нормальные подгруппы K_1 и K_2. Так как $\mathfrak{H}$ — гомоморф, то, не ограничивая общности, можно считать, что $R = \Phi(G)$.

Из $G / R \in \mathfrak{H}$ вытекает, что $\mathrm{F}(G) / R$ — главный фактор группы G. Применяя лемму 25.3, получаем $K_1 = K_2$ — противоречие, доказывающее Ext_Φ-замкнутость класса $\mathfrak{H}$.

Пусть разрешимая группа G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N и $G / N \in \mathfrak{H}$. Если $N \subseteq \Phi(G)$, то, по доказанному, $G \in \mathfrak{H}$. Пусть N — нефраттиниева минимальная нормальная подгруппа группы G, K — произвольная неединичная нормальная подгруппа из G. Ввиду единственности N имеет место $N \subseteq K$. Тогда $G / K \simeq G / N / K / N \in \mathfrak{H}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{H}$.

Итак, доказано, что $\mathfrak{H}$ — $\mathfrak{S}$-экстремальный класс и $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{H}$. Пусть G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{D}$. Если L — минимальная нормальная подгруппа группы G, то $G / L \in \mathfrak{D}$. Так как G не входит в $\mathfrak{S}$-экстремальный класс $\mathfrak{D}$, то ясно, что L не содержится в $\Phi(G)$. Значит, каждая минимальная нормальная подгруппа группы G не входит в $\Phi(G)$. Согласно построению $\mathfrak{H}$ мы получаем теперь, что L — единственная минимальная нормальная подгруппа из G. Так как класс $\mathfrak{D}$ $\mathfrak{S}$-экстремален и $G / L \in \mathfrak{D}$, то $G \in \mathfrak{D}$. Пришли к противоречию. Следовательно, $\mathfrak{H} = \mathfrak{D}$. Теорема доказана.

Определение 25.2. Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{X}$ — некоторые классы групп. Определим класс $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ следующим образом: $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} = \{G \in \mathfrak{G} \mid$ каждая $\mathfrak{X}$-подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}\}$. Если f — локальный экран, то через $f^{\mathfrak{X}}$ обозначим локальную функцию, определяемую равенством $f^{\mathfrak{X}}(p) = (f(p))^{\mathfrak{X}}$ для любого простого p.

Замечание. Обратим внимание на то, что класс $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ S-замкнут и справедливо равенство $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}})^{\mathfrak{X}} = (\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X})^{\mathfrak{X}}$. Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$, то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{Y}} \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} = \mathfrak{G}$.

Лемма 25.4. *Если $\mathfrak{F}$ — формация, а $\mathfrak{X}$ — насыщенный гомоморф, то $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ — формация.*

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, $N \lhd G$, A / N — $\mathfrak{X}$-подгруппа из G / N. Если B — добавление к N в A, то по лемме 11.1 имеет место $B \cap N \subseteq \Phi(B)$. Так как $\mathfrak{X}$ насыщен, то $B \in \mathfrak{X}$. Но тогда $B \in \mathfrak{F}$ и $BN / N = A / N \in \mathfrak{F}$. Значит, класс $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ Q-замкнут.

Пусть $G / N_i \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, $i = 1, 2$, $N_1 \cap N_2 = 1$. Пусть A — $\mathfrak{X}$-подгруппа из G. Тогда $AN_i / N_i \in \mathfrak{X}$, а значит, ввиду определения класса $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ имеем $AN_i / N_i \simeq A / A \cap N_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2$. Так как $\mathfrak{F}$ — формация и $N_1 \cap N_2 = 1$, то отсюда получаем $A \in \mathfrak{F}$. Таким образом, $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Лемма доказана.

Лемма 25.5. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{H}$ — некоторые классы групп, $\mathscr{M}(\mathfrak{F})$ — класс всех минимальных не $\mathfrak{F}$-групп. Пусть $\mathfrak{H} = S\mathfrak{H}$. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ в том и только том случае, когда $\mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$, $G \in \mathscr{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H}$. Если G не входит в $\mathfrak{X}$, то получается, что каждая $\mathfrak{X}$-подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{F}$, а значит, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Поэтому $G \in \mathfrak{X}$.

Обратно, пусть $\mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Предположим, что множество $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}) \setminus \mathfrak{F}$ не пусто, и выберем в нем группу G наименьшего порядка. Тогда G не входит в $\mathfrak{X}$. Пусть H — собственная подгруппа из G. Так как классы $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ и $\mathfrak{H}$ S-замкнуты, то $H \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H}$. Ввиду минимальности G имеем $H \in \mathfrak{F}$. Значит, $G \in \mathcal{M}(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{X}$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 25.6. *Пусть $\mathfrak{X}$ —$\mathfrak{S}$-экстремальный класс, $\mathfrak{Y}$— такая формация, что $\mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{Y}$. Тогда $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y})^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \subseteq \mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$.*

Доказательство. Пусть G — разрешимая группа наименьшего порядка такая, что $G \in (\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y})^{\mathfrak{X}}$, но G не входит в $\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$. По теореме 1.1 $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y})^{\mathfrak{X}}$ — формация. Следовательно, G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N. Так как класс $(\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y})^{\mathfrak{X}}$ S-замкнут, то каждая собственная подгруппа из G принадлежит $\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$. Чтобы получить противоречие, достаточно показать, что $G \in \mathfrak{Y}^{\mathfrak{X}}$. Пусть X — любая $\mathfrak{X}$-подгруппа из G. Положим $W = X\mathrm{F}(G)$ и рассмотрим три случая.

Пусть $W \neq G$. В этом случае $W \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$. Учитывая единственность N и Ext_p-замкнутость класса $\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$, получаем, что $\mathrm{F}(G)$ является q-группой для некоторого простого $q \neq p$. Отсюда и из $\mathrm{C}_G(\mathrm{F}(G)) \subseteq \mathrm{F}(G)$ вытекает $\mathrm{O}_p(W) = 1$. Таким образом, $W \in \mathfrak{Y}$. Но тогда $X / / \mathrm{F}(G) \cap X \in \mathfrak{Y}$. Так как $G \in (\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y})^{\mathfrak{X}}$, то $X \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$ и $X / \mathrm{O}_p(X) \in \mathfrak{Y}$. Следовательно,

$$X / (\mathrm{O}_p(X) \cap \mathrm{F}(G) \cap X) \simeq X \in \mathfrak{Y}.$$

Пусть $W = G$ и $N \subseteq \Phi(G)$. Положим $U = XN$. Если $U = G$, то $X = G \in \mathfrak{X}$ и поэтому $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$, что не-, возможно. Значит, $U \neq G$. Заметим, что $F / N = \mathrm{F}(G) / / N = \mathrm{F}(G / N)$ есть q-группа, $q \neq p$; следовательно, $\mathrm{O}_p(G / N) = 1$, и так как $G / N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$, то $G / N \in \in \mathfrak{Y}$. Покажем, что $U / N \in \mathfrak{Y}$. Так как $UF = G$, то мы имеем

$$(U / N) / (U \cap F / N) \simeq U / U \cap F \simeq G / F \in \in \mathrm{Q}\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}.$$

Так как U / N есть $\mathfrak{X}$-подгруппа $G / N \in (\mathfrak{N}_p\mathfrak{Y})^{\mathfrak{X}}$, то $U / N \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$. Значит, $(U / N) / O_p(U / N) \in \mathfrak{Y}$ и поэтому

$$U / N \simeq (U / N) / (O_p(U / N) \cap ((U \cap F) / N)) \in R_0\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}.$$

Таким образом, $X / X \cap N \in \mathfrak{Y}$. Так как $X / O_p(X) \in \mathfrak{Y}$, то мы имеем $X \in R_0\mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}$.

Пусть теперь $W = G$ и $N \not\subseteq \Phi(G)$. В этом случае N дополняема в G и совпадает с $F(G)$. Так как $XN = G$, то $G / N \in \mathfrak{X}$ и поэтому $G \in \mathfrak{X}$, так как $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{S}$-экстремален. Следовательно, $G \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{Y}$. Но это противоречит выбору группы G.

Лемма доказана.

Теорема 25.2 (Картер, Фишер, Хоукс [1]). *Пусть подформация $\mathfrak{F}$ формации $\mathfrak{S}$ имеет такой локальный экран f, что $f(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} = \langle f^{\mathfrak{X}} \rangle \cap \mathfrak{S}$ для любого $\mathfrak{S}$-экстремального класса $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \langle f^{\mathfrak{X}} \rangle$, A — $\mathfrak{X}$-подгруппа из G. По лемме 4.5 $G / F_p(G) \in f^{\mathfrak{X}}(p)$ для любого простого p. Так как $AF_p(G) / F_p(G) \in \mathfrak{X}$, то $AF_p(G) / F_p(G) \in f(p)$. Но тогда $A / F_p(A) \in f(p)$ для любого простого p, а значит, по лемме 4.5 $A \in \mathfrak{F}$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Мы показали, что $\langle f^{\mathfrak{X}} \rangle \subseteq \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$.

Предположим, что множество $(\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S}) \setminus (\langle f^{\mathfrak{X}} \rangle \cap \mathfrak{S})$ не пусто, и выберем в нем группу G, имеющую наименьший порядок. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, совпадающую с $(\langle f^{\mathfrak{X}} \rangle \cap \mathfrak{S})$-корадикалом группы G. Кроме того, $\Phi(G) = 1$ ввиду насыщенности формации $\langle f^{\mathfrak{X}} \rangle \cap \mathfrak{S}$. Ввиду леммы 7.9 $F(G) = N$. Так как G разрешима, то $C_G(N) = N$ является p-группой для некоторого простого p. Пусть A / N — собственная $\mathfrak{X}$-подгруппа из G / N. Так как класс $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$ S-замкнут, то $A \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$. Согласно выбору G подгруппа A входит в $\langle f^{\mathfrak{X}} \rangle$. Поэтому по лемме 4.5 $A / F_p(A) \in f^{\mathfrak{X}}(p)$. Так как $N \subseteq F_p(A)$, то $A / F_p(A) \in \mathfrak{X}$. Таким образом, $A / F_p(A) \in f(p)$. Так как по условию теоремы $\mathfrak{N}_p f(p) = f(p)$, то $A / O_{p'}(A) \in f(p)$. Но $O_{p'}(A) \subseteq C_G(N) \subseteq N$. Поэтому $A \in f(p)$ и, значит, $A / N \in f(p)$. Предположим, что $G / N \in \mathfrak{X}$. Тогда, ввиду единственности L и согласно определению $\mathfrak{S}$-экстремального класса,

$G \in \mathfrak{X}$. Так как $G \in \mathfrak{F}^{\mathfrak{X}}$, то $G \in \mathfrak{F}$. По лемме 4.5 $G / N \in f(p)$. Таким образом, мы доказали, что каждая $\mathfrak{X}$-подгруппа из G / N принадлежит $f(p)$. Это означает, что $G / N \in f^{\mathfrak{X}}(p)$. Поэтому N $f^{\mathfrak{X}}$-центральна в G. Получили противоречие.

Теорема доказана.

Теорема 25.3 (Картер, Фишер, Хоукс [1]). *Пусть $\mathfrak{X}$ — $\mathfrak{S}$-экстремальный класс. Пусть подформация $\mathfrak{F}$ из $\mathfrak{S}$ имеет такой локальный экран f, что $f^{\mathfrak{X}}(p) \cap \mathfrak{S} \subseteq f(p)$ для любого простого p. Тогда $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$.*

Доказательство. Построим локальный экран f_1 такой, что $f_1(p) = \mathfrak{N}_p f(p)$ для любого простого p. Тогда ввиду леммы 25.6 экран f_1 также удовлетворяет условию теоремы. Остается применить теорему 25.2.

Теорема 25.4 (Картер, Фишер, Хоукс [1]). *Пусть $\mathscr{L}_t$ — класс всех разрешимых групп с $\mathfrak{N}_\pi$-длиной $\leqslant t$, где t — фиксированное неотрицательное целое число. Тогда $\mathscr{L}_t^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathscr{L}_t$ для любого $\mathfrak{S}$-экстремального класса $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathscr{L}_0 = \mathfrak{S}_{\pi'} \cap \mathfrak{S}$. Пусть $G \in \mathscr{L}_0^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S}$, но G не принадлежит $\mathscr{L}_0$. Тогда G имеет циклическую подгруппу H порядка p, где $p \in \pi$. По теореме 25.1 $H \in \mathfrak{X}$. Получили противоречие. Таким образом, при $t = 0$ теорема верна.

Пусть $t \geqslant 1$. Из доказательства теоремы 5.6 вытекает, что $\mathscr{L}_t$ имеет такой локальный экран f, что $f(p) = \mathscr{L}_{t-1}$ при $p \in \pi$, $f(q) = \mathfrak{S}$ при $q \in \pi'$. По индукции теорема для $\mathscr{L}_{t-1}$ верна. Кроме того, $\mathfrak{S}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}$. Поэтому требуемый результат вытекает из теоремы 25.3. Теорема доказана.

Следствие. 25.4.1. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех разрешимых групп с $\mathfrak{N}_\pi$-длиной $\leqslant t$, где t — натуральное число. Тогда каждая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа порождается двумя элементами.*

Этот результат прямо следует из лемм 25.2, 25.5 и теоремы 25.4.

Следствие 25.4.2. *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс всех разрешимых групп с нильпотентной длиной не больше t, где t — натуральное число. Тогда каждая разрешимая минимальная не $\mathfrak{F}$-группа порождается двумя элементами.*

Теорема 25.5 (Картер, Фишер, Хоукс [1]). *Если каждая 2-порожденная подгруппа разрешимой группы G сверхразрешима, то и G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть $f(p)$ есть формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $p-1$. Тогда, как мы знаем, $\langle f \rangle$ — класс всех сверхразрешимых групп. Пусть $\mathfrak{X}$ — класс всех разрешимых 2-порожденных групп. По лемме 25.2 $\mathfrak{X}$ $\mathfrak{S}$-экстремален. Очевидно, $f^{\mathfrak{X}}(p) \cap \mathfrak{S} \subseteq f(p)$ для любого простого p. По теореме 25.3 $\mathfrak{F}^{\mathfrak{X}} \cap \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{F}$, что и требуется.

Следствие 25.5.1. *Пусть разрешимая группа G является минимальной несверхразрешимой группой. Тогда G порождается двумя элементами.*

Проблема 25. Распространить теоремы 25.2 и 25.3 на произвольные локальные формации.

§ 26. Минимальные ненильпотентные и минимальные несверхразрешимые группы

1. Группы Шмидта. Суммируем важнейшие свойства групп Шмидта в двух теоремах. В первой из них перечисляются свойства, найденные О. Ю. Шмидтом в 1924 году.

Теорема 26.1 (О. Ю. Шмидт [1]). *Пусть G — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *G — разрешимая бипримарная группа;*

2) *$G^{\mathfrak{N}}$ является силовской q-подгруппой в G, q — простое число;*

3) *$G/G^{\mathfrak{N}}$ — циклическая p-группа, p — простое число;*

4) *$G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор группы G, причем если $|G^{\mathfrak{N}}/\Phi(G^{\mathfrak{N}})| = q^b$, то $q^b \equiv 1 \pmod p$ и b есть показатель числа q по модулю p;*

5) *если $P = \langle a \rangle$ — силовская p-подгруппа из G, то $a^p \in Z(G)$;*

6) *если $G^{\mathfrak{N}}$ абелева, то $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = 1$.*

Доказательство. Разрешимость группы G есть следствие леммы 18.2. Ввиду леммы 4.11 и теоремы 24.6 группа G бипримарна. Пусть L — минимальная нормальная подгруппа группы G. По индукции $G^{\mathfrak{N}}L/L$ есть силовская q-подгруппа группы G/L. Очевидно,

$G^{\mathfrak{N}}L \neq G$ и, следовательно, $G^{\mathfrak{N}} L$ нильпотентна. Отсюда и из $|G^{\mathfrak{N}}L|_q = |G|_q$ следует, что G имеет нормальную силовскую q-подгруппу Q. По теореме 24.5 $Q = G^{\mathfrak{N}}$. Поэтому утверждение 6), а также тот факт, что $G^{\mathfrak{N}} / \Phi(G^{\mathfrak{N}})$ — главный фактор G, вытекают из теоремы 24.2. Пусть $|G| = p^{\alpha}q^{\beta}$ и P — силовская p-подгруппа из G. Если P нециклическая, то она обладает двумя различными максимальными подгруппами P_1 и P_2. Очевидно, $P_iQ \lhd G$, $i = 1, 2$. Отсюда получаем $P_i \lhd G$, $i = 1, 2$. Но тогда $P = P_1P_2 \lhd G$ и G нильпотентна. Приходим к противоречию.

Итак, P циклическая, $P = \langle a \rangle$. Так как $\langle a^p \rangle Q$ нильпотентна, то $a^p \in Z(G)$. Так как по теореме 24.2 $\Phi(Q) \subseteq Z(Q)$, то легко заметить, что $Z(G) = \langle a^p \rangle \Phi(Q)$. Группу $P / \langle a^p \rangle$ можно рассматривать как неприводимую группу автоморфизмов q-группы $Q / \Phi(Q)$. Пусть $|Q / \Phi(Q)| = q^b$. Тогда по лемме 4.1 b есть наименьшее натуральное число, удовлетворяющее сравнению $q^b \equiv 1 \pmod p$.

Теорема доказана.

Т е о р е м а 26.2. *Пусть G — группа Шмидта. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *G порождается двумя элементами;*

2) $\Phi(G^{\mathfrak{N}}) = G^{\mathfrak{N}} \cap \Phi(G) \subseteq Z(G^{\mathfrak{N}})$;

3) $\Phi(G)$ *совпадает с гиперцентром группы G;*

4) *если $G^{\mathfrak{N}}$ неабелева, то ее центр, коммутант и подгруппа Фраттини совпадают и имеют экспоненту p;*

5) *если $p > 2$, то $G^{\mathfrak{N}}$ имеет экспоненту p; при $p = 2$ экспонента $G^{\mathfrak{N}}$ не превышает 4.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяем теоремы 24.2, 24.3 и следствие 25.4.2 при $t = 1$.

З а м е ч а н и е 1. Пусть $p \neq q$ — простые числа. Пусть P — группа порядка p, Q — группа порядка q. Так как регулярное сплетение $Q \wr P$ ненильпотентно, то $Q \wr P$ содержит q-замкнутую подгруппу Шмидта S порядка pq^b, где b — показатель числа q по модулю p. Рассмотрим группу $G = P \wr S$. Группа G обладает следующими свойствами:

1) G недисперсивна и ее нильпотентная длина равна 3;

2) силовская p-подгруппа из G является максимальной подгруппой в G;

3) $|G| = p^a q^b$, $a = pq^b + 1$.

Кроме того, ввиду теоремы Виландта (Хупперт [5], с. 447), силовская p-подгруппа из G нерегулярна. Этот пример был использован Шеметковым [20] в задаче о перечислении разрешимых групп, а впоследствии Монаховым [1] при изучении бипримарных групп.

2. Минимальные несверхразрешимые группы. Перечислим наиболее важные свойства минимальных несверхразрешимых групп.

Теорема 26.3 (Хупперт [1]). *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа. Тогда выполняются следующие условия:*

1) *G разрешима и $|\pi(G)| \leqslant 3$;*

2) *если G не является группой Шмидта, то G дисперсивна по Оре;*

3) *G имеет единственную неединичную нормальную силовскую подгруппу.*

Доказательство. Будем считать, что G не является группой Шмидта. Пусть p — наименьшее число из $\pi(G)$. Тогда каждая собственная подгруппа из G p-нильпотентна. По лемме 18.2, G — либо группа Шмидта, либо p-нильпотентна.

Итак, G p-нильпотентна. Тогда $G = Q \leftthreetimes P$, где P — силовская p-подгруппа из G. По условию теоремы Q сверхразрешима и, значит, дисперсивна по Оре. Следовательно, утверждение 2) верно. Утверждение 3) есть следствие утверждения 1) теоремы 24.5. Из следствия 4.14.1 и теоремы 24.6 получаем $|\pi(G)| \leqslant 3$. Теорема доказана.

Теорема 26.4. *Каждая минимальная несверхразрешимая группа порождается двумя элементами.*

Доказательство. Если G — минимальная несверхразрешимая группа, то по теореме 26.3 G разрешима. Теперь применяем следствие 25.5.1.

Теорема 26.5 (Дёрк [1]). *Пусть G — минимальная несверхразрешимая группа, P — ее сверхразрешимый корадикал. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *P является силовской p-подгруппой в G для некоторого простого p:*

2) *если S — дополнение к P в G, то $S / S \cap \Phi(G)$ — либо примарная циклическая группа, либо группа Миллера — Морено.*

Доказательство. Воспользуемся информацией, которую дают теоремы 24.2 — 24.5. Не ограничивая общности, считаем, что $\Phi(G) = 1$. Пусть S — дополнение к P в G. Утверждение 1) верно. Докажем 2).

Подгруппа P — нециклическая минимальная нормальная подгруппа группы G. Поскольку $P = \mathrm{F}(G)$, то P — единственная минимальная нормальная подгруппа. Пусть R — собственная подгруппа из S. Тогда PR сверхразрешима и, значит, обладает нильпотентным коммутантом K. Так как $P = C_G(P)$, то K является p-группой и $K \subseteq P$. Отсюда следует, что $PR / P \simeq R$ абелева. Значит, S либо абелева, либо группа Миллера—Морено.

Пусть S абелева. По лемме 4.1 S циклическая. Предположим, что $S = S_1 \times S_2$, где S_1 и S_2 — неединичные подгруппы взаимно простых порядков. Тогда PS_1 и PS_2 — сверхразрешимые нормальные подгруппы со взаимно простыми индексами. Согласно следствию 4.8.2, G сверхразрешима. Получили противоречие.

Теорема доказана.

Замечание 2. Другие найденные Дёрком [1] детали строения минимальной несверхразрешимой группы могут быть получены из теорем 24.2 — 24.5. В частности, в указанной группе максимальные подгруппы составного индекса сопряжены между собой, а сверхразрешимый корадикал обладает примерно такими же свойствами, как нильпотентный корадикал группы Шмидта.

Проблема 26. Описать строение разрешимых групп, у которых все вторые максимальные подгруппы сверхразрешимы.

§ 27. Комментарии

1. Работу Картера, Фишера и Хоукса [1] продолжил Хоукс [7]. Он, в частности, доказал, что если каждая 2-порожденная подгруппа разрешимой группы G имеет либо p-длину $\leqslant r$, либо q-длину $\leqslant s$, то и сама G имеет либо p-длину $\leqslant r$, либо q-длину $\leqslant s$.

2. Фрик [1] нашел ряд свойств разрешимой минимальной не $\mathcal{L}(n)$-группы, где $\mathcal{L}(n)$ — класс разрешимых групп с нильпотентной длиной $\leqslant n$.

3. Минимальные недисперсивные группы изучались в работах Хоукса [4], Кузенного и Левищенко [1].

4. О. Ю. Шмидт [1] получил теорему 26.1, используя лишь теорему Силова и элементарные свойства нильпотентных групп. Найденное О. Ю. Шмидтом доказательство разрешимости минимальных ненильпотентных групп приведено в книге Хупперта [5].

5. Утверждения 4) и 5) теоремы 26.2 доказаны Гольфандом [1], который также установил, что при заданных p, α, q существует единственная группа Шмидта Γ_0 максимального порядка $p^\alpha q^{\beta_0}$, где $\beta_0 = b$ при $b \equiv 1 \pmod 2$, $\beta_0 = \frac{3}{2} b$ при $b \equiv 0 \pmod 2$ *). Все остальные группы Шмидта порядка вида $p^\alpha q^\beta$ изоморфны фактор-группам группы Γ_0 по ее центральным нормальным подгруппам. Результаты Гольфанда вошли в статью Редеи [1], которая содержит также описание групп Миллера—Морено. Информация о неабелевых силовских 2-подгруппах групп Шмидта получена Мазуровым и Сыскиным [1].

6. Группа автоморфизмов группы Шмидта изучена Нагребецким и Адамовым [1]. Нагребецкий [1] — [3] изучал также группы автоморфизмов групп Миллера—Морено и минимальных не p-сверхразрешимых групп.

7. Строение p-разрешимых минимальных не p-сверхразрешимых групп указано в работе Н. П. Конторович и Нагребецкого [1]. Можно заметить, что эта работа поглотится решением проблемы 26. Класс разрешимых групп, у которых вторые максимальные подгруппы нильпотентны, изучил Белоногов [1]. Ряд результатов по проблеме 26 получили Новицкий [1] и Де Виво [1].

---

*) Здесь b — показатель числа q по модулю p.

ПЕРЕЧЕНЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

В книге рассматриваются только конечные группы. Если X — множество, то $|X|$ — его мощность; ϕ — пустое множество. В частности, если G — группа, то $|G|$ — ее порядок; через $|G : H|$ обозначается индекс подгруппы H в G; $|x|$ — порядок элемента x группы G. Ниже везде G — некоторая группа. Нормальность подгруппы H в G обозначается так: $H \lhd G$.

Мы различаем знак $\subseteq$ включения множеств и знак $\subset$ строгого включения; $\bigcap$ и $\bigcup$ — соответственно знаки пересечения и объединения множеств. Собственная подгруппа из G — это подгруппа, отличная от G; нетривиальная подгруппа — неединичная собственная подгруппа. Через 1 обозначается единичный элемент и единичная подгруппа группы G. Если $x \in G$, $A \subseteq G$, то $A^x = x^{-1}Ax$.

$\mathrm{Aut}\, G$ — группа всех автоморфизмов группы G, $\mathrm{In}\, G$ — группа всех ее внутренних автоморфизмов, $\mathrm{Out}\, G = \mathrm{Aut}\, G / \mathrm{In}\, G$.

$\{\alpha \mid \beta\}$ — множество всех α, для которых выполняется β.

Скобки $\langle\ \rangle$ применяются для обозначения подгрупп, порожденных некоторым множеством элементов или подгрупп. Группу, порождающуюся r элементами, называют r-порожденной.

$\langle \alpha \mid \beta \rangle$ — подгруппа, порожденная всеми α, для которых выполняется β. Если A и B — подгруппы группы G, то положим $A \vee B = \langle A, B\rangle$. Если $x, y \in G$, то $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$, $[A, B] = \langle [x, y] \mid x \in A,\ y \in B\rangle$, $[G, G] = G'$. Если $\Sigma \subseteq \mathrm{Aut}\ G$, то $[G, \Sigma] = \langle x^{-1}x^{\sigma} \mid x \in G,\ \sigma \in \Sigma\rangle$.

Мы различаем термины цепь и ряд. Цепь — это совокупность вложенных друг в друга подгрупп. Ряд подгрупп — это цепь, состоящая из конечного числа членов и проходящая через единицу. Члены верхней (нижней) центральной цепи (см. Курош [1]) обозначаются через $Z_i(G)$ (соответственно через $K_i(G)$). Цепь $G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_n = H$ называется $(G - H)$-цепью (с индексами $|G_{i-1} : G_i|$); если при этом G_i является максимальной подгруппой в G_{i-1} для любого $i > 0$, то указанная цепь называется максимальной $(G - H)$-цепью, H — n-й максимальной подгруппой группы G. Единичную группу будем считать совпадающей со своей максимальной подгруппой. Ряд подгрупп $G = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \ldots \supseteq H_t = 1$ называется:

1) **субнормальным**, если $H_i \triangleleft H_{i-1}$ для любого $i > 0$ (в этом случае группы H_{i-1} / H_i называют **факторами** данного ряда или **субнормальными секциями** группы G);

2) **нормальным**, если $H_i \triangleleft G$ для любого i (в этом случае группы H_{i-1} / H_i называют **нормальными секциями** группы G). Длина верхнего или нижнего центрального ряда **нильпотентной** группы G называется **ступенью нильпотентности** и обозначается через $s(G)$.

Секция группы G — это фактор-группа ее некоторой подгруппы. Подгруппа R **покрывает (изолирует)** секцию A / B, если $RB \supseteq A$ (соответственно $R \cap A \subseteq B$).

Члены субнормальных рядов группы G называют **субнормальными подгруппами** группы G. Запись $H \triangleleft\triangleleft G$ означает, что подгруппа H субнормальна в G. Множество всех подгрупп группы G образует решетку $L(G)$ с операциями $\cap$ и $\vee$.

Пусть Σ — некоторая **область операторов** группы G. Это означает, что каждому $\alpha \in \Sigma$ сопоставлен некоторый эндоморфизм группы G. В обычном смысле употребляются понятия Σ-допустимой подгруппы, Σ-композиционного и Σ-главного ряда. Факторы Σ-композиционного (Σ-главного) ряда называются **Σ-композиционными (Σ-главными) факторами** группы G. Цепь называется **Σ-допустимой**, если все ее члены Σ-допустимы. Ряд группы G, являющийся одновременно субнормальным и Σ-допустимым, называется **Σ-субнормальным**, а его факторы — **Σ-субнормальными секциями** группы G. Предпоследний, отличный от 1, член главного (Σ-главного) ряда группы G будем называть **минимальной нормальной подгруппой (минимальной Σ-допустимой нормальной подгруппой)**. Если $G = 1$, то будем считать G совпадающей с максимальной подгруппой, минимальной Σ-допустимой нормальной подгруппой, Σ-главным и Σ-композиционным фактором.

Σ-цоколь группы G — это произведение всех ее минимальных Σ-допустимых нормальных подгрупп; при $\Sigma = \phi$ мы говорим о цоколе. Если H — Σ-допустимая подгруппа, то через $C_\Sigma(G, H)$ обозначается множество всех таких $\alpha \in \Sigma$, что $xH = x^\alpha H$ для всех $x \in G$; если $H \lhd G$, то $C_\Sigma(G / H) = C_\Sigma(G, H)$. Через $N_G(H)$ и $C_G(H)$ обозначается соответственно нормализатор и централизатор H в G. $Z(G)$ — центр группы G, $\Phi(G)$ — подгруппа Фраттини, т. е. пересечение всех ее максимальных подгрупп. Главный фактор H / K группы G называется нефраттиниевым, если $H / K \not\subseteq \Phi(G / K)$. π — некоторое пустое или непустое множество простых чисел, π' — дополнение к π в множестве всех простых чисел; p, q — простые числа. $\pi(n)$ — множество всех различных простых делителей натурального числа n; $\pi(G) = \pi(|G|)$; $\pi(G : H) = \pi(|G : H|)$; $\pi(\mathfrak{F})$ — объединение множеств $\pi(G)$ для всех G из $\mathfrak{F}$. Натуральное число n называется π-числом (πd-числом), если $\pi(n) \subseteq \pi$ (соответственно $\pi \cap \pi(n) \neq \phi$). Группа, подгруппа, элемент называется π-группой, π-подгруппой, π-элементом (πd-группой, πd-подгруппой, πd-элементом), если их порядок есть π-число (πd-число). Обычно в обозначениях вместо $\{p\}$ пишут p (например, p-группа). Понятно также, что означают термины главный p-фактор, Σ-композиционный pd-фактор и т. д. Группа G называется: 1) примарной, если $|\pi(G)| \leqslant 1$; 2) бипримарной, если $|\pi(G)| = 2$.

Делитель d натурального числа n называется π-делителем, если $\pi(d) \subseteq \pi$. Через n_π обозначается наибольший π-делитель числа n. Подгруппу порядка $|G|_\pi$ называют S_π-подгруппой или π-холловской подгруппой и обозначают иногда через G_π. Подгруппа H из G называется холловской, если она является S_π-подгруппой для подходящего π. Экспонента группы G — это наименьшее общее кратное порядков всех ее элементов.

H_G — ядро подгруппы H в группе G, т. е. пересечение всех подгрупп, сопряженных с H в G. $H^G = \langle H^x \mid x \in G \rangle$ — нормальное замыкание H в G.

Запись $G = A \leftthreetimes B$ применяется для обозначения полупрямого произведения ($A \lhd G$, $A \cap B = 1$). Если $G = HK$, $H \cap K = 1$, то K называется дополнением к H в G.

Группа G называется расширением группы A с помощью группы B, если G имеет нормальную подгруппу H такую, что $H \simeq A$ и $G / H \simeq B$; если при этом G записывается в виде $G = H \leftthreetimes R$, то указанное расширение называется расщепляемым. Расщепляемым является расширение группы с помощью ее некоторой группы операторов (это понятие см. в книге Каргаполова и Мерзлякова [1], с. 66), в частности, $G \leftthreetimes \mathrm{Aut}\, G$ — голоморф группы G. Мы пользуемся обычным понятием регулярного (иначе, стандартного) сплетения (Каргаполов и Мерзляков [1], с. 68): $A \wr B$.

Пусть G_p и $G_{p'}$ — силовская p-подгруппа и $S_{p'}$-подгруппа группы G. Группу G называют: 1) p-разложимой, если G_p и $G_{p'}$ нормальны в G; 2) p-нильпотентной, если $G_{p'} \lhd G$. Группа называется π-разложимой (π-нильпотентной), если она p-разложима (p-нильпотентна) для любого $p \in \pi$. Группу G называют π-замкнутой, если она имеет нормальную S_π-подгруппу. Группу называют π-специальной, если она имеет нормальную нильпотентную S_π-подгруппу.

Пусть φ — некоторое упорядочение простых чисел. Запись $p\varphi q$ означает, что p предшествует q в упорядочении φ, $p \neq q$. Группа G порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ называется φ-дисперсивной, если $p_1 \varphi p_2 \varphi \ldots \varphi p_n$ и для любого i G имеет нормальную подгруппу порядка $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_i^{\alpha_i}$. Если при этом упорядочение φ таково, что $p\varphi q$ всегда влечет $p > q$, то φ-дисперсивная группа называется дисперсивной по Оре. Дисперсивной группой называют группу, являющуюся φ-дисперсивной для некоторого φ.

Если P — p-группа, то $\Omega_1(P) = \langle x \in P \mid x^p = 1 \rangle$.

Группа G называется: 1) π-отделимой, если для каждого ее главного фактора H / K имеет место $|\pi \cap \pi(H / K)| \leqslant 1$; 2) π-разрешимой, если $|\pi(H / K)| = 1$ для каждого ее главного πd-фактора H / K; 3) π-сверхразрешимой, если каждый ее главный πd-фактор является циклическим. Группа называется π-обособленной, если каждый ее главный фактор является либо π-группой, либо π'-группой.

Классы групп мы обозначаем обычно большими готическими буквами. Если $\mathfrak{X}$ — класс групп, то $\mathfrak{X}_\pi$ — класс всех π-групп из $\mathfrak{X}$. Группа (подгруппа) называется

$\mathfrak{X}$-группой ($\mathfrak{X}$-подгруппой), если она является элементом класса $\mathfrak{X}$. Максимальная $\mathfrak{X}$-подгруппа из G — это $\mathfrak{X}$-подгруппа, не содержащаяся ни в какой другой $\mathfrak{X}$-подгруппе. В § 1 мы зафиксировали обозначения для некоторых классов групп. Дополнительно заметим, что через $\mathfrak{Z}$ мы будем обозначать класс всех групп с циклическими силовскими подгруппами.

Пусть f — гомоморфизм группы G в группу H. Его образ и ядро будем обозначать соответственно через $G^f = \operatorname{Im} G$ и $\operatorname{Ker} f$. Образ части M группы G обозначают через M^f (иногда через $f(M)$). Если $\operatorname{Ker} f = 1$, то f — мономорфизм; если $\operatorname{Im} f = H$, то f — эпиморфизм (гомоморфизм на). Произведение $f_1 f_2$ гомоморфизмов $f_1\colon G \to H$ и $f_2 : H \to K$ задается равенством $x^{f_1 f_2} = (x^{f_1})^{f_2}$, $x \in G$. Гомоморфизм группы G в симметрическую группу S_Ω подстановок множества Ω называется подстановочным представлением группы G. В частности, в качестве Ω может быть взята совокупность смежных классов $\{Hx \mid x \in G\}$; возникающее при этом подстановочное представление называется *правым* H-регулярным представлением группы G.

ЛИТЕРАТУРА

Альперин (Alperin J. L.)
1. Normalizer of system normalizers.— Trans. Amer. Math. Soc., 1964, 113, N 1, с. 181—188.
2. System normalizers and Carter subgroups.— J. Algebra, 1964, 1, N 4, с. 355—366.

Баартманс, Вёппель (Baartmans A. H., Woeppel J.)
1. Groups with a characteristic cyclic series.— J. Algebra, 1974, 29, N 1, с. 143—149.

Барнес (Barnes D. W.)
1. On complemented chief factors of finite soluble groups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1972, 7, с. 101—104.

Барнес, Кегель (Barnes D. W., Kegel O.H.)
1. Gaschütz functors on finite soluble groups.— Math. Z., 1966, 94, N 2, с. 134—142.

Бауман (Bauman S.)
1. A note on cover and avoidance properties in solvable groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 21, N 1, с. 173—174.

Бейдлеман (Beidleman J. C.)
1. Formations and π-closure in finite groups.— Compos. math. 1971, 23, N 3, с. 347—356.
2. On complementation of the $\mathfrak{F}$-residual.— Boll. Unione mat. ital., 1973, 8, N 2, с. 290—292.
3. On Huppert's condition B.— Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 43, N 1, с. 18—20.
4. On integrated screens.— Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 42, N 1, с. 36—38.

Бейдлеман, Брюстер (Beidleman J., Brewster B.)
1. $\mathfrak{F}$-covering subgroups of finite groups.— Boll. Unione mat. ital., 1970, 3, N 6, с. 987—992.
2. Formations of finite π-closed groups. II.— Boll. Unione mat. ital., 1971, 4, N 5, с. 651—657.
3. $\mathfrak{F}$-normalizers in finite π-solvable groups.— Boll. Unione mat. ital., 1974, 10, N 1, с. 14—27.

Бейдлеман, Макан (Beidleman J. C., Makan A. K.)
1. On saturated formations which are special relative to the strong cover-avoidance property.— Proc. Amer. Math., 1975, 47, N 1. с. 29—36.

Белоногов В. А.
1. Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами.— Матем. заметки, 1968, 3, № 1, 21—32.

2. Конечные группы с единственным классом неинвариантных максимальных подгрупп.— ИАН БССР, сер. физ.-матем. н., 1969, № 3, с. 114—117.

Бечтелл (Bechtell H.)
1. The prefrattini residual.— Proc. Amer. Math. Soc., 1976, 55, N 2, с. 267—270.

Блессеноль (Blessenohl D.)
1. Über Formationen und Halluntergruppen endlicher auflösbarer Gruppen — Math. Z., 1975, **142**, N 3, с. 299—300.

Блессеноль, Брюстер (Blessenohl D., Brewster B.)
1. Über Formationen und komplementierbare Hauptfaktoren.— Arch. Math., 1976, **27**, N 4, с. 347—351.

Блессеноль, Гашюц (Blessenohl D., Gaschütz W.)
1. Über normale Schunck- und Fittingklassen.— Math. Z., 1970, **118**, N 1, с. 1—8.

Брайант, Брайс, Хартли (Bryant R. M., Bryce R. A., Hartley B.)
1. The formation generated by a finite group.— Bull. Austral. Math. Soc., 1970, **2**, N 3, с. 347—357.

Брайс, Косси (Bryce R. A., Cossey J.)
1. Fitting formations of finite soluble groups.— Math. Z., 1972, **127**, N 3, с. 217—223.
2. Metanilpotent Fitting classes.— J. Austral. Math. Soc., 1974, **17**, N 3, с. 285—304.
3. A problem in the theory of normal Fitting classes.— Math. Z., 1975, **141**, N 2, с. 99—110.

Брюстер (Brewster B.)
1. $\mathfrak{F}$-projectors in finite π-solvable groups.— Arch. Math., 1972, **23**, N 2, с. 133—138.

Брюстер, Оттевей (Brewster B., Ottaway M.)
1. The supersolvable residual of an $\mathcal{L}_1$-group.— Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 1976, **80**, с. 447—450.

Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.
1. Конечные расщепляемые группы.— М.: Наука, 1968.

Бэр (Baer R.)
1. Verstreute Untergruppen endlicher Gruppen.— Arch. Math., 1958, **9**, с. 7—17.
2. Principal factors, maximal subgroups and conditional identities of finite groups.— Ill. J. Math., 1969, **13**, N 1, с. 1—52.
3. Durch Formationen bestimmte Zerlegungen von Normalteilern endlicher Gruppen.— J. Algebra, 1972, **20**, N 1, с. 38—56.

Вааль (Waall R. W.)
1. On minimal subgroups which are normal.— J. reine angew. Math., 1976, **285**, с. 77—78.

Вейднер (Weidner J. F.)
1. A new characterization of the saturated closure of a homomorphism closed class of finite solvable groups.— Bull. London Math. Soc., 1976, **8**, N 1, с. 38—40.

Венцке (Venzke P.)
1. System quasinormalizers in finite solvable groups.— J. Algebra, 1977, **44**, с. 160—168.
2. On $\mathfrak{F}$-abnormal maximal subgroups of a finite solvable group.— Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **33**, N 2, с. 316—318.

Вигольд (Wiegold J.)
1. Schunck classes are nilpotent product closed.— Bull. Austral. Math. Soc., 1969, 1, N 1, c. 27—28.

Виландт (Wielandt H.)
1. Пути развития структурной теории конечных групп.— В кн.: Международный математический конгресс в Эдинбурге, 1958 г. (обзорные доклады). М.: 1962, с. 263—276.
2. Zum Satz von Sylow.— Math. Z., 1954, 60, c. 407—409.
3. Zum Satz von Sylow, II.— Math. Z., 1959, 71h c. 461—462.
4. Sylowgruppen und Kompositionsstruktur.— Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1958, 22, c. 215—228.
5. Über den Normalisator der subnormalen Untergruppen.— Math. Z., 1958, 69, N 8, c. 463—465.
6. Über die Normalstruktur von mehrfach faktorisierbaren Gruppen.— J. Austral. Math. Soc., 1960, 1, c. 143—146.
7. Vertauschbare nachinvariante Untergruppen.— Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1957, 21, N 1—2, c. 55—62.
8. On automorphisms of doubly transitive permutation groups.— Proc. Internat. Conf. Theory of Groups., Canberra (1965), N. Y., 1967, c. 389—393.
9. Factors of groups.— Sympos. math. (1967—1968), Vol. I, Gubbio, 1969, c. 187—194.
10. Subnormal subgroups and permutation groups.— Lectures given at the Ohio State University, Columbus, Ohio, 1971.
11. Vertauschbarkeit von Untergruppen und Subnormalität.— Math. Z., 1973, 133, c. 275—276.
12. Kriterien für Subnormalität in endlichen Gruppen.— Math. Z., 1974, 138, N 3, c. 199—203.

Воробьев Н. Т.
1. О максимальных однородных экранах. — 14-я Всесоюзная алгебраическая конференция (Новосибирск, сентябрь 1977 г.), тезисы докладов, ч. I, Новосибирск, 1977, с. 16—17.

Вуд (Wood G. J.)
1. A lattice of homomorphs.—Math. Z., 1973, 130, N 1, c. 31—37.
2. On pronormal subgroups of finite soluble groups.— Arch. Math., 1974, 25, N 6, c. 578—585.
3. A note on strong containment in the theory of Schunck classes of finite soluble groups.— J. London Math. Soc., 1976, 13, N 2, c. 235—238.

Гашюц (Gaschütz W.)
1. Zur Erweiterungstheorie endlicher Gruppen.— J. Math., 1952, 190, c. 93—107.
2. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen.— Math. Z., 1953, 58, c. 160—170.
3. Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen.— Math. Z., 1963, 80, N 4, c. 300—305.

Гиллам (Gillam J. D.)
1. Cover-avoid subgroups in finite solvable groups.— J. Algebra, 1974, 29, N 2, c. 324—329.

Гольфанд Ю. А.
1. О группах, все подгруппы которых специальные.— ДАН СССР, 1948, 60, № 8, с. 1313—1315.

Греддон (Graddon C. J.)
1. $\mathfrak{F}$-reducers in finite soluble groups.— J. Algebra, 1971, 18, N 4, c. 574—587.
2. The relation between $\mathfrak{F}$-reducers and $\mathfrak{F}$-subnormalizers in finite soluble groups.— J. London Math. Soc., 1971, 4, N 1, c. 51—61.
3. $\mathfrak{F}$-speed, $\mathfrak{F}$-abnormal depth and (R, $\mathfrak{F}$)-chains in certain locally finite groups.—Ill. J. Math., 1973, 17, N 4, c. 646—665.

Гросс (Gross F.)
1. Subnormal, core-free, quasinormal subgroups are solvable.— Bull. London Math. Soc., 1975, 7, N 1, c. 93—95.
2. Finite groups which are the product nilpotent subgroups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1973, 9, N 2, c. 267—274.

Дарси (D'Arcy P.)
1. On formations of finite groups. Arch. Math., 1974, 25, N 1, c. 3—7.
2. $\mathfrak{F}$-abnormality and the theory of finite solvable groups.— J. Algebra, 1974, 28, N 2, c. 342—361.
3. On strong containment of locally defined formations.— J. Algebra, 1974, 28, N 2, c. 362—373.
4. On relative $\mathfrak{F}$-normalizers in finite solvable groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1974, 42, N 2, c. 381—384.
5. Locally defined Fitting classes.— J. Austral. Math. Soc., 1975, 20, N 1, c. 25—32.

Де Виво (De Vivo C.)
1. Sugli S_2-gruppi finiti.— Ann. mat. pura appl., 1975, 104, c. 313—325.

Дейд (Dade E. C.)
1. Carter subgroups and Fitting heights of finite solvable groups.— Ill. J. Math., 1969, 13, N 3, c. 449—514.

Дерр (Derr J. B.)
1. Generalized Sylow tower groups.— Pacif. J. Math., 1970, 32, N 3, c. 633—642.

Дерр, Мукерджи (Derr J. B., Mukherjee N. P.)
1. Generalized Sylow tower g oups, II.— Pacif. J. Math., 1973, 45, N 2, c. 427—434.

Дёрк (Doerk K.)
1. Minimal nicht überauflösbare, endliche Gruppen.— Math. Z., 1966, 91, c. 198—205.
2. Zur Theorie der Formationen endlicher auflösbarer Gruppen.— J. Algebra, 1969, 13, N 3, c. 345—373.
3. Zwei Klassen von Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, deren Halbverband gesättigter Unterformationen genau ein maximales Element besitzt.— Arch. Math., 1970, 21, N 3, c. 240—244.
4. Die maximale lokale Erklärung einer gesättigten Formation.— Math. Z., 1973, 133, N 2, c. 133—135.
5. Über Homomorphe endlicher auflösbarer Gruppen.— J. Algebra, 1974, 30, N 1—3, c. 12—30.

Дёрк, Хоукс (Doerk K., Hawkes T.)
1. Two questions in the theory of formations.— J. Algebra, 1970, 16, N 3, c. 456—460.

Джонсон (Johnson D. L.)
1. A note on supersoluble groups.— Canad. J. Math., 1971, **23**, N 3, с. 562—564.

Диксон, Поланд, Ремтулла (Dixon J. D., Poland J., Rhemtulla A. H.)
1. A generalization of hamiltonian and nilpotent groups.— Math. Z., 1969, **112**, N 5, с. 335—339.

Дурбин, Макдональд (Durbin J., McDonald M.)
1. Groups with a characteristic cyclic series.— J. Algebra, 1971, **18**, с. 453—460.

Зейц (Seitz G. M.)
1. M-groups and the supersolvable residual.— Math. Z., 1969, **110**, N 2, с. 101—122.
2. Solvable groups having system normalizers of prime order. — Trans. Amer. Math. Soc., 1973, **183**, с. 165—173.

Зейц, Райт (Seitz G. M., Wright C.R.B.)
1. On complements of $\mathfrak{F}$-residuals in finite solvable groups.— Arch. Math., 1970, **21**, N 2, с. 139—150.
2. On finite groups whose Sylow subgroups are modular or quaternionfree.— J. Algebra, 1969, **13**, N 3, с. 374—381.

Зудброк (Sudbrock W.)
1. Sylowfunktionen in endlichen Gruppen.— Rend. Semin. mat. univ. Padova, 1966, **36**, N 1, с. 158—184.

Инагаки (Inagaki N.)
1. On $\mathfrak{F}$-normalizers and $\mathfrak{F}$-hypercenter.—Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **26**, N 1, с. 21—22.

Йен (Yen Ti)
1. On $\mathfrak{F}$-normalizers.— Proc. Amer. Math. Soc., 1970, **26**, N 1, с. 49—56.
2. Permutable pronormal subgroups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1972, **34**, N 2, с. 340—342.

Йокояма (Yokoyama A.)
1. Finite solvable groups whose $\mathfrak{F}$-hypercenter contains all minimal subgroups.— Arch. Math., 1975, **26**, N 2, с. 123—130.
2. Finite solvable groups whose $\mathfrak{F}$-hypercenter contains all minimal subgroups, II.— Arch. Math., 1976, **27**, N 6, с. 572—575.

Калужнин Л. А.
1. Über gewisse Beziehungen zwischen einer Gruppe und ihren Automorphismen.— Ber. Math. Tagung, Berlin, 1953, с. 164—172.

Камерон (Cameron P. J.)
1. On groups with several doubly-transitive permutation representations.— Math. Z., 1972, **128**, с. 1—14.

Камина (Camina A. R.)
1. The Wielandt length of finite groups.— J. Algebra, 1970, **15**, с. 142—148.

Каппе В. (Kappe W. P.)
1. E-Normen endlicher Gruppen.— Arch. Math., 1968, **19**, N 3, с. 256—264.

Каппе Л., Каппе В. (Kappe L., Kappe W.)
1. Metabelian Levi-formations.— Arch. Math., 1974, **25**, N 5, с. 454—462.

2. Potenzen und gruppentheoretische Eigenschaften.—Arch. Math. 1970, 21, с. 245—255.

Каргаполов М. И.

1. Главное разложение конечной группы,—Уч. зап. Пермского ун-та, 1960, 17, № 2, с. 5—8.

Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.

1. Основы теории групп.— М.: Наука, 1977.

Картер (Carter R. W.)

1. Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups.— Math. Z., 1961, 75, с. 136—139.
2. Nilpotent self-normalizing subgroups and system normalizers.—Proc. London Math. Soc., 1962, 12, N 47, с. 535—563.

Картер, Фишер, Хоукс (Carter R., Fischer B., Hawkes T.)

1. Extreme classes of finite soluble groups.— J. Algebra, 1968, 9, N 3, с. 285—313.

Картер, Хоукс (Carter R., Hawkes T.)

1. The $\mathfrak{F}$-normalizers of a finite soluble group.— J. Algebra, 1967, 5, N 2, с. 175—202.

Кегель (Kegel O. H.)

1. On Huppert's characterization of finite supersoluble groups.— Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra (1965), N. Y., 1967, с. 209—215.
2. Eine Charakterisierung der Sylowgruppen endlicher Gruppen.— Rend. Semin. mat. Univ. Padova, A 9, 1966, N 209—313, с. 87—110.
3. Zur Struktur mehrafach faktorisierbarer endlicher Gruppen.— Math. Z., 1965, 87, с. 42—48.

Клайн (Cline E.)

1. On an embedding property of generalized Carter subgroups.— Pacif. J. Math., 1969, 29, N 3, с. 491—519.

Конторович Н. П., Нагребецкий В. Т.

1. О конечных минимальных не p-сверхразрешимых группах. — Матем. зап. Уральск. ун-та, 1975, 9, № 3, с. 53—59.

Косси, Макдональд (Cossey J., Macdonald Sh. O.)

1. On the definition of saturated formations of groups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1971, 4, N 1, с. 9—15.

Кохно А. П.

1. F-подгруппы разрешимых групп.— ДАН БССР, 1967, 11, № 11, с. 973—975.
2. О системных нормализаторах π-разрешимых групп.— ДАН БССР, 1968, 12, № 12, с. 1069—1072.
3. H-проекторы π-разрешимых групп.— ИАН БССР, сер. физ.-матем. н., 1971, № 4, с. 5—10.
4. О конечных группах с системными нормализаторами данного вида.— ИАН БССР, сер. физ.-матем. н., 1971, № 6, с. 8—12.

Крамер (Kramer Otto-Uwe)

1. Halluntergruppen und Residuen gesättigter Formationen.— Arch. Math., 1974, 25, N 4, с. 344—347.
2. Endliche Gruppen mit Untergruppen mit paarweise teilerfremden Indizes.— Math. Z., 1974, 139, N 1, с. 63—68.

2. Abstracts of Australasian Ph.D. theses on some aspects of finite soluble groups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1972, 6, N 1, с. 157—158.
3. The Fitting length of a finite soluble group and the number of conjugacy classes of its maximal nilpotent subgroups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1972, 6, N 2, с. 213—226.
4. On saturated formations whose projectors are complemented.— Bull. Austral. Math. Soc., 1973, 9, N 2, с. 239—248.
5. The Fitting length of a finite soluble group and the number of conjugacy classes of its maximal metanilpotent subgroups.— Canad. Math. Bull., 1973, 16, N 2, с. 233—237.
6. On certain sublattices of the lattice of subgroups generated by the Prefrattini subgroups, the injectors and the formation subgroups.— Canad. J. Math., 1973, 25, N 4, с. 862—869.

Манн (Mann A.)
1. On subgroups of finite solvable groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 22, N 1, с. 214—216.
2. On subgroups of finite solvable groups, II.— J. Algebra, 1972, 22, N 2, с. 233—240.
3. On subgroups of finite soluble groups, III.— Israel J. Math., 1973, 16, N 4, с. 446—451.
4. On $\mathfrak{F}$-normalizers and $\mathfrak{F}$-covering subgroups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1968, 19, N 5, с. 1159—1160.
5. A criterion for pronormality.— J. London Math. Soc., 1969, 44, с. 175—176.
6. System normalizers and subnormalizers.— Proc. London Math. Soc., 1970, 20, N 1, с. 123—143.
7. $\mathfrak{H}$-normalizers of finite solvable groups.— J. Algebra, 1970, 14, N 3, с. 312—325.
8. A characterization of Carter subgroups.— J. London Math. Soc., 1972, 5, N 3, с. 517—518.

Миллер, Морено (Miller G. A., Moreno H.)
1. Nonabelian groups in which every subgroup is abelian.— Trans. Amer. Math. Soc., 1903, 4, с. 398—404.

Монахов В. С.
1. Инвариантные подгруппы бипримарных групп.— Матем. зам., 1975, 18, № 6, с. 877—886.
2. Произведение конечных групп, близких к нильпотентным.— В кн.: Конечные группы, Минск: Наука и техника, 1975, с. 70—100.

Нагребецкий В. Т.
1. О конечных минимальных несверхразрешимых группах.— В кн.: Конечные группы, Минск: Наука и техника, 1975, с. 104—108.
2. Группа автоморфизмов конечной минимальной не p-сверхразрешимой группы.— В кн.: Алгебраические исследования, Свердловск: изд. Уральского политехн. ин-та, 1976, с. 33—40.
3. Группы автоморфизмов конечных групп Миллера — Морено.— 14-я Всесоюзная алгебраическая конференция (Новосибирск, сентябрь 1977 г.), тезисы докладов, ч. I, Новосибирск, 1977, с. 44—45.

Нагребецкий В. Т., Адамов С. Н.
1. О группе автоморфизмов группы Шмидта.— Матем. зап. Уральск. ун-та, 1970, 7, № 3, с. 133—136.

Найхоф (Nyhoff L. R.)
1. The influence on a finite group of the cofactors and subcofactors of its subgroups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1971, 154, с. 459—491.

Нейман (Neumann P. M.)
1. A note on formations of finite nilpotent groups.— Bull. London Math. Soc., 1970, 2, N 1, с. 91.

Новицкий А. И.
1. О конечных группах со сверхразрешимыми подгруппами.— ИАН БССР, сер. физ.-матем. н., 1974, № 2, с. 11—15.

Нумата (Numata M.)
1. On the π-nilpotent length of π-solvable groups.— Osaka J. Math., 1971, 8, N 3, с. 447—451.

Оре (Ore O.)
1. Contributions to the theory of groups of finite order.— Duke Math. J., 1939, 5, с. 431—450.

Паркер (Parker D. B.)
1. Wreath products and formations of groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 24, N 2, с. 404—408.

Пенг (Peng T. A.)
1. Finite groups with pro-normal subgroups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1969, 20, N 1, с. 232—234.
2. Pronormality in finite groups.— J. London Math. Soc., 1971, 3, N 2, с. 301—306.
3. A criterion for subnormality.— Arch. Math., 1975, 26, N 3, с. 225—230.

Пеннингтон (Pennington E. A.)
1. On products of finite nilpotent groups.— Math. Z., 1973, 134, N 1, с. 81—83.
2. Trifactorisable groups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1973, 8, N 3, с. 461—469.

Перес (Pérez M. F.)
1. Grupos finitos separados respecto de una formacion de Fitting.— Publs Semin. mat. Garcia Galdeano, 1973, N 17.

Перес, Торрес (Pérez M. F., Torres I. M.)
1. Two properties on saturated classes of finite groups.— Rev. mat. hisp.-amer., 1972, 32, N 1—2, с. 52—57.

Плоткин Б. И.
1. Группы автоморфизмов алгебраических систем.— М.: Наука, 1966.

Погребинский Б. М., Беркович Я. Г.
1. О θ-длине конечной группы.— Изв. высш. учебн. заведений, математика, 1973, № 12, с. 57—63.

Подуфалова В. Д.
1. О подгруппах, обладающих формационными свойствами,— ДАН БССР, 21, № 2, с. 105—107.

Поланд (Poland J.)
1. Extensions of finite nilpotent groups.— Bull. Austral. Math. Soc., 1970, 2, N 2, с. 267—274.

2. On finite groups whose subgroups have simple core factors.— Proc. Jap. Acad., 1971, **47**, N 7, c. 606—610.

Поляков Л. Я., Сементовский В. Г.

1. Нормально погруженные подгруппы конечных групп.— В кн.: Конечные группы, Минск: Наука и техника, 1975, с. 121—128.

Прентис (Prentice M. J.)

1. $\mathfrak{X}$-normalizers and $\mathfrak{X}$-covering subgroups.— Proc. Cambridge Philos. Soc., 1969, **66**, N 2, c. 215—230.

Пылаев В. В.

1. Конечные группы с плотной системой субнормальных подгрупп.— В кн.: Некоторые вопросы теории групп, Киев, 1975, с. 197—217.

Райт (Wright C. R. B.)

1. On screens and $\mathfrak{L}$-izers of finite solvable groups.— Math. Z., 1970, **115**, N 4, c. 273—282.
2. On complements to normal subgroups in finite solvable groups.— Arch. Math., 1972, **23**, N 2, c. 125—132.
3. An internal approach to covering groups.— J. Algebra, 1973, **25**, N 1, c. 128—145.
4. On internal formation theory.— Math. Z., 1973, **134**, N 1, c. 1—9.

Редеи (Rédei L.)

1. Die endlichen einstufig nichtnilpotenten Gruppen. — Publ. Math. Debrecen, 1956, **4**, c. 303—324.

Решко К. А.

1. О группах, не порождающихся некоторыми $\mathfrak{X}$-абнормальными подгруппами.— Матем. заметки, 1974, **16**, № 5, с. 771—776.

Решко К. А., Харламова В. И.

1. О p-длине произвольной конечной группы.— Матем. заметки, 1973, **14**, № 3, с. 419—427.

Ричен, Шмидт (Richen F. A., Schmidt H. J., Jr.)

1. A character-theoretic complementation theorem for Carter subgroups.— J. London Math., Soc. 1973, **7**, N 1, c. 168—170.

Рокетт (Roquette P.)

1. Über die Existenz von Hall-Komplementen in endlichen Gruppen.— J. Algebra, 1964, **1**, c. 342—346.

Романовский А. В.

1. Группы с холловскими нормальными делителями.— В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1966, с. 98—115.

Роуз (Rose J.)

1. The influence on a finite group of its proper abnormal structure.— J. London Math. Soc., 1965, **40**, c. 348—361.
2. Nilpotent subgroups of finite soluble groups.— Math. Z., 1968, **106**, N 2, c. 97—112.

Русаков С. А.

1. Аналоги теоремы Силова о существовании и вложении подгрупп.— Сиб. матем. ж., 1963, **4**, № 5, с. 325—342.

Салук М. И.

1. Признаки разрешимости конечных групп.— В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975, с. 143—150.

Сегал (Sehgal S. K.)

1. A characterization of groups having property P.— Ill. J. Math., 1967, **11**, N 2, c. 297—299.

2. Generalized projectors and Carter subgroups of finite groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1973, **37**, N 2, с. 347—351.
3. $\mathfrak{F}\pi$-projectors of π-soluble groups.— J. Number Theory, 1974, 6, N 2, с. 124—127.
4. On the existence of Cartan subgroups of finite groups.— J. Number Theory, 1976, 8, N 1, с. 73—83.

Сегал, Макуортер (Sehgal S. K., McWorter W. A., Jr.)
1. Normal complements of Carter subgroups.— Ill. J. Math., 1968, **12**, N 3, с. 510—512.

Селькин М. В.
1. О влиянии максимальных подгрупп на формационное строение конечных групп.— В кн.: Конечные группы, Минск: Наука и техника, 1975, с. 151—163.

Сементовский В. Г.
1. О пронормальных подгруппах конечных групп.— ИАН БССР, сер. физ.-матем. н., 1973, № 4, с. 12—16.
2. Дисперсивные абнормальные подгруппы конечных групп.— ДАН БССР, 1974, **18**, № 5, с. 394—397.
3. Пронормальные дисперсивные проекторы конечных групп.— В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975, с. 164—179.

Семенчук В. Н.
1. Об одном классе конечных разрешимых групп.— ДАН БССР, 1976, **20**, № 2, 104—105.

Серена (Serena L.)
1. Su una classe di gruppi finiti non risolubili che ammettono sottogruppi di Carter.— Matematiche, 1973, **27**, N 2, с. 373—382.

Слепова Л. М.
1. О радикальных и слабо радикальных локальных формациях групп.— Всесоюзный алгебраический симпозиум (30 июня — 2 июля 1975 г.), тезисы докладов, ч. I, Гомель, 1975, с. 65.
2. О формациях $E^{\mathfrak{F}}$-групп.— ДАН БССР, 1977, **21**, № 7, с. 587—589.
3. О радикальных формациях.— Матем. заметки, 1977, **21**, № 6, с. 861—864.
4. О замкнутых локальных формациях групп.— 14-я Всесоюзная алгебраическая конференция (Новосибирск, сентябрь 1977 г.), тезисы докладов, ч. I, Новосибирск, 1977, с. 62—63.

Старостин А. И.
1. О минимальных группах, не обладающих данным свойством.— Матем. заметки, 1968, **3**, № 1, с. 33—37.

Стенли (Stanley T. E.)
1. Residual $\mathfrak{X}$-centrality in groups.— Math. Z., 1972, **126**, N 1, с. 1—5.

Сучков В. К.
1. О максимальных π-критических подгруппах конечной группы.— Изв. высш. учебн. заведений, математика, 1968, № 1, с. 98—107.
2. Конечные группы с заданными свойствами максимальных подгрупп.— Изв. высш. учебн. заведений, математика, 1970, № 12, с. 97—102.

Томкинсон (Tomkinson M. J)
1. Maximal nilpotent subgroups of finite soluble groups.— J. London Math. Soc., 1974, 9, N 1, c. 35—45.
2. Prefrattini subgroups and cover-avoidance properties in 𝔄-groups.— Canad. J. Math., 1975, 27, N 4, c. 837—851.
3. Cover-avoidance properties in finite soluble groups.— Canad. Math. Bull., 1976, 19 (2), c. 213—216.

Трокколо (Troccolo J. A.)
1. 𝔉-projectors of finite solvable groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1975, 48, N 1, c. 33—38.

Фаттахи (Fattahi A.)
1. On generalizations of Sylow tower groups.— Pacif. J. Math., 1973, 45, N 2, c. 453—478.
2. Groups with only normal and abnormal subgroups.— J. Algebra, 1974, 28, N 1, c. 15—19.

Фейт, Томпсон (Feit W., Thompson J. G.)
1. Solvability of groups of odd order.— Pacific J. Math., 1963, 13, c. 755—1029.

Фишер, Гашюц, Хартли (Fischer B., Gaschütz W., Hartley B.)
1. Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen.— Math. Z., 1967, 102, N 5, c. 337—339.

Фрик (Frick M.)
1. The nilpotent length of finite soluble groups.— J. Austral. Math. Soc., 1973, 16, N 3, c. 357—362.

Харламова В. И.
1. Конечные группы с заданными свойствами кофакторов и субкофакторов своих подгрупп.— В кн.: Конечные группы. Минск: Наука и техника, 1975, с. 188—202.
2. О 𝔉-длине конечной группы.— Матем. заметки, 1976, 19, № 5, с. 745—754.

Хартли (Hartley B.)
1. A theorem of Sylow type for finite groups.— Math. Z., 1971, 122, c. 223—226.

Хеггерти (Haggarty R. J.)
1. A generalisation of supersoluble groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, 209, N 482, c. 433—441.

Хейл (Hale M. P., Jr.)
1. Normally closed saturated formations.— Proc. Amer. Math. Soc., 1972, 33, N 2, c. 337—342.

Холл М. (Hall M.)
1. Теория групп.— М.: ИЛ, 1962.

Холл Ф. (Hall P.)
1. Theorems like Sylow's.— Proc. London Math. Soc., 1956, 6, c. 286—304.
2. Some sufficient conditions for a group to be nilpotent.— Ill. J. Math., 1958, 2, N 4, c. 787—801.
3. On non-strictly simple groups.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1963, 59, c. 531—553.

Холл Ф., Хигмен (Hall P., Higman G.)
1. On the p-length of p-soluble groups and reduction theorems for Burnside's problem.— Proc. London Math. Soc., 1956, 6, c. 1—40.

Хоукс (Hawkes T. O.)
1. Analogues of prefrattini subgroups.— Proc. Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra (1965); N. Y., 1967, c. 145—150.
2. A note on system normalizers of a finite soluble group.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1966, **62**, N 3, c. 339—346.
3. On formation subgroups of a finite soluble group.— J. London Math. Soc., 1968, **44**, N 2, c. 243—250.
4. On the class of Sylow tower groups.— Math. Z., 1968, **105**, N 5, c. 393—398.
5. An example in the theory of soluble groups.— Proc. Cambridge Phil. Soc., 1970, **67**, N 1, c. 13—16.
6. On Fitting formations.— Math. Z., 1970, **117**, N 1—4, c. 177—182.
7. Skeletal classes of soluble groups.— Arch. Math., 1971, **22**, N 6, c. 577—589.
8. On the automorphism group of a 2-group.— Proc. London Math. Soc., 1973, **26**, N 3, c. 207—225.
9. Closure operations for Schunck classes.— J. Austral. Math. Soc., 1973, **16**, N 3, c. 316—318.
10. Two applications of twisted wreath products to finite soluble groups.— Trans. Amer. Math. Soc., 1975, **214**, c. 325—335.
11. A Fitting class construction.— Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1976, **30**, c. 437—446.
12. The family of Schunck classes as a lattice.— J. Algebra, 1976, **39**, N 2, c. 527—550.

Хупперт (Huppert B.)
1. Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen.— Math. Z., 1954, **60**, c. 409—434.
2. Gruppen mit modularen Sylowgruppen.— Math. Z., 1961, **75**, c. 140—153.
3. Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen.—Acta scient. math. Szeged, 1961, **22**, c. 46—61.
4. Zur Gaschützschen Theorie der Formationen.— Math. Ann., 1966, **164**, N 2, c. 133—141.
5. Endliche Gruppen, I.— Berlin; Heidelberg; N. Y.: Springer, 1967.
6. Zur Theorie der Formationen.— Arch. Math., 1969, **19**, N 6, c. 561—574.

Цаппа (Zappa G.)
1. Sopra un'estensione die Wielandt del teorema di Sylow.— Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, N 4, c. 349—353.

Чамберс (Chambers G. A.)
1. p-normally embedded subgroups of finite soluble groups.— J. Algebra, 1970, 16, N 3, c. 442—455.
2. On the conjugacy of injectors.— Proc. Amer. Math. Soc., 1971, **28**, N 2, c. 358—360.
3. On $\mathfrak{F}$-prefrattini subgroups.— Canad. Math. Bull., 1975, **15**, N 3, c. 345—348.

Чамберс, Макан (Chambers G. A., Makan A. R.)
1. Two characterizations of π-groups.— Arch. Math., 1973, **24**, N 3, c. 249—251.

Чунихин С. А.

1. Simplicité de groupe fini et les ordres de ses classes d'éléments conjugués.— C. r. Acad. sci. Paris, 1930, **191**, с. 397—399.
2. О π-отделимых группах.— ДАН СССР, 1948, **59**, с. 443—445.
3. О π-свойствах конечных групп.— Матем. сб., 1949, **25**, № 3, с. 321—346.
4. О силовских свойствах конечных групп.— ДАН СССР, 1950, **73**, с. 29—32.
5. Об ослаблении условий в теоремах типа Силова.— ДАН СССР, 1952, **83**, с. 663—665.
6. О существовании и сопряженности подгрупп у конечной группы.— Матем. сб., 1953, **33**, № 1, с. 111—132.
7. Подгруппы конечных групп.— Минск: Наука и техника, 1964.

Чунихин С. А., Шеметков Л. А.

1. Конечные группы.— В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия 1969 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1971, с. 7—70.

Шаллер (Schaller Kay-Uwe)

1. Einige Sätze über Deck-Meide-Untergruppen endlicher auflösbarer Gruppen.— Math. Z., 1973, **130**, N 2, с. 199—206.
2. Über normal eingebettete Untergruppen endlicher auflösbarer Gruppen.— Arch. Math., 1974, **25**, N 4, с. 341—343.
3. Über Schunck-Klassen mit normal eingebetteten Projektoren.— J. Algebra, 1975, **36**, N 3, с. 435—437.
4. Über die maximale Formation in einem gesättigten Homomorph.— J. Algebra, 1977, **45**, с. 453—464.

Шамаш (Shamash J.)

1. On the Carter subgroup of a solvable group.— Math. Z., 1969, **109**, N 4, с. 288—310.

Шеметков Л. А.

1. Подгруппы сильно π-разрешимых групп.— ДАН БССР, 1964, **8**, № 8, с. 495—496.
2. Новая D-теорема в теории конечных групп.— ДАН СССР, 1965, **160**, № 2, с. 290—293.
3. D-строение конечных групп.— Матем. сб., 1965, **67**, № 3, с. 384—407.
4. О частично разрешимых конечных группах.— Матем. сб. 1967, **72** (114), № 1, с. 97—107.
5. Силовские свойства конечных групп.— Матем. сб., 1968, **76**, № 2, с. 271—287.
6. О конечных разрешимых группах, ИАН СССР, сер. матем., 1968, **32**, № 3, с. 533—559.
7. О существовании π-дополнений к нормальным подгруппам конечных групп.— ДАН СССР, 1970, **195**, № 1, с. 50—52.
8. О. Ю. Шмидт и конечные группы.— Укр. матем. ж., 1971, **23**, № 5, с. 586—590.
9. Дополнения и добавления к нормальным подгруппам конечных групп.— Укр. матем. ж., 1971, **23**, № 5, с. 678—689.
10. О формационных свойствах конечных групп.— ДАН СССР, 1972, **204**, № 6, с. 1324—1327.
11. О силовских свойствах конечных групп.— ДАН БССР, 1972, **16**, № 10, с. 881—883.

12. О дополняемости F-корадикала и свойствах F-гиперцентра конечной группы.— ДАН БССР, 1974, 18, № 3, с. 204—206.
13. Ступенчатые формации групп.— Матем. сб., 1974, 94, № 4, с. 628—648.
14. Внешняя насыщенность однородных формаций.— Всесоюзный алгебраический симпозиум (30 июня — 2 июля 1975 г.), тезисы докладов, ч. I, Гомель, 1975, с. 79.
15. $\mathfrak{F}$-разложение конечной группы.— Всесоюзный алгебраический симпозиум (30 июня — 2 июля 1975 г.), тезисы докладов, ч. I, Гомель, 1975, с. 80—81.
16. Два направления в развитии теории непростых конечных групп.— УМН, 1975, 30, № 2, с. 179—198.
17. О подгруппах π-разрешимых групп.— В кн.: Конечные группы. Минск, Наука и техника, 1975, с. 207—212.
18. Формационно-стабильные группы автоморфизмов.— Пятый Всесоюзный симпозиум по теории групп (Краснодар, 1—3 октября 1976 г.), тезисы докладов, Новосибирск, 1976, с. 104—105
19. Факторизации непростых конечных групп.— Алгебра и логика, 1976, 15, № 6, с. 684—715.
20. К теореме Д. К. Фаддеева о конечных разрешимых группах.— Матем. зам., 1969, 5, № 6, с. 665—668.

Шидов Л. И.

1. О максимальных подгруппах конечных групп.— Сиб. матем. ж., 1971, 12, № 3, с. 682—683.

Шлык В. В.

1. Конечные группы со сверхразрешимыми парами подгрупп.— ДАН БССР, 1971, 15, № 4, с. 299—301.
2. О влиянии формационных свойств максимальных подгрупп на строение конечной разрешимой группы.— ДАН БССР, 1973, 17, № 2, с. 109—112.
3. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах.— Матем. заметки, 1973, 14, № 3, с. 429—439.

Шмигирев Э. Ф.

1. О формационных свойствах подгрупп конечных групп.— ДАН БССР, 1975, 19, с. 775—777.
2. О некоторых вопросах теории формаций.— В кн.: Конечные группы. Минск, Наука и техника, 1975, с. 213—225.
3. $\mathfrak{F}$-нормализаторы в группах с разрешимым $\mathfrak{F}$-корадикалом.— ДАН БССР, 1976, 20, № 1, с. 8—11.

Шмид (Schmid P.)

1. Über die Stabilitätsgruppen der Untergruppenreihen einer endlichen Gruppe.— Math. Z., 1971, 128, N 4, с. 318—324.
2. Über die Automorphismengruppen endlicher Gruppen.— Arch. Math., 1972, 23, N 3, с. 236—242.
3. Untergruppenreihen normalisierende Automorphismengruppen.— Arch. Math., 1972, 23, N 5, с. 459—468.
4. Über den grössten nilpotenten Normalteiler der Automorphismengruppe einer endlichen Gruppe.— J. Algebra, 1973, 25, N 1, с. 165—171.
5. Formationen und Automorphismengruppen.— J. London Math. Soc., 1973, 7, N 1, с. 83—94.

6. Nilpotente Gruppen und Stabilitätsgruppen.— Math. Ann., 1973, 202, N 1, c. 57—69.
7. Lokale Formationen endlicher Gruppen.— Math. Z., 1974, 137, N 1, c. 31—48.

Шмидт Г. (Schmidt H. J., Jr.)
1. On normal complements of $\mathfrak{F}$-covering subgroups, Proc. Amer. Math. Soc., 1970, 25, N 2, c. 457—459.

Шмидт О. Ю.
1. Группы, все подгруппы которых специальные.— Матем. сб., 1924, 31, c. 366—372.

Шмидт Р. (Schmidt R.)
1. Zentralisatorverbände endlicher Gruppen. — Rend.— Semin. mat. Univ. Padova, 1970, 44, c. 97—131.
2. Verbandsisomorphismen endlicher auflösbarer Gruppen.— Arch. Math., 1972, 23, N 5, c. 449—458.
3. Lattice isomorphisms and saturated formations of finite soluble groups.— Lect. Notes Math., 1974, 372, c. 605—610.
4. Normal subgroups and lattice isomorphism in finite groups.— Proc. London Math. Soc., 1975, 30, N 3, c. 287—300.

Шульт (Shult E. E.)
1. A note on splitting in solvable groups.— Proc. Amer. Math. Soc., 1966, 17, N 2, c. 318—320.

Шунк (Schunck H.)
1. $\mathfrak{H}$-Untergruppen in endlichen auflösbaren Gruppen.— Math. Z., 1967, 97, N 4, c. 326—330.

Эберт, Бауман (Ebert G., Bauman S.)
1. A note on subnormal and abnormal chains.— J. Algebra, 1975, 36, N 2, c. 287—293.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Леонид Александрович Шеметков

ФОРМАЦИИ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

(Серия: «Современная алгебра»)

М., 1978 г., 272 стр. с илл.

Редактор *В. В. Донченко*

Техн. редактор *Л. В. Лихачева*

Корректоры *Л. Н. Боровина, В. П. Сорокина*

ИБ № 11188

Сдано в набор 05.04.78. Подписано к печати 14.08.78
Т-16202. Бумага 84×108 1/32, тип № 1.
Обыкновенная гарнитура. Высокая печать.
Усл. печ. л. 14,28. Уч.-изд. л. 14,88.
Тираж 4500 экз. Заказ № 458.
Цена книги 1 р. 80 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-90, Шубинский пер., 10

Алгебра — одна из наиболее подвижных частей математики. Последнее по счету крупное изменение ее структуры произошло в середине 20-го века, когда из чисто теоретической науки, снабжавшей идеями и методами более «прикладные» разделы математики, алгебра сама стала «прикладной» наукой, найдя непосредственные контакты с обширной областью синтеза и математического обеспечения вычислительной техники, с физикой и другими отраслями науки. Это послужило одним из стимулов к современному подъему алгебраических исследований, созданию новых алгебраических дисциплин и коренной перестройке ряда классических областей алгебры.

В серии «Современная алгебра» публикуются монографии, содержащие изложение современного состояния новых или наиболее быстро меняющихся разделов алгебры и смежных областей математики. Особое внимание уделяется освещению нерешенных вопросов и перспектив развития соответствующих разделов науки. Как правило, монографии этой серии независимы друг от друга и рассчитаны на квалифицированных читателей: научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов, занимающихся математикой и математическими вопросами других наук.

Книга представляет собой первую в мировой литературе попытку систематического изложения теории формаций конечных групп. Формации, т. е. классы групп, замкнутые относительно фактор-групп и подпрямых произведений, в различных конкретных проявлениях всегда находились в поле зрения исследователей по теории групп. Однако общее определение формации появилось сравнительно недавно — в 1963 г. Первоначально теория формаций развивалась в рамках теории разрешимых групп. Однако скоро было замечено, что методы теории формаций можно развивать и с успехом применять при исследовании не обязательно разрешимых групп, а также других алгебраических систем (алгебр Ли).

В книге освещаются все основные достижения теории формаций конечных групп. Излагаются результаты о силовских свойствах, послужившие базой для создания теории формаций. Приводятся общие методы построения формаций, основанные на понятии экрана. Исследуются формационно стабильные группы автоморфизмов; в частности, излагаются результаты автора и П. Шмида, посвященные проблеме формационной стабильности. Решается задача о внешней характеризации сверхразрешимости. Освещаются многочисленные результаты, посвященные существованию и сопряженности формационных проекторов. Подробно рассматривается вопрос о дополняемости корадикалов. Конструируются формационные нормализаторы и исследуются их свойства. Исследуются минимальные группы, не принадлежащие формации.

Книга рассчитана на математиков — аспирантов и научных работников. Она может быть использована при чтении специальных курсов для студентов математических отделений университетов и педагогических институтов.