

Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»

Государственное научное учреждение  
«Институт физики имени Б.И. Степанова»  
Национальной академии наук Беларуси

Белорусский республиканский фонд фундаментальных исследований

# **ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ**

**(ПОСВЯЩАЕТСЯ 90-ЛЕТИЮ  
СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ Б. В. БОКУТЯ)**

Материалы IV Международной научной конференции

(Гомель, 9–11 ноября 2016 года)

В двух частях

Часть 1

Электронное издание

Гомель  
ГГУ имени Ф. Скорины  
2016

УДК 538.97

**Проблемы взаимодействия излучения с веществом** [Электронный ресурс] : IV Международная научная конференция, посвященная 90-летию со дня рождения Б. В. Бокутя (Гомель, 9–11 ноября 2016 г.) : материалы : в 2 ч. Ч. 1. – Электрон. дан. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). – Систем. требования: IBM-совместимый компьютер; Windows XP; ОЗУ 512 Мб; CD-ROM 8-х и выше. – Загл. с этикетки диска.

В сборнике помещены материалы докладов IV Международной научной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Б. В. Бокутя, по следующим направлениям: нелинейная оптика, оптическая гиротропия, упругие волны, фотоакустика, акустооптика, электрослабые свойства микрочастиц, электродинамические и адронные процессы взаимодействия, гравитация, физика лазеров и лазерные технологии, ионно-лучевые и плазменные технологии, формирование структуры и свойства покрытий, инструменты и методы автоматизации научных исследований, моделирование систем и процессов, моделирование и обработка изображений, стратегия формирования образовательно-научной инфосреды.

Адресуется научным работникам, аспирантам, магистрантам, студентам.

**Редакционная коллегия:**

С. А. Хахомов (главный редактор), А. Н. Сердюков,  
Н. В. Максименко, И. В. Семченко, А. В. Рогачев, О. М. Демиденко,  
Ю. В. Никитюк, Д. Л. Коваленко, О. М. Дерюжкова, Н. А. Алешкевич,  
В. В. Андреев, В. Д. Левчук, В. Н. Мышковец, Е. Б. Шершнев

УО «ГГУ имени Ф. Скорины»  
246019, Гомель, ул. Советская, 104,  
<http://www.gsu.by>

© Учреждение образования «Гомельский  
государственный университет  
имени Франциска Скорины», 2016



**Борис Васильевич Бокуть**  
**(27.10.1926 – 15.03.1993)**

**IV Международная научная конференция**

**ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ  
С ВЕЩЕСТВОМ**

**(Посвящается 90-летию со дня рождения Б.В. Бокутя)**

**9–11 ноября 2016 г.**

**Гомель, Беларусь**

Конференция посвящена 90-летию со дня рождения Б.В. Бокутя – выдающегося белорусского физика и организатора науки, академика АН БССР, ректора Гомельского государственного университета (1973–1989 годы), лауреата Государственной премии СССР, автора более 200 научных работ, в том числе 3 монографий и 20 изобретений. Конференция работала по направлениям, в развитие которых Б.В. Бокуть внес существенный вклад: нелинейная оптика, кристаллооптика, акустооптика, физика лазеров, теория электромагнетизма, лазерные технологии.

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ**

1. Рогачев Александр Владимирович, член-корреспондент (председатель)
2. Сердюков Анатолий Николаевич, член-корреспондент (зам. председателя)
3. Апанасевич Павел Андреевич, академик
4. Афанасьев Анатолий Александрович, член-корреспондент
5. Белый Владимир Николаевич, член-корреспондент
6. Воропай Евгений Семенович, профессор
7. Гончаренко Андрей Маркович, академик
8. Достанко Анатолий Павлович, академик
9. Казак Николай Станиславович, академик
10. Константинова Алиса Федоровна, профессор (Россия)
11. Максименко Николай Васильевич, профессор
12. Мышкин Николай Константинович, академик
13. Орлович Валентин Антонович, академик
14. Гапоненко Сергей Васильевич, академик
15. Семченко Игорь Валентинович, профессор
16. Сихвола Ари, профессор (Финляндия)
17. Третьяков Сергей Анатольевич, профессор (Финляндия)
18. Стражев Василий Иванович, профессор
19. Стренк Веслав, доктор (Польша)
20. Митюринч Георгий Семенович, профессор

## **ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТ**

1. Хахомов Сергей Анатольевич, ректор УО «ГГУ им. Ф. Скорины» (председатель)
2. Демиденко Олег Михайлович, проректор по научной работе УО «ГГУ им. Ф. Скорины» (зам. председателя)
3. Никитюк Юрий Валерьевич, проректор по воспитательной работе УО «ГГУ им. Ф. Скорины» (зам. председателя)
4. Коваленко Дмитрий Леонидович, декан физического факультета УО «ГГУ им. Ф. Скорины» (зам. председателя)
5. Дерюжкова Оксана Михайловна, заместитель декана физического факультета УО «ГГУ им. Ф. Скорины» по науке (ученый секретарь)
6. Самофалов Андрей Леонидович, заместитель декана физического факультета УО «ГГУ им. Ф. Скорины» (секретарь)
7. Алешкевич Николай Александрович, заведующий кафедрой оптики УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

8. Андреев Виктор Васильевич, заведующий кафедрой теоретической физики УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

9. Левчук Виктор Дмитриевич, заведующий кафедрой АСОИ УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

10. Мышковец Виктор Николаевич, заведующий кафедрой радиофизики и электроники УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

11. Шершнев Евгений Борисович, заведующий кафедрой общей физики УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

12. Шалупаев Сергей Викентьевич, доцент кафедры общей физики УО «ГГУ им. Ф. Скорины»

## **СЕКЦИИ КОНФЕРЕНЦИИ**

### **1. «Оптика и акустика кристаллов бианизотропных структур»**

(нелинейная оптика, гиротропия в оптике и акустике кристаллов)

Председатели:

Сердюков Анатолий Николаевич, член-корр.

Шепелевич Василий Васильевич, профессор

### **2. «Теория фундаментальных взаимодействий»**

(электрослабые свойства микрочастиц, электродинамические и адронные процессы взаимодействия, гравитация)

Председатели:

Тимошин Сергей Иванович, профессор

Максименко Николай Васильевич, профессор

### **3. «Новые материалы и технологии»**

(физика лазеров и лазерные технологии, ионно-лучевые и плазменные технологии, формирование структуры и свойства покрытий)

Председатели:

Рогачев Александр Владимирович, член-корр.

Воропай Евгений Семенович, профессор

### **4. «Автоматизация научных исследований»**

(инструменты и методы автоматизации научных исследований, моделирование систем и процессов, моделирование и обработка изображений, стратегия формирования образовательно-научной инфосреды)

Председатели:

Демиденко Олег Михайлович, профессор

Левчук Виктор Дмитриевич, доцент

## МЕСТА РАБОТЫ СЕКЦИЙ

1. Оптика и акустика кристаллов бианизотропных структур  
10 ноября 2016 г., корпус 5, ул. Советская, 102, ауд. 4-27.

2. Теория фундаментальных взаимодействий  
10 ноября 2016 г., корпус 5, ул. Советская, 102, ауд. 3-7.

3. Новые материалы и технологии  
10 ноября 2016 г., корпус 5, ул. Советская, 102, ауд. 2-11.

4. Автоматизация научных исследований  
10 ноября 2016 г., корпус 5, ул. Советская, 102, ауд. 4-10.

## РЕГЛАМЕНТ

Доклады на пленарном заседании	— до 20 минут
Доклады и сообщения на секциях	— до 10 минут
Участие в дискуссиях	— до 5 минут

## ПОРЯДОК РАБОТЫ КОНФЕРЕНЦИИ

9 ноября 2016 г.

**9<sup>00</sup> – 13<sup>00</sup>** – регистрация участников

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 102, корпус №5, фойе 1 этажа).

**14<sup>00</sup>** – возложение цветов к мемориальной доске Б.В.Бокутя

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 102, корпус №5).

Открытие аудитории имени академика Бокутя Б.В.

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 102, корпус №5, ауд. 4-27).

**15<sup>00</sup> – 17<sup>00</sup>** – открытие конференции, пленарное заседание

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 104, корпус №4, читальный зал).

**17<sup>30</sup>** – конференционный ужин (ул. Песина, 4).

10 ноября 2016 г.

**9<sup>00</sup> – 12<sup>00</sup>** – работа секций

**Секция «Оптика и акустика кристаллов бианизотропных структур»**

Ауд. 4-27, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Теория фундаментальных взаимодействий»**

Ауд. 3-7, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Новые материалы и технологии»**

Ауд. 2-11, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Автоматизация научных исследований»**

Ауд. 4-10, корпус 5, ул. Советская, 102.

**12<sup>00</sup> – 13<sup>00</sup>** – стендовые доклады

(Выставочный зал, корпус № 4, ГГУ им. Ф. Скорины).

**13<sup>00</sup> – 14<sup>00</sup>** – обеденный перерыв.

**14<sup>00</sup> – 15<sup>00</sup>** – работа секций

**Секция «Оптика и акустика кристаллов бианизотропных структур»**

Ауд. 4-27, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Теория фундаментальных взаимодействий»**

Ауд. 3-7, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Новые материалы и технологии»**

Ауд. 2-11, корпус 5, ул. Советская, 102.

**Секция «Автоматизация научных исследований»**

Ауд. 4-10, корпус 5, ул. Советская, 102.

**15<sup>00</sup> – 16<sup>00</sup>** – обсуждение результатов конференции.

**16<sup>00</sup>** – экскурсия в дворцово-парковый ансамбль Румянцевых и Паскевичей  
(Сбор у корпуса № 5, ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 102).

11 ноября 2016 г.

**12<sup>00</sup> – 13<sup>00</sup>** – посещение лабораторий физического факультета

(ГГУ им. Ф. Скорины, ул. Советская, 104, 102, корпуса №4, №5).

**WWW страница:** <http://gsu.by/physfac/index.php/2010-02-04-14-08-07/2010-02-04-14-08-32/1014.html>

## ПЛЕНАРНОЕ ЗАСЕДАНИЕ

1. С.А. Хахомов, Ректор УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Открытие конференции.

2. С.А. Хахомов, И.В. Семченко, УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь.

Метаматериалы для сверхвысокочастотного и терагерцового диапазонов.

3. В.Н. Белый, Н.С. Казак, ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси, Минск, Беларусь.

Метаматериалы в оптической области спектра: свойства и применение.

4. А.Ф. Константинова, Т.Г. Головина, К.К. Константинов, Е.А. Евдищенко, Институт кристаллографии имени А.В. Шубникова, ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Москва, Россия.

Необычные случаи проявления оптической активности в одноосных кристаллах.



# Содержание

## Оптика и акустика кристаллов бианизотропных структур

<i>Belyi V.N., Kazak N.S., Stepanov B.I.</i> Metamaterials in optical spectral region: properties and perspectives of application.....	12
<i>Гиргель С.С.</i> Ассиметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка...	18
<i>Гиргель С.С.</i> Ассиметричные пучки Бесселя-Гаусса непрерывного порядка....	24
<i>Гришечкин Ю.А., Капшай В.Н.</i> Возбуждение би-изотропной сферической частицы дипольным излучателем.....	32
<i>Константинова А.Ф., Головина Т.Г., Константинов К.К., Евдищенко Е.А.</i> Необычные случаи проявления оптической активности в одноосных кристаллах..	37
<i>Кулак Г.В., Крох Г.В., Николаенко Т.В.</i> Промежуточный режим дифракции бесселевых световых пучков на ультразвуке в гиротропных кристаллах.....	41
<i>Кулак Г.В., Крох Г.В., Николаенко Т.В., Ропот А.П.</i> Неколлинеарная брегговская дифракция бесселевых световых пучков высших порядков в кубических гиротропных кристаллах.....	45
<i>Макаревич А.В., Шепелевич В.В., Шандаров С.М.</i> Экспериментальное изучение зависимости выходных характеристик смешанных голограмм от толщины фоторефрактивного пьезокристалла ВТО.....	50
<i>Митюрин Г.С., Лебедева Е.В., Свиридова В.В., Сердюков А.Н.</i> Фотоакустическое преобразование бесселевых световых пучков в слое хиральных углеродных нанотрубок.....	55
<i>Митюрин Г.С., Хило П.А., Сердюков А.Н.</i> Фотодефлекционный отклик от периодически поляризованного нелинейного кристалла, облучаемого бесселевым световым пучком.....	60
<i>Семченко И.В., Хахомов С.А., Гончаренко А.М., Сеницын Г.В., Самофалов А.Л., Подалов М.А.</i> Моделирование гибких металлполимерных высокопоглощающих неотражающих покрытий на основе трехмерных элементов для ТГц диапазона.....	69
<i>Семченко И.В., Хахомов С.А., Гончаренко А.М., Сеницын Г.В., Самофалов А.Л., Подалов М.А.</i> Эффективные тензоры диэлектрической и магнитной проницаемостей метаматериала на основе омега-элементов прямоугольной формы с оптимальными параметрами.....	74
<i>Тихова Е.Л., Кондратенко В.И.</i> Преобразование информационного пучка в плоском слое.....	79
<i>Хомченко А.В., Примак И.У., Василенко А.Н.</i> Поляризационная интерферометрия неоднородных полей механических напряжений в закаленном стекле.....	83

<i>Шамына А.А., Капшай В.Н.</i> Влияние ориентации эллипса поляризации падающего излучения на генерацию второй гармоники от поверхности конечного цилиндра.....	88
<i>Шаповалов П.С.</i> Описание взаимодействия лазерных пучков в нелинейных средах.....	93

## Теория фундаментальных взаимодействий

<i>Авакян Е.З., Авакян С.Л., Задорожнюк М.В.</i> Адронные взаимодействия тяжелого лептона.....	97
<i>Андреев В.В., Бабич К.С., Дорохов А.Е.</i> Структурные релятивистские эффекты высших порядков для водородоподобных систем.....	102
<i>Андреев В.В., Крутов А.Ф.</i> Углы смешивания из распадов векторных мезонов.....	108
<i>Ахраменко Н.А.</i> Гравитационный дефект массивного шара.....	116
<i>Вакулина Е.В., Максименко Н.В.</i> Спиновые поляризуемости и характеристики адронов спина 1 связанные с несохранением четности в формализме Даффина-Кеммера-Петью .....	120
<i>Гавриш В.Ю., Андреев В.В.</i> Распад $\phi \rightarrow \eta e^+ e^-$ в точечной форме пуанкаре-инвариантной квантовой механики.....	126
<i>Дегтярева Е.А., Тимошин С.И.</i> Полуинклюзивное глубоконеупругое рассеяние поляризованных лептонов на поляризованных дейтронах.....	131
<i>Дей Е.А.</i> Расчет свойств мезонов на основе численного решения системы интегральных уравнений Солпитера.....	136
<i>Дей Е.А.</i> Эффективность метода конечных разностей при решении двумерного стационарного уравнения Шредингера.....	141
<i>Желонкина Т.П., Лукашевич С.А., Яковенко В.И.</i> Методы статистической физики в современном курсе общей физики.....	146
<i>Капшай В.Н., Фиалка С.И.</i> Суперпозиция $\delta$ -потенциалов в задаче о рассеянии релятивистских частиц со спинами 0 и $1/2$ .....	151
<i>Максименко Н.В., Дерюжкова О.М., Андреев В.В.</i> Спиновые поляризуемости адронов спина $1/2$ в ковариантном теоретико-полевом подходе.....	156
<i>Овсюк Е.М., Войнова Я.А., Редьков В.М.</i> Релятивистская частица со спином 0 в электрическом поле. I.....	163
<i>Овсюк Е.М., Войнова Я.А., Редьков В.М.</i> Релятивистская частица со спином 0 в электрическом поле. II.....	168
<i>Pankov A.A., Tsytrinov A.V.</i> Probing and identifying new physics scenarios at ILC with polarized beams.....	173
<i>Русановская Я.Н., Тюменков Г.Ю., Штромберг Д.А.</i> Модельные функции плотности для планет земной группы.....	177

<b><i>Рыжый М.С.</i></b> Гравитационно-резонансная координация (адаптация) фундаментальных взаимодействий и получение системного эффекта на поверхности Земли.....	182
<b><i>Сердюкова М.А.</i></b> Влияние фонового поля темной энергии на характер распада долгоживущих изотопов U-238 и Th-232.....	186
<b><i>Тимошин Е.С., Тимошин С.И.</i></b> Кварковые вклады в спин нуклона из совместного анализа глубоконеупругого лептон-нуклонного рассеяния с заряженным и нейтральным токами.....	190
<b><i>Тимошин Е.С., Тимошин С.И.</i></b> Глубоконеупругое лептон-нуклонное рассеяние с нейтральным током при поляризации одной и двух начальных частиц.....	196
<b><i>Тюменков Г.Ю., Песенко А.Ю., Богданович Д.А.</i></b> О новых периодических орбитах тройных систем с ньютоновским гравитационным взаимодействием.....	201

# **Оптика и акустика кристаллов бианизотропных структур**

Председатели – Сердюков А.Н., Шепелевич В.В.

**V.N. Belyi, N.S. Kazak**

B.I. Stepanov Institute of Physics, National Academy of Sciences of Belarus,  
Minsk, Belarus

## **METAMATERIALS IN OPTICAL SPECTRAL REGION: PROPERTIES AND PERSPECTIVES OF APPLICATION**

### **Introduction**

The past ten years have seen the emergence of metamaterials in optical spectral region characterized by extraordinary properties. Their ability to manipulate parameters of light radiation in new ways led to many novel applications. Examples include super resolution imaging, negative refraction, optical cloaking, enhance nonlinear interaction and others. Metamaterials are engineered composite materials containing sub-wavelength inclusions (meta “atoms”) that allow for custom-tailored electromagnetic response of the medium. This easily brings novel and unique features which are not available in natural materials. The sizes of meta “atoms” and distances between them are much smaller than the radiation wavelength. That is why the radiation “sees” the arrays of such meta “atoms” as a continuous medium with definite values of efficient permittivity and permeability.

The history of metamaterials begins with the publication of Russian physicist Viktor Veselago in 1968 [1]. In his seminal paper the possibility of existing of a material with negative refraction index was discussed. The immense flow of the research in electromagnetic metamaterials, observed since the beginning of the 21-st century, has been widely popularized (see, for example, [2–5]). At the 5th International Conference on Metamaterials, Photonic Crystals and Plasmonics (META’14 – Singapore) it was mentioned that during the last decade a number of publications increases exponentially. Here the plot of this dependence coincides with the exponential curve of the growth of a number of publications on quantum electronics and laser physics of 1960-70. In this report, the state of art have been analyzed in the theory and practice of light propagation and transformation (amplitude, polarization, directivity) in optical metamaterials having different structures and echnologies of fabrication and possessing a potential for broadband manipulation of the density of photonic states and subwavelight confinement.

## 1. The methods of fabrication of optical metamaterials

Some methods of optical metamaterials fabrication exist, among of them ones based on using: i) nanoporous dielectric matrices with pores filled with metal; ii) nanosized metal-dielectric structures, iii) self-assembled and oriented metal nanoparticles. At the Institute of Physics of National Academy of Sciences of Belarus (NASB) there were developed new technological methods for creation of metamaterials. First of them is based on using the porous anodic aluminum oxide template with implemented metal nanorods [6, 7] (figure 1).

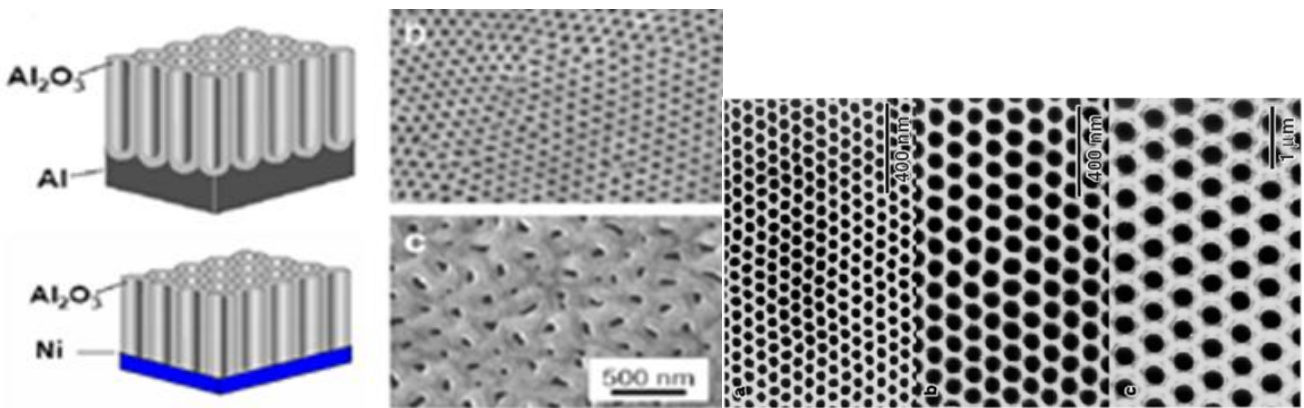


Figure 1 – SEM-photo of periodic nanoporous alumina structure obtained in various types of electrolyte: a) sulfuric acid; b) oxalic acid; c) phosphor acid

The manufactured samples of anodic aluminum oxide with nanopores with sizes from 40 up to 80 nm filled with silver and gold are characterized by negative refraction. It is proposed and patented the original construction of a hyperbolic metamaterial used for the work in a wide optical range of wavelengths and consisting of nanoporous aluminum-oxide ceramics with the system of alternating nanoholes with the diameter from 30 up to 50 nm filled with silver [8].

The second approach to creating the hyperbolic metamaterials in the Institute of Physics of NASB is based on realizing the structure of alternating layers of metal nanoparticles with those of semiconductor quantum dots, which also serve as emitting centers [9].

At the B.I. Stepanov Institute of Physics of NASB the perspectives have been considered of creation of metamaterials with small losses on the basis of semiconducting structures: alloyed AlGa<sub>N</sub>/Ga<sub>N</sub> supergratings, heterostructures with different conductivity.

It should be noted the investigations conducted in collaboration with French scientists. It is suggested the method of self-assembled nanoparticles templates as a technique for manufacturing fishnet type metamaterials [10, 11]. Self-organized nanoparticles template is a structure of closely packed spheres where voids between

them are used for introducing metal and polymer layers. By varying spacing between the spheres, their diameter and concentration of metal one can get different types of ordered structures (figure 2). This technology allows to manufacture homogeneous metamaterials covering relatively large area up to several  $\text{cm}^2$  being cheap and simple in comparison to lithography of nano-sized structures. Besides this, fishnet metamaterials, which are produced naturally with this technology, are capable of achieving properties on negative and near-zero index materials over a tunable wavelength range. It was demonstrated that self-organized nanoparticle templates could be used for fabricating fishnet structures with negative effective refractive index. The simulation of the optical properties of gold-polymer multilayer film in nanoparticles template has performed. Variation of number of metal layers and other geometrical parameters shows different cases of design when either maximum magnitude of negative refractive index or minimal absorption and maximal transparency are observed.

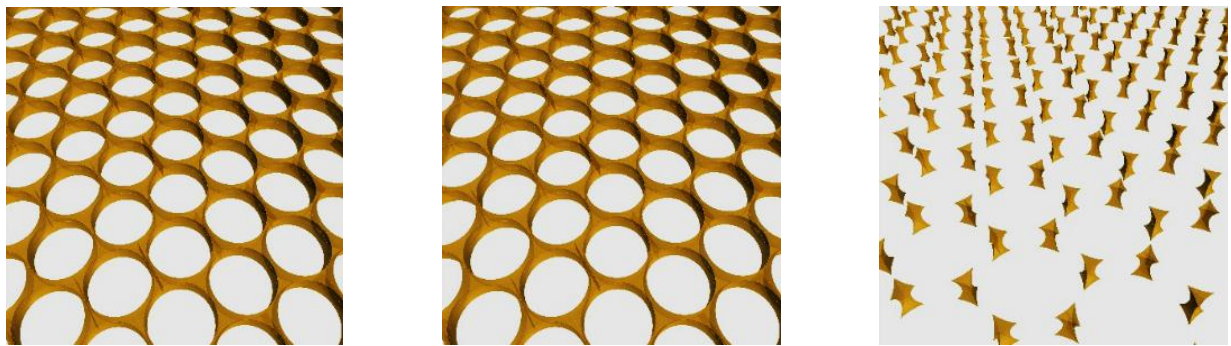


Figure 2 – Different types of metal skeletons that could be constructed with the technology of self-assembled nanoparticles templates

Some perspective technologies are developed at the Institute of Chemistry of New Materials of NASB [12–15]. This technologies are based on the creation of ordered structures of metal (or semiconducting) nanoparticles in polymer materials, alternate thin films of polymer-metal, mono- and multimolecular films of Langmuire-Blodgett containing metal nanoparticles, net polymer structures with metal filling of cells.

## 2. Plasmon-polaritons in metamaterials

A number of research works have been attributed to plasmon-polaritons in metamaterials. There have been investigated the peculiarities of excitation and properties of new types of plasmon-polaritons, so called Bessel plasmon-polariton, possessing the property of (quasi) nondiffraction. Particularly, singular radiative Bessel plasmon-polariton in epsilon-near-zero (ENZ) has been predicted. This new type of surface plasmonic field is cylindrically symmetric interference structure with phase

singularity in its center and amplitude exponentially decaying into metamaterial and radiative into free space.

For the first time there was discovered and studied a new type of surface plasmonic field localized near the boundary of metamaterial – Bessel multi-plasmon (figure 3). This type of oscillation is characterized by a distinct, symmetrically arranged in near-axial region super narrow intensity maxima, retain their spatial structure away from the boundary. The Bessel multi-plasmon has prospects for creating a new type of virtual optical quasi nondiffracting tips for near-field microscopy.

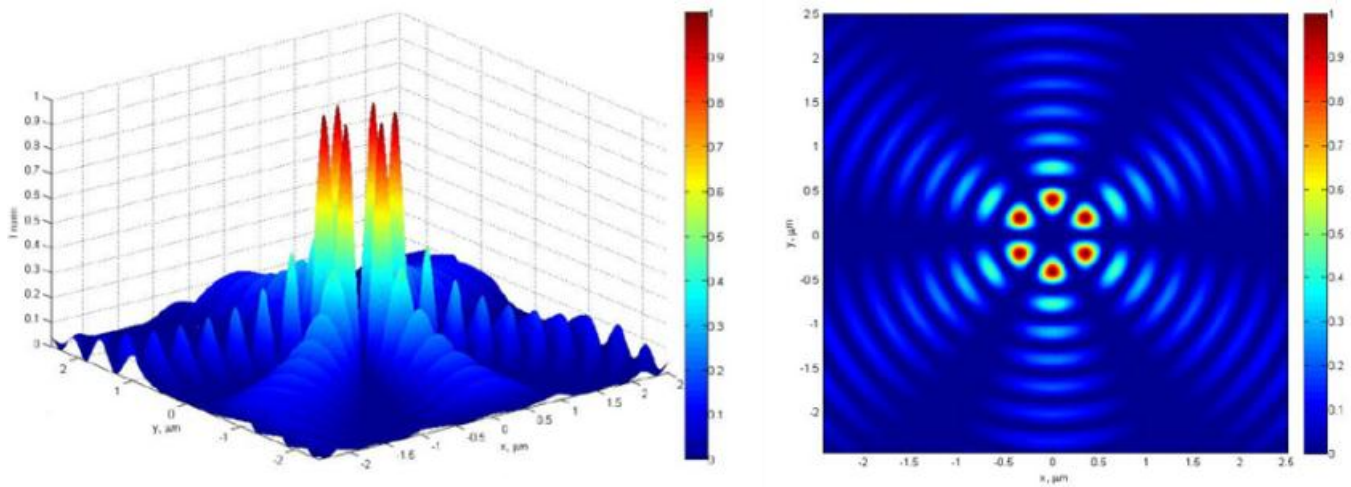


Figure 3 – 3D and 2D pattern of intensity distribution of Bessel multi-plasmon

### 3. Superlenses on the basis of metamaterials

At the B.I. Stepanov Institute of Physics of NASB, on the basis of the fabricated hyperbolic metamaterials there have been proposed and realized new configurations of flat lenses (so called superlenses) of near and far field in a spectral region from ultraviolet up to infrared radiation (figures 4, 5). The developed superlenses of near field provide spatial resolution below the diffraction limit and allow achieving high local amplification of intensity (for example, at the wavelength of  $\lambda = 365$  nm the resolution is  $\lambda/5$  and the amplification is 30). There has been determined and proved experimentally the light focusing criterion, namely, the presence of negative curvature of flat lens phase characteristic. For the first time it has been established that for the incident on a superlens light filed with radial polarization the regime of focusing is realized and with the azimuthal polarization – regime of channeling, i.e. the formation of narrow nondivergent light beam.

New ways have been proposed of application of near-field lens for formation of two-scale light field, for resonance-amplified nanolithography and so on.

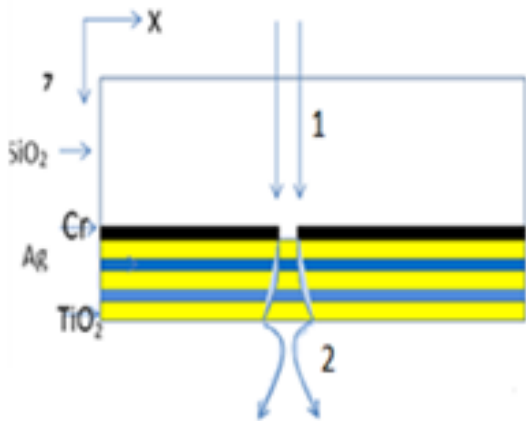


Figure 4 – Novel construction of flat superlens based on hyperbolic metamaterial – multilayer metal – dielectric structure:  
 1 – incident light beam,  
 2 – beam at the output from lens (focused)

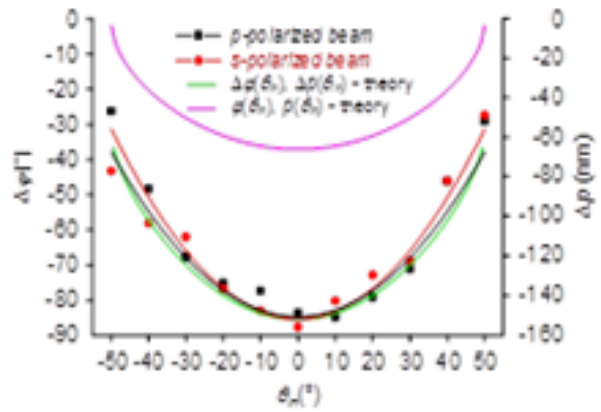


Figure 5 – Dependence of phase shift  $\Delta\phi$  and optical path difference  $\Delta p$  of superlens based on polymer with gold nanoparticles on light incident angle  $\theta_{in}$

#### 4. Development of optical schemes and devices for characterization of some properties of metamaterials

New methods are developed and devices are created for characterization of optical properties of metamaterials [16–19]. It should be noted the high-sensitive interferometry method and device for measurement of phase shift between two linearly polarized beams passing the absorbing layer of metamaterial. They allow measuring the optical constants of the created metamaterials.

#### Conclusions

In the Institute of Physics of NASB intensive investigations are carried out of new advanced materials – metamaterials. A number of technologies are developed. Prospects for new scientific directions are determined. Among of them there are investigations of fish-net metamaterials possessing optical magnetism, optical metamaterials with extremal parameters (particularly, with very small dielectric permittivity). Some interesting effects are discovered in these media: tunneling radiation through super narrow channel, formation of narrowband light beams, amplifying of optical nonlinearities.

The demonstration of the superlens operation is one of the most forecasting property of materials with negative refraction index and this is the sign of quick progress in this developing area. The magic of metamaterials and negative refraction should be “converted” into an applied technology. This step needs improvement of the construction of metamaterials and their production on a reasonable price.



## Literature

1. Veselago, V.G. The electrodynamics of substances with simultaneously negative values of  $\epsilon$  and  $\mu$  / V.G. Veselago // *Sov. Phys. Usp.* – 1968. – Vol. 10. – P. 509–514.
2. Eleftheriades, G.V. *Negative-Refractive Metamaterials: Fundamental Principles and Applications* / G.V. Eleftheriades, K.G. Balmain. – NJ : Wiley, 2005.
3. Caloz, C. *Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications* / C. Caloz, T. Itoh. – NJ : Wiley, 2006.
4. Marqués, R. *Metamaterials with negative parameters* / R. Marqués, F. Martín, M. Sorolla. – NJ: Wiley, 2008.
5. Cai, W. *Optical Metamaterials: Fundamentals and Applications* / W. Cai, V. Shalaev. – New York : Springer, 2009.
6. Effect of annealing on the phase composition and morphology of Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> formed in a complex electrolyte / N.I. Mukhurov [et al.] // *Journal of Surface Investigation.* – 2014. – Vol. 8. – № 4. – P. 110–118.
7. Optical Properties of Anodic Aluminum Oxide Produced in a Complex Electrolyte / I.V. Gasenkova [et al.] // *Journal of Surface Investigation.* – 2014. – Vol. 8. – № 4. – P. 636–640.
8. Construction of hyperbolic metamaterial for an optical spectral range / N.I. Mukhurov [et al.] // Patent USA № 14934592 dated 11.06.2015.
9. Hyperbolic metamaterials based on quantum-dot plasmon-resonator nanocomposites / V. Zhukovsky [et al.] // *Opt. Express.* – 2014. – Vol. 22. – P. 18290–18298.
10. Bottom-up design, fabrication and optical characterization of a bi-pyramidal gold nanopillar array embedded in a transparent and flexible substrate / H. Zheng [et al.] // *Meta 2014 Conference*, 20–23 May, 2014, Singapore.
11. Kozik, S. Simulation of Negative Refraction Condition for Fishnet Structures Based on Self-assembled Nanoparticles Templates/ S. Kozik, S. Ravaine, V. Belyi, N. Kazak // 9th International Congress on Advanced Electromagnetic Materials in Microwaves and Optics – *Metamaterials 2015*, Oxford, United Kingdom, 7–12 September 2015. – 2015. – P. 520–522.
12. Formation and properties of films based on polyvinyl alcohol and doped with silver nanoparticles / A.L. Potapov [et al.] // *Appl. Surf. Sci.* – 2015. – Vol. 35. – P. 121–128.
13. Composite thin film materials on the basis of silver nanostructures on polymer matrix by method of chemical metallization and self-assembling / E. Skoptsov [et al.] // *Meta'14-Singapore*, Book of abstract. – 2014 – P. 681–683.
14. Kulikovskaya, V.I. Determination of conditions for selective modification of polymer honeycomb films surface by silver nanoparticles / V.I. Kulikovskaya,

M.A. Binhussain. V.F. Agabekov // International Conference “Methodological aspects of scanning probe microscopy”, Belarus, Minsk, October, 21–24, 2014. – P. 108–111.

15. Composite thin film materials on the basis of silver nanostructures on polymer matrix by methods of chemical metallization and self-assembling / E. Skoptsov [et al.] // Applied Physics A. – 2014. – Vol. 117. – P. 713–718.

16. Differential polarization interferometer / A.V. Agashkov, N.S. Kazak, V.E. Agabekov, M.S.O. Alshammari, M.A. Binhussain // Russia Patent № a20150084 from 09.02.2015.

17. The method of determining an optical metamaterial and the device for its realization / P.I. Ropot, N.S. Kazak, Mohammed A Binhussain, A.P. Ropot // Russia Patent № a20131440 dated 04.12.2013.

18. Differential polarization interferometer / A.V. Agashkov, N.S. Kazak, V.E. Agabekov, M.S.O. Alshammari, M.A. Binhussain // USA Patent № 14929374 dated 01.11.2015.

19. Differential polarization interferometer / A.V. Agashkov, N.S. Kazak, V.E. Agabekov, M.S.O. Alshammari, M.A. Binhussain // EU Patent № 16154687.4 dated 08.02.2016. Publication Bulletin 2016/32 dated 10.08.2016.

**С.С. Гиргель**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **АСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ БЕССЕЛЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА**

### **Введение**

В настоящее время продолжается бум в поиске и исследовании новых типов световых пучков [1–4]. Большой интерес привлекают пучки Бесселя [5–9]. Дурнин [4] впервые обратил внимание на то, что пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности, и экспериментально подтвердил это. Впрочем, еще Стрэттон [10] в 1948 году описал решения уравнения Гельмгольца, содержащие функции Бесселя целочисленного порядка. Недавно, Тао и др. [3] ввели непрерывный индекс  $\nu$  для пучков Бесселя и описывали так называемые фракционные (fractional) пучки Бесселя. В наших работах [11–14] исследовались поляризационные и энергетические характеристики векторных пучков Бесселя. Совсем недавно, Ковалев и Котляр [6–8] ввели скалярные асимметричные моды Бесселя (aB-моды) целочисленного индекса, у которых

поперечные координаты  $x$  и  $y$  имеют дополнительные сдвиги (вещественные или комплексные).

В настоящей работе результаты [6–9] обобщаются и вместо целочисленного порядка вводится непрерывный неотрицательный порядок  $\nu \geq 0$ . и обсуждаются новый тип пучков – фракционные асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка.

### 1. Волновые поля Бесселя и их обобщения

Для монохроматического излучения ( $E \sim \exp(-i\omega t)$ ) волновые поля описываются уравнением Гельмгольца, которое, в частности, имеет классическое решение [1, 2, 10]

$$E = A \exp[i(z\sqrt{k^2 - \alpha^2} + n\varphi)] J_n(\alpha\rho), \quad (1)$$

выражающиеся через цилиндрические функции 1 рода – функции Бесселя  $J_\nu$ . С физической точки зрения стандартный пучок Бесселя представляет суперпозицию плоских монохроматических волн, волновые векторы каждой из которых расположены по круговому конусу вокруг оси  $z$ . Для физических приложений в теории планарных и цилиндрических волноводов применяются также и цилиндрические функции третьего рода – функции Ханкеля  $H_n$ .

Ковалев и Котляр [6–8] ввели более общие асимметричные моды Бесселя (*aB*-моды) целочисленного индекса, у которых поперечные координаты  $x$  и  $y$  имеют дополнительные сдвиги

$$E_n(x, y, z) = A \exp\left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) \cdot \left[\frac{x_1 + iy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right]^n J_n\left(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right). \quad (2)$$

где  $x_1 = x - x_0$ ,  $y_1 = y - y_0$ . Константы  $x_0$ ,  $y_0$  – произвольные комплексные параметры комплексных смещений поперечных координат  $x$  и  $y$ . Цилиндрическая система координат хорошо приспособлена для физических объектов, обладающих вращательной симметрией, например, для стандартных поле Бесселя (1). Однако она становится не совсем удобной для асимметричных пучков, у которых цилиндрическая симметрия нарушается. По-видимому, поэтому в работах [6–9] обсуждаются частные случаи *aB*-мод. Практически авторы применяли вещественный  $x_0$  сдвиг по  $x$  и чисто мнимый сдвиг по  $y$ , т. е.  $y_0 = -ix_0$ , чтобы упростить получающиеся выражения в цилиндрической системе координат. В поперечном сечении *aB*-мод (при определенном соотношении между параметрами) распределение интенсивности имеет вид полумесяца [7, 8]. Экспериментально наблюдали острую фокусировку *aB*-мод с помощью жидкокристаллического дисплея и зонной пластинки (см. также недавнюю экспериментальную работу [9]).

Сначала [6–7] авторы получили  $aB$ -моды путем суперпозиции обычных мод Бесселя. Позже они заметили [8], что выражения для  $aB$ -мод можно также получить путем комплексных смещений поперечных координат  $x$  и  $y$ . Авторы отметили, что когда  $x_1^2 + y_1^2 \rightarrow 0$  в (2), тогда одновременно и аргумент функции Бесселя стремится к нулю и неопределенность раскрывается.

Следует заметить, что прием записи набега комплексной фазы в (2), использующий формулу  $\arctg(t) = (-i/2) \ln[(1+it)/(1-it)]$ , не нов и использовался ранее в работе [4] для описания волнового пакета 2-D X-волн Бесселя.

Выражения для асимметричных волновых полей Бесселя (1) можно обобщить, если вместо целочисленного индекса  $n$  взять непрерывный индекс  $\nu$ . Так как функция Бесселя имеет особенность при  $x_1^2 + y_1^2 \rightarrow 0$ , то отсюда следует, что индекс  $\nu$  должен быть неотрицательным, т.е.  $\nu \geq 0$ . В итоге получаем пятипараметрические асимметричные бездифракционные непараксиальные волновые поля Бесселя непрерывного порядка.

$$E_\nu(x, y, z) = A \exp\left(iz\sqrt{k^2 - \alpha^2}\right) \cdot \left[\frac{x_1 + iy_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}\right]^\nu J_\nu\left(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\right). \quad (3)$$

Какие ограничения следует наложить на свободные параметры в (3)? Известно, что, с математической точки зрения, в общем случае, согласно [14], у функции Бесселя 1 рода аргумент  $u$  и порядок (или индекс)  $\nu$  могут быть произвольными комплексными числами. Однако мы ищем физически приемлемые решения. Тогда функция  $E_\nu(x, y, z)$  должна быть регулярной функцией комплексной переменной  $(\alpha\sqrt{x_1^2 + y_1^2})$ . Известно [15], что при фиксированном  $\nu$  функция  $J_\nu(u)$  является аналитической. Для произвольных  $\nu$  при  $|u| \rightarrow 0$

$$J_\nu(u) = \frac{(u/2)^\nu}{0!\Gamma(\nu+1)} + \frac{(u/2)^{\nu+2}}{1!\Gamma(\nu+2)} + \dots, \text{ поэтому } J_\nu(u) \text{ ограничена только при } \operatorname{Re}(u) \geq 0.$$

Как показывают анализ и графическое моделирование, наличие мнимой части порядка  $\nu$  приводит к разрывам в графиках интенсивности, что недопустимо. Итак, можно использовать  $\nu \geq 0$ . Асимптотическое значение  $J_\nu(u)$  при  $|u| \rightarrow \infty$

$$J_\nu(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots, \quad \arg(u) < \pi. \text{ Поскольку индекс } \nu \text{ может прини-}$$

мать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной  $2\pi$ . Пучки, характеризуемые нецелыми индексами  $\nu$ , называются фракционными [2], [3], [15]. Поэтому обсуждаемые нами пучки являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт.

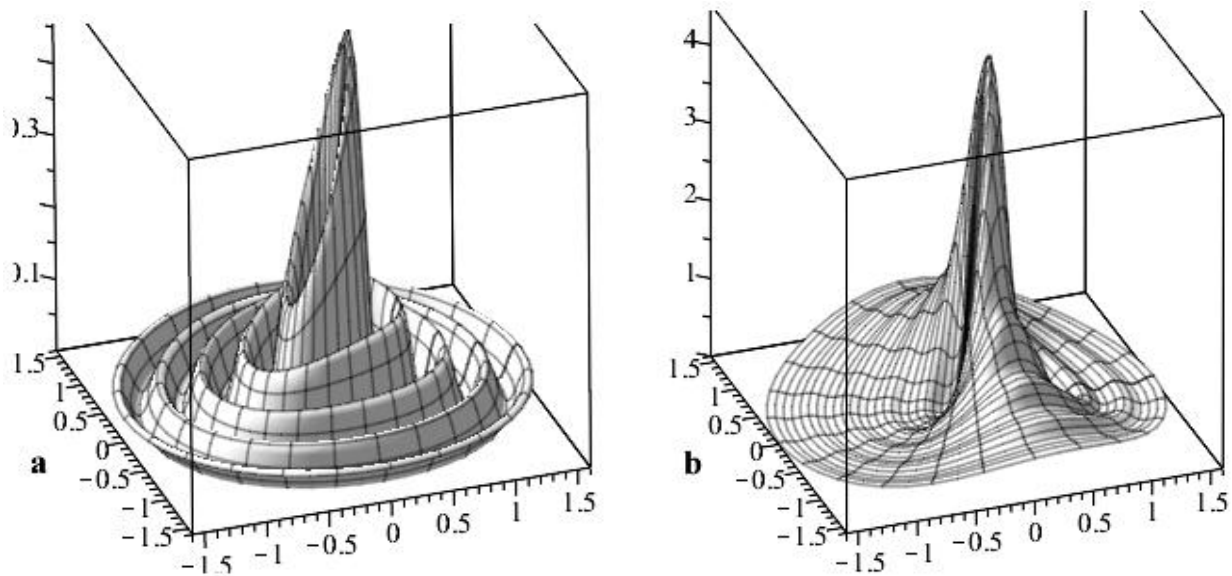


Рисунок 1 – 3D графики интенсивности аВ-мод при  $\nu = 1,5$ ;  $x_0 = 0$ ;  $\alpha = 10$ ;  
слева а)  $y_0 = 0,05i$ , справа б)  $y_0 = 0,2i$

Фракционные аВ-моды зависят от трех переменных  $(x, y, z)$  и пяти параметров  $(k, \alpha, x_0, y_0, \nu)$ . Нами было проведено графическое моделирование интенсивности аВ-мод нецелочисленных порядков. В качестве примера на рисунках 1 и 2 соответственно изображены 3D и 2D графики интенсивности аВ-мод при  $\nu = 1,5$ . Использовались безразмерные параметры и координаты.

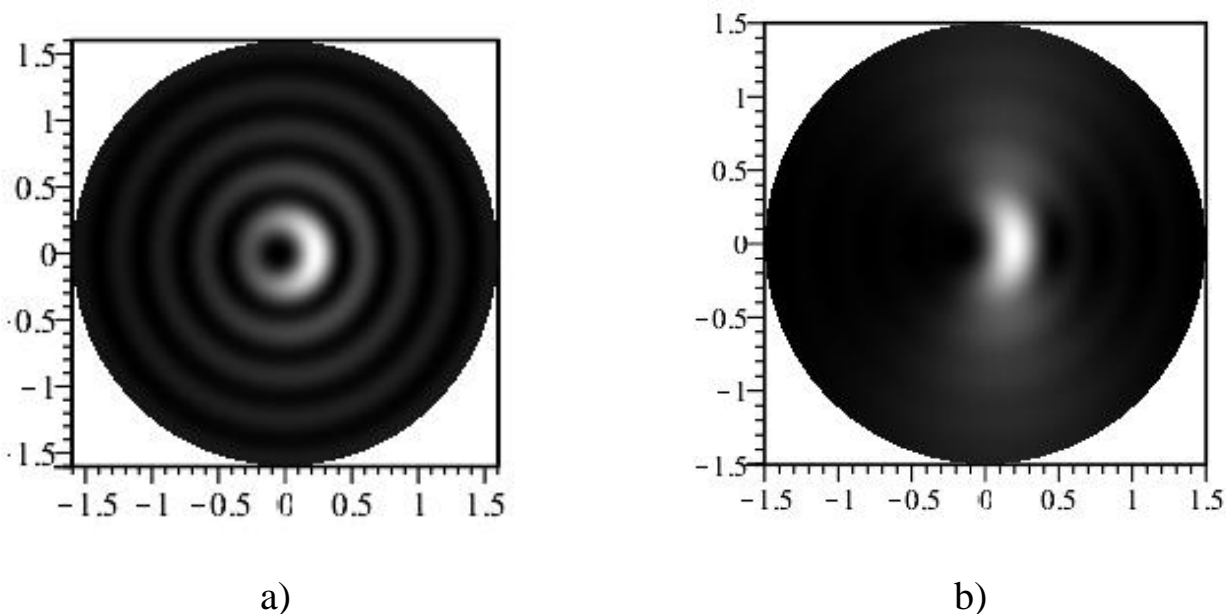


Рисунок 2 – 2D графики интенсивности аВ-мод при  $\nu = 1,5$ ;  $x_0 = 0$ ;  $\alpha = 10$ ;  
слева а)  $y_0 = 0,05i$ , справа б)  $y_0 = 0,2i$

## 2. Обсуждение результатов

Основным результатом настоящей работы является выражение (2). Непрерывный порядок  $\nu$  дает основание полученные пучки (2) трактовать, как фракционные асимметричные волновые поля Бесселя, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок)  $\nu$  фракционных пучков (2) становится целым числом, наши выражения (2) эквивалентны выражениям для  $aV$ -мод, обсуждаемых в работах [6–9]. В давней работе Валдрона [16] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок)  $\nu$  таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений:  $\nu \geq 0$ . Согласно интерпретации Оверфельт [17] в таких случаях непрерывный индекс  $\nu$  связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя.

Из рисунков 1 и 2 видно, что комплексное смещение координаты  $y$  приводит к нарушению цилиндрической симметрии волновых полей Бесселя и возникновению асимметрии интенсивности. При увеличении параметра смещения  $y_0$  пик интенсивности относительно увеличивается и картина качественно видоизменяется (рисунки справа).

### Заключение

В данной работе вводится новый тип пучков (асимметричные волновые поля Бесселя непрерывного порядка), найдены условия их физической реализуемости. Они характеризуются пятью свободными непрерывными параметрами: тремя вещественными непрерывными ( $k, \alpha, \nu$ ) и двумя комплексными параметрами ( $x_0, y_0$ ). При целочисленных значениях порядка  $\nu$  введенные здесь моды сводятся к  $aV$ -модам Котляра и Ковалева [6–8]. Показано, что физически приемлем непрерывный индекс  $\nu \geq 0$ . Эти  $aV$ -моды являются фракционными волновыми полями непрерывного порядка, обладающими спиральным волновым фронтом.

Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведенное графическое моделирование интенсивности  $aV$ -мод нецелочисленных порядков показало резкую асимметрию таких мод, которая сильно возрастает при увеличении комплексного смещения поперечных координат.

Для экспериментального получения спиральных обобщенных ПБГ могут, в принципе, быть использованы после модернизации некоторые методики по-

лучения стандартных мод Бесселя и фракционных пучков. Так, в работах Тао и др. рассматривались возможности экспериментального получения и изучения фракционных пучков Бесселя (см., например, [3]).

В настоящем сообщении обсуждались скалярные асимметричные аВ-моды. Несложно перейти к соответствующим векторным пучкам с произвольной поляризацией, используя, например, формализм, предложенный нами в [19, 20].

### Литература

1. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102. – № 4. – С. 661–681.
2. Gutierrez-Vega, J.C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8pp).
3. Tao, S.H. Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiacong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43. – № 1. – P. 122–126.
4. Christodoulides, D.N. Bessel X waves in two- and three-dimensional bidispersive optical systems / D.N. Christodoulides, N.K. Efremidis, P.D. Trapani, B.A. Malomed // Opt. Lett. – 2004. – Vol. 29. – № 13. – P. 1446–1448.
5. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4. – № 4. – P. 651–654.
6. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel modes / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, V.A. Soifer // Optics Letters. – 2014. – Vol. 39. – № 8. – P. 2395–2398.
7. Kotlyar, V.V. Diffraction-free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V., V.A. Soifer // Computer Optics. – 2014. – Vol. 38(1). – P. 4–10.
8. Ковалев, А.А. Асимметричные моды Бесселя первого и второго типа и их суперпозиции / А.А. Ковалев // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 39. – № 1. – С. 5–10.
9. Gong, Lei. Observation of the asymmetric Bessel beams with arbitrary orientation using a digital micromirror device / Lei Gong [et al.] // Optics Express. – 2014. – Vol. 22. – № 22. – С. 26763–26776.
10. Стрэттон, Дж.А. Теория электромагнетизма / Дж.А. Стрэттон // М. : ОГИЗ. ГИТТЛ, 1948. – 539 с.
11. Girgel, S.S. Vectorial of Bessel light beams / S.S. Girgel, S.N. Kurilkina // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 258–264.

12. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6(9). – С. 146–149.

13. Гиргель С.С. Бесселевы световые пучки. / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 3(30). – С. 93–98.

14. Гиргель С.С. Модовые и энергетические характеристики векторных бесселевых световых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6(39). – Ч.1. – С. 49–52.

15. Янке, Е. Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш // М. : Наука, 1977. – 342 с.

16. Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003. – № 6. – P. 259–268.

17. Waldron, R.A. A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R.A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. 11. – № 4. – P. 438–461.

18. Overfelt, P.L. Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev.A. – 1992. – Vol. 46. – № 6. – P. 3516–3522.

19. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 11–14.

20. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 20–24.

**С.С. Гиргель**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **АСИММЕТРИЧНЫЕ ПУЧКИ БЕССЕЛЯ-ГАУССА НЕПРЕРЫВНОГО ПОРЯДКА**

### **Введение**

В последнее время производится поиск и исследования новых типов световых пучков [1–5]. Большой интерес привлекают пучки Бесселя и пучки Бесселя-Гаусса (ПБГ) [5–11]. Как хорошо известно [6], пучки Бесселя обладают уникальным свойством бездифракционности. Вместе с тем, они переносят бесконечную мощность и не могут быть реализованы практически. Использование гауссовой аподизации функций Бесселя позволяет перейти к скалярным



ПБГ [7], которые переносят конечную мощность и могут быть реализованы практически, хотя свойство бездифракционности, строго говоря, при этом нарушается. Свойства векторных ПБГ исследовались нами в [12], [13]. Фракционные обобщенные ПБГ были введены нами в [14] и найдены условия их физической реализуемости.

Недавно, в 2014–2016 годах, в [15–18] были введены и экспериментально получены асимметричные ПБГ (aBG-моды). В настоящей работе производится обобщение результатов [14–16]. Найден новый тип пучков – асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка, сформулированы условия их физической реализуемости и обсуждаются их физические свойства.

### 1. Новый тип асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка

Исходя из 3D параболического уравнения [1], описывающего скалярные параксиальные монохроматические световые пучки, распространяющиеся в направлении оси  $z$  и перейдя к цилиндрической системе координат нами в [14] было получено выражение

$$f = \frac{1}{q} \exp \left[ i \left( \frac{k}{2q} \left( \rho^2 - \left( \frac{Kz_0}{k} \right)^2 \right) \right) \right] \exp(i\nu\varphi) J_\nu \left( \frac{-iK\rho z_0}{q} \right), \quad (1)$$

описывающее обобщенные ПБГ непрерывного порядка  $\nu$ . Здесь и далее фазовый множитель  $\exp(ikz - i\omega t)$  опускается. Стандартные обозначения:  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , азимутальный угол  $\varphi = \arctg(y/x)$ ;  $J_\nu$  – функции Бесселя I рода [19]. Постоянные разделения переменных  $\nu$  и  $K$  в (1) являются свободными параметрами. В случае классических ПБГ [7]  $K = k_\perp$ , где  $k_\perp$  – вещественная поперечная составляющая волнового вектора  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_\perp + \mathbf{k}_z$  и, кроме того, порядок (индекс)  $\nu$  является целочисленным. Амплитуда  $f$  ПБГ в (1) содержит гауссиан  $G = \frac{1}{q} \exp \left[ \frac{ik\rho^2}{2q} \right]$ , комплексный параметр пучка  $q = z - q_0$ . Величины  $w_0$  и  $z_0 = kw_0^2/2$  – характерные размеры пучка вдоль осей  $Ox$  и  $Oz$  соответственно.

Чтобы получить выражения, характеризующие асимметричные ПБГ непрерывного порядка  $\nu$ , перейдем в (1) к новым поперечным переменным соотношениями:

$$x_1 = x - x_0, \quad y_1 = y - y_0, \quad r_1^2 = x_1^2 + y_1^2, \quad (2)$$

где константы  $x_0, y_0$  – произвольные комплексные параметры смещений поперечных координат  $x$  и  $y$ . Получаем

$$f = \frac{1}{q} \exp \left[ i \left( \frac{k}{2q} \left( r_1^2 - \left( \frac{Kz_0}{k} \right)^2 \right) \right) \right] \left[ \frac{x_1 + iy_1}{r_1} \right]^{\nu} J_{\nu} \left( \frac{-iKr_1 z_0}{q} \right). \quad (3)$$

Здесь набег комплексной фазы  $\exp(i\nu\varphi)$  представлен в другой форме, чем в (1), использующей известную формулу  $\operatorname{arctg}(t) = (-i/2) \ln[(1+it)/(1-it)]$ , которая применялась недавно физиками в [11], [15–18] для описания асимметричных мод и ранее в работе [20] для описания 2-D волнового пакета X-волн Бесселя.

Асимметричные ПБГ (3) зависят от трех переменных ( $x, y, z$ ) и семи параметров ( $k, K, z_0, q_0, x_0, y_0, \nu$ ). Число независимых свободных параметров можно уменьшить, если перейти к безразмерным величинам соотношениями:

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1/w_0 = X - X_0, \quad Y_1 = y_1/w_0 = Y - Y_0, \\ Z &= z/w_0, \quad K_1 = Kw_0, \quad R_1 = r_1/w_0 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Введем также безразмерный параметр пучка  $Q = q/z_0 \equiv Z - Q_0$ .

Теперь асимметричные обобщенные ПБГ зависят от трех безразмерных переменных ( $X, Y, Z$ ), пяти безразмерных свободных параметров ( $X_0, Y_0, Q_0, K_1, \nu$ ) и описываются выражением

$$f = \frac{1}{Q} \exp \left[ \frac{i}{Q} \left( R_1^2 - \frac{K_1^2}{4} \right) \right] \left[ \frac{X_1 + iY_1}{R_1} \right]^{\nu} J_{\nu} \left( \frac{-iK_1 R_1}{Q} \right). \quad (5)$$

## 2. Условия физической реализуемости новых асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка

Пучок будем считать физически реализуемым, если его комплексная амплитуда является конечной во всем пространстве, а переносимая им мощность через любое сечение, перпендикулярное оси пучка, также является конечной. Эти требования сводятся к непрерывности и квадратичной интегрируемости (КИ) комплексной амплитуды пучка.

Проанализируем условия физической реализуемости новых асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка (5).

Основной вклад в КИ ПБГ (5) вносит гауссиан  $G$ . Для стандартного  $G$  условие КИ [1]:  $\operatorname{Im}(Q_0) > 0$ . Множитель  $\exp(-iK_1^2/(4Q))$  в (5) не зависит от поперечных координат и не влияет на КИ. Несложно показать, что комплексные смещения  $X_0$  и  $Y_0$  также не влияют на КИ гауссиана, а лишь приводят к его децентровке. При  $Z \rightarrow \infty$  гауссиан  $G \rightarrow 0$ .

Комплексность масштабирующего параметра  $K_1$  не нарушает КИ амплитуды пучка  $f$  из-за гауссиана, поэтому на параметр  $K_1$  не накладываются никакие ограничения и он может быть произвольным комплексным числом.

При  $|u| \rightarrow \infty$  функция  $J_\nu(u) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \cos\left(u - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \dots$  [19]. Поэтому функция  $J_\nu(u)$  не нарушает достаточного условия  $\text{Im}(Q_0) > 0$  КИ гауссиана в (5).

Авторы в работе [11] заметили, что когда  $r_1$  в фазовой функции  $[(x_1 + iy_1)/r_1]^\nu$  в выражении типа (3) обращается в нуль, тогда одновременно и аргумент функции Бесселя стремится к нулю и неопределенность вида 0/0 раскрывается.

Так как функция Бесселя имеет особенность при  $u \rightarrow 0$ , то отсюда следует необходимость  $\text{Re}(\nu) > 0$ . Как показывают анализ и графическое моделирование, наличие мнимой части порядка  $\nu$  приводит к разрывам в графиках интенсивности для функции  $f(X, Y, Z)$ , что недопустимо. Отсюда следует, что индекс  $\nu$  должен быть вещественным и неотрицательным, т.е.  $\nu \geq 0$ .

Итак, общие условия физической реализуемости новых асимметричных ПБГ (5):

$$Q_0'' > 0 \text{ и } \nu \geq 0. \quad (6)$$

Поскольку индекс  $\nu$  может принимать непрерывные значения, то фаза при полном обороте вокруг оси пучка также является непрерывной и не обязана быть равной  $2\pi$ . Пучки, обладающие таким свойством, называются фракционными [2–5], [21]. Поэтому обсуждаемые нами новые ПБГ являются также фракционными и имеют спиральный волновой фронт.

В давней работе Валдрона [22] использовалась неортогональная спиральная (цилиндрическая вращающаяся) система координат. Для уравнения Гельмгольца получено решение в виде спиральных волновых полей Бесселя. В отличие от обычных световых полей Бесселя индекс (порядок)  $\nu$  таких полей не обязан быть целым числом, а может пробегать непрерывный спектр значений:  $\nu \geq 0$ . Согласно интерпретации Оверфельт [23] в таких случаях непрерывный индекс  $\nu$  связан не только с угловой фазой, но также является функцией шага спирали волнового фронта и продольной фазовой скорости волны Бесселя.

Основными результатами настоящей работы являются выражения (5) и (6). Непрерывный порядок  $\nu$  дает основание полученные пучки (5) трактовать, как фракционные асимметричные обобщенные ПБГ, которые обладают спиральным волновым фронтом. В частных случаях, когда неотрицательный индекс (порядок)  $\nu$  фракционных обобщенных ПБГ (6) становится целым числом и  $X_0 = Y_0 = 0$ , наши выражения (5) эквивалентны выражениям для обобщенных ПБГ, рассматриваемых в работах [8–10]. Заметим, однако, что наши более общие формулы (5) имеют в то же время более простую форму, чем соответствующие формулы в [8–10].

### 3. Обсуждение результатов

Известно [7], что для стандартных ПБГ картина интенсивности состоит из светлых колец, амплитуда которых постепенно убывает от оси пучка. Вещественные части параметров  $X_0$  и  $Y_0$  приводят лишь к смещению пучка параллельно оси  $OZ$ , без изменения его формы, поэтому нами не рассматриваются. Мнимые же части параметров  $X_0$  и  $Y_0$  приводят к сильному искажению пространственной формы ПБГ и их асимметрии. При непрерывном изменении индекса  $\nu$  амплитуда пучков (5) и их интенсивности изменяются также непрерывно и плавно.

Нами проводилось компьютерное моделирование интенсивности в поперечных сечениях асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка в зависимости от нескольких свободных параметров. В качестве примеров на рисунках 1 и 2 изображены 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных ПБГ непрерывного порядка в поперечном сечении с общими параметрами:  $\nu = 1,5$ ;  $X_0 = 0$ ;  $Y_0 = 0,05i$ . Полагаем во всех случаях  $Q_0 = i$ , что соответствует обычной нормировке гауссиана.

Интенсивность пучка в каждой точке поперечного сечения пропорциональна ординате пространственной фигуры. Так как  $\nu > 1$ , то все пучки – полые. На рисунках 1 полагаем  $\text{Re}(K_1) = 10$ , что соответствует преобладанию вклада функции Бесселя над вкладом функции Гаусса. На рисунке 1,а видно, что ПБГ с нецелым порядком ведет себя качественно, как стандартный асимметричный ПБГ. На рисунках 1,а и 1,б видно, что изменение  $\text{Im}(K_1)$  приводит к существенному изменению 3D картины интенсивности. Рисунки 1,а и 1,с характеризуют влияние роста расстояния  $Z$ . Рисунки 2,ф; 2,е; 1,б и 2,д иллюстрируют пригодность вещественных отрицательных, чисто мнимых и комплексных параметров  $K_1$ .

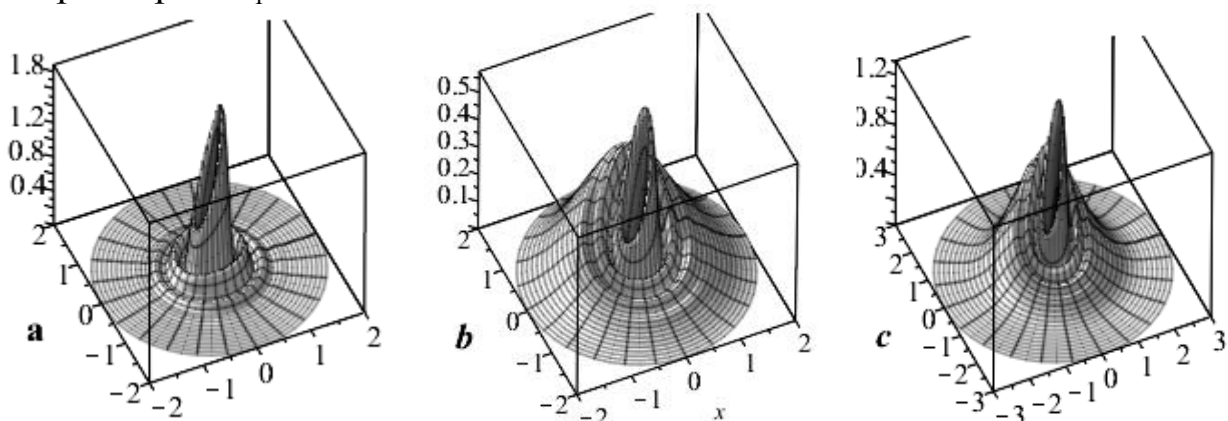


Рисунок 1 – 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных пучков Бесселя-Гаусса непрерывного порядка с общими параметрами:

$$Q_0 = i; \nu = 1,5, X_0 = 0, Y_0 = 0,05i$$

Варианты: а)  $K_1 = 10, Z = 0$ ; б)  $K_1 = 10 - 2i, Z = 0$ ; в)  $K_1 = 10, Z = 0,2$

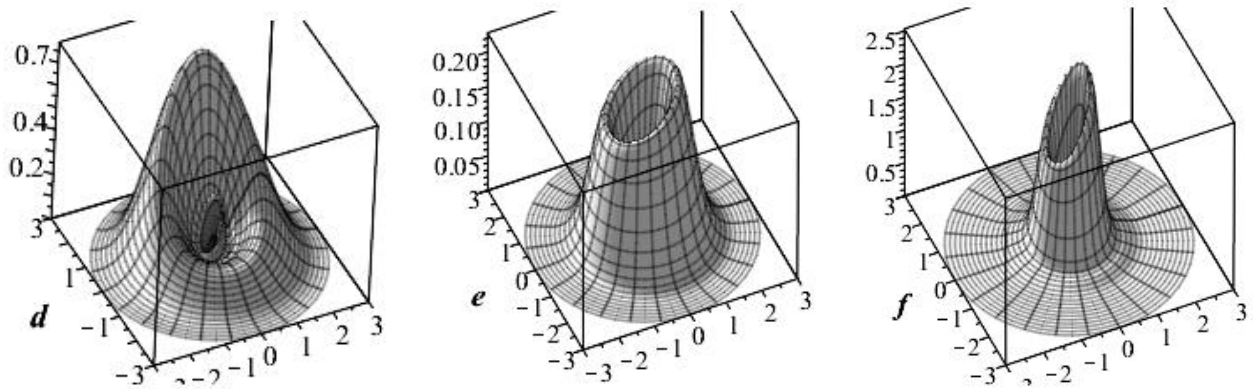


Рисунок 2 – 3D графики интенсивности асимметричных обобщенных пучков Бесселя-Гаусса непрерывного порядка с общими параметрами:

$$Q_0 = i; \nu = 1,5; X_0 = 0; Y_0 = 0,05i; Z = 0,2.$$

Варианты: d)  $K_1 = 10 - i$ ; e)  $K_1 = -i$ ; f)  $K_1 = -4$

Как и следовало ожидать, при комплексных  $K_1$ ,  $X_0$  и  $Y_0$  и нецелых  $\nu$  картины интенсивности существенно усложняются. Например, с увеличением  $\text{Im}(K_1)$  и ростом расстояния  $Z$  кольца картины, обусловленные функцией Бесселя, постепенно исчезают; с ростом мнимого смещения  $\text{Im}(Y_0)$  пик интенсивности возрастает.

### Заключение

Выведены выражения, описывающие новый тип пучков – асимметричные обобщенные ПБГ непрерывного порядка, обладающие спиральным волновым фронтом. Они характеризуются пятью свободными параметрами: одним вещественным непрерывным  $\nu$  и четырьмя комплексными параметрами ( $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $Q_0$ ,  $K_1$ ). Частными случаями введенных здесь пучков являются известные обобщенные ПБГ с дискретными целочисленными индексами  $\nu$ , дробные пучки Бесселя со спиральным волновым фронтом, а также асимметричные ПБГ Котляра и Ковалева.

Найдены условия физической реализуемости новых типов пучков во всем пространстве:  $Q_0'' > 0$  и  $\nu \geq 0$ . Одновременный переход от дискретных значений  $\nu$  к непрерывному спектру, а также от вещественных к комплексным значениям  $K_1$  сильно расширяет класс известных в настоящее время асимметричных ПБГ. Варьирование новых свободных параметров таких пучков, несомненно, расширяет и предоставляет новые дополнительные возможности создания и исследования пучков с заданными свойствами для последующих практических применений.

Проведено графическое моделирование интенсивности таких пучков, которое подтверждает основные аналитические результаты.

Для экспериментального получения спиральных обобщенных асимметричных ПБГ могут, в принципе, быть использованы некоторые методики получения асимметричных [15–18] и фракционных [5] пучков.

В настоящем сообщении обсуждались скалярные асимметричные фракционные обобщенные ПБГ. Несложно перейти к соответствующим векторным пучкам с произвольной поляризацией, используя, например, формализм, предложенный нами в [23], [24].

## Литература

1. Киселев, А.П. Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор) / А.П. Киселев // Оптика и спектроскопия. – 2007. – Т. 102. – № 4. – С. 661–681.
2. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: I. Planar Analysis / J.C. Gutierrez-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32. – № 11. – P. 1521–1523.
3. Gutierrez-Vega, J.C. Fractionalization of optical beams: II. Elegant Laguerre-Gaussian modes / J.C. Gutierrez-Vega // Optics Express. – 2007. – Vol. 15. – № 10. – P. 6300–6313.
4. Gutierrez-Vega, J.C. Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence / J.C. Gutierrez-Vega, C. Lopez-Mariscal // J. Opt. A. Pure Appl. Opt. – 2008. – 10015009 (8pp).
5. Tao, S.H. Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams / Shao Hua Tao, Woei Ming Lee, Xiacong Yuan // Applied Optics. – 2004. – Vol. 43. – № 1. – P. 122–126.
6. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams. I. The scalar theory / J. Durnin // JOSA A. – 1987. – Vol. 4. – № 4. – P. 651–654.
7. Gori, F. Bessel-Gauss beams / F. Gori, G. Guattari, C. Padovani // Optics Communications. – 1987. – Vol. 64. – № 6. – P. 491–495.
8. Generalized Bessel-Gauss beams / V. Bagini [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43. – № 6. – P. 1155–1166.
9. Imaging of generalized Bessel-Gauss beams / C. Palma [et al.] // Journal of Modern Optics. – 1996. – Vol. 43. – № 11. – P. 2269–2277.
10. Santarsiero, M. Propagation of general Bessel-Gauss beams through ABCD optical systems / M. Santarsiero // Optics Communications. – 1996. – Vol. 132. – P. 1–7.
11. Котляр, В.В. Бездифракционные асимметричные элегантные пучки Бесселя с дробным орбитальным угловым моментом // В.В. Котляр, А.А. Ковалев, В.А. Соيفер // Компьютерная оптика. – 2014. – Т. 38. – № 1. – С. 4–9.

12. Гиргель, С.С. Поляризационные и энергетические свойства бесселевых волновых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6(9). – С. 146–149.
13. Гиргель С.С. Модовые и энергетические характеристики векторных бесселевых световых полей / С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2006. – № 6(39). – Ч.1. – С. 49–52.
14. Гиргель, С.С. Обобщенные пучки Бесселя-Гаусса непрерывного порядка / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники.– 2015.– № 2(25). – С. 10–15.
15. Ковалев, А.А. Вращающиеся элегантные пучки Бесселя-Гаусса / В.В. Котляр, А.А. Ковалев, Р.В. Скиданов, В.А. Сойфер // Компьютерная оптика. – 2014.– Т. 38. – № 2. – С. 162–168.
16. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, R.V. Skidanov, V.A. Soifer // Journ. Opt. Soc. Am. A. – 2014. – Vol. 31. – № 9. – P. 1977–1983.
17. Kotlyar, V.V. Asymmetric Bessel-Gauss beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // Journ. Appl. Phys. – 2016. – Vol. 120. – P. 023101(5).
18. Порфирьев, А.П. Оптический захват и перемещение микрочастиц с помощью асимметричных пучков Бесселя-Гаусса / А.П. Порфирьев, А.А. Ковалев, В.В. Котляр // Компьютерная оптика. – 2016. – Т. 40. – № 2. – С. 152–157.
19. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции. II. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи // М. : Наука, 1974. – 295 с.
20. Christodoulides, D.N. Bessel X waves in two- and three-dimensional bidispersive optical systems / D.N. Christodoulides, N.K. Efremidis, P.D. Trapani, V.A. Malomed // Opt. Lett. – 2004. – V. 29. – № 13. – P. 1446–1448.
21. Berry, M.V. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // Journal of Optics. – 2003. – № 6. – P. 259–268.
22. Waldron, R.A. A helical coordinate system and its applications in electromagnetic theory / R. A. Waldron // Quart. Journ. Mech. and Applied Math. – 1958. – Vol. 11. – № 4. – P. 438–461.
23. Overfelt, P.L. Scalar optical beams with helical symmetry / P.L. Overfelt // Phys. Rev.A. – 1992. – Vol. 46. – № 6. – P. 3516–3522.
24. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. II. Неоднородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2012. – № 1(10). – С. 11–14.
25. Гиргель, С.С. Свойства векторных параксиальных световых пучков. I. Однородная поляризация / С.С. Гиргель // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 1(6). – С. 20–24.

Ю.А. Гришечкин, В.Н. Капшай

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## ВОЗБУЖДЕНИЕ БИ-ИЗОТРОПНОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ ДИПОЛЬНЫМ ИЗЛУЧАТЕЛЕМ

### Введение

Рассмотрим задачу о возбуждении сферической частицы радиуса  $a$  из биизотропного материала внешним дипольным источником электромагнитного излучения, ориентированным произвольным образом относительно частицы. Решение этой задачи в частном осесимметричном случае рассмотрено в работе [1]. Материальные уравнения в случае биизотропной среды имеют вид [2–5]

$$\vec{D} = \varepsilon_1 \vec{E} + \xi \vec{H}; \quad \vec{B} = \mu_1 \vec{H} + \xi^* \vec{E}; \quad \xi = \chi + i\alpha, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$  – электрическая и магнитная проницаемость,  $\chi$  – параметр Теллегена,  $\alpha$  – киральный параметр. Дипольный источник и частица помещены в безграничную среду с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\varepsilon_2$ ,  $\mu_2$ . Ограничимся исследованием монохроматических полей

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) \exp(-i\omega t), \quad \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) \exp(-i\omega t), \quad \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) \exp(-i\omega t),$$

где выражения для плотности заряда и плотности тока монохроматического дипольного излучателя, имеющего дипольный момент  $\vec{d}_0$  и расположенного в точке  $\vec{r}'$  относительно центра биизотропного шара, имеют форму

$$\rho(\vec{r}) = -(\vec{d}_0 \cdot \vec{\nabla}) \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'); \quad \vec{j}(\vec{r}) = -i\omega \vec{d}_0 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2)$$

Система имеет сферическую симметрию, поэтому выражения для полей целесообразно представить в виде разложения по шаровым векторам [6]

$$\begin{aligned} \vec{Y}_{lm}^{(1)}(\vartheta, \varphi) &= [l(l+1)]^{-1/2} (r\vec{\nabla}) Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \quad \vec{Y}_{lm}^{(-1)}(\vartheta, \varphi) = \vec{r}/r Y_{lm}(\vartheta, \varphi); \\ \vec{Y}_{lm}^{(0)}(\vartheta, \varphi) &= -i[l(l+1)]^{-1/2} [\vec{r} \times \vec{\nabla}] Y_{lm}(\vartheta, \varphi), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  – сферические гармоники [7]. В дальнейшем мы не будем писать аргументы функций (3).

### 1. Получение выражений для полей

Поле электрического диполя в неограниченном пространстве для фиксированных значений  $l$ ,  $m$  приведём в следующем виде [8]:



$$\vec{E}_{lm}^{dip} = \frac{k_0 a_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} j_l(k_2 r) \vec{Y}_{lm}^{(0)} + \frac{b_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{\hat{j}'_l(k_2 r)}{r} \vec{Y}_{lm}^{(1)} + b_{lm} \frac{j_l(k_2 r)}{r} \vec{Y}_{lm}^{(-1)} ; \quad (4)$$

$$\vec{H}_{lm}^{dip} = \frac{-k_0 \varepsilon_2 b_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} j_l(k_2 r) \vec{Y}_{lm}^{(0)} + \frac{1}{\mu_2} \frac{a_{lm}}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{\hat{j}'_l(k_2 r)}{r} \vec{Y}_{lm}^{(1)} + \frac{a_{lm}}{\mu_2} \frac{j_l(k_2 r)}{r} \vec{Y}_{lm}^{(-1)} ,$$

где коэффициенты  $a_{lm}$ ,  $b_{lm}$  имеют форму

$$a_{lm} = -4\pi i k_0^2 \mu_2 n_2 h_l(k_2 r') [\vec{d}_0 \cdot \hat{L}' Y_{lm}^*(\mathcal{G}', \varphi')] ; \quad (5)$$

$$b_{lm} = \frac{4\pi i k_0 n_2}{\varepsilon_2} \{2(\vec{d}_0 \cdot \hat{L}') - \vec{d}_0 \cdot [\hat{L}' \times \vec{V}']\} Y_{lm}^*(\mathcal{G}', \varphi') h_l(k_2 r') ; \hat{L}' = -i[\vec{r}' \times \vec{V}'] .$$

Выражения для рассеянных на шаре волн приведём в следующем виде [9]:

$$\vec{E}_{lm}^{(2)} = \frac{k_0 a_{lm}^{(2)}}{\sqrt{l(l+1)}} h_l(k_2 r) \vec{Y}_{lm}^{(0)} + \frac{b_{lm}^{(2)}}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{\hat{h}'_l(k_2 r)}{r} \vec{Y}_{lm}^{(1)} + b_{lm}^{(2)} \frac{h_l(k_2 r)}{r} \vec{Y}_{lm}^{(-1)} ; \quad (6)$$

$$\vec{H}_{lm}^{(2)} = \frac{-k_0 \varepsilon_2 b_{lm}^{(2)}}{\sqrt{l(l+1)}} h_l(k_2 r) \vec{Y}_{lm}^{(0)} + \frac{1}{\mu_2} \frac{a_{lm}^{(2)}}{\sqrt{l(l+1)}} \frac{\hat{h}'_l(k_2 r)}{r} \vec{Y}_{lm}^{(1)} + \frac{a_{lm}^{(2)}}{\mu_2} \frac{h_l(k_2 r)}{r} \vec{Y}_{lm}^{(-1)} ,$$

а выражения для поля в шаре – в форме [10]

$$\vec{E}_{lm}^{(1)} = \sum_{v=\pm 1} a_{lm}^v \left[ j_l(k_v r) \vec{Y}_{lm}^{(0)} + i v \frac{\hat{j}'_l(k_v r)}{k_v r} \vec{Y}_{lm}^{(1)} + i v \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(k_v r)}{k_v r} \vec{Y}_{lm}^{(-1)} \right] ; \quad (7)$$

$$\vec{H}_{lm}^{(1)} = \sum_{v=\pm 1} a_{lm}^v \frac{k_v - i v k_0 \xi^*}{k_0 \mu_1} \left[ -i v j_l(k_v r) \vec{Y}_{lm}^{(0)} + \frac{\hat{j}'_l(k_v r)}{k_v r} \vec{Y}_{lm}^{(1)} + \sqrt{l(l+1)} \frac{j_l(k_v r)}{k_v r} \vec{Y}_{lm}^{(-1)} \right] .$$

В выражениях (4)–(7)  $k_0$  – волновое число, связанное с частотой  $\omega$  как  $k_0 = \omega/c$ ,  $k_2 = k_0 n_2$ ,  $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2}$ ,  $k_v = k_0 n_v = k_0 (\sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - \chi^2} + v\alpha)$ ,  $j_l(x)$  – сферические функции Бесселя,  $h_l(x)$  – сферические функции Ханкеля первого рода [7],  $\hat{j}_l(x) = x j_l(x)$  и  $\hat{h}_l(x) = x h_l(x)$  – сферические функции Рикатти-Бесселя и Рикатти-Ханкеля первого рода, соответственно,  $\hat{j}'_l(x)$ ,  $\hat{h}'_l(x)$  – производные сферических функций Рикатти-Бесселя и Рикатти-Ханкеля первого рода, соответственно, величины  $a_{lm}^{(2)}$ ,  $b_{lm}^{(2)}$ ,  $a_{lm}^v$  – неизвестны.

Выполнение граничных условий для тангенциальных компонент электрического и магнитного поля на поверхности сферической частицы

$$[\vec{r} \times (\vec{E}_{lm}^{dip} + \vec{E}_{lm}^{(2)} - \vec{E}_{lm}^{(1)})]_{r=a} = 0 ; \quad [\vec{r} \times (\vec{H}_{lm}^{dip} + \vec{H}_{lm}^{(2)} - \vec{H}_{lm}^{(1)})]_{r=a} = 0 \quad (8)$$

приводит к линейной системе четырёх алгебраических уравнений для неизвестных величин  $a_{lm}^{(2)}$ ,  $b_{lm}^{(2)}$ ,  $a_{lm}^v$ . Решение этой системы представим как

$$\begin{aligned}
a_{lm}^{+1} &= a_{lm} \frac{\Delta_{1l}^{-1}}{\Delta_l} - ib_{lm} \frac{\Delta_{2l}^{-1}}{\Delta_l}; & a_{lm}^{-1} &= a_{lm} \frac{\Delta_{1l}^{+1}}{\Delta_l} - ib_{lm} \frac{\Delta_{2l}^{+1}}{\Delta_l}; \\
a_{lm}^{(2)} &= a_{lm} \frac{\Delta_{0l} - \Delta_{3l}}{\Delta_l} - ib_{lm} \frac{\Delta_{4l}}{\Delta_l}; & b_{lm}^{(2)} &= -ia_{lm} \frac{\Delta_{5l}}{\Delta_l} + b_{lm} \frac{\Delta_{0l} - \Delta_{6l}}{\Delta_l},
\end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_l &= h_{l2} \hat{h}'_{l2} \left( \frac{j_{l+} \hat{j}'_{l-}}{n_{-1}} + \frac{j_{l-} \hat{j}'_{l+}}{n_{+1}} \right) \left( 1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{(n_{+1} - i\xi^*)(n_{-1} + i\xi^*)}{\mu_1 \varepsilon_2} \right) - \\
&\quad - (n_{+1} + n_{-1}) \left( \frac{1}{\mu_1 \varepsilon_2} j_{l+} j_{l-} (\hat{h}'_{l2})^2 + \frac{\mu_2/\mu_1}{n_{+1} n_{-1}} \hat{j}'_{l+} \hat{j}'_{l-} (h_{l2})^2 \right); \\
\Delta_{1l}^v &= \frac{k_0}{\sqrt{l(l+1)}} [j_{l2} \hat{h}'_{l2} - \hat{j}'_{l2} h_{l2}] \left[ \frac{1}{n_v} \hat{j}'_{lv} h_{l2} - \frac{n_v - vi\xi^*}{\mu_1 \varepsilon_2} j_{lv} \hat{h}'_{l2} \right]; \\
\Delta_{2l}^v &= \frac{vk_0}{\sqrt{l(l+1)}} [j_{l2} \hat{h}'_{l2} - \hat{j}'_{l2} h_{l2}] \left[ j_{lv} \hat{h}'_{l2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{n_v - vi\xi^*}{n_v} \hat{j}'_{lv} h_{l2} \right]; \\
\Delta_{0l} &= (n_{+1} + n_{-1}) \left( \frac{\mu_2/\mu_1}{n_{+1} n_{-1}} j_{l2} h_{l2} \hat{j}'_{l+} \hat{j}'_{l-} + \frac{1}{\mu_1 \varepsilon_2} \hat{j}'_{l2} \hat{h}'_{l2} j_{l+} j_{l-} \right); \\
\Delta_{3l} &= \left( \frac{j_{l+} \hat{j}'_{l-}}{n_{-1}} + \frac{j_{l-} \hat{j}'_{l+}}{n_{+1}} \right) \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{(n_{+1} - i\xi^*)(n_{-1} + i\xi^*)}{\mu_1 \varepsilon_2} j_{l2} \hat{h}'_{l2} + h_{l2} \hat{j}'_{l2} \right); \\
\Delta_{4l} &= \frac{\mu_2}{\mu_1} [j_{l2} \hat{h}'_{l2} - \hat{j}'_{l2} h_{l2}] \left[ \frac{n_{-1} + i\xi^*}{n_{-1}} j_{l+} \hat{j}'_{l-} - \frac{n_{+1} - i\xi^*}{n_{+1}} j_{l-} \hat{j}'_{l+} \right]; \\
\Delta_{5l} &= \frac{1}{\mu_1 \varepsilon_2} [j_{l2} \hat{h}'_{l2} - \hat{j}'_{l2} h_{l2}] \left[ \frac{n_{-1} + i\xi^*}{n_{+1}} j_{l-} \hat{j}'_{l+} - \frac{n_{+1} - i\xi^*}{n_{-1}} j_{l+} \hat{j}'_{l-} \right]; \\
\Delta_{6l} &= \left( \frac{j_{l+} \hat{j}'_{l-}}{n_{-1}} + \frac{j_{l-} \hat{j}'_{l+}}{n_{+1}} \right) \left( \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{(n_{+1} - i\xi^*)(n_{-1} + i\xi^*)}{\mu_1 \varepsilon_2} \hat{j}'_{l2} h_{l2} + \hat{h}'_{l2} j_{l2} \right).
\end{aligned} \tag{10}$$

В выражениях (10) используются обозначения  $j_{l2} = j_l(k_2 a)$ ,  $h_{l2} = h_l(k_2 a)$ ,  $j_{l\pm} = j_l(k_{\pm} a)$ ,  $h_{l\pm} = h_l(k_{\pm} a)$ ,  $\hat{j}'_{l2} = \hat{j}'_l(k_2 a)$ ,  $\hat{h}'_{l2} = \hat{h}'_l(k_2 a)$ ,  $\hat{j}'_{l\pm} = \hat{j}'_l(k_{\pm} a)$ . Отметим, что формулы (10) не зависят от типа излучателя.

## 2. Резонансы в малых частицах

Рассмотрим условие появления резонансов при рассеянии электромагнитных волн на сферической биизотропной частице. В данной работе мы ограничимся исследованием резонансов в случае, когда радиус частицы много меньше длины волны излучения  $ak_0 \ll 1$ . Условием существования резонансов для

фиксированного значения числа  $l$  является обращение в ноль знаменателя выражений (9)  $\Delta_l$ . Подстановка в уравнение  $\Delta_l = 0$  асимптотических выражений для сферических функций при малых значениях аргумента [11] и учёт в полученном равенстве только слагаемых, содержащих наименьшую степень  $k_0 a$  (квазистатическое приближение), приводит к следующему уравнению:

$$1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[ \frac{n_{+1} n_{-1} + 2i\alpha \xi^* + (\xi^*)^2}{\mu_1 \varepsilon_2} + \frac{l+1}{l} + \frac{n_{+1} n_{-1}}{n_2^2} \frac{l}{l+1} \right] = 0. \quad (11)$$

Решение уравнения (11) относительно величины  $\varepsilon_1/\varepsilon_2$  имеет вид

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = - \frac{l(l+1)\mu_1 \varepsilon_2 + (l+1)^2 n_2^2 - l^2 |\xi|^2}{l^2 \mu_1 \varepsilon_2 + l(l+1)n_2^2}. \quad (12)$$

В частности, для  $l = 1, 2$  выражение (12) принимает следующую форму:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = - \frac{2\mu_1 \varepsilon_2 + 4n_2^2 - |\xi|^2}{\mu_1 \varepsilon_2 + 2n_2^2}; \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = - \frac{6\mu_1 \varepsilon_2 + 9n_2^2 - 4|\xi|^2}{4\mu_1 \varepsilon_2 + 6n_2^2}. \quad (13)$$

Из приведенных выражений видно, что в квазистатическом приближении наличие резонансов в биизотропной частице возможно как при положительных, так и при отрицательных значениях диэлектрической проницаемости. В случае возбуждения диэлектрической сферической частицы, радиус которой много меньше длины волны электромагнитного излучения, существование резонансов в квазистатическом приближении возможно лишь при отрицательных значениях диэлектрической проницаемости [8]. Из формулы (12) также следует, что с увеличением  $l$  значение диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_1$ , при которой возможно существование резонансов, стремится к следующему пределу:

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 \left( 1 - \frac{|\xi|^2}{\varepsilon_2 (\mu_1 + \mu_2)} \right). \quad (14)$$

Отметим, что при  $\xi = 0$  уравнение  $\Delta_l = 0$  и выражения (12)–(14) совпадают с уравнением и соответствующими выражениями, полученными в случае диэлектрической сферической частицы [8].

### Заключение

В работе получены точные решения задачи о рассеянии электромагнитного излучения диполя на сферической биизотропной частице. Диполь расположен произвольным образом относительно частицы. Проведен анализ полученных решений на возможность резонансного рассеяния в случае, когда радиус частицы много меньше длины волны рассеиваемого излучения. Найдены условия

существования резонансов в квазистатическом приближении. В дальнейшем мы планируем провести исследование возможности появления резонансов в случае биизотропной частицы произвольного радиуса.

## Литература

1. Куц, А.И. Численное исследование рассеяния поля электрического диполя на биизотропном шаре / А.И. Куц, Г.Ч. Шушкевич // Информатика. – 2015. – № 2. – С. 46–54.
2. Semchenko, I.V. Research on chiral and bianisotropic media in Byelorussia and Russia in the last ten years / I.V. Semchenko, S.A. Tretyakov, A.N. Serdyukov // Progress in electromagnetic research. – 1996. – Vol. 12. – P. 335–370.
3. Obukhov, Y.N. On the boundary-value problems and the validity of the Post constraint in the modern electromagnetism / Y.N. Obukhov, F.W. Hehl // Optik. – 2009. – Vol. 120. – P. 418–421.
4. Lindell, I.V. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I.V.Lindell, A.H. Sihvola, S.A. Tretyakov, A.J. Viitanen. – Boston and London : Artech House, 1994. – 500 p.
5. Serdyukov, A. Electromagnetics of bi-anisotropic materials theory and applications / A. Serdyukov, I. Semchenko, S. Tretyakov, A. Sihvola. – Overseas Publishers Association, 2001. – 400 p.
6. Варшалович, А.Б. Квантовая теория углового момента / А.Б. Варшалович, А.Н. Москалев, В.К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 600 с.
7. Arfken, G. Mathematical methods for physicists / G. Arfken, H. Weber, F. Harris – 7-th ed. – San Diego: Academic Press, 2012. – 1205 p.
8. Климов, В.В. Наноплазмоника / В.В. Климов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 480 с.
9. Капшай, В.Н. Резонансная структура сечений рассеяния и экстинкции в проблеме Ми для биизотропного шара / В.Н. Капшай, А.А. Шамына, В.В. Кондратюк // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4 (9). – С. 28–32.
10. Капшай, В.Н., Электромагнитные поля в биизотропной среде внутри и вне металлической сферы / В.Н. Капшай, В.В. Кондратюк // Известия ВУЗов. Физика. – 2000. – № 11. – С. 79–84.
11. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами; под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 830 с.

**А.Ф. Константинова, Т.Г. Головина,  
К.К. Константинов, Е.А. Евдищенко**

Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова,  
ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН, Москва, Россия

## **НЕОБЫЧНЫЕ СЛУЧАИ ПРОЯВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

### **Введение**

Несмотря на то, что оптическая активность в одноосных кристаллах хорошо исследована и по этой теме есть много различных работ, все равно остаются нерешенные вопросы. Представляют интерес особенности проявления оптической активности в одноосных кристаллах разных классов, связанные с различным видом тензора гирации [1].

Во-первых, это кристаллы примитивных 3, 4, 6 (тензор гирации имеет симметричную и антисимметричную части), аксиальных 32, 422, 622 (тензор гирации симметричен) и планальных классов  $3m$ ,  $4mm$ ,  $6mm$  (тензор гирации антисимметричен, а оптическая активность проявляется только при наклонном падении света на кристалл [1–3]).

Во-вторых, в кристаллах классов  $\bar{4}2m$  и  $\bar{4}$  оптическая активность проявляется необычным образом, а в направлении оптической оси вращение плоскости поляризации отсутствует.

В настоящей работе рассмотрены азимуты поляризации  $\chi$  и эллиптичности  $k$  отраженного ( $r$ ) и прошедшего ( $t$ ) света.

### **1. Влияние антисимметричной части тензора гирации на характеристики отраженного и прошедшего света в кристаллах классов 3, 4, 6, 32, 422, 622 и 3m, 4mm, 6mm**

Проведем расчет азимута поляризации  $\chi_r$  и эллиптичности  $k_r$  отраженного света и сравним полученные результаты для примитивных, аксиальных и планальных кристаллов. Величины  $\chi_r$  и  $k_r$  можно рассчитать по формулам [1]:

$$(k_r)_{p,s} = \operatorname{tg} \gamma_{p,s}, \quad \sin 2\gamma_{p,s} = \frac{2 \operatorname{Im} \kappa_{p,s}}{1 + |\kappa_{p,s}|^2}, \quad \operatorname{tg} 2(\chi_r)_{p,s} = \frac{2 \operatorname{Re} \kappa_{p,s}}{1 - |\kappa_{p,s}|^2}, \quad (1)$$

где индексы  $p, s$  соответствуют  $p$ - и  $s$ -поляризации падающего света;

$$\kappa_p = \frac{E_{ps}}{E_{pp}} = \frac{2i n_i \eta_i (\alpha_{12} n_i \sin \varphi + (\alpha_{11} + \alpha_{33})(\eta_o - \eta_e) n_o^2 / (n_e^2 - n_o^2) + \alpha_{11} \eta_o)}{(\eta_e + \eta_i)(n_o^2 \eta_i - n_i^2 \eta_o)},$$

$$\kappa_s = \frac{E_{sp}}{E_{ss}} = \frac{2i n_i \eta_i (\alpha_{12} n_i \sin \varphi + (\alpha_{11} + \alpha_{33})(n_o^2 \eta_e - n_e^2 \eta_o) / (n_e^2 - n_o^2) + \alpha_{33} \eta_o)}{(\eta_e - \eta_i)(n_o^2 \eta_i + n_i^2 \eta_o)}, \quad (2)$$

$$\eta_i = n_i \cos \varphi, \quad \eta_{o,e} = \sqrt{n_{o,e}^2 - n_i^2 \sin^2 \varphi}.$$

Здесь  $\varphi$  – угол падения света,  $n_o, n_e$  – главные показатели преломления одноосного кристалла,  $n_i$  – показатель преломления внешней среды,  $E_{pp}, E_{ps}$  и  $E_{sp}, E_{ss}$  – компоненты электрического поля отраженной волны, первые индексы  $p$ - и  $s$ - означают поляризацию падающей волны, вторые – отраженной. Формулы получены без учета многократных отражений и приведены для случая, когда оптическая ось кристалла параллельна плоскости пластинки и перпендикулярна плоскости падения света.

Так как величины  $\chi_r$  и  $k_r$  пропорциональны  $\alpha_{ij}$ , в большинстве случаев  $|\chi_r| \ll 1, |k_r| \ll 1$ . Но величины  $\chi_r$  и  $k_r$  могут принимать большие значения, если знаменатель (2) близок к нулю. Это возможно при  $p$ -поляризации падающего света, если угол падения близок к углу Брюстера  $\varphi_B$  ( $\tan^2 \varphi_B = \varepsilon_o / n_i^2$ ). Также знаменатель (2) может быть малым при любом  $\varphi$ , если показатель преломления внешней среды  $n_i$  близок к показателям преломления кристалла.

На рисунке 1 показаны зависимости  $\chi_r(\varphi)$  и  $k_r(\varphi)$  при  $p$ - (рисунки 1,а и 1,б) и  $s$ -поляризациях (рисунки 1,в и 1,г) падающего света при его падении из среды с показателем ( $n_i = 2,265$ ), близким к показателям преломления кристалла. Для планальных кристаллов (кривые 1) зависимости  $k_r(\varphi)$  и  $\chi_r(\varphi)$  антисимметричны ( $\chi_r(-\varphi) = -\chi_r(\varphi), k_r(-\varphi) = -k_r(\varphi)$ ), для аксиальных (кривые 2) симметричны ( $\chi_r(-\varphi) = \chi_r(\varphi), k_r(-\varphi) = k_r(\varphi)$ ), а для примитивных (кривые 3) несимметричны ( $|\chi_r(-\varphi)| \neq |\chi_r(\varphi)|, |k_r(-\varphi)| \neq |k_r(\varphi)|$ ). Это также видно из формул (1), (2).

Для прозрачного кристалла  $\chi_r(\varphi) = 0$ , а максимальные значения  $k_r(\varphi)$  равны  $\pm 1$  в окрестностях точек  $\varphi = \pm \varphi_B$  для  $p$ -поляризации падающего света; при этом  $k_r(\pm \varphi_B) = 0$  [4]. Для поглощающего кристалла максимумы и минимумы  $k_r(\varphi)$  уже не доходят до  $\pm 1$  (рисунок 1,б);  $\chi_r(\varphi) \neq 0$  (рисунки 1,а и 1,в).

Рассмотрим зависимости азимута поляризации  $\chi_r$  прошедшего света от длины волны  $\lambda$  при наличии изотропной точки по двупреломлению (рисунок 2). Расчеты проведены с учетом многократных отражений. Для кристаллов классов 3, 4, 6 и 32, 422, 622 в изотропной точке видно вращение плоскости поляризации (рисунок 2,а),  $\rho \approx \pi(\alpha_{11} + \alpha_{33})/\lambda$ . В кристаллах  $3m, 4mm, 6mm$  вращение плоскости поляризации отсутствует (рисунок 2,б).

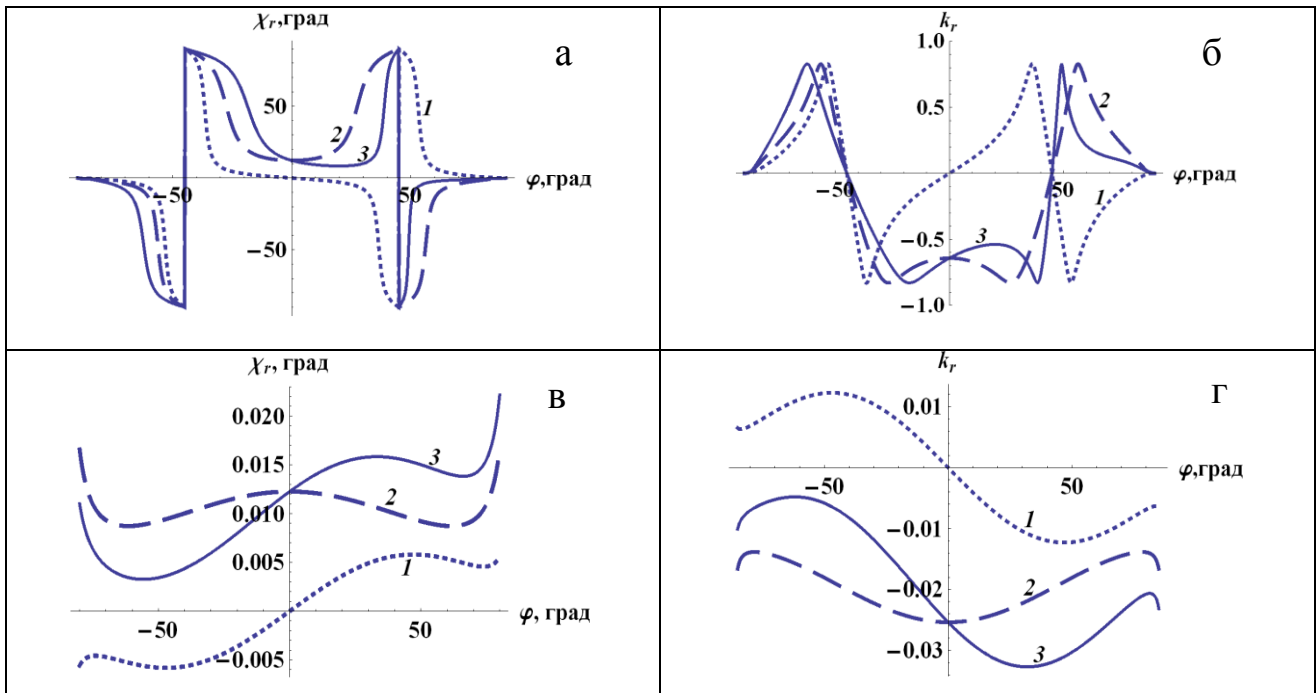


Рисунок 1 – Зависимости  $\chi_r$  и  $k_r$  от угла падения  $\varphi$ ;

а, б –  $p$ -поляризация, в, Г –  $s$ -поляризация падающего света;

$n_o = 2,2597 + i 0,001$ ,  $n_e = 2,4125 + i 0,0012$ ,  $n_i = 2,265$ ;

1 –  $\alpha_{11} = \alpha_{33} = 0$ ,  $\alpha_{12} \neq 0$ ; 2 –  $\alpha_{11}, \alpha_{33} \neq 0$ ,  $\alpha_{12} = 0$ ; 3 –  $\alpha_{11}, \alpha_{33}, \alpha_{12} \neq 0$ ;  
 $\alpha_{11} = 1,9 \cdot 10^{-3} + i \cdot 10^{-6}$ ,  $\alpha_{33} = -5,7 \cdot 10^{-3} - i 1,5 \cdot 10^{-6}$ ,  $\alpha_{12} = -3,5 \cdot 10^{-3} - i 2 \cdot 10^{-6}$

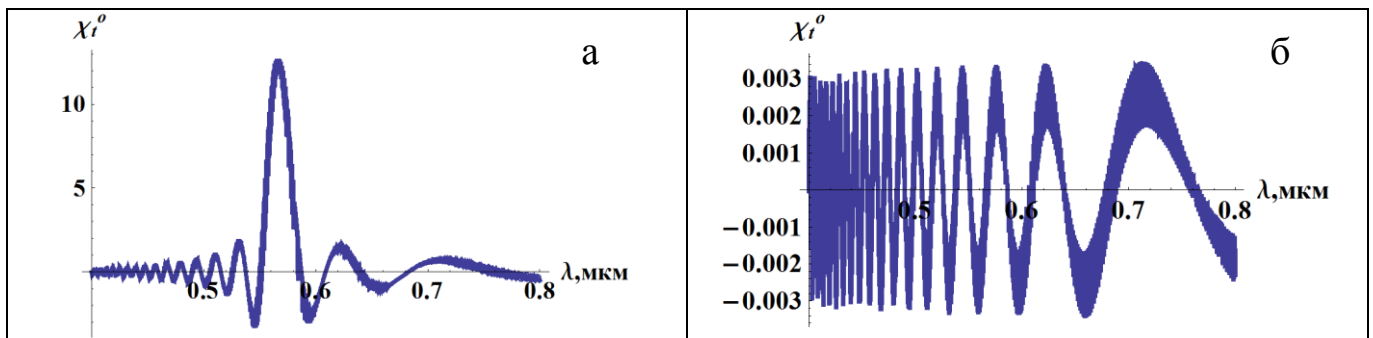


Рисунок 2 – Зависимости  $\chi_i(\lambda)$  при наличии изотропной точки;

а – классы 3, 4, 6 и 32, 422, 622; б – 3m, 4mm, 6mm;

свет падает под углом  $\varphi = 30^\circ$ ;  $d = 0,1$  мм,  $n_t = 1$ ,  $n_i = 1$ ,  $\alpha_{11} = 1,9 \cdot 10^{-4}$ ,  
 $\alpha_{33} = -5,7 \cdot 10^{-4}$ ,  $\alpha_{12} = -3,5 \cdot 10^{-4}$

## 2. Особенности проявления оптической активности в кристаллах классов $\bar{4}2m$ и $\bar{4}$

В кристаллах классов  $\bar{4}2m$  и  $\bar{4}$  тензор гирации имеет необычный вид ( $\alpha_{22} = -\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{33} = 0$ ,  $\alpha_{21} = \alpha_{12}$ ) [1]. Для класса  $\bar{4}2m$  величина  $\alpha_{12} = 0$ , если оси

координат  $X$ ,  $Y$  направлены вдоль осей 2-го порядка (рисунок 3,а). Если  $X$ ,  $Y$  выбраны как перпендикуляры к плоскостям симметрии, то  $\alpha_{11} = 0$ , а  $\alpha_{12} \neq 0$ .

Рассчитан азимут поляризации  $\chi$  света, прошедшего через пластинку кристалла  $\bar{4}2m$ . Пластинка вырезана параллельно оптической оси, плоскость падения света перпендикулярна оптической оси. Но при этом возможна разная ориентация пластинки относительно осей 2-го порядка и плоскостей симметрии. На рисунке 3,б показана величина  $\chi$  при разных ориентациях (угол  $\psi$ ) оси 2-го порядка. При  $\psi = 0$  (ось 2-го порядка параллельна поверхности пластинки, плоскости симметрии расположены под углом  $45^\circ$  к ней) получаем  $\chi(-\varphi) = \chi(\varphi)$ ; при  $\psi = 45^\circ$  (обе оси 2-го порядка расположены под углом  $45^\circ$  к поверхности, одна из плоскостей симметрии параллельна поверхности)  $\chi(-\varphi) = -\chi(\varphi)$ . В остальных случаях  $\chi(-\varphi) \neq \chi(\varphi)$ , что показано на рисунке 3, в для  $\psi = 30^\circ$ .

В кристалле класса  $\bar{4}$  есть только ось  $\bar{4}$ , а зависимости  $\chi(\varphi)$  в общем виде несимметричны (рисунок 3,в).

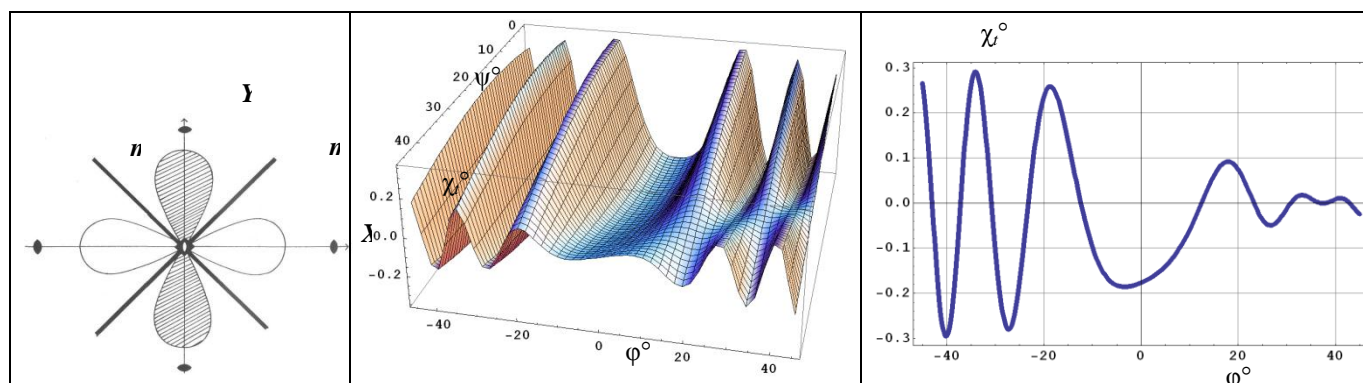


Рисунок 3 – Сечение поверхности гирации кристалла  $\bar{4}2m$  (а); зависимость  $\chi$  от угла падения  $\varphi$  и угла отклонения  $\psi$  оси 2-го порядка от поверхности пластинки (б); зависимость  $\chi(\varphi)$  при  $\psi = 30^\circ$  (в)

## Заключение

Рассмотрено влияние антисимметричной части тензора гирации  $\alpha_{12}$  на азимуты поляризации  $\chi_r$  и эллиптичности и  $k_r$  отраженного света в кристаллах классов  $3m$ ,  $4mm$ ,  $6mm$ , и проведено сравнение кристаллов классов 3, 4, 6 и 32, 422, 622. Показано, что при  $\alpha_{12} \neq 0$  величины  $\chi_r$  и  $k_r$  при положительных и отрицательных углах падения различны (при чисто антисимметричном тензоре гирации они противоположны). Показано, что величина  $\alpha_{12}$  не оказывает влияния на азимут поляризации  $\chi_r$  в изотропной точке.

Для кристаллов классов  $\bar{4}2m$  показано, что зависимости  $\chi_r$  от угла падения для положительных и отрицательных углов падения имеют принципиально разный вид при разной ориентации осей 2-го порядка и плоскостей симметрии относительно поверхности пластинки.



## Литература

1. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.
2. Федоров, Ф.И. К вопросу об оптической активности кристаллов планальных классов средних сингоний / Ф.И. Федоров, Б.В. Бокуть, А.Ф. Константинова // Кристаллография. – 1962. – Т. 7. – Вып. 6. – С. 910–915.
3. Константинова, А.Ф. Оптические свойства кристаллов / А.Ф. Константинова, Б.Н. Гречушников, Б.В. Бокуть, Е.Г. Валяшко. – Минск : Наука и техника, 1995. – 304 с.
4. Головина, Т.Г. Особенности проявления оптической активности в различных одноосных кристаллах / Т.Г. Головина, А.Ф. Константинова, Е.А. Евдищенко, К.К. Константинов // Кристаллография. – 2016. – Т. 61. – № 4. – С. 588–595.

**Г.В. Кулак, Г.В. Крох, Т.В. Николаенко**

УО «Мозырский государственный педагогический университет  
имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь

### **ПРОМЕЖУТОЧНЫЙ РЕЖИМ ДИФРАКЦИИ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ НА УЛЬТРАЗВУКЕ В ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

В настоящее время значительный интерес для оптических технологий представляют квазибездифракционные световые поля, которые соответствуют световым пучкам с сохраняющимся в процессе распространения поперечным распределением амплитуды поля. Наиболее известным классом квазибездифракционных полей являются бесселевы световые пучки (БСП) [1]. Для изготовления акустооптических (АО) устройств обработки информации (модуляторов, дефлекторов, фильтров, процессоров, датчиков и т. д.) широкое применение находят кристаллы, обладающие хорошими фотоупругими свойствами и гиротропией. К таким кристаллам в первую очередь относятся парателлурит ( $TeO_2$ ), теллур ( $Te$ ), германат и силикат висмута ( $Bi_{12}GeO_{20}$ ,  $Bi_{12}SiO_{20}$ ), кварц ( $\alpha-SiO_2$ ) и др. В связи с этим актуальна задача исследования различных режимов АО взаимодействия БСП в таких кристаллах [2]. При этом следует учитывать, что наилучшими характеристиками обладают АО устройства в промежуточном режиме дифракции [2]. В настоящей работе с использованием материальных уравнений для гиротропного диэлектрика [3] и метода медленно-изменяющихся амплитуд (ММА) исследован промежуточный режим АО дифракции БСП нулево-

го порядка в гиротропных кристаллах кварца, парателлурита и германата висмута.

Рассмотрим неколлинеарное АО взаимодействие световых волн, распространяющихся вблизи оптической оси одноосного гиротропного кристалла с ультразвуковой (УЗ) волной, которая возбуждается вдоль оси  $OX$  (ось  $OY$  ортогональна плоскости дифракции, см. рисунок 1). Будем считать, что упругая волна с вектором смещения  $\vec{U} = \vec{U}_0 \exp[i(Kx - \Omega t)]$  ( $K = \Omega/v$ ,  $\Omega = 2\pi f$  – циклическая частота,  $v$  – фазовая скорость УЗ волны) занимает пространство между плоскостями  $z = 0$  и  $z = l$ . УЗ волна индуцирует периодическую в пространстве и времени решетку диэлектрической проницаемости:  $\hat{\epsilon}(r,t) = \hat{\epsilon}^0 + \Delta\hat{\epsilon} \cos(\vec{K}\vec{r} - \omega t)$ , где  $\hat{\epsilon}^0$  – тензор диэлектрической проницаемости невозмущенного кристалла,  $\Delta\epsilon_{ik} = -\epsilon_{il}^0 \epsilon_{jk}^0 p_{ljmn} U_{mn}$ ,  $p_{ljmn}$  – компоненты тензора фотоупругих постоянных,  $U_{mn}$  – компоненты тензора деформаций.

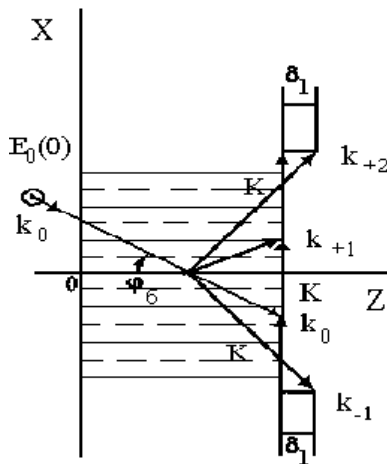


Рисунок 1 – Схема расположения волновых векторов ультразвука  $\vec{K}$ , падающей  $\vec{k}_0$  и дифрагированных  $\vec{k}_m$  ( $m = 0, \pm 1, + 2$ ) световых волн при промежуточном режиме АО взаимодействия, близком к брэгговскому ( $\delta_1$  – параметр отстройки)

При распространении света вблизи оптической оси одноосного гиротропного кристалла (для кубического кристалла гиротропия проявляется для любых направлений в кристалле) режим АО дифракции определяется волновым параметром Клейна-Кука  $Q \approx \lambda_0 f^2 l / n v^2$ , где  $n$  – показатель преломления в направлении распространения падающей световой волны,  $l$  – длина области АО взаимодействия,  $\lambda_0$  – длина световой волны в вакууме. Брэгговский режим дифракции наблюдается при  $Q \geq 1,5$ , раман-натовский при  $Q \leq 0,6$ . Промежуточный режим АО взаимодействия имеет место при  $0,6 < Q < 1,5$ . В последнем случае для световой волны, падающей под углом Брэгга

$\varphi_0 \approx \lambda_0 f / 2m\nu$ , следует учитывать четыре (и более) дифракционных порядка (вместо двух для брэгговского режима дифракции).

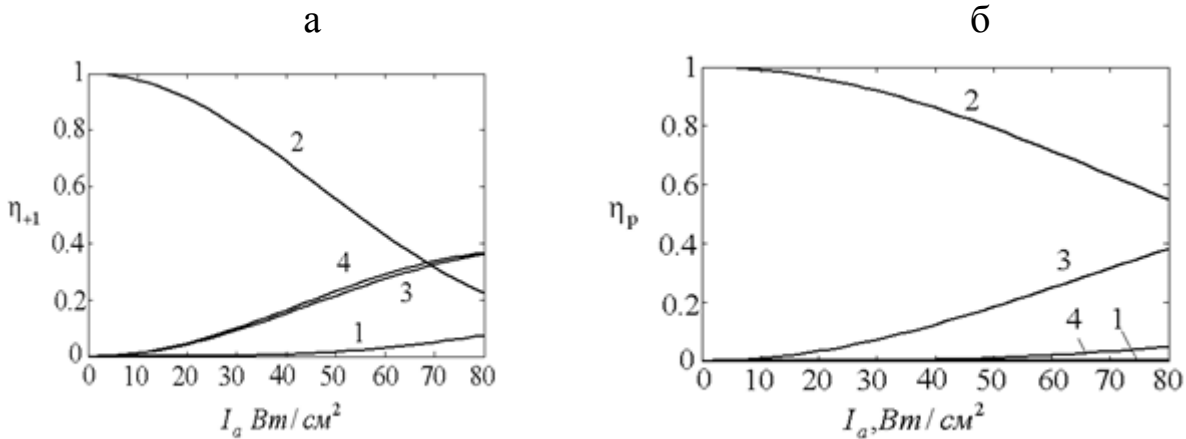


Рисунок 2 – Зависимость эффективности дифракции в четырех дифракционных порядках  $p$ : -1 (1), 0 (2), +1 (3), +2 (4) от интенсивности ультразвука  $I_a$  ( $Q = 1,2$ ;  $R_B = 1$  мм – радиус БСП,  $\gamma_0 = 0,5^0$  – угол конусности БСП,  $\lambda_0 = 0,63$  мкм,  $l = 0,2$  см; сдвиговая УЗ волна в кристалле  $TeO_2$  (а); продольная УЗ волна в кристалле  $Bi_{12}GeO_{20}$  (б))

Рассмотрим некоторые геометрии АО взаимодействия в кубических и одноосных кристаллах: 1) дифракция света на медленной сдвиговой УЗ волне в кристалле  $TeO_2$ , когда УЗ волна распространяется вдоль оси  $[110]$  и поляризована вдоль направления  $[\bar{1}10]$ ; 2) дифракция света на сдвиговой УЗ волне в кристалле  $\alpha - SiO_2$ , когда УЗ волна распространяется вдоль оси  $[110]$  и поляризована вдоль направления  $[\bar{1}10]$ ; 3) дифракция света на продольной УЗ волне в кристалле  $Bi_{12}GeO_{20}$ , распространяющейся вдоль оси  $[110]$ , и падающей световой волны, распространяющейся вблизи оси  $[001]$ . При этом эффективность дифракции на сдвиговой УЗ волне в кристаллах кварца мала по сравнению с эффективностью дифракции на сдвиговой УЗ волне в кристаллах парателлурита и на продольной УЗ волне в кристаллах германата висмута. На рисунке 2 представлена зависимость эффективности дифракции в -1, 0, +1 и +2-м дифракционном порядке от интенсивности ультразвука  $I_a$  в промежуточном режиме дифракции, близком к брэгговскому, для кристаллов  $TeO_2$  (а) и  $Bi_{12}GeO_{20}$  (б).

Из рисунка 2,а следует, что при дифракции БСП нулевого порядка в кристалле  $TeO_2$  эффективность дифракции в +1-м и -1-м дифракционных порядках практически совпадают. Это связано со значительным удельным вращением кристалла в рассматриваемом диапазоне оптического спектра. Для кристалла  $Bi_{12}GeO_{20}$  (рисунок 2,б) относительные интенсивности в +1-м и -1-м дифракционных по-

рядках значительно различаются. Малые значения относительных интенсивностей во +2-м дифракционном порядке связаны со значительной фазовой расстройкой векторного синхронизма  $\delta_1$  (см. рисунок 1) [2]. Эффективность дифракции на сдвиговой УЗ волне в кристалле  $\alpha - SiO_2$ , когда УЗ волна распространяется вдоль оси  $[110]$  и поляризована вдоль направления  $[\bar{1}10]$ , значительно ниже чем в кристаллах  $TeO_2$  и  $Bi_{12}GeO_{20}$ . Это связано с малой эффективной фотоупругой постоянной для этого кристалла.

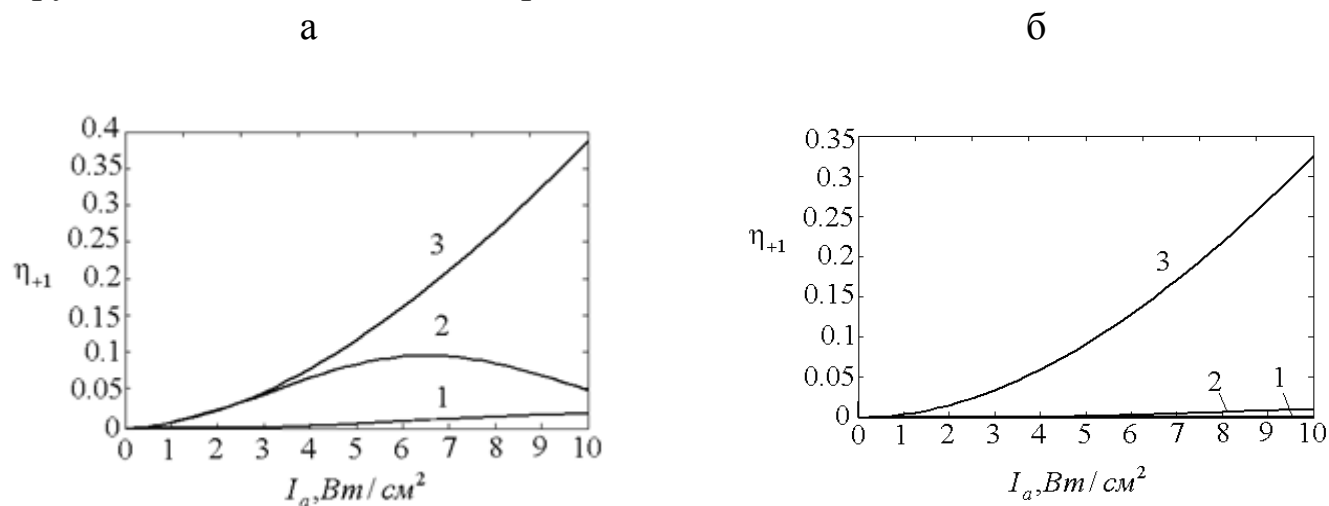


Рисунок 3 – Зависимость эффективности дифракции  $\eta_{+1}$  от интенсивности ультразвука  $I_a$  при различных длинах АО взаимодействия  $l$ :  
 1–0, 2, 2–0, 4, 3–0,5 см на сдвиговая УЗ волна, кристалле  $TeO_2$  (а);  
 зависимость эффективности дифракции  $\eta_{+1}$  от интенсивности ультразвука  $I_a$   
 при различных длинах АО взаимодействия  $l$ : 1–0, 2, 2–0, 4, 3–0,5 см  
 на продольной УЗ волне в кристалле  $Bi_{12}GeO_{20}$  (б)

На рисунке 3,а представлена зависимость эффективности дифракции в +1-м дифракционном порядке от интенсивности медленной сдвиговой УЗ волны, распространяющейся вдоль оси  $[110]$  и поляризованной вдоль направления  $[\bar{1}10]$  кристалла парателлуриата при различных длинах АО взаимодействия. Зависимость эффективности дифракции в +1-м дифракционном порядке от интенсивности продольной УЗ волны, распространяющейся вдоль оси  $[110]$  кристалла германата висмута при различных длинах АО взаимодействия представлена на рисунке 3,б.

### Заключение

На основе полученных результатов могут быть созданы акустооптические устройства, работа которых основана на промежуточной дифракции света на ультразвуке. Такие устройства на основе бесселевых световых пучков (модуляторы, дефлекторы) перспективны для применений в лазерных технологиях (лазерная резка, сварка и др.).

## Литература

1. Durnin, J. Exact solutions for nondiffracting beams / J. Durnin // J. Opt. Soc. Am. – 1987. – Vol. 4. – № 4. – P. 651–654.
2. Балакший, В.Н. Физические основы акустооптики / В.Н. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М. : Радио и связь, 1985. – 280 с.
3. Бокуть, Б.В. Феноменологическая теория естественной оптической активности / Б.В. Бокуть, А.Н. Сердюков // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – № 5. – С. 1808–1813.

**Г.В. Кулак<sup>1</sup>, Г.В. Крох<sup>1</sup>, Т.В. Николаенко<sup>1</sup>, А.П. Ропот<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь

<sup>2</sup>ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси, Минск, Беларусь

### **НЕКОЛЛИНЕАРНАЯ БРЭГГОВСКАЯ ДИФРАКЦИЯ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ НА УЛЬТРАЗВУКЕ В КУБИЧЕСКИХ ГИРОТРОПНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

Акустооптическая (АО) дифракция световых волн в плосковолновом приближении и гауссовых световых пучков довольно хорошо изучена [1]. В настоящее время имеется мало работ по преобразованию бесселевых световых пучков (БСП) [2, 3].

В настоящей работе с использованием метода интегралов перекрытия рассмотрено неколлинеарное АО взаимодействие бесселевых световых пучков высоких порядков при попутном распространении в гиротропных кубических кристаллах. При этом в качестве примера рассмотрена АО дифракция азимутально-неоднородных БСП нулевого порядка ( $m = 0$ ) и первого порядка ( $m = 1$ ). Кроме обычного продольного фазового согласования БСП должны удовлетворять условиям поперечного фазового согласования. Такое согласование связано с тем, что БСП с различными углами конусности имеют различную пространственную структуру и, как следствие, различные величины интегралов перекрытия дифрагированных пучков. Рассмотрение интегралов перекрытия позволяет найти их максимальные значения.

Предполагается, что циркулярно-поляризованный световой пучок падает под углом Брэгга к фронту УЗ волны и испытывает дифракцию на ультразвуке.

Для АО взаимодействия волн с одинаковыми поляризациями (изотропная дифракция) условия Брэгга выполняются одновременно при одном и том же угле падения  $\theta_A = \arcsin(\lambda_0 / 2n\Lambda)$ , где  $\lambda_0$  и  $\Lambda$  – длина световой и звуковой волн соответственно;  $n$  – показатель преломления кристалла без учета гиротропии. В случае взаимодействия волн с различными поляризациями (анизотропная дифракция) углы Брэгга отличаются от  $\theta_B$  на величину  $\delta\theta = \pm 2\gamma / (n \sin 2\theta_A)$ , где  $\gamma$  – параметр гиротропии. При соблюдении условия  $\gamma \gg \Delta n_a$  ( $\Delta n_a$  – глубина модуляции показателя преломления акустической волной), возможно независимое рассмотрение всех четырех дифракционных процессов в гиротропных средах. Данное условие выполняется для большинства гиротропных сред используемых в акустооптике [1].

Предполагается, что на границе области АО взаимодействия формируются избирательно БСП с правой или левой эллиптической поляризацией. В таком случае варьированием частоты ультразвука возможно достижение различных типов преобразования эллиптически-поляризованных волн.

Рассмотрим распространение БСП вблизи оси Z кристалла, тогда вдоль оси X, совпадающей с кристаллографической осью второго, третьего или четвертого порядка, распространяется продольная или сдвиговая УЗ волна.

Система уравнений связанных волн имеет вид:

$$\begin{aligned}
 2ik_{z\pm} \frac{dA_{0\pm}}{dz} &= k_0^2 \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\vec{e}_{\pm}^* \Delta \hat{\epsilon} \vec{e}_{\mp}) r d\phi dr}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_{\pm}^*|^2 r d\phi dr} A_{1\mp}, \\
 2ik_{z\mp} \frac{dA_{1\mp}}{dz} &= k_0^2 \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} (\vec{e}_{\mp}^* \Delta \hat{\epsilon} \vec{e}_{\pm}) r d\phi dr}{\int_0^{2\pi} \int_0^{R_B} |\vec{e}_{\mp}^*|^2 r d\phi dr} A_{0\pm},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $\Delta \hat{\epsilon}$  – тензор возмущений диэлектрической проницаемости, вызванных УЗ волной,

$$\begin{aligned}
 \vec{e}_+ &= e_{r+} \vec{e}_r + e_{\phi+} \vec{e}_\phi, \quad \vec{e}_- = e_{r-} \vec{e}_r + e_{\phi-} \vec{e}_\phi, \\
 e_{r+} &= i \left[ \frac{m}{qr} J_m(qr) (1 + \cos \gamma_+) - J_{m+1}(qr) \cos \gamma_+ \right], \\
 e_{\phi+} &= \left[ J_{m+1}(qr) - \frac{m}{qr} J_m(qr) (1 + \cos \gamma_+) \right],
 \end{aligned}$$

$$e_{r-} = -i \left[ \frac{m}{qr} J_m(qr)(1 - \cos \gamma_-) + J_{m+1}(qr) \cos \gamma_- \right],$$

$$e_{\phi-} = \left[ -J_{m+1}(qr) + \frac{m}{qr} J_m(qr)(1 - \cos \gamma_-) \right],$$

причем  $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z$  – единичные векторы в цилиндрических координатах  $r, \phi, z$ ; здесь  $k_\pm = k \pm \rho$ , причем  $\rho = \alpha k_0 / \cos(\gamma_0)$  – удельное вращение кристалла,  $\gamma_0$  – параметр конусности преломленного светового пучка без учета гиротропии,  $\alpha$  – параметр гиротропии,  $m$  – целое число,  $\tilde{\cos}(\gamma_\pm) = \tilde{\cos}(\gamma_0) [1 \pm (\alpha/n) \text{tg}(\gamma_0)]$ ,  $J_m(x)$  – функции Бесселя.

Решение системы уравнений связанных волн (1) ищем с использованием следующих граничных условий:  $A_{0\pm}(0) = A$ ,  $A_{\pm\pm}(0) = 0$ . Тогда решение имеет вид:

$$A_{0\pm\pm}(z) = A \cos(|\chi_{\pm\pm}|^2 g_{\pm\pm} z), \dot{A}_{\pm\pm} = iA \sin(|\chi_{\pm\pm}|^2 g_{\pm\pm} z), \quad (2)$$

где  $g_{\pm\pm}$  – интегралы перекрытия дифрагированных волн,

$$|\chi_{\pm\pm}|^2 = \frac{\pi n^3 (p_{11} + p_{12})}{4\lambda_0} \sqrt{\frac{2I_a}{\sigma v_L^3}},$$

где  $p_{11}, p_{12}$  – фотоупругие постоянные,  $I_a$  – интенсивность УЗ волны,  $\sigma$  – плотность кристалла,  $v_L$  – фазовая скорость продольной УЗ волны. При дифракции на сдвиговых УЗ волнах  $\chi_{\pm\pm} = 0$ , то есть АО преобразование бesselевых пучков не реализуется.

На рисунке 1 представлены зависимости интегралов перекрытия  $g_{\pm\pm}$  от параметра  $q_n = q/q_0$  для дифракции бesselевого светового пучка нулевого порядка (а) и первого порядка (б).

Из рисунка 1,а следует, что интегралы перекрытия основной моды бesselевого светового пучка ( $m=0$ ) достигают максимального значения при выполнении поперечного фазового синхронизма, то есть при  $q_n=0$ . При этом интегралы перекрытия для анизотропной дифракции (кривая 2) выше, чем для изотропной дифракции (кривая 1). При этом эффективности всех возможных типов анизотропной и изотропной дифракции одинаковы.

В случае азимутально-неоднородных БСП с азимутальным числом  $m = 1$  (рисунок 1,б), эффективности дифракции всех возможных видов АО преобразования отличаются по величине для больших значений параметра  $q_n > 0,1$ . При малых значениях  $q_n < 0,1$  интегралы перекрытия удовлетворяют соотношениям:  $g_{+,+} = g_{+,-}$  и  $g_{-,-} = g_{-,+}$ . При этом максимальное значение интеграла перекрытия для дифракции правополяризованной световой волны в левополяризованную и правополяризованной волны в правополяризованную достигают

максимального значения при отличном от нуля расстройном параметре ( $q_n \neq 0$ ).

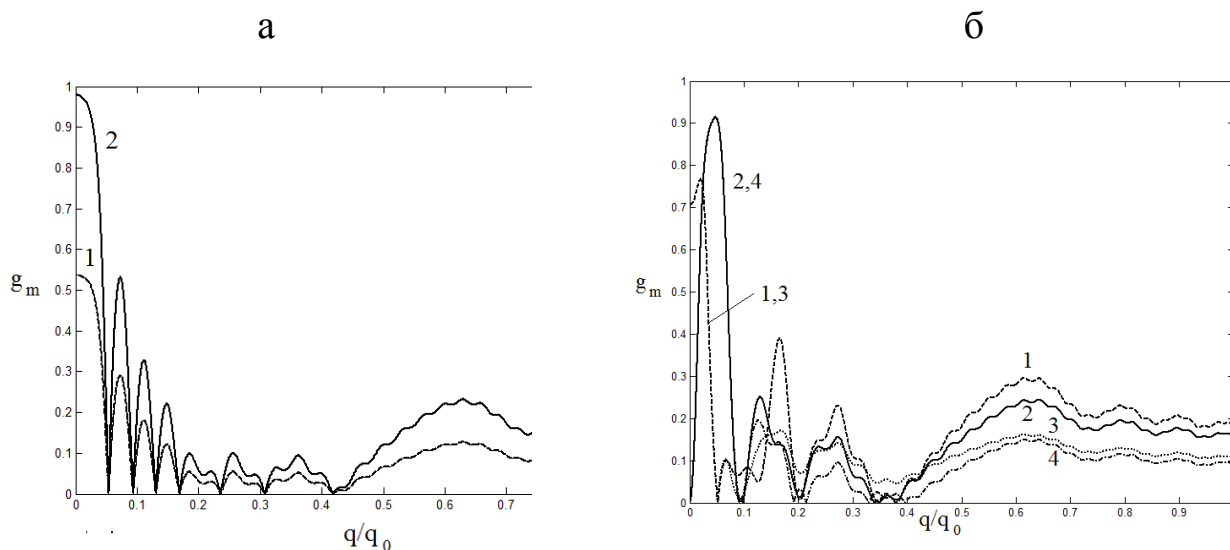


Рисунок 1 – Зависимость интеграла перекрытия  $g_{\pm,\pm}$  от параметра  $q_n=q/q_0$  для дифракции БСП нулевого порядка (а) и первого порядка (б);

а) изотропная дифракция (кривая 1), анизотропная дифракция (кривая 2) для  $m = 0$ ;

б) дифракция правополяризованной волны в левополяризованную (кривая 1), левополяризованной в правополяризованную (кривая 2), правополяризованной в правополяризованную (кривая 3), левополяризованной в левополяризованную (кривая 4) (рассмотрен кристалл  $\text{Vi}_{12}\text{GeO}_{20}$ , продольная УЗ волна,

$$\vec{K} \parallel [100], \gamma_0 = 0,5^\circ, \rho = 22 \text{ град/мм}, R_n = 1 \text{ мм})$$

На рисунке 2,а представлена зависимость эффективности дифракции  $\eta$  в первом дифракционном порядке при брэгговской АО дифракции азимутально-однородного БСП ( $m=0$ ) в кристалле  $\text{Vi}_{12}\text{GeO}_{20}$  от интенсивности ультразвука  $I_a$  при максимальном значении интеграла перекрытия  $g_m$  (рисунок 1,а). Эффективность анизотропной дифракции выше, чем изотропной.

Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  азимутально-неоднородного БСП ( $m=1$ ) от интенсивности ультразвука  $I_a$  для различных состояний поляризации падающего и дифрагированного света представлена на рисунке 2,б. Наибольшая эффективность дифракции достигается для АО преобразования левополяризованной световой волны в правополяризованную и несколько меньшая при АО преобразовании правополяризованной волны в правополяризованную. Такая особенность дифракции БСП определяется величиной интеграла перекрытия соответствующего дифракционного процесса и эффективной фотоупругой постоянной.



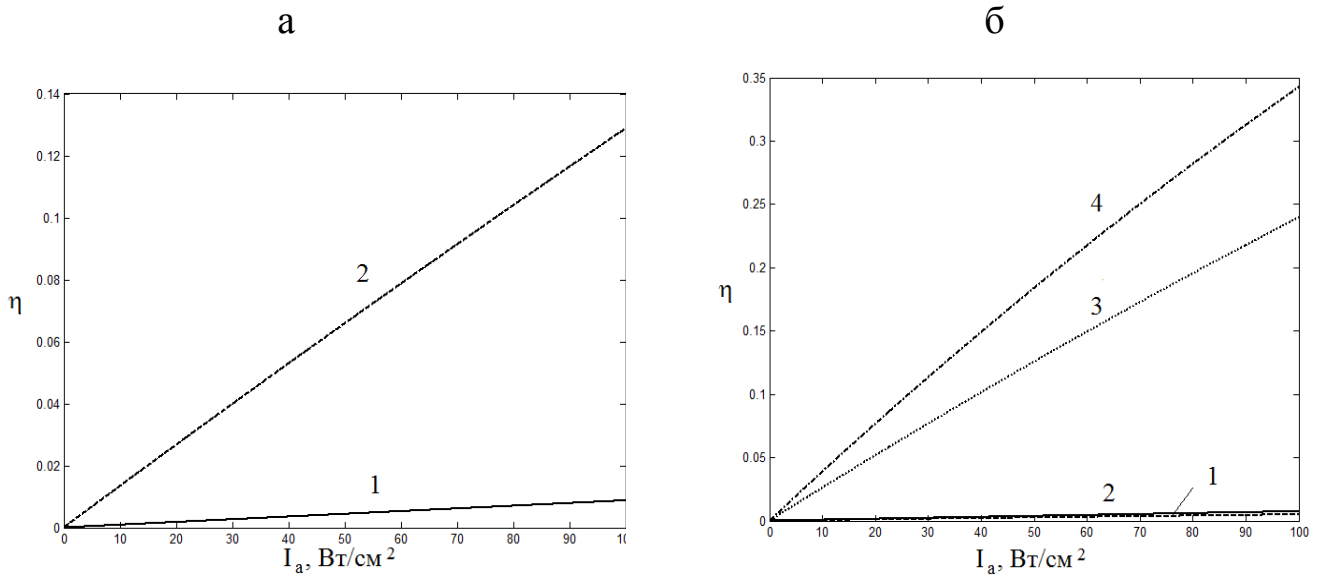


Рисунок 2 – Зависимость эффективности дифракции  $\eta$  от интенсивности ультразвука для падающего БСП нулевого порядка (а) и первого порядка (б); а) изотропная дифракция (1), анизотропная дифракция (2); б) дифракция правополяризованной волны в левополяризованную (1), левополяризованной в левополяризованную (2), правополяризованной в правополяризованную (3), левополяризованной в правополяризованную (4) (кристалл  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ , продольная УЗ волна,  $\vec{K} \parallel [100]$ ,  $m=0$  (а),  $m=1$  (б),  $\gamma_0=0,5^\circ$ ,  $\rho=22$  град/мм,  $R_H=1$  мм,  $l=5$  см; интегралы перекрытия:  $g_{+,+} = g_{-,-} = 0,53$ ,  $g_{-,+} = g_{+,-} = 0,98$  (а); интегралы перекрытия:  $g_{-,+} = g_{-,-} = 0,93$ ,  $g_{+,-} = g_{+,+} = 0,76$  (б))

Ширина полосы пропускания модулятора-дефлектора при изотропной АО дифракции БСП нулевого порядка составляет  $\Delta f_{1/2} = 10$  МГц (АО преобразование с изменением поляризации (анизотропная дифракция) не представляет значительного интереса вследствие малой эффективности дифракции). При дифракции БСП с азимутально-неоднородным распределением амплитуды ( $m = 1$ ) наибольший интерес представляет дифракция левополяризованной световой волны в правополяризованную. При этом ширина полосы пропускания модулятора-дефлектора составляет  $\Delta f_{1/2}=12$  МГц.

### Заключение

Показано, что в гиротропных кубических кристаллах реализуется эффективное неколлинеарное акустооптическое преобразование БСП высших порядков на продольных ультразвуковых волнах при изотропной и анизотропной дифракции эллиптическиполяризованных волн. При этом ширина полосы амплитудного АО модулятора-дефлектора для азимутально-однородного светового пучка составляет 10 МГц и для азимутально-неоднородного БСП первого порядка 12 МГц.

## Литература

1. Балакший, В.Н., Физические основы акустооптики / В.Н. Балакший, В.Н. Парыгин, Л.Е. Чирков. – М. : Радио и связь, 1985. – 280 с.
2. Белый, В.Н. Поляризационно-независимая акустооптическая модуляция бесселевых световых пучков / В.Н. Белый, Г.В. Кулак, Г.В. Крох, О.В. Шакин // Журнал прикладной спектроскопии. – 2014. – № 1. – С. 75–81.
3. Peculiarities of Acoustooptic Transformation of Bessel Light Beams in gyro-tropic Crystals / V.N. Belyi [et al.] // Universal Journal of Physics and Application. – 2015. – Vol. 9(5). – P. 220–224.

**А.В. Макаревич<sup>1</sup>, В.В. Шепелевич<sup>1</sup>, С.М. Шандаров<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь

<sup>2</sup>Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, Томск, Россия

## **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ВЫХОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СМЕШАННЫХ ГОЛОГРАММ ОТ ТОЛЩИНЫ ФОТОРЕФРАКТИВНОГО ПЬЕЗОКРИСТАЛЛА ВТО**

### **Введение**

Фоторефрактивные кристаллы семейства силленита  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  (BSO),  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  (BTO) и  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  (BGO) нашли применение в голографической интерферометрии [1], усилении оптических изображений [2] и других важных голографических приложениях (см., например, [3, 4]). При этом известно, что для рационального использования кристаллов данного типа необходимо оптимизировать выходные характеристики записанных в них голограмм. К таким характеристикам относятся дифракционная эффективность голограммы и коэффициент усиления предметной световой волны.

Однако вопрос об оптимизации процесса считывания голографических решеток в кристалле ВТО до недавнего времени оставался слабо изученным. Вероятно, это было связано с формированием в этом представителе силленитов *смешанных* (амплитудно-фазовых) голограмм, которые были экспериментально и теоретически исследованы в недавней работе [5]. На основании полученных в [5] результатов оптимизация дифракционной эффективности голограмм в кристалле ВТО среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$  была выполнена в [6] и обобщена в [7] на случай произвольного среза этого кристалла. Некоторые проблемы оптимизации про-

цесса считывания *чисто фазовых* голограмм в кристаллах BSO и BGO рассматривались ранее, например, в [8, 9] и [10] соответственно.

Следует отметить, что теория *смешанных* голограмм в кристалле ВТО использовалась нами в [5–7] только для теоретического описания дифракционной эффективности голограмм, а коэффициент усиления предметной световой волны ранее не изучался. Поэтому его рассмотрению будет уделено внимание в рамках данной работы.

Также, насколько нам известно, до настоящего времени не проводились экспериментальные исследования зависимости дифракционной эффективности голограмм от толщины кристалла ВТО, хотя соответствующее теоретическое изучение, основанное на модели *чисто фазовых* голограмм в этом кристалле, можно найти в [11]. Однако в этой работе рассматривались только такие пространственные ориентации кристалла, при которых открытый в 1986 году дополнительный вклад в фоторефрактивный отклик, обусловленный обратным пьезоэлектрическим эффектом и фотоупругостью [12] (далее сокращенно «пьезоэффект»), не проявляется ( $\vec{K} \parallel [001]$ , где  $\vec{K}$  – вектор голографической решетки) либо его влиянием можно пренебречь ( $\vec{K} \perp [001]$ ) [8, 9].

Таким образом, в настоящей работе мы демонстрируем возможность экспериментального изучения зависимости выходных характеристик голограмм от толщины кристалла ВТО и даем их теоретическую интерпретацию с одновременным учетом амплитудной составляющей голограммы и пьезоэффекта.

## 1. Геометрия и методика проведения исследований

Для решения поставленных экспериментальных задач использовалась трапециевидная геометрия взаимодействия в кристалле световых пучков с плоским волновым фронтом, предложенная в работах [13–15] при изучении зависимостей коэффициента усиления предметной световой волны от толщины кристаллов BSO, BGO и ВТО среза  $\{110\}$ . Следует отметить, что данная геометрия является уникальной, поскольку ее использование не требует для выполнения указанных экспериментов набора образцов различной толщины. Однако изучение перекачки энергии световых волн в этих работах осуществлялось при пространственных ориентациях кристалла, когда пьезоэффект может быть исключен из теоретических расчетов (см., напр., [9]).

Здесь мы не приводим подробного описания методики экспериментальных исследований зависимости коэффициента усиления предметной световой волны от толщины фоторефрактивного кристалла, которая достаточно подробно рассмотрена в [14]. Подобные сведения для аналогичного изучения дифракционной эффективности голограмм были представлены ранее в [16].

## 2. Результаты и их обсуждение

Эксперимент проводился по следующей схеме. Световой пучок гелий-неонового лазера ЛГН-207А разделялся на опорный R и предметный S пучки, которые формировали в кристалле ВТО среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$  с фиксированной толщиной  $d_0$ , равной 7,7 мм, ненаклонную пропускающую голограмму. За кристаллом на пути распространения предметного пучка располагалась CCD-камера, которая непосредственно фиксировала требуемые зависимости (см. [14, 16]). Время записи голограммы в кристалле составляло 3 мин, а его ориентационный угол  $\theta$  был равен  $200^\circ$ , причем направление отсчета угла  $\theta$  от кристаллографического направления  $[001]$  к вектору голографической решетки  $\vec{K}$  соответствовало [5, 9]. Следует отметить, что при данном ориентационном угле, в отличие от использованных ориентаций в [11, 13–15], пьезоэффект проявляется существенно. При исследовании дифракционной эффективности отношение интенсивностей опорного и предметного световых пучков  $I_S^0 / I_R^0$  до вхождения в кристалл составляло приблизительно 0,5, а при изучении коэффициента усиления предметной световой волны – 0,24. Различные отношения интенсивностей световых пучков достигались путем установки ослабителей интенсивности лазерного излучения на пути вхождения в кристалл пучка S, применение которых было обусловлено необходимостью работы CCD-камеры при снятии экспериментальных данных в линейном режиме. Угол между пучками R и S в воздухе составлял  $50^\circ$ .

Полученные экспериментальные и теоретические зависимости дифракционной эффективности  $\eta$  голограмм и коэффициента усиления  $\gamma$  предметной световой волны от толщины  $d$  использованного кристалла ВТО для азимутов линейной поляризации световых пучков  $\Psi_0 = 0, 45^\circ, 90^\circ$  и  $135^\circ$  представлены ниже на рисунке 1.

Вертикальной штриховой линией отмечена «граница» между областью, в которой формирование голографической решетки происходило при различных эффективных толщинах кристалла  $d$ , принадлежащих интервалу от 0 до 7,7 мм, и областью, в которой формирование этого пучка осуществлялось при постоянной толщине кристалла  $d_0$ , равной 7,7 мм (см. [16]).

Как видно из представленного рисунка модель *смешанных* голограмм позволила удовлетворительно интерпретировать полученные экспериментальные данные как в случае зависимостей  $\eta(d)$  (рисунок 1,а), так и в случае зависимостей  $\gamma(d)$  (рисунок 1,б), что определяет возможность использования данной модели для теоретической оптимизации процесса двухволнового смешивания в кристалле ВТО.

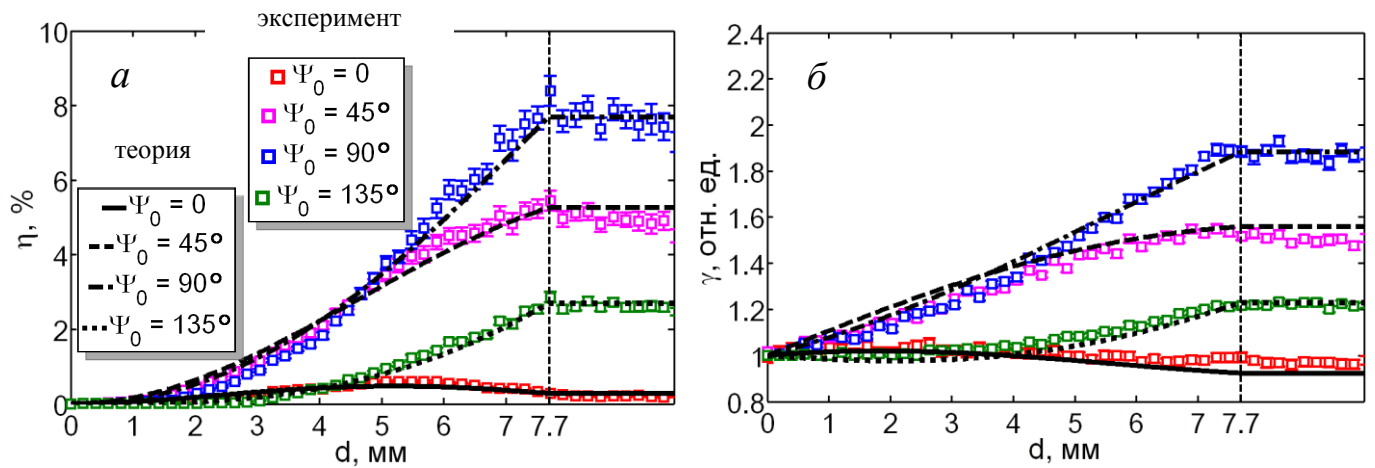


Рисунок 1 – Зависимости дифракционной эффективности  $\eta$  голограмм (а) и коэффициента усиления  $\gamma$  предметной световой волны (б) от толщины  $d$  кристалла ВТО среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$

Следует отметить, что наилучшая корреляция теории с экспериментальными данными была достигнута при амплитуде напряженности поля решетки пространственного заряда  $E_{SC}$ , равной на рисунке 1,а 3,053 кВ/см, а на рисунке 1,б – 1,301 кВ/см. При этом «выключение» в теоретических расчетах пьезоэффекта и амплитудной голограммы не позволяло выбрать величину  $E_{SC}$ , при которой теория и эксперимент имели бы удовлетворительное согласование. Этот экспериментальный факт еще раз подтверждает необходимость учета *пьезоэффекта* и рассмотрения *смешанных* голограмм при теоретическом описании процессов взаимодействия световых волн в кристалле ВТО.

Отметим, что наблюдаемый разброс полученных экспериментальных данных относительно теоретических зависимостей можно объяснить некоторыми оптическими неоднородностями использованного образца кристалла, а также возможными дефектами взаимодействующих в нем световых пучков R и S, что также отмечалось в [13–15].

Расчет доверительных интервалов экспериментальных данных проводился при значении доверительной вероятности, равном 0,95.

### Заключение

Таким образом, выполнено экспериментальное исследование зависимости дифракционной эффективности и коэффициента усиления предметной световой волны от толщины кристалла ВТО среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$  при его фиксированном ориентационном угле для четырех различных азимутов линейной поляризации световых пучков. Дана теоретическая интерпретация полученных экспериментальных данных с учетом пьезоэффекта и амплитудной составляющей *смешанной* голографической решетки. Полученные результаты могут позволить провести

экспериментально обоснованную теоретическую оптимизацию выходных характеристик голографических решеток, сформированных в кристалле ВТО.

## Литература

1. Picometer detection by adaptive holographic interferometry / U. Bortolozzo [et al.] // *Fundamentals of Picoscience* / K.D. Sattler. – New York, 2014. – P. 3–26.
2. Analysis of output beam polarization in higher-order self diffraction via two-wave mixing in BSO crystal / N. Katyal [et al.] // *Optik*. – 2013. – Vol. 124. – № 1. – P. 8–12.
3. Photorefractive digital holographic microscopy applied in microstructures analysis / I.V. Brito [et al.] // *Opt. Comm.* – 2013. – Vol. 286. – P. 103–110.
4. Photorefractive holographic moiré-like patterns for secure numerical code generation / G.N. de Oliveira, M.E. Oliveira, P.A.M. dos Santos / *Opt. Lett.* – 2013. – Vol. 38. – № 6. – 1004–1006.
5. Шепелевич, В.В. Смешанные пропускающие голограммы в фоторефрактивном пьезокристалле  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  / В.В. Шепелевич, А.В. Макаревич, С.М. Шандаров // *Письма в ЖТФ*. – 2014. – Т. 40. – № 22. – С. 83–89.
6. Шепелевич, В.В. Оптимизация выходных характеристик смешанных голограмм в фоторефрактивном пьезокристалле ВТО среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$  / В.В. Шепелевич, А.В. Макаревич, С.М. Шандаров // *Проблемы физики, математики и техники*. – 2014. – № 3 (20). – С. 42–46.
7. Shepelevich, V.V. Contribution of amplitude holographic grating to diffraction efficiency of mixed transmission holograms in photorefractive  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  piezocrystal / V.V. Shepelevich, A.V. Makarevich, S.M. Shandarov // *Physics Procedia*. – 2015. – Vol. 73. – P. 33–40.
8. Фоторефрактивные эффекты в электрооптических кристаллах: монография / С.М. Шандаров [и др.]. – Томск: ТУСУР, 2007. – 242 с.
9. Шепелевич, В.В. Голография в фоторефрактивных оптически активных кристаллах: монография / В.В. Шепелевич. – Минск : БГУ, 2012. – 254 с.
10. Photorefractive properties of  $(\bar{1}\bar{1}0)$  and  $(111)$ -cut sillenite crystals when external electric field is applied along the direction of the optimum diffraction efficiency / N.C. Deliolanis [et al.] // *Appl. Phys. B*. – 2002. – Vol. 75. – № 1. – P. 67–73.
11. Gonzalez, G. Optimization of the diffraction efficiency in non-uniform gratings in sillenite crystals ( $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  and  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ ) considering the variation of fringe period, optical activity and polarization angles in a strong non-linear regime / G. Gonzalez, A. Zuñiga, F. Magaña // *Rev. Mex. Fis.* – 2009. – Vol. 55. – № 1. – P. 25–31.

12. Влияние пьезоэффекта на процессы записи и восстановления голограмм в фоторефрактивных кристаллах / А.А. Изванов [и др.] // Автометрия. – 1986. – № 2. – С. 79–84.
13. Dynamic holography with none plane waves in sillenites / E. Shamonina [et al.] // Opt. Quant. Electron. – 1996. – Vol. 28. – P. 25–42.
14. Investigation of two-wave mixing in arbitrary oriented sillenite crystals / E. Shamonina [et al.] // Appl. Phys. B. – 1997. – Vol. 64. – P. 49–56.
15. Optical activity in photorefractive  $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$  / E. Shamonina [et al.] // Opt. Comm. – 1998. – Vol. 146. – № 1–6. – P. 62–68.
16. Экспериментальное исследование зависимости дифракционной эффективности фоторефрактивных голограмм от толщины образца и ориентационного угла в кристалле  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  среза  $(\bar{1}\bar{1}0)$  / В.В. Шепелевич [и др.] // Известия вузов. Физика. – 2015. – Т. 28. – № 10. – С. 74–79.

**Г.С. Митюрин, Е.В. Лебедева, В.В. Свиридова, А.Н.Сердюков**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **ФОТОАКУСТИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕССЕЛЕВЫХ СВЕТОВЫХ ПУЧКОВ В СЛОЕ ХИРАЛЬНЫХ УГЛЕРОДНЫХ НАНОТРУБОК**

### **Введение**

В лазерных фотоакустических методах диагностики структуры различных образцов в качестве источника возбуждения звука находят применение и широко используются бесселевы световые пучки (БСП) [1–4]. В частности, применение бесселевых световых пучков в оптико-акустической микроскопии позволяет эффективно увеличивать фокусную глубину получаемого фотоакустического изображения по сравнению с обычным гауссовым световым пучком. Использование различных видов поляризационных мод БСП объясняется тем, что БСП обладают рядом уникальных свойств, например, бездифракционностью при распространении в пространстве.

Перспективным материалом в различных областях науки и техники являются углеродные нанотрубки (УНТ). Одним из главных достоинств этих структур является возможность управления свойствами создаваемых слоев УНТ путем изменения геометрических размеров и конфигурации нанообъектов. Классическая теория электродинамики не всегда может быть применена

для описания нанотрубок и, следовательно, требуется поиск новых квазиклассических теоретических подходов и исследований, которые позволяли бы решать задачи микро- и макроскопической электродинамики [5], лежащие в основе теоретической базы современной фотоакустической спектроскопии.

Данная работа посвящена построению модели фотоакустического преобразования мод БСП в слое хиральных углеродных нанотрубок для случая пьезоэлектрической регистрации результирующего сигнала.

## 1. Проводимость хиральных углеродных нанотрубок

Проводимость хиральных УНТ в цилиндрических координатах определяется, по аналогии с [5], соотношением (скорость электронов  $v_e \ll c$ ,  $c$  – скорость света):

$$\sigma_{zz}(\omega) = -\frac{2P_0 i e^2}{\pi \hbar \sqrt{n^2 + nm + m^2}} \frac{1}{(\omega + i\nu)} \sum_{s=1}^m v_z^2(p_z, s) \frac{\partial F}{\partial \varepsilon},$$

где выражение для проекции скорости

$$v(p_z) = \frac{\pm \sqrt{3} \gamma_0 a [m \sin(\psi_1 - \psi_2) - n \sin(\psi_1 + \psi_2) - (n + m) \sin 2\psi_2]}{\hbar \sqrt{n^2 + nm + m^2} (1 + 4 \cos \psi_1 \cos \psi_2 + 4 \cos^2 \psi_2)},$$

$$\psi_1(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \left( \frac{3\pi q(n + m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n - m)}{4\hbar} p_z \right),$$

$$\psi_2(p_z) = \frac{1}{\sqrt{n^2 + nm + m^2}} \left( \frac{\pi q(n - m)}{2\sqrt{n^2 + nm + m^2}} + \frac{\sqrt{3}a(n + m)}{4\hbar} p_z \right).$$

Выражение для проекции вектора скорости электрона на ось  $z$  получено с учетом формулы  $v(p_z) = \partial \varepsilon(\mathbf{p}) / \partial p_z$  [6] и соотношения для распределения энергии в рамках приближения сильной связи, которое учитывает взаимодействие лишь ближайших соседних атомов в гексагональной структуре [5].

## 2. Диссипация энергии бесселевых световых пучков в слое хиральных углеродных нанотрубок

Воздействие бесселевого светового пучка на поглощающий слой хиральных нанотрубок приводит к периодическому изменению температурного поля, которое может быть описано уравнением теплопроводности:

$$\nabla^2 T - \frac{1}{\beta_S} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2k_S} Q(1 + e^{i\Omega t}), \quad (1)$$

где  $k_{cn}$  – коэффициент теплопроводности.



В уравнении (1)  $Q$  – объемная плотность тепловых источников, которая определяется выражением

$$Q = \sigma_{cn} |E|^2, \quad (2)$$

где  $|\sigma_{cn}| = 2\pi|\sigma_{zz}|/\lambda$  – проводимость слоя УНТ. Подставив в формулу (2) соотношение, описывающее интенсивность волны  $I = 1/2 n\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}|E|^2$ , легко получить скорость диссипации энергии:

$$Q = 2\alpha_0 I_0 e^{-2\alpha_{eff} z} = \frac{2\sigma_{cn}}{c\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_0}} I_0 e^{-2\alpha_{eff} z}. \quad (3)$$

Исходя из геометрии хиральных углеродных нанотрубок, в уравнении (1) оператор  $\nabla^2 = \Delta$  целесообразно записать в цилиндрической системе координат. Коэффициент поглощения входящий в (3) определяется следующим образом:

$$\alpha_0 = \frac{\omega \varepsilon''}{c \sqrt{\varepsilon'}} = \frac{\omega \varepsilon''}{c n}.$$

Проводимость связана с мнимой частью диэлектрической проницаемости формулой  $\varepsilon = \varepsilon' - i\varepsilon''$ ,  $\varepsilon'' = \sigma/\omega\varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{12}$  ф/м).

Таким образом, в цилиндрических координатах скорость диссипации энергии бесселевых световых пучков (БСП) в слое поглощающих углеродных хиральных нанотрубок можно представить следующим образом:

$$Q^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}|I_0}{c\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_0}} \frac{c}{4\pi} k_0 \varepsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2) \left[ \frac{m^2}{(qr)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right] \exp(-\alpha_{eff} z), \quad (4)$$

где  $\alpha = 2k_{zz}$ .

### 3. Расчет результирующего фотоакустического сигнала

Определим амплитуду фотоакустического сигнала, возникающего в слое хиральных УНТ при облучении ТЕ-модой БСП, основываясь на использовании пьезоэлектрического метода регистрации сигнала в соответствии со схемой, приведенной на рисунке 1.

Считая границы системы «образец-пьезодетектор» свободными:  $\sigma(D=0)=0$ ,  $\sigma(l_1=0)=0$ , а также используя методику, описанную в [7], найдем выражение для напряжения холостого хода  $V^{TE}$  на пьезопреобразователе

$$V^{TE} = \frac{e}{\varepsilon^S} (U_P|_{z=l_1} - U_P|_{z=0}) = \frac{e}{\varepsilon^S} Z R^{TE}. \quad (5)$$

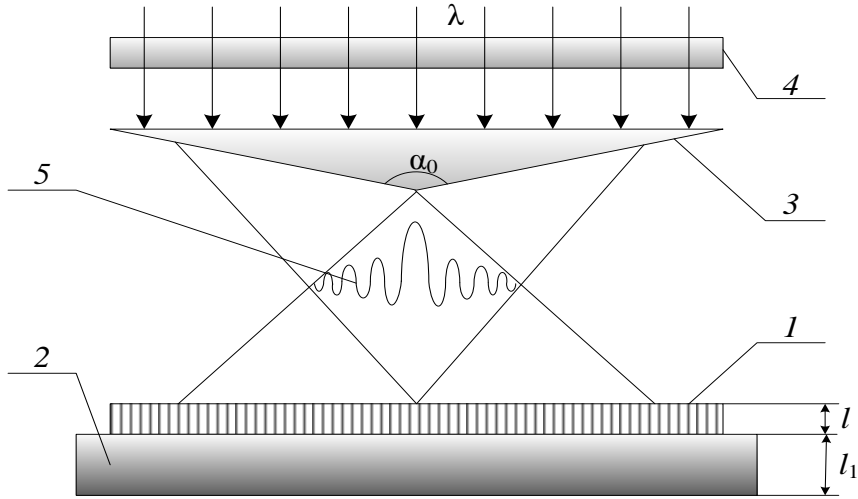


Рисунок 1 – Схема регистрации фотоакустического сигнала;  
 1 – слой углеродных нанотрубок; 2 – пьезоэлектрический детектор;  
 3 – аксикон; 4 – модулятор; 5 – бесселев световой пучок

В соотношении (5) множитель

$$Z = \frac{\sin^2(k_1 \Delta l / 2)}{m_0 \sin k_1 \Delta l \cos kl + \cos k_1 \Delta l \sin kl} \quad (6)$$

описывает чисто акустические свойства системы «слой углеродных нанотрубок – пьезодетектор», а множитель  $R^{TE}$

$$R^{TE} = \frac{\bar{E}^{TE} B_0 k}{(\lambda_l + 2\mu_l) k_S \sigma_S^2 \alpha_{ef}} \left[ \frac{1 + \mu_1 + \mu_2^2 + \mu_3^2}{(1 + \mu_1) \cdot (1 + \mu_2^2) \cdot (1 + \mu_3^2)} \right] \quad (7)$$

определяет диссипативные, диэлектрические, теплофизические и термоупругие свойства исследуемого образца, а также поляризационные и энергетические параметры БСП.

В выражениях (5)–(7) введены следующие обозначения:  $U(z)$ ,  $U_p(z)$  – упругие смещения в слое УНТ и пьезопреобразователе;  $v_{cn}$ ,  $v_p$  – скорости упругих продольных волн,  $B_0$  – объемный модуль упругости,  $c^T = \lambda_l + 2/3 \mu_l$ ,  $\lambda_l$ ,  $\mu_l$  – коэффициенты Ламэ,  $a_0$  – коэффициент объемного теплового расширения,  $\sigma$  – упругие напряжения,  $\sigma_S = (1 - i)a_S$ ,  $a_S = (\Omega/2\beta_{cn})^{1/2}$  – эффективный коэффициент термической диффузии образца,  $\beta_{cn}$  – эффективный коэффициент температуропроводности образца,  $\mu_1 = \alpha_{eff}/\sigma_S$ ,  $\mu_2 = k/\sigma_S$ ,  $\mu_3 = k/\alpha_{eff}$ ,  $k_1 = \Omega/v_p$  – волновое число упругой волны в пьезопреобразователе,  $k = \Omega/v_{cn}$  – волновое число звуковой волны в образце,  $m_0 = (k_1 c^D)/(k c^T)$ ,  $c^D = c^E (1 + e^2/\epsilon^S c^E)$ ,  $c^E$  – коэффициент жесткости пьезоэлектрика,  $e$  – пьезомодуль,  $\epsilon^S$  – диэлектрическая проницаемость пьезокристалла:

$$\bar{E}^{TE} = \eta a_t \alpha_{ef} E^{TE}, \quad E^{TE} = A^{TE} / (\alpha_{ef}^2 - \sigma_S^2), \quad (8)$$

$$A^{TE} = \frac{2|\sigma_{cn}|I_0}{c\sqrt{\varepsilon'\varepsilon_0}} \frac{c}{4\pi} k_0 \varepsilon_\alpha (n_1^2 + n_2^2) \left[ \frac{m^2}{(q\rho)^2} J_m^2(qr) + J_m'^2(qr) \right], \quad (9)$$

$J'_m(q\rho) = \partial J_m(q\rho) / \partial \rho$  – производная от функции Бесселя по радиальной координате  $\rho$ .

Анализ выражения (5) для амплитуды фотоакустического сигнала показал наличие резонансных пиков в области гигагерцевых частот (рисунок 2).

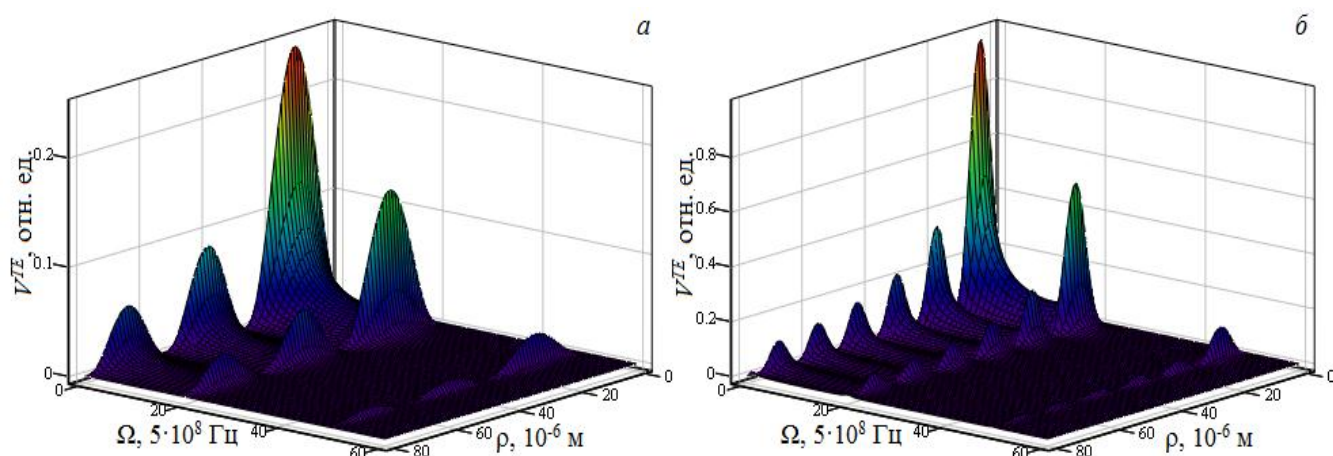


Рисунок 2 – Зависимость амплитуды фотоакустического сигнала от радиальной координаты  $\rho$  и частоты модуляции БСП  $\Omega$ ;  $a$  – угол конусности БСП  $\alpha = 1^\circ$ ;  $b$  – угол конусности БСП  $\alpha = 2^\circ$

Из рисунка 2 также видно, что увеличение угла конусности БСП влияет на частоту проявления резонансных пиков в зависимости от радиальной координаты  $\rho$ . Управление амплитудой результирующего сигнала, возникающего вследствие модулированного поглощения светового пучка, может быть реализовано путем использования схем регулирования угла конусности БСП, действующих на основе электрооптического эффекта Поккельса [8, 9].

Таким образом, в работе построена модель фотоакустического преобразования в слое хиральных углеродных нанотрубок, облучаемых ТЕ-модой беселевого светового пучка.

## Литература

1. Mityurich G.S. Thermo-optical sound generation by Bessel light beams in non-linear crystals / G.S. Mityurich [et al.] // Int. J. Thermophys. – 2011. – Vol. 32. – № 4. – P. 844–851.
2. Shi, J. Bessel-beam Grueneisen relaxation photoacoustic microscopy with ex-

tended depth of field / J. Shi [et al.] // Journal of Biomedical Optics. – 2015. – Vol. 20. – № 11. – P. 116002-1–116002-6.

3. Planchon, T.A. Rapid three-dimensional isotropic imaging of living cells using Bessel beam plane illumination / T.A. Planchon [et al.] // Nat Methods. – 2011. – Vol. 8. – № 3. – P. 417–423.

4. Zhao, T. Multicolor 4D fluorescence microscopy using ultrathin Bessel light sheets / T. Zhao [et al.] // Scientific Reports. – 2016. – Vol. 6. – P. 26159-1–26159-5.

5. Максименко, С.А. Электродинамика углеродных нанотрубок / С.А. Максименко, Г.Я. Слепян // Радиотехника и радиоэлектроника. – 2002. – Т. 47. – № 3. – С. 261–280.

6. Митюрин, Г.С. Фотодефлекционный сигнал, генерируемый бесселевым световым пучком в плотном слое углеродных нанотрубок / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков. // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – Т. 25. – № 4. – С.20–27.

7. Mityurich, G.S. Photoacoustic transformation of Bessel light beams in magnetoactive superlattices / G.S. Mityurich, E.V. Chernenok, V.V. Sviridova, A.N. Serdyukov // Crystallography Reports. – 2015. – Vol. 60. – № 2. – P. 273–279.

8. Устройство управляемой термооптической генерации акустической волны: пат. 10757u Респ. Беларусь, МПК(2006.01) G10K 11/00 / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков; заявитель ГГУ им. Ф. Скорины. – № u 20150083; заявл. 09.09.2015; опубл. 30.09.2015 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2015. – № 4. – С. 146.

9. Устройство управляемой лазерной генерации звука: пат. 10757u Респ. Беларусь, МПК(2006.01) G10K 11/00 / Г.С. Митюрин, Е.В. Черненко, А.Н. Сердюков; заявитель ГГУ им. Ф. Скорины. – № u 20150083; заявл. 06.11.2015; опубл. 30.04.2016 // Афіцыйны бюл. / Нац. цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2016. – № 2. – С. 162–163.

**Г.С. Митюрин<sup>1</sup>, П.А. Хило<sup>2</sup>, А.Н. Сердюков<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

## **ФОТОДЕФЛЕКЦИОННЫЙ ОТКЛИК ОТ ПЕРИОДИЧЕСКИ ПОЛЯРИЗОВАННОГО НЕЛИНЕЙНОГО КРИСТАЛЛА, ОБЛУЧАЕМОГО БЕССЕЛЕВЫМ СВЕТОВЫМ ПУЧКОМ**

Воздействие мощного лазерного излучения на кристаллические среды позволяет существенно расширить область применения фотоакустических мето-

дов исследования вещества [1–4]. Рассмотрению нелинейных режимов импульсной генерации звука посвящено достаточно большое число публикаций [5–10], однако интерес к практическим вопросам нелинейной фотоакустики не ослабевает.

Нелинейное взаимодействие световых волн в периодически поляризованных структурах, как отмечается в [11, 12], обладает большими потенциальными возможностями для эффективной генерации второй гармоники, а также для реализации параметрических эффектов генерации волн суммарной и разностной частот. Разработке параметрического генератора света на основе веерных периодически поляризованных структур ниобата лития с плавной перестройкой длины волны излучения посвящена работа [13]. Здесь же рассмотрена возможность использования генератора света в лазерном оптико-акустическом газоанализаторе медицинского назначения.

Целью настоящей работы является изучение особенностей фототермического преобразования бесселевых световых пучков (БСП) в нелинейных периодически поляризованных кристаллах и установление зависимости величины углов фотодефлексии от теплофизических и диссипативных параметров нелинейной среды и пространственного распределения светового поля.

Рассмотрим нормальное падение амплитудно-модулированного на частоте  $\Omega$  бесселевого светового пучка на периодически поляризованный нелинейный кристалл, вырезанный перпендикулярно оси третьего порядка [111]. В соответствии с [14] вдоль оси третьего порядка кристаллов кубической симметрии может возникать генерация второй гармоники. Автором [15] исследованы особенности удвоения частоты бесселевых световых пучков при квазисинхронном взаимодействии световых пучков в периодически поляризованных кристаллах. Были рассмотрены кристаллические образцы с идеальной периодической структурой, состоящей из противоположно поляризованных доменов, толщины которых равны когерентной длине, а эффективные коэффициенты нелинейной связи меняют знак при переходе от одной области к другой. В нашем случае предполагается, что волна основной частоты распространяется в области прозрачности кристалла, а амплитудно-модулированное излучение второй гармоники интенсивно поглощается. Ситуация, реализующая, например, в кристаллах типа силленитов, германате висмута, силикате висмута, которые прозрачны для излучения рубинового лазера ( $\lambda \approx 0,694$  мкм), но интенсивно поглощают излучение на частоте второй гармоники [16]. Следует отметить, что реализация условий фазового синхронизма в гиротропных кристаллах кубической симметрии возможна, как показано в [14], благодаря явлению естественной или вынужденной (эффект Фарадея) оптической активности кристалла. Наличие, кроме этого, в нелинейных кристаллах периодической доменной структуры позволяет реализовать режим квазисинхронизма [15], что ведет к эффективной генерации излучения на удвоенной частоте.

Таким образом, фотоакустический сигнал возникает в кристаллической пространственно поляризованной пластинке вследствие поглощения модулированного по амплитуде бесселевого светового пучка на частоте второй гармоники. Под воздействием пучка света исследуемый неоднородный образец периодически нагревается модулированным излучением, что приводит к возбуждению термоакустических колебаний поверхности, освещаемой поляризационными модами БСП. Это приводит к отклонению зондирующего пучка на угол дефлексии (рассматривается случай трансверсальной геометрии взаимодействия возбуждающего и зондирующего пучков (рисунок 1)), величина которого зависит от термоупругих, нелинейных, оптических и дихроичных свойств исследуемого образца, а также поляризационных и энергетических параметров бесселевых световых пучков.

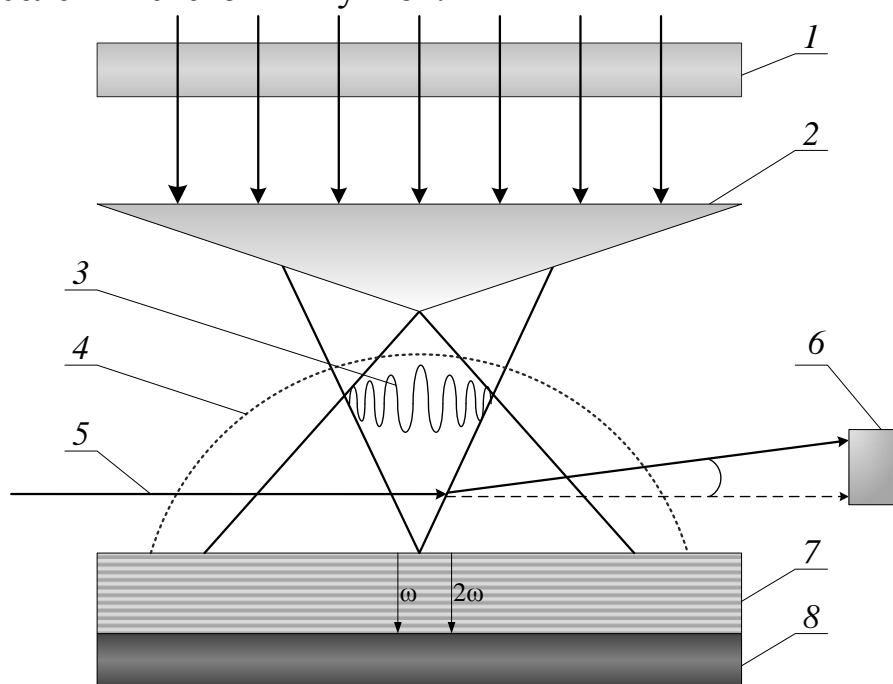


Рисунок 1 – Схема регистрации фотодефлекционного сигнала;  
 1 – модулятор; 2 – аксикон; 3 – БСП; 4 – «термическая» линза;  
 5 – зондирующий луч; 6 – позиционно-чувствительный фотодетектор;  
 7 – нелинейный периодически поляризованный кристалл; 8 – подложка

Пусть мощный БСП основной частоты распространения вдоль оси третьего порядка [111], совпадающей с осью Oz, электрическое поле которого  $E_1(\rho, z)$  задается соотношением:

$$E_1(\rho, z) = A_1(z) J_0(q_1, \rho) e^{ik_1 z}, \quad (1)$$

где  $J_0(q_1, \rho)$  – функция Бесселя первого рода нулевого порядка,  $q_1 = k_1 \sin \gamma$  – поперечная составляющая волнового вектора  $\vec{k}_1$  на основной частоте,  $\gamma$  – угол

конусности БСП (половинный угол при вершине конуса волновых векторов),  $k_{1z} = \sqrt{k_1^2 - q_1^2}$  – продольная компонента волнового вектора. Из-за квадратичной периодической нелинейности в кристалле формируется область нелинейной поляризуемости на частоте второй гармоники  $2\omega$ , причем на удвоенной частоте происходит интенсивное поглощение.

Электромагнитное поле второй гармоники представим в виде ряда Фурье-Бесселя

$$E_2(\rho, z) = \sum_{m=1}^M A_{2m}(z) J_0(q_{2m}, \rho) e^{ik_{2m}z}, \quad (2)$$

где  $q_{2m}$  – поперечная компонента волнового вектора  $\vec{k}_2$  на частоте второй гармоники,  $k_{2m}$  – волновое число волны удвоенной гармоники,  $m = 1, 2, 3 \dots, M$ ,  $M$  – общее число генерируемых мод,  $A_{2m}(z)$  – амплитуда поля на удвоенной частоте. В соотношении (2) введены нормированные функции Бесселя

$$j_0(q_{2m}, \rho) = \begin{cases} \frac{J_0(q_{2m}, \rho)}{\sqrt{\pi R_{2m}} J_1(q_{2m}, R_B)}, & \text{при } \rho < R_B, \\ 0, & \text{при } \rho \geq R_B. \end{cases} \quad (3)$$

При  $\rho = R_B$  и  $q_{2m} R_B = (m - 0,25)\pi$  функция Бесселя обращается в нуль, то есть согласно (2), (3) поле  $E_2(\rho, z)$  представляет собой разложение по модам цилиндрической области радиусом  $R_B$ .

В (3)  $J_1(q_{2m}, R_B)$  – функция Бесселя первого порядка,  $R_B = (m\pi - \pi/4)q_{2m}^{-1}$  – радиус локализованного излучения бесселевого светового пучка. Из (3) также следует условие нормировки

$$2\pi \int_0^{R_B} J_0^2(q_{2m}, \rho) \rho d\rho = 1. \quad (4)$$

Удобство нормировки (4) состоит, в частности, в возможности описания нелинейного взаимодействия в кристаллах единым интегралом перекрытия взаимодействующих мод БСП.

Процесс генерации второй гармоники в поглощающих кристаллах может быть описан системой укороченных уравнений (см., например, [15, 17])

$$\begin{cases} \frac{dE_1(\rho, z)}{dz} = i\sigma_1 E_2(\rho, z) E_1^*(\rho, z) e^{i\Delta k_z z}, \\ \frac{dE_2(\rho, z)}{dz} + \delta_2 E_2(\rho, z) = i\sigma_2 E_1^2(\rho, z) e^{-i\Delta k_z z}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\delta_2$  – коэффициент линейного поглощения волны второй гармоники,  $\sigma_{1,2} = 2\pi^2 d_Q / (\lambda n_{1,2})$  – коэффициент нелинейной связи волн,  $d_Q = 2d_{eff} / (\pi s)$  – перенормированный параметр квадратичной нелинейности,  $s$  – порядок квазисинхронизма для сред, обладающих периодичностью (в нашем случае  $s = 1$ ),  $d_{eff}$  – значение эффективной квадратической нелинейности,  $\Delta k_z = k_{2m} - k_1 - sK$  – фазовая расстройка волны для продольных компонент бесселевых световых пучков,  $K = 2\pi / \Lambda$ ,  $\Lambda$  – период доменной структуры.

Представляя поля посредством рядов Фурье, несложно преобразовать систему уравнений (5) для амплитуд взаимодействующих волн в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{dz} = i\sigma_1 A_1^* \sum_m q_m A_{2m} e^{i\Delta k_z z}, \\ \frac{dA_{2m}}{dz} + \delta_2 A_{2m} = i\sigma_2 q_m A_1^2 e^{-i\Delta k_z z}, \end{cases} \quad (6)$$

где  $q_m = 2\pi \int_0^{R_p} J_0^2(q, \rho) J_0(q_{2m}, \rho) \rho d\rho$  – интеграл перекрытия взаимодействующих мод. Решение системы уравнений (6) выполним в приближении заданной интенсивности, полагая, что  $|A_1|^2 = const$  [16]. В этом случае для амплитуды поля второй гармоники можно получить следующее выражение [18]:

$$A_{2m}(z) = \frac{i\sigma q_m}{p} |A_1|^2 e^{-\frac{\delta_2}{2} z} e^{-i\frac{\Delta k_z z}{p}} \sin pz, \quad (7)$$

где  $p = \sqrt{0,25 q^2 + b^2}$ ,  $b^2 = 2\sigma_1 \sigma_2 |A_1|^2 \sum_m q_m^2$ .

Как следует из (7), интенсивность электрического поля на частоте второй гармоники  $J_{2\omega} \sim |A_{2m}|^2$ , возбужденная бесселевым световым пучком, определяется интегралами перекрытия  $q_m$  парциальных световых пучков накачки, а также общим числом  $M$  генерируемых мод. Кроме того, амплитуда поля удвоенной гармоники  $A_{2m}$  может достаточно сильно затухать, уменьшаясь по экспоненте при увеличении коэффициента поглощения  $\delta_2$ , что экспериментально наблюдалось в работе [16] для кристаллов типа силленитов.

Модулированное воздействие излучения второй гармоники на поглощающий, в данном частотном диапазоне, кристалл с регулярной доменной структурой будет приводить к возникновению периодической составляющей температурного поля, изменение которого описывается неоднородным уравнением теплопроводности, см., например, [19]:



$$\nabla^2 T - \frac{1}{\beta_S} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{2k_S} Q_{2\omega} (1 + e^{i\Omega t}), \quad (8)$$

где коэффициент температуропроводности  $\beta_S$  связан с коэффициентом теплопроводности соотношением  $\beta_S = k_S / (\rho_0 C)$ ,  $\rho_0$  – плотность,  $C$  – удельная теплоемкость,  $Q_{2\omega}$  – скорость диссипации энергии бесселевого светового пучка на удвоенной частоте. Выражение для скорости диссипации энергии  $Q_{2\omega}$  найдем исходя из материальных уравнений для изотропной поглощающей среды  $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V} = \mu \mathbf{H}$ ,  $\mu = 1$ ,  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ , общего соотношения для  $Q$  в электродинамике [20] и соотношений (2), (7). Будем иметь:

$$Q_{2\omega} = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon'' \sum_{m=1}^M |A_{2\omega}^0|^2 J_0(q_{2\omega}, \rho) J_0^*(q_{2\omega}, \rho) e^{-2k_{2\omega} z}, \quad (9)$$

где  $A_{2\omega}^0 = p^{-1} \sigma_2 q_m I_0 \exp(-\delta_2 z / 2)$ ,  $I_0$  – интенсивность падающей волны.

Как следует из (9), полученное выражение содержит сложную зависимость амплитуды поля от пространственной координаты  $z$  и интегралов перекрытия взаимодействующих мод. При этом, уравнение теплопроводности (8) принимает трансцендентную форму. Однако, в том случае, когда толщина образца  $d$  удовлетворяет условию:

$$d = \pm \frac{\pi}{2} n \left( b^2 - \frac{\delta_2^2}{4} \right)^{-1/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

а также реализовано условие фазового синхронизма  $\Delta k_z = 0$ , тогда  $\sin p_z = 1$  и выражение (7) упрощается, что дает возможность получения аналитических решений уравнения теплопроводности. В этом случае величина для  $Q_{2\omega}$  примет вид:

$$Q_{2\omega} = A_{2\omega} \exp(-\alpha_{2\omega} z), \quad (10)$$

где  $A_{2\omega} = \frac{\omega}{8\pi} \varepsilon'' \sum_{m=1}^M \frac{\sigma_2^2}{p^2} q_m^2 I_0 J_0^2(q_{2\omega}, \rho)$ ,  $\alpha_{2\omega} = 2(\delta_2 + k_{2\omega})$  – коэффициент оптического поглощения на частоте второй гармоники.

Из рисунка 2 видно, что скорость диссипации энергии БСП осциллирует и убывает с ростом значения радиальной координаты, что связано с модулирующим действием функции Бесселя.

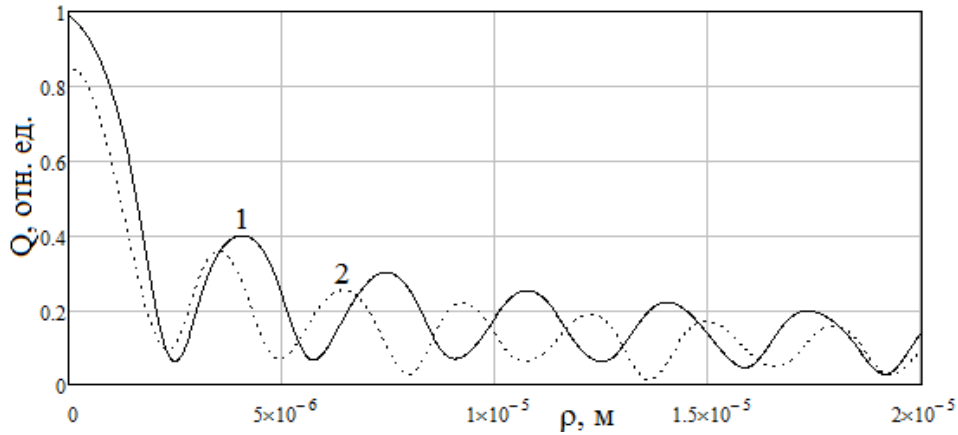


Рисунок 2 – Зависимость скорости диссипации энергии от радиальной координаты; 1 – для  $\lambda = 0,7$  мкм; 2 –  $\lambda = 0,6$  мкм

Решение уравнения теплопроводности (8) выполним методом функции Грина [19]. Получим следующее выражение для угла фотодефлексии:

$$\Phi(\rho, z, t) = \frac{\pi^2 w_0}{4n_{eff}} \frac{dn_{eff}}{dT} Q_{2\omega} \int_0^t \frac{(1 + \cos \Omega t)x}{[w_0^2 + 8\beta_s(t - \tau)]^{3/2}} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{w_0^2 + 8\beta_s(t - \tau)}} e^{-\alpha_{2\omega}^2 \beta_s(t - \tau)} d\tau, \quad (11)$$

где  $Q_{2\omega}$  определяется выражением (10),  $n_{eff}$  – эффективный показатель преломления среды на частоте второй гармоники,  $t$  время воздействия БСП.

Выражение (11) показывает, что пространственное распределение температурного поля и амплитуды фотодефлексионного отклика в нелинейных средах сложным образом зависит от диссипативных, геометрических и теплофизических параметров среды, а также энергетически-временных и поляризационных свойств электромагнитной волны.

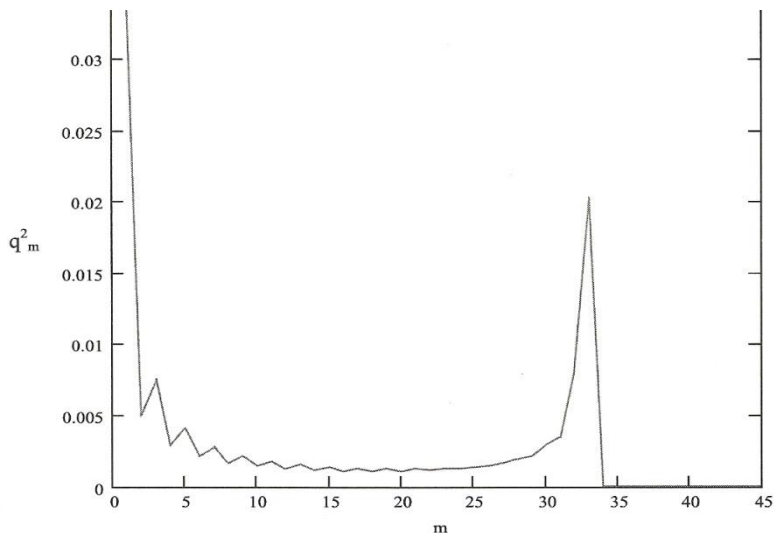


Рисунок 3 – Зависимость квадрата интеграла перекрытия  $q_m^2$  от номера моды  $m$  функции Бесселя

Квадрат интеграла перекрытия  $q_m^2$  имеет два максимума при  $m = m_1 = 1$  и  $m = m_2 = (2q_1 R_{Bm})/\pi$ , как видно из рисунка 3. Это означает, что наибольший вклад в эффективность генерации второй гармоники вносят две группы мод, локализованные в окрестности обозначенных максимумов. Вблизи указанных  $m_1$  и  $m_2$  происходит наибольшее выделение тепловой энергии и генерация термоупругих волн, при этом амплитуда фотодефлекционного сигнала достигает своего максимального значения.

## Литература

1. Mandelis, A. Nonlinear photothermal response in three dimensional geometry. Theoretical model / A. Mandelis [et al.] // J. Appl. Phys. – 1999. – Vol. 85. – P. 1811–1821.
2. Ошурко, В.Б. Термонелинейная лазерная оптоакустическая томография / В. Б. Ошурко // Квантовая электроника. – 2004. – Т. 35. – № 2. – С. 185–190.
3. Gusev, V. Theory of second harmonic thermal-wave generation: one dimensional geometry / V. Gusev, A. Mandelis, R. Bleiss // Int. J. Thermophys. – 1993. – Vol. 14. – № 2. – P. 321–337.
4. Мадвалиев, У. Тепловая нелинейность в фотоакустической камере / У. Мадвалиев, Т.Х. Салихов, Д.М. Шарифов // ЖТФ. – 2004. – Т. 74. – № 2. – С. 17–23.
5. Ахманов, С.А. Лазерное возбуждение акустических импульсов: новые возможности в спектроскопии твердого тела, диагностике быстропротекающих процессов и нелинейной акустике / С.А. Ахманов, В.Э. Гусев // УФН. – Т. 162. – № 3. – С. 3–85.
6. Kopylova, D.S. Nonlinear optoacoustic transformation in the system of dielectric substrate liquid / D.S. Kopylova, I.M. Pelivanov // J. Acoust. Soc. Am. – 2011. – Vol. 130. – № 4. – P. 213–218.
7. Yelleswarapu, C.S. Nonlinear photoacoustics for measuring the nonlinear optical absorption coefficient / C.S. Yelleswarapu, S.R. Kothapalli // Optics Express. – 2010. – Vol. 18. – № 9. – P. 9020–9025.
8. Blackman, F. Experimental demonstration of multiple pulse nonlinear optoacoustic signal generation and control / F. Blackman, L. Antonolli // Appl. Opt. – 2005. – Vol. 44. – № 1. – P. 103–112.
9. Greogoire, G. Nonlinear photothermal and photoacoustic process for crack detection / G. Greogoire, V. Tournat, V. Gusev // Eur. Phys. J. Special Topics. – 2008. – Vol. 153. – P. 313–315.

10. Митюрин, Г.С. Фотоакустическое преобразование в нелинейных гиротропных кристаллах типа силленита / Г.С. Митюрин // ЖТФ. – 1989. – Т. 59. – Вып. 9. – С. 118–122.

11. Хило, П.А. Генерация бесселевых световых пучков удвоенной частоты в квадратично-нелинейных кристаллах с радиально-поляризованной структурой доменов / П.А. Хило, Е.С. Петрова, Н.А. Хило // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – Т. 15. – № 2. – С. 25–28.

12. Авестисян, Ю.О. Генерация терагерцовых волн при неколлинеарном распространении оптических волн в нелинейном, периодически поляризованном кристалле / Ю.О. Авестисян // Известия НАН Армении, Физика. – 2006. – Т. 41. – № 1. – С. 8–14.

13. Колкер, Д.Б. Параметрический генератор света на основе периодических структур ниобата лития с плавной перестройкой длины волны излучения / Д.Б. Колкер [и др.] // Приборы и техника эксперимента. – 2014. – № 1. – С. 85–89.

14. Бокуть, В.Б. Преобразование частоты световых волн в оптически активных средах / В.Б. Бокуть, А.Н. Сердюков // ЖПС.– 1970. – Т. 12. – Вып. 1. – С. 65–71.

15. Хило, П.А. Генерация второй гармоники бесселевыми световыми пучками в условиях квазисинхронизма/ П.А. Хило // ЖПС.– 2000. – Т. 67. – № 5. – С. 595–599.

16. Батог, В.Н. Нелинейные оптические свойства монокристаллов типа силленита // В.Н. Батог [и др.] // Кристаллография. – 1971. – Т. 16. – № 6. – С. 1044–1045.

17. Дмитриев, В.Г. Прикладная нелинейная спектроскопия / В.Г. Дмитриев, Л.В. Тарасов. – М. : Радио и связь, 1982. – 352 с.

18. Mityurich, G.S. Thermo-optical sound generation by Bessel light beams in nonlinear crystals / G.S.Mityurich [et al.] // Int. J. Thermophys. – 2011. – Vol. 32. – № 4. – P. 844–851.

19. Mityurich, G.S. Photodeflection spectroscopy of magnetoactive superlattices irradiated by Bessel-Gaussian light beams / G.S.Mityurich, E.V.Chernenok, A.N.Serdyukov // J. Appl. Spect. – 2015. – Vol. 82. – № 2 – P. 254–259.

20. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1982. – 624 с.

**И.В. Семченко<sup>1</sup>, С.А. Хахомов<sup>1</sup>, А.М. Гончаренко<sup>2</sup>, Г.В. Сеницын<sup>2</sup>,  
А.Л. Самофалов<sup>1</sup>, М.А. Подалов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси,  
Минск, Беларусь

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИБКИХ МЕТАЛПОЛИМЕРНЫХ ВЫСОКОПОГЛОЩАЮЩИХ НЕОТРАЖАЮЩИХ ПОКРЫТИЙ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ТГц ДИАПАЗОНА**

Экспериментальные исследования свойств метаматериалов проводились в основном в МГц и ГГц диапазонах, где резонансные элементы метаматериала должны иметь миллиметровые и сантиметровые размеры, и формирование трехмерных элементов, а также их расположение в виде трехмерных массивов не представляет значительной сложности. В настоящее время наблюдается тенденция к созданию и исследованию метаматериалов для ТГц диапазона, поскольку техника ТГц диапазона активно развивается и вместе с тем ассортимент электромагнитных свойств существующих материалов в этом диапазоне очень небогат, например, отсутствуют материалы с эффективными нелинейными, киральными и др. свойствами, широко используемые в оптическом диапазоне. Поэтому концепция метаматериалов особенно востребована в ТГц диапазоне.

Для метаматериалов терагерцового диапазона искусственные элементы-резонаторы должны иметь характерные размеры порядка единиц-десятков микрон, чтобы оставаться существенно меньшими длины волны электромагнитного излучения. Для получения согласованного отклика все резонаторы огромного массива должны быть очень точно настроены. Из широко применяемых технологий требуемые размеры и точность обеспечивает только традиционная планарная технология, которая позволяет формировать плоские элементы и их слои. Свойства такого метаматериала из плоских элементов принципиально невозможно задавать во всех трех измерениях. Кроме того, в большинстве экспериментов исследователям приходится ограничиваться одним слоем элементов (т. е. монослоем метаматериала) из-за ограничений планарной технологии, что затрудняет изучение объемных электромагнитных свойств. В то же время, практически все востребованные применения метаматериалов требуют объемных метаматериалов с трехмерными заданными электромагнитными свойствами.

Принципиальная новизна и научное значение создания метаматериалов из трехмерных оболочек, формируемых из напряженных нанопленок [1–2], заключается в переходе от двумерных элементов-резонаторов к трехмерным, прецизионности размеров резонаторов (вплоть до атомарного уровня) с характерными размерами от микрометров до нанометров, разнообразии возможных форм и материалов элементов-резонаторов (диэлектрики, металлы, полупроводники). С помощью трехмерных конструкций оболочек-резонаторов электромагнитный отклик метаматериала задается во всех трех измерениях, что является новым шагом в области метаматериалов для ТГц диапазона и позволяет создавать метаматериалы с принципиально новыми свойствами.

Данная технология в настоящее время может обеспечить массовое формирование ТГц-метаматериалов на основе гладких резонансных трехмерных спиралей, в том числе объемных метаматериалов.

Помимо гладких резонансных трехмерных спиралей, в качестве структурного элемента бианизотропной среды могут выступать, например, элементы в виде греческой буквы «омега». Структура с парными омега-элементами довольно сложна для реализации, так как из-за особенностей технологии предпочтительнее изготовление металлических элементов на рельефе без поверхностей с обратным наклоном.

С целью удовлетворения требованиям технологии можно провести аналогию используемого элемента с греческой буквой «омега» прямоугольной формы, либо с формой, близкой к букве «П». Можно изготовить и разместить чередующиеся и повернутые то вверх, то вниз элементы в виде буквы «П», и чтобы сбалансировать возникающие в них электрический и магнитный дипольные моменты, необходимо будет менять параметры элемента.

Другой вариант – наклонные омега-элементы прямоугольной формы, тогда тоже нет области отрицательного наклона. Можно изготовить, например, трехгранную полимерную пирамиду, а на каждой боковой грани разместить по металлическому омега-элементу прямоугольной формы (рисунок 1). Можно изготовить правильный тетраэдр, металлические омега-элементы ориентировать на каждой грани с поворотом на 60 градусов. Используя дополнительный слой и оптическое совмещение, можно разместить металлический омега-элемент и на основании пирамиды, однако в этом случае необходимо изготовление дорогостоящих кварцевых шаблонов для импринта и использование технологии штамповки.

Нами предложена плоская структура для создания идеального поглотителя в ТГц диапазоне. Элементом такой структуры является плоский элемент в виде греческой буквы омега прямоугольной формы (рисунок 2).

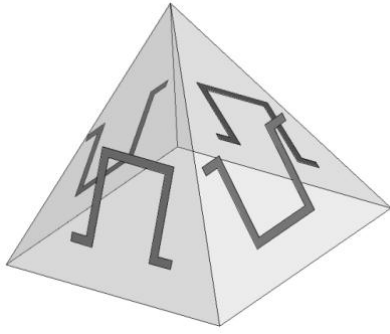


Рисунок 1 – Трехгранная полимерная пирамида

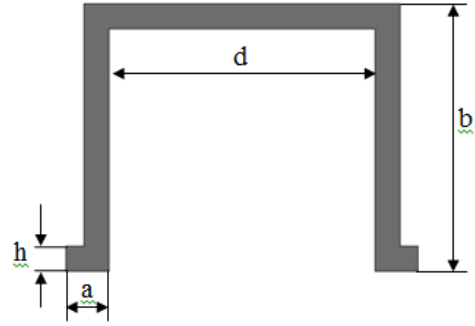


Рисунок 2 – Омега-элемент прямоугольной формы

Характеристики электромагнитного излучения, рассеянного на таком элементе, зависят от соотношения геометрических параметров  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $h$  (рисунок 2) и длины волны  $\lambda$ . Нами рассмотрен случай, когда линейные геометрические размеры омега-элемента значительно уступают по величине длине волны падающего излучения, что позволяет применить дипольное приближение теории излучения. Для этого случая найден электрический дипольный и магнитный моменты, возникающие в омега-элементе под действием падающей электромагнитной волны.

Одновременное возникновение в элементе не только электрического дипольного, но и магнитного моментов, связанных между собой и индуцированных внешним полем, является главным условием проявления свойств такой структуры. Рассмотрен случай при  $b = d$ , то есть форма элемента близка к квадрату. В этом случае площадь, ограниченная элементом, относительно велика, и возникающий магнитный момент имеет значительную величину. При этом мы считаем толщину полоски  $h$  пренебрежимо малой по сравнению с длиной сторон  $b$  и  $d$  (рисунок 2). Используя условие главного частотного резонанса и универсальное соотношение для компонент электрического дипольного и магнитного моментов, полученное нами в работе [3], можно вычислить параметры омега-элемента  $a$  и  $b$ :

$$a = \frac{\lambda}{4\pi} 0,03632, \quad b = \frac{\lambda}{2\pi} 1,03509.$$

На основании приведенных выражений найдены численные значения  $b$ ,  $d$  и плеча  $a$  омега-элемента прямоугольной формы для частоты 1 ТГц ( $\lambda=300$  мкм):  $b=d=49,49$  мкм;  $a=0,8675$  мкм.

Так как технология нанесения проводящего материала на диэлектрическую подложку дорога и трудоемка, необходимо провести тщательное моделирование поглощающих свойств структуры, состоящей из омега-элементов прямо-

угольной формы с рассчитанными параметрами. Наиболее подходящей программой для проведения такого моделирования является программа электродинамического моделирования Ansoft HFSS 13 версии [4].

В программе Ansoft HFSS создан проект поглощающей структуры, состоящей из проводящих омега-элементов прямоугольной формы с рассчитанными параметрами (рисунок 3). В проекте реализована возможность изменения следующих параметров структуры (рисунок 3):  $s$  характеризует расстояние между омега-элементами в «ячейке»;  $l$  характеризует расстояние между «ячейками» в массиве. Также реализована возможность изменения направления плеч омега-элементов (внутрь или наружу) и толщины проводящего слоя  $h$ .

Из рисунка 2 видно, что скорость диссипации энергии БСП осциллирует и убывает с ростом значения радиальной координаты, что связано с модулирующим действием функции Бесселя.

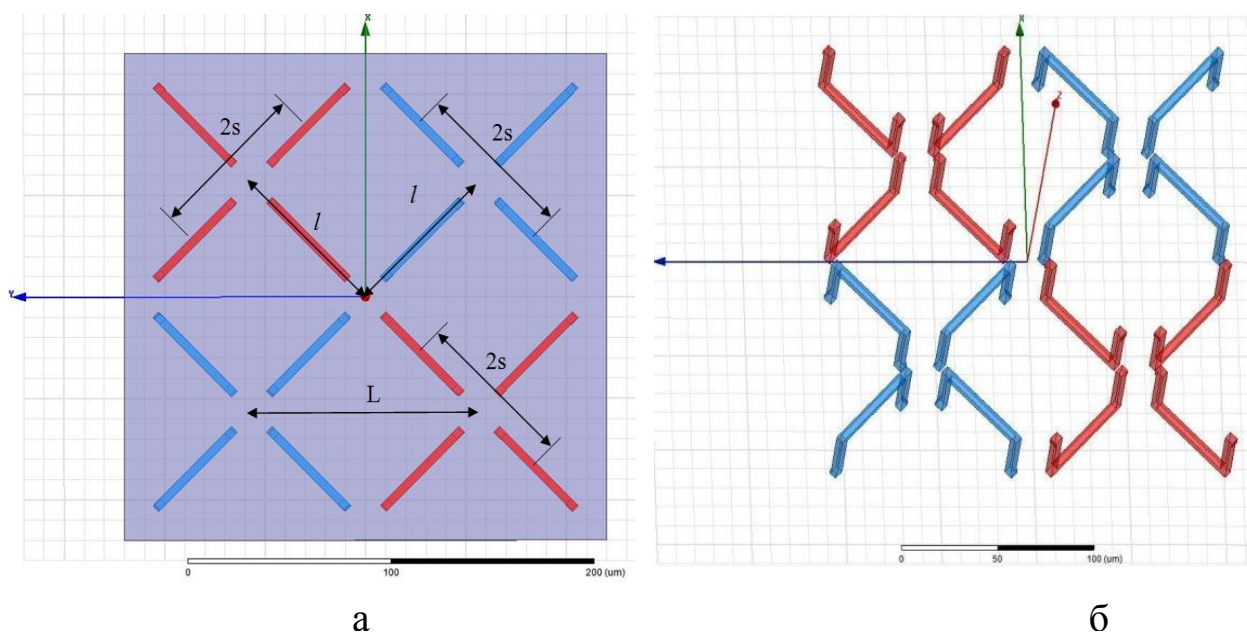


Рисунок 3 – Структурный элемент поглощающей среды в ТГц диапазоне, состоящей из парных омега-элементов прямоугольной формы (а – вид сверху, б – вид в 3D)

При решении поставленной задачи рассматривалась нормально падающая плоская волна. В нашем случае мы имеем две линейно поляризованные волны со взаимно перпендикулярными поляризациями. В терминологии, принятой в HFSS, эти две волны обозначены как моды ТМ (магнитная) и ТЕ (электрическая). С целью поиска оптимальных параметров расположения омега-элементов в ячейке и ячеек в структурном массиве проведено моделирование свойств поглощающего слабо отражающего двумерного массива при различных значениях  $s$  и  $l$ . Дополнительно исследованы поглощающие свойства мас-



сива для различных материалов омега-элементов (нихром, медь, золото) и при различной толщине проводящего слоя.

На рисунке 4 приведен график частотной зависимости коэффициента поглощения (мода TE) электромагнитной волны для различных значений  $l$ , при которых наблюдался максимум поглощения.

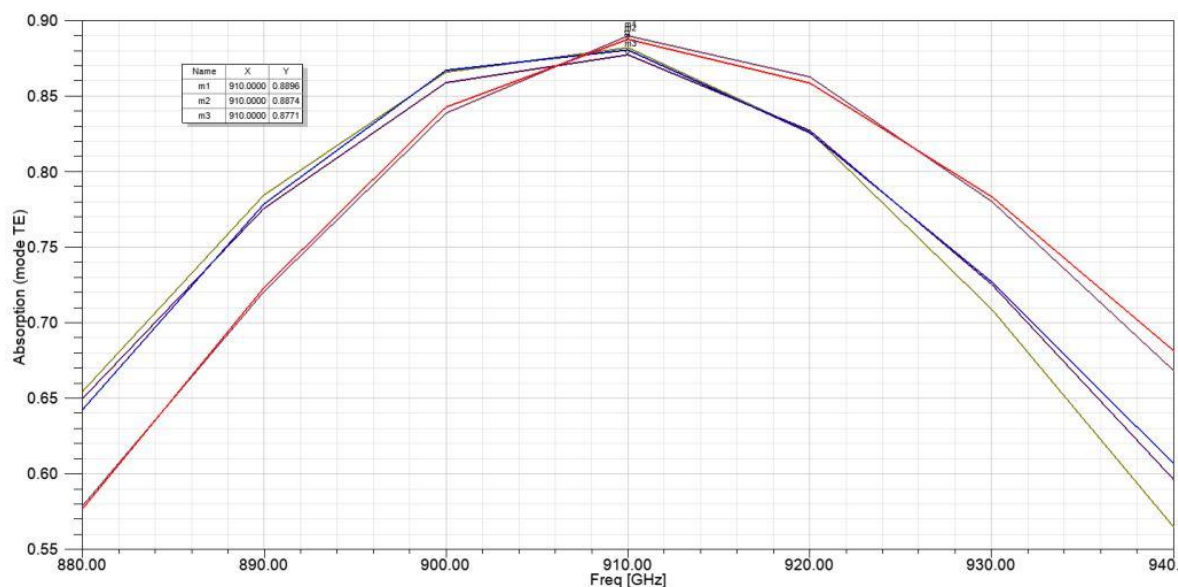


Рисунок 4 – Частотная зависимость коэффициента поглощения (мода TE) электромагнитной волны для различных значений  $l$  (от 147 до 155 мкм с шагом в 2 мкм) при  $s = 40$  мкм (максимальное значение коэффициента поглощения 0,8 896 наблюдается на частоте 0,91 ТГц при  $l = 149$  мкм)

Следует отметить, что для моды ТМ максимальные значения коэффициента поглощения (0,889) получено при таких же параметрах структуры, как и для моды TE, что согласуется с симметрией структуры.

При изменении толщины сечения проводящего слоя  $h$  (квадратное сечение) наблюдалось смещение частоты пикового поглощения (при уменьшении сечения частота пикового поглощения увеличивалась, и, наоборот), при этом изменялось и максимальное значение коэффициента поглощения. Оптимальным оказалась толщина сечения проводящего слоя, равная 4 мкм. При сравнении различных материалов проводника (нихром, медь, золото) наилучший результат был получен для нихрома.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований договор с БРФФИ №Ф15СО-047 от 20.07.2015.

## Литература

1. Free-standing and overgrown InGaAs/GaAs nanotubes, nanohelices and their arrays / V.Ya. Prinz [et al.] // Physica E. – 2000. – Vol. 6. – P. 828.

2. Структура с киральными электромагнитными свойствами и способ ее изготовления (варианты): Патент Рос. Федерации № 2317942 / Е.В. Наумова, В.Я. Принц. – 2008.

3. Излучение циркулярно поляризованных СВЧ волн плоской периодической структурой из  $\Omega$ -элементов / И.В. Семченко [и др.] // Радиотехника и электроника. – Т. 52. – № 9. – 2007. – С. 1084–1088.

4. Банков, С.Е. Решение оптических и СВЧ задач с помощью HFSS / С.Е. Банков, Э.М. Гутцайт, А.А. Курушин. – М: ООО «Оркада», 2012. – 250 с.

**И.В. Семченко<sup>1</sup>, С.А. Хахомов<sup>1</sup>, А.М. Гончаренко<sup>2</sup>, Г.В. Сеницын<sup>2</sup>,  
А.Л. Самофалов<sup>1</sup>, М.А. Подалов<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси,  
Минск, Беларусь

## **ЭФФЕКТИВНЫЕ ТЕНЗОРЫ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ И МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ МЕТАМАТЕРИАЛА НА ОСНОВЕ ОМЕГА-ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ОПТИМАЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ**

В работе [1] на примере образца, разработанного авторским коллективом из Института физики полупроводников Сибирского отделения РАН, было проведено численное моделирование киральных свойств искусственной анизотропной структуры, образованной микроспиралями. Показано, что такая искусственная периодическая структура может проявлять значительные киральные свойства в ТГц диапазоне. Получены аналитические выражения для диэлектрической, магнитной и киральной восприимчивостей структуры при условии сильных гиротропных свойств.

В данной работе нами предложена структура для создания идеального поглотителя в ТГц диапазоне и по аналогии с работой [1] проведен расчет эффективных тензоров диэлектрической и магнитной проницаемостей для метаматериала, представляющего собой массив искусственных бианизотропных элементов сложной формы с оптимальными параметрами. Такой метаматериал состоит из плоских элементов в виде греческой буквы омега прямоугольной формы (рисунок 1). Пример метаматериала показан на рисунке 2. Такой метаматериал состоит из парных элементов, для которых выпуклые части направлены навстречу друг другу, поэтому для любой ячейки метаматериала магни-

то электрические свойства компенсированы. Это означает, что электрическое поле не создаёт магнитный момент в ячейке, а магнитное поле, в свою очередь, не индуцирует в ячейке электрический дипольный момент.

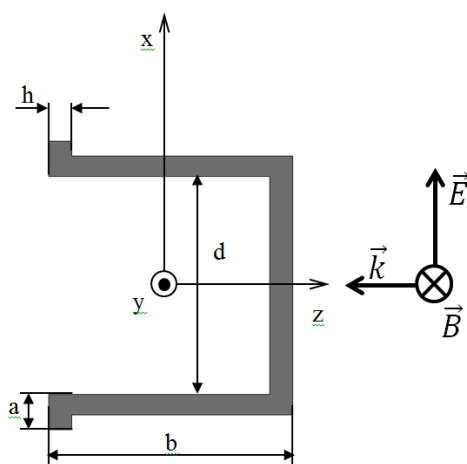


Рисунок 1

Характеристики электромагнитного излучения, рассеянного на таком элементе, зависят от соотношения геометрических параметров  $a$ ,  $b$ ,  $d$ ,  $h$  и длины волны.

Используем модель квазистационарного тока, в этом случае ток является однородным и сила тока не зависит от координаты в пределах элемента. При ориентации в пространстве векторов падающей электромагнитной волны, как показано на рисунке 1 (вектор  $\vec{E}$  параллелен оси  $ox$ ), электрический дипольный момент, возникающий в элементе, будет иметь отличную от нуля составляющую только по оси  $ox$ :

$$p_x = q(2a + d), \quad (1)$$

где  $q$  – электрический заряд, сосредоточенный на краю элемента.

Для расчета эффективного тензора диэлектрической проницаемости используем теоретический метод, основанный на решении уравнения движения электрона по заданной траектории, рассмотренный нами в работе [1]. Смещение электрона проводимости вдоль плеч элемента описывается уравнением:

$$m_e \ddot{s} = -ks - \gamma \dot{s} - e\tau E, \quad (2)$$

где  $s$  – смещение электрона;  $\dot{s}$  – скорость движения электрона;  $\ddot{s}$  – ускорение;  $m_e$  – масса электрона;  $-e$  – заряд электрона;  $k$  – эффективный коэффициент, описывающий квазиупругую силу, действующую на электроны в направлении, противоположном их смещению;  $\gamma$  – эффективный коэффициент, характеризующий силы рассеивания, замедляющие движение электронов;  $\tau$  – коэффициент ослабления поля внутри металла [2].

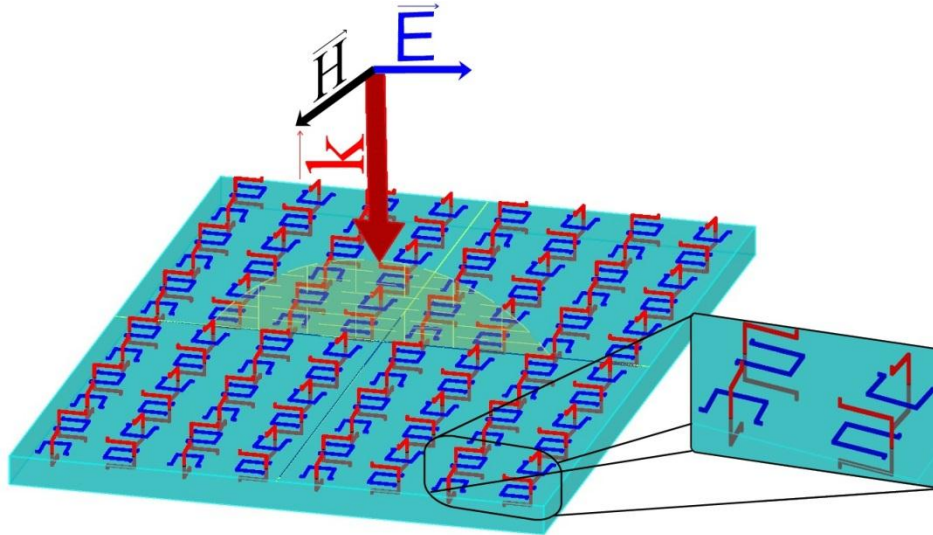


Рисунок 2 – Изотропный метаматериал с компенсированной магнитоэлектрической связью, образованный парными бианизотропными прямоугольными омега-образными элементами, и его ячейка

Под влиянием падающей электромагнитной волны электроны проводимости совершают гармонические колебания. Поэтому справедливо соотношение

$$k = m_e \omega_0^2 = \frac{m_e \pi^2 c^2}{L^2}, \quad (3)$$

где  $\omega_0$  – резонансная частота колебаний,  $c$  – скорость света в вакууме,  $L$  – длина элемента ( $L=2a+d$ ). В этом выражении мы принимаем во внимание, что при условии главного резонанса полная длина элемента приблизительно равна  $\lambda_0/2$ , где  $\lambda_0$  – длина волны электромагнитного поля в свободном пространстве.

Мощность диссипативных сил при замедлении электронов проводимости может быть вычислена с помощью закона Джоуля-Ленца. На этом основании мы получаем следующее выражение:

$$\gamma = \rho e^2 N_{eff} = \rho e^2 N_0 N_s, \quad (4)$$

где  $\rho$  – удельное сопротивление металла, из которого изготовлен элемент,  $N_0$  – концентрация электронов проводимости в металле,  $N_{eff} = N_0 N_s$  – эффективная концентрация электронов проводимости в металле,  $N_s = \frac{2\Delta}{\delta}$  – доля

скин-слоя в объеме проводника,  $\delta$  – толщина проводящего слоя,  $\Delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu_0 \omega}}$  –

толщина скин-слоя [3, 4].

Коэффициент  $\gamma$ , характеризующий диссипативную силу, вычислен как

среднее значение для всех электронов проводимости в объеме проводника. Ко-

где скин-эффект имеет большое значение, коэффициент ослабления поля внутри металла  $\tau$  может быть представлен в следующей форме [3, 4]:

$$\tau = \frac{E_{ins}}{E_0} = (1 + j)\sqrt{2\varepsilon_0\rho\omega}, \quad (5)$$

где  $E_{ins}$  и  $E_0$  – комплексные амплитуды полей внутри и снаружи металла.

Соотношение (5) является приближенным и имеет такой же вид, как для плоской поверхности металла, что является оправданным в случае  $\Delta \ll \delta$ . В случае рассматриваемого конечного элемента необходимо использовать некоторое эффективное значение коэффициента ослабления поля, которое можно определить из сравнения с результатами эксперимента.

Смещение электрона проводимости и напряженность поля падающей волны зададим уравнениями:

$$S = S_0 e^{j\omega t}, \quad E = E_0 e^{j\omega t} = E_x.$$

Подставив в уравнение (2) первую и вторую производную от  $S$ , получим:

$$S = \frac{-e\tau E}{m_e(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma)}, \quad \text{где } \Gamma = \frac{\gamma}{m_e} = \frac{\rho N_0 N_s e^2}{m_e}. \quad (6)$$

Найдем электрический заряд, сосредоточенный на краю одного элемента:

$$q = -e S N_{eff} \delta h. \quad (7)$$

Подставив уравнения (6) и (7) в уравнение (1), найдем  $x$ -компоненту дипольного момента для одного элемента:

$$P_x = \frac{e^2 \tau E N_{eff} \delta h (2a + d)}{m_e (\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\Gamma)}. \quad (8)$$

Поскольку каждый элемент является бианизотропным, для него можно ввести диэлектрическую, магнитную и киральную восприимчивости. Следовательно, его поведение в электромагнитном поле можно описать с помощью уравнений связи [1]:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha_{ee} \vec{E} - j\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \alpha_{em} \vec{H}, \quad (9)$$

$$\vec{m} = \alpha_{mm} \vec{H} + j\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \alpha_{me} \vec{E}. \quad (10)$$

Здесь  $\alpha_{ee}$  и  $\alpha_{mm}$  – тензоры диэлектрической и магнитной восприимчивости,  $\alpha_{me}$  – магнитоэлектрическая восприимчивость,  $\alpha_{em} = \alpha_{me}^T$  – псевдотензор, характеризующий киральные свойства элемента, символ  $T$  означает транспонирование,  $\varepsilon_0$  и  $\mu_0$  – электрическая и магнитная постоянные.

Согласно уравнениям (9) и (10), каждый омега-элемент обладает магнитоэлектрическими свойствами, которые описываются в этих уравнениях перекрестными членами. Однако метаматериал в целом состоит из парных элемен-

тов, для которых выпуклые части ориентированы во встречных направлениях, поэтому для любой ячейки метаматериала магнитоэлектрические свойства компенсированы (см. рисунок 2).

Считая коэффициент ослабления действительной величиной, получаем компоненту эффективного тензора диэлектрической проницаемости метаматериала:

$$\varepsilon_r^{(11)} = 1 + \frac{e^2 \tau N_h N_{eff} \delta h (2a + d) (\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega\Gamma)}{\varepsilon_0 m_e \left( (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2 \right)}, \quad (11)$$

где  $N_h$  – концентрация всех элементов, плечи которых направлены вдоль оси  $ox$ .

Теперь вычислим эффективный тензор магнитной проницаемости для массива искусственных бианизотропных элементов сложной формы с оптимальными параметрами, для этого найдем магнитный момент, возникающий в омега-элементе прямоугольной формы:

$$m_y = -I \cdot b \cdot d, \quad (12)$$

где  $b \cdot d$  – площадь плоского элемента в виде греческой буквы омега прямоугольной формы (см. рисунок 1),  $I = \frac{dq}{dt}$  – сила тока,  $q$  – электрический заряд, сосредоточенный на краю одного элемента (7).

Можно установить связь между напряженностью электрического и магнитного поля (рисунок 1, 2):

$$E_x = \frac{j \cdot \omega \cdot \mu_0 \cdot H_y \cdot b \cdot d}{(2 \cdot a + d)}. \quad (13)$$

Подставив уравнения (6) и (13) в уравнение (12), найдем магнитный момент:

$$m_y = \frac{e^2 \cdot \tau \cdot N_{eff} \cdot \omega^2 \cdot \delta \cdot h \cdot \mu_0 \cdot H_y \cdot (b \cdot d)^2}{(2 \cdot a + d)^2 \cdot m_e \cdot (\omega_0^2 - \omega^2 + j \cdot \omega \cdot \Gamma)}.$$

Эффективный параметр относительной магнитной проницаемости среды определим как:

$$\mu_r = 1 + N_h \alpha_{mm}, \quad \mu_r = 1 + \mu_0 \cdot \frac{e^2 \tau N_h N_{eff} \delta h (2a + d)}{m_e} \cdot B^2 \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j \cdot \omega \cdot \Gamma}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \Gamma^2}, \quad (14)$$

где  $B = \frac{\omega \cdot b \cdot d}{(2 \cdot a + d)}$ .

Таким образом, выражения (11) и (14) описывают эффективные параметры диэлектрической и магнитной проницаемости изотропного метаматериала с компенсированной магнитоэлектрической связью, образованного парными би-

анизотропными прямоугольными омега-образными элементами. Диэлектрические и магнитные свойства массива элементов зависят от частоты электромагнитных волн, геометрических характеристик элементов, их концентрации и вещества, из которого изготовлены элементы. Полученные выражения могут быть уточнены в результате моделирования и эксперимента путём введения поправочных коэффициентов.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований договор с БРФФИ №Ф15СО-047 от 20.07.2015.

### **Литература**

1. Исследование свойств искусственных анизотропных структур с большой киральностью / И.В. Семченко [и др.] // Кристаллография. – 2011. – Т. 56. – № 3. – С. 404–411.

2. Semchenko, I.V. Effective electron model of the wire helix excitation at microwaves: first step to optimization of pitch angle of helix / I.V. Semchenko, S.A. Khakhomov, E.A. Fedosenko // In Advances in Electromagnetics of Complex Media and Metamaterials. NATO Science Series II. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. – Vol. 89. – P. 245–256.

3. Ландау, Л.Д. Электродинамика сплошных сред / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1982. – 620 с.

4. Тамм, И.Е. Основы теории электричества. – М. : Наука, 1976. – 616 с.

**Е.Л. Тихова, В.И. Кондратенко**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

### **ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННОГО ПУЧКА В ПЛОСКОМ СЛОЕ**

Прохождение электромагнитной волны через плоский слой вызывает интерес не только с точки зрения определения энергетических параметров, но и с точки зрения преобразования информации, так как это один из наиболее распространенных элементов оптических линий передачи. Кроме того, применение металлодиэлектрических волноводных систем в электронике СВЧ и КВЧ накладывает свои особенности и ограничения на применение плоских слоев.

Для когерентной волны эффективный коэффициент передачи плоскопараллельной пластинки может быть представлен в виде

$$\theta_{\Phi} = \frac{t_{12}t_{21}e^{i\varphi}}{1 - R_{21}^2e^{i\Phi}},$$

где  $\Phi = \frac{4\pi n^2 H \cos^2 \alpha}{\lambda \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}$ , а  $\varphi = \frac{2\pi n H}{\lambda \cos \beta}$ .

Здесь  $H$  – толщина слоя,  $\alpha$  – угол падения,  $\beta$  – угол преломления,  $\lambda$  – длина волны излучения,  $n$  – показатель преломления среды (коэффициент укорочения волны),  $t_{12}$  и  $t_{21}$  – коэффициенты Френеля для перехода волны из первой среды во вторую и в обратном направлении.

Выделяя в отдельности амплитудную и фазовую характеристики, последнее выражение можно представить в виде

$$\theta_{\Phi} = \frac{t_{12}t_{21}}{\sqrt{1 - 2R_{21}^2 \cos(2\varphi \cos^2 \beta) + R_{21}^4}} e^{i\psi},$$

где  $\psi = \arctg \left( \frac{\sin \varphi + R_{21}^2 \sin(\varphi \cos 2\beta)}{\cos \varphi - R_{21}^2 \cos(\varphi \cos 2\beta)} \right)$ .

Выражение для эффективного коэффициента передачи по сути является частотной характеристикой плоского слоя при рассмотрении его в качестве элемента информационной системы. Действительно, записывая выражение для  $\varphi$  и  $\Phi$  через циклическую частоту  $\omega$ , можно получить

$$A(\omega) = \frac{t_{12}t_{21}}{\sqrt{1 - 2R_{21}^2 \cos(2nH\omega \cos \beta / c) + R_{21}^4}}$$

для амплитудно-частотной характеристики, и

$$\psi(\omega) = \arctg \left( \frac{\sin \left( \frac{nH\omega}{c \cos \beta} \right) + R_{21}^2 \sin \left( \frac{nH \cos 2\beta \omega}{c \cos \beta} \right)}{\cos \left( \frac{nH\omega}{c \cos \beta} \right) - R_{21}^2 \cos \left( \frac{nH \cos 2\beta \omega}{c \cos \beta} \right)} \right)$$

для фазово-частотной характеристики элемента.

Частотная характеристика элемента периодична по частоте, что предполагает дискретный характер ее спектра, т.е. в виде ряда Фурье. Действительно, записывая коэффициент передачи в виде геометрической прогрессии, мы можем получить для частотной характеристики ее представление вида

$$W(\omega) = A(\omega)e^{i\psi(\omega)} = t_{12}t_{21} \sum_{k=0}^{\infty} R_{21}^{2k} e^{i[\varphi(\omega) + k\Phi(\omega)]}.$$



Импульсный отклик такого элемента представляет собой обратное преобразование Фурье от частотной характеристики.

$$h(t) = \frac{t_{12}t_{21}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} R_{21}^{2k} e^{i[\varphi(\omega)+k\phi(\omega)]} d\omega =$$

$$= \frac{t_{12}t_{21}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} R_{21}^{2k} \delta\{t - (t_0 - k\tau)\},$$

где  $t_0 = \frac{\pi n H}{c \cos \beta}$ ,  $\tau = \frac{2\pi n H \cos \beta}{c}$ , а  $\delta\{t - (t_0 - k\tau)\}$  – дельта-функция Дирака.

Прохождение информационного сигнала через информационную систему можно представить в виде свертки исходного сигнала с импульсным откликом системы. Поскольку свертка с  $\delta$  – импульсом приводит к смещению вдоль временной оси без изменения формы импульса, то преобразуемый импульс будет повторяться с ослаблением по амплитуде и с запаздыванием по времени. В современных информационных системах при цифровой передаче и обработке информации в основном применяются сигналы, получаемые посредством модуляции несущей гармонической волны П-образным импульсом длительности  $T$ . Такой сигнал имеет вид  $S(t) = \Pi(t) \cos \Omega t$ , где  $\Omega$  – частота несущей волны, а

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } -T/2 \leq t \leq T/2 \\ 0 & \text{при } t < -T/2 \text{ и } t > T/2 \end{cases}.$$

Параметр  $t_0$  указывает на общую задержку сигнала, и при рассмотрении его преобразования интереса не представляет, а поэтому в дальнейшем будет из рассмотрения исключен. Свертка сигнала вида  $S(t) = \Pi(t) \cos \Omega t$  с импульсным откликом  $h(t)$  приводит преобразованный сигнал с точностью до несущественного постоянного множителя к виду:

$$S'(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} R_{21}^{2k} \cos \Omega(t - k\tau) [\operatorname{sgn}\{(t - k\tau) + T/2\} - \operatorname{sgn}\{(t - k\tau) - T/2\}].$$

Таким образом, происходит уширение импульса за счет наложения запаздывающих эхо-сигналов. Однако характер уширения в зависимости от угла падения ведет себя не вполне так, как это следовало из интуитивных соображений. Общее запаздывание сигнала, естественно, увеличивается при увеличении угла падения, и, следовательно, угла преломления, и максимально при скользющем падении на границу раздела сред. Однако уширение сигнала при этом достигает своего минимума, определяемого углом полного отражения внутри слоя. Ана-

логичным образом ведет себя и отраженный сигнал. Поэтому рассмотрение его в рамках данной работы нецелесообразно.

Особый интерес представляет распространение сигнала в замкнутых системах, которые образуют металлические волноводы с диэлектрическим покрытием, применяемые для передачи сигналов в диапазоне КВЧ. В этом случае, считая модуль коэффициента отражения от металлической поверхности близким к единице, а фазу равной  $\pi$ , для коэффициента отражения нетрудно получить выражение в виде:

$$\theta_{\text{эф}} = R_{12} - \frac{t_{12}t_{21}R_{21}e^{i\Phi(\omega)}}{1 - R_{21}e^{i\Phi(\omega)}}.$$

Однако в данном случае фазовая характеристика зависит от соотношения между частотой излучения и параметрами волноводной системы, поскольку требование равенства нулю напряженности электрической компоненты на границе металла (условия Леонтовича) накладывает определенные ограничения на угол падения и, соответственно, угол преломления волны.

Поскольку спектр описанного информационного сигнала  $S(t)$

$$G(\omega) = 2 \left( \frac{\sin(\Omega + \omega) T/2}{\Omega + \omega} + \frac{\sin(\Omega - \omega) T/2}{\Omega - \omega} \right)$$

неограничен, то различным спектральным составляющим будут соответствовать различные углы преломления  $\beta$

$$\Phi(\omega) = \frac{4\pi nH \cos \beta}{\lambda} = 2nH \sqrt{(\omega/c)^2 - (\pi/na)^2},$$

здесь учитывается, что  $\cos \alpha = \sqrt{1 - (\lambda/2a)^2}$ ,  $a$  – размер широкой стенки волновода. Подобный характер зависимости приводит к тому, что волна с частотой ниже критической в волноводе затухает, и спектр приобретает ограниченный в низкочастотной области характер, теряя свою периодичность.

Следовательно, во временной области импульсный отклик системы приобретает вид непрерывной функции, что приводит к размытию отдельного эхо-импульса. Кроме того, частотную зависимость приобретают коэффициенты отражения и прохождения, что существенно затрудняет проведение аналитической оценки изменения параметров информативного сигнала во временной области ввиду достаточно сложной зависимости коэффициентов Френеля от угла падения. Следует отметить также, что при распространении в волноводе сигнал испытывает многократные переотражения, что приводит к накоплению эффекта.

А.В. Хомченко, И.У. Примак, А.Н. Василенко

ГУ ВПО «Белорусско-российский университет», Могилев, Беларусь

## ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПОЛЕЙ МЕХАНИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЗАКАЛЕННОМ СТЕКЛЕ

### Введение

Особенностью производства закаленных стекол являются наличие в них остаточных, так называемых, закалочных напряжений, от которых зависят основные свойства закаленного стекла. Диагностика напряжений, а также управление ими при соответствующей организации технологического процесса являются неотъемлемой частью производства закаленного стекла. Известен ряд разрушающих и неразрушающих методов измерения напряжений в стекле, которые основываются на измерении обусловленной этими напряжениями анизотропии оптических характеристик материала.

### 1. Поляризационная интерферометрия закаленного стекла

Принципиальная оптическая схема установки, используемой для измерения распределения разности фаз при линейном двулучепреломлении в закаленном стекле, представлена в [1]. Линейно поляризованный свет, пройдя через исследуемое стекло, в котором присутствуют механические напряжения, меняет состояние поляризации, проходит через анализатор и попадает в фоторегистрирующее устройство. Регистрируемая интенсивность света  $I(x,y)$  является функцией двух координат (рисунок 1). Обработывая распределения  $I(x,y)$ , можно восстановить разность фаз  $\delta(x,y)$  в каждой точке стекла и, учитывая ее взаимосвязь с напряжениями, воспроизвести поле напряжений. Для определения  $\delta$  на начальном этапе регистрируется распределение при некотором фиксированном (но произвольно выбранном) угле  $\alpha$  и скрещенных анализаторе и поляризаторе ( $\chi = 90^\circ$ ):

$$I(x,y) = I_{\perp}^{(1)} = I_p T_1 \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad (1)$$

где  $T_1 = T(\alpha, \chi = 90^\circ)$ ,  $I_p = I_p(x,y)$  – интенсивность света на выходе из поляризатора,  $T = T(x,y)$  – коэффициент учитывающий отражение света от поверхностей стекла,  $\alpha = \alpha(x,y)$  – угол между оптической осью образца и плоскостью пропускания поляризатора,  $\delta = \delta(x,y)$  – разность фаз между обыкновенной и необыкновенной волнами. Затем ориентируя анализатор таким образом, чтобы  $\chi = 90^\circ$ , регистрируют

$$I(x, y) = I_{\parallel}^{(1)} = I_p T_1 (1 - \sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}). \quad (2)$$

Измеренные распределения интенсивности позволяют определить произведение функций

$$\sin^2 2\alpha \cdot \sin^2 (0.5k\delta) = I_{\perp}^{(1)} / (I_{\perp}^{(1)} + I_{\parallel}^{(1)}). \quad (3)$$

Далее после поворота поляризатора на угол равный  $45^\circ$  (т.е. имеем  $\alpha+45^\circ$ ) и ориентации анализатора под углом  $\chi = 90^\circ$  интенсивность света, прошедшего через образец, определяется как

$$I(x, y) = I_{\perp}^{(2)} = I_p T_2 \cos^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}, \quad T_2 = T(\alpha + 45^\circ, \chi = 90^\circ). \quad (4)$$

На последнем этапе измерение распределения интенсивности осуществляется при ориентации поляризатора относительно исследуемого образца под углами  $\alpha + 45^\circ$  и  $\chi = 0^\circ$ :

$$I(x, y) = I_{\parallel}^{(2)} = I_p T_2 (1 - \cos^2 2\alpha \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}). \quad (5)$$

Обработка этих измерений позволяет определить величину произведения

$$\cos^2 2\alpha \cdot \sin^2 (0.5k\delta) = I_{\perp}^{(2)} / (I_{\perp}^{(2)} + I_{\parallel}^{(2)}). \quad (6)$$

Предлагаемый подход позволяет уйти от абсолютных измерений интенсивности света и избавиться от изоклин, которые искажают картину визуализации напряжений и не могут быть исключены для широкоформатных стекол с помощью. Распределение разности фаз  $\delta(x, y)$ , получаемое на основе обработки распределения интенсивности с учетом выражений (3) и (6), в общем случае имеет вид

$$\delta(x, y) = (kC / \cos 2\alpha) \int_{-d/2}^{d/2} (\sigma_X(x, y, z) - \sigma_Y(x, y, z)) dz, \quad (7)$$

где  $\sigma_X$  и  $\sigma_Y$  – напряжения нормальные плоскостям OYZ и OXZ соответственно,  $C$  – относительный оптический коэффициент напряжения,  $d$  – толщина стекла. Учитывая взаимосвязь фазы волны с напряжениями можно воспроизвести поле механических напряжений.

Методами поляриметрии исследованы образцы закаленного стекла различной толщины, изготовленные при различных режимах закалки. Измерения механических напряжений проводились на созданной экспериментальной установке полярископа большого поля с использованием разработанного метода, а также при помощи полярископа-поляриметра ПКС-250. На рисунке 1 представлено распределение интенсивности поляризованного света ( $\lambda = 532$  нм), прошедшего через стекло размером  $300 \times 300$  мм, толщиной 6 мм. Распределение механических напряжений и оптической разности хода на участке А-А, полученные двумя методами представлено на рисунке 2.

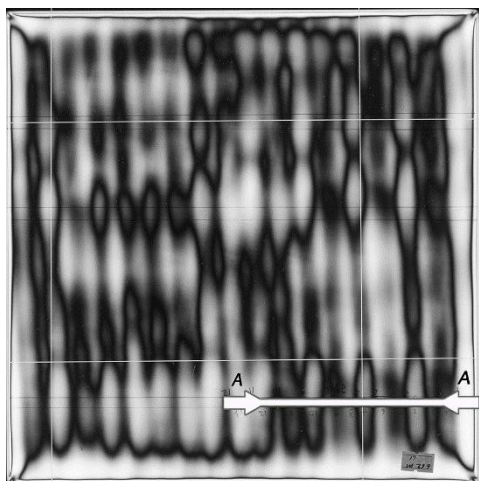


Рисунок 1 – Регистрируемая интенсивность света, прошедшая через исследуемое стекло

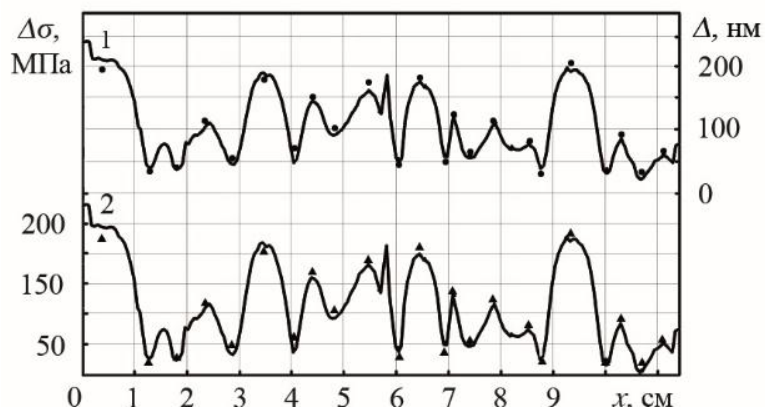


Рисунок 2 – Распределение механических напряжений  $\sigma$  и оптической разности хода  $\Delta$  в плоскости стекла;  
● и ▲ – данные ПКС 250

## 2. Регистрация рассеянного света для измерения профиля механических напряжений

Оценка поверхностных напряжений требует предварительного измерения центрального напряжения, что возможно, например, на основе анализа рассеяния света на неоднородностях распределения показателя преломления в стекле. Наблюдение такого рассеяния позволяет визуализировать распространение света в анизотропном стекле. При этом, анализируя распределения интенсивности рассеянного света можно практически локально исследовать анизотропию показателя преломления и напряжения в стекле [2]. Рассмотрим процедуру измерения, используемую в этих методах. Схема измерений представлена на рисунке 3.

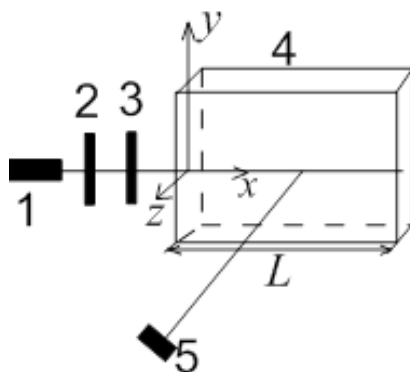


Рисунок 3 – Схема измерения: 1-источник света, 2-поляризатор, 3-линза, 4-исследуемое стекло, 5-фоторегистрирующее устройство

Линейно поляризованный свет нормально падает на торец стекла 4 и проходит через него. Рассеянный свет регистрируется в плоскости перпендикулярной направлению распространения фоторегистрирующим устройством 6 (фотоприемник или матрица фотоприемников). Интенсивность рассеянного света определяется как

$$I(z, x) = I_0 \sin^2(0,5k_0 C \sigma(z)x), \quad (8)$$

если направление наблюдения рассеянного света совпадает с направлением поляризации падающего на стекло света и в виде

$$I(z, x) = I_0 \cos^2(0,5k_0 C \sigma(z)x), \quad (9)$$

если направление наблюдения рассеянного света перпендикулярно направлению поляризации падающего на стекло света. Здесь  $I_0$  – некоторая постоянная,  $k_0$  – волновое число вакуума,  $C$  – константа фотоупругости,  $\sigma(z)$  – функция описывающая распределение напряжения в стекле.

На практике распределение напряжений по толщине стекла описывают функцией вида [2]

$$\sigma = \sigma_y (1 - 12(z/d)^2), \quad (10)$$

где  $d$  – толщина стекла,  $\sigma_y$  – напряжение при  $z=0$  (центральное напряжение растяжения).

Анализ регистрируемых зависимостей  $I(z, x)$  построенных при сканировании пучком света параллельно оси  $Oz$  позволяет получать оценки зависимостей напряжений  $\sigma(z)$ . Такое определение возможно, если проанализировать рассеяние света в случае его распространения вдоль оси образца (т.е. при  $z=0$ , см. рисунок 3). Оценка  $\sigma_y$  получается на основе метода наименьших квадратов, в котором минимизируется сумма квадратов невязок

$$S(A_0, A_1, \sigma_y) = \sum_{i=1}^n (I_i^e - I^t(x_i, A_0, A_1, \sigma_y))^2, \quad (11)$$

где  $I_i^e$  – измеренное значение интенсивности рассеянного света для координаты  $x_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ),  $I^t$  – теоретическая модель рассеяния света, которая с учетом (8) запишется как

$$I^t(x_i, A_0, A_1, \sigma_y) = A_1 - 0,5A_0 \cos(k_0 \sigma_y C x_i), \quad (12)$$

а в случае (9)

$$I^t(x_i, A_0, A_1, \sigma_y) = A_1 + 0,5A_0 \cos(k_0 \sigma_y C x_i), \quad (13)$$

В этих моделях  $A_1$  описывает некоторую постоянную составляющую [2].

На рисунке 4 представлены результаты исследования рассеяния света с длиной волны 0,533 мкм, образцом стекла толщиной 6 мм, ширина и длина

которого соответственно равны 100 и 140 мм. Обработка полученной экспериментально зависимости  $I(x)$  с использованием (12) дала следующую оценку  $\sigma_y = 40,2$  МПа (согласно (10) поверхностное напряжение стекла 80,4 МПа). Как следует из рисунка 4 зависимость  $I(x)$  не является в строгом понимании периодической (расстояние между минимумами зависимости  $I(x)$  не везде одинаковое). Приемлемое совпадение с решением задачи минимизации функционала (11) наблюдается лишь в области от 50 мм до 110 мм. Это можно объяснить тем, что напряжения  $\sigma_y$  не везде в стекле при  $z=0$  постоянны, либо световые лучи распространяются не вдоль оси образца (т. е.  $z \neq 0$ ), что приводит к их искривлению (эффект отрицательной линзы).

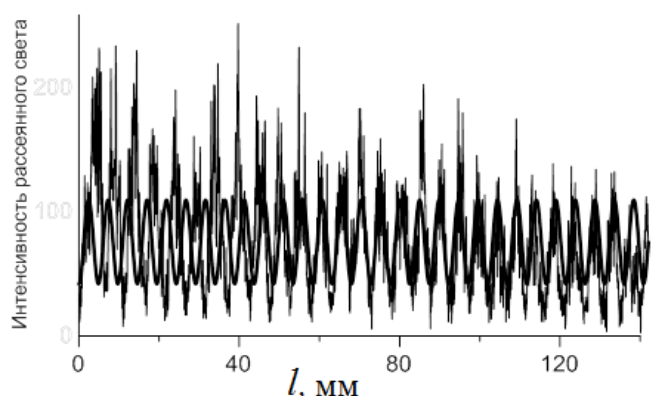


Рисунок 4 – Регистрируемая зависимость интенсивности рассеянного света  $I(x)$  при  $z=0$  (в качестве регистрирующего устройства б использовалась матрица фотоприемников)

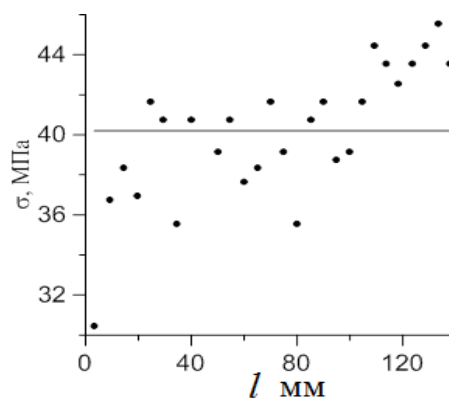


Рисунок 5 – Распределение напряжения вдоль светового пучка

Все это в свою очередь означает, что свет распространяется в областях, где напряжение не постоянно. Кроме того, следует отметить, что вблизи краев листа стекла ( $x \sim d$ ) напряжения не описываются моделью (10). Учитывая все выше сказанное можно получить оценки  $\sigma$  вдоль распространения пучка  $l$ . Для этого будем полагать, что в пределах между минимумами зависимости  $I(l)$  напряжения  $\sigma(l)$  постоянны.

На рисунке 5 результаты такого модерирования представлены точками (непрерывная линия – ранее найденное при решении задачи минимизации функционала (11) значение напряжения 40,2 МПа).

Анализируя рисунки 4 и 5 можно сделать вывод, что напряжение на пути распространения света возрастает. Это означает, что главная причина отклонения экспериментальных данных от модельного описания (8), (9) связана именно с изменением центрального напряжения  $\sigma_y$ .

## **Заключение**

Представленные результаты исследования оптических свойств закаленных стекол позволяют сделать вывод, что предложенный подход позволяет корректно оценивать распределение величины напряжений в анизотропных неоднородных объектах большой площади. Выполнен сравнительный анализ распределения напряжений в образцах закаленных стекол различной толщины и различной степени закалки.

## **Литература**

1. Измерение распределения разности фаз при линейном двулучепреломлении в твердых телах с внутренними напряжениями / А.В. Хомченко [и др.] // Известия ГГУ им Ф. Скорины. Ест. науки. – 2016. – № 3 (96). – С. 124–131.
2. Scattered laser light fringe patterns for stress profile measurement in tempered glass plates / S. Hödemann [et al.] // Glass Technology. – 2014. – Vol. 55. – № 3. – P. 90–95.

**А.А. Шамына, В.Н. Капшай**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **ВЛИЯНИЕ ОРИЕНТАЦИИ ЭЛЛИПСА ПОЛЯРИЗАЦИИ ПАДАЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ГЕНЕРАЦИЮ ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ ОТ ПОВЕРХНОСТИ КОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА**

### **Введение**

Тема генерации второй гармоники (ГВГ) в объёме кристаллов уже хорошо изучена и достаточно хорошо освещена. В последнее время закономерно привлекает внимание ГВГ от двумерных объектов. В частности, такое явление может наблюдаться в тонком слое оптически нелинейного вещества, нанесённого на диэлектрическую частицу в диэлектрике. Экспериментально доказано, что дипольная модель хорошо описывает ГВГ от тонких слоёв [1]. Согласно ей в centrosymmetric средах нелинейные эффекты второго порядка запрещены [2]. Однако в тонком нелинейном слое centrosymmetricность нарушается, что позволяет наблюдать ГВГ и генерацию суммарной частоты. Это позволяет получать сигнал удвоенной частоты исключительно от нелинейного слоя и избегать его искажения сигналом как от объёма частицы, на которую нанесён слой, так и от окружающей среды.



ГВГ уже экспериментально исследована от поверхности наночастиц в растворах, диэлектрических частиц в кристаллиновом слое, водяных капель, а также биологических клеток. Это явление можно использовать для определения распределения плотности адсорбированного нелинейного вещества на поверхности частицы, поверхностного потенциала, свободной энергии, структуры поверхности. В качестве нелинейного слоя были использованы адсорбированные красители (малахитовый зелёный, пиридин), поверхностно активных веществ, биополимеров. Также с его помощью стало возможным исследование кинетики транспорта через мембраны липосом [3].

## 1. Постановка задачи

Для решения задачи о ГВГ от поверхности цилиндра понадобятся декартова, цилиндрическая и сферическая системы координат. Схема задачи изображена на рисунке 1.

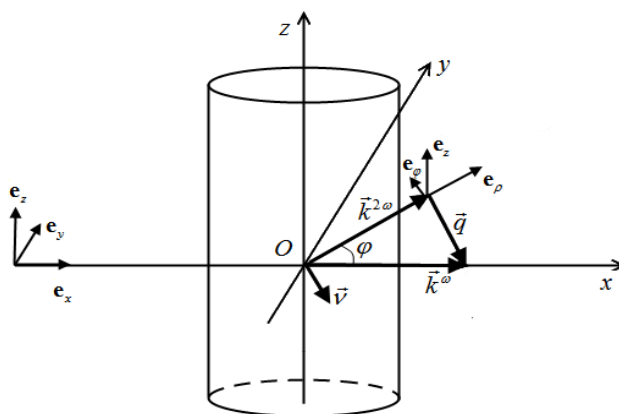


Рисунок 1 – Схема задачи

Ось  $Ox$  направлена вправо, а ось  $Oz$  вверх. Ось  $Oy$  перпендикулярна им обоим. Векторы  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  – это единичные орты декартовой системы координат,  $\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z$  – единичные орты цилиндрической системы координат, а  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi$  – единичные орты сферической системы координат. В центре системы координат расположим цилиндрическую частицу вдоль оси  $Oz$ . Пусть высота частицы равна  $h$ , радиус её основания  $a$ , а сама частица покрыта нелинейным слоем толщины  $d_0 \ll a$  ( $d \ll h$ ).

Пусть падающая в плоскости  $Oxz$  волна задана уравнением

$$\vec{E}^{in}(\vec{x}) = \vec{e}^{in} E_0 \exp(ik^\omega x - i\omega t). \quad (1)$$

Здесь  $E_0$  – это амплитуда падающей волны,  $k^\omega$  – модуль её волнового вектора на циклической частоте  $\omega$ , а вектор  $\vec{e}^{in}$  характеризует поляризацию падающей волны и задаётся формулой:

$$\begin{aligned} \vec{e}^{in} = & \frac{(\sin \varphi_{in} \mathbf{e}_y + \cos \varphi_{in} (-\cos \theta_{in} \mathbf{e}_x + \sin \theta_{in} \mathbf{e}_z))}{\sqrt{1 + \sigma^2}} + \\ & + \frac{i\sigma(-\cos \varphi_{in} \mathbf{e}_y + \sin \varphi_{in} (-\cos \theta_{in} \mathbf{e}_x + \sin \theta_{in} \mathbf{e}_z))}{\sqrt{1 + \sigma^2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\theta_{in}$  – это угол между направлением падающей волны и осью  $Oz$ , а  $\varphi_{in}$  – это угол между большей полуосью эллипса поляризации и плоскостью падения,  $-1 \leq \sigma \leq +1$  характеризует эллиптичность падающей волны и равен отношению меньшей полуоси эллипса поляризации к большей ( $\sigma > 0$  – правая поляризация,  $\sigma < 0$  – левая поляризация).

## 2. Решение

В приближении Рэлея-Ганса-Дебая рассеянная волна отсутствует и поле в окрестности участка поверхности равно полю падающей волны. Тогда в дипольном приближении поляризация участка поверхности зависит от напряжённости электрического поля в этой точке следующим образом:

$$P_i^{2\omega}(\vec{x}) = \chi_{ijk}(\vec{x}) E_j^{in}(\vec{x}) E_k^{in}(\vec{x}), \quad (3)$$

где индексы  $i, j, k$  обозначают компоненты векторов  $\vec{P}^{2\omega}$  и  $\vec{E}^{in}$ , а тензор  $\chi_{ijk}(\vec{x})$  – это тензор нелинейной восприимчивости третьего ранга, имеющий для некирального слоя следующий общий вид:

$$\chi_{ijk}(\vec{x}) = \chi_1 n_i n_j n_k + \chi_2 n_i \delta_{jk} + \chi_3 (n_j \delta_{ki} + n_k \delta_{ij}), \quad (4)$$

где  $\chi_{1-3}$  – коэффициенты анизотропии,  $n_i, n_j, n_k$  – компоненты вектора нормали к поверхности,  $\delta_{ij}, \delta_{ki}, \delta_{jk}$  – дельта-символы Кронекера. В формуле (3) подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Поле генерируемой волны можно вычислить как следующий интеграл по объёму слоя:

$$\vec{E}(\vec{x}) = (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \mu^{2\omega} \frac{\exp(ik^{2\omega} |\vec{x}|)}{|\vec{x}|} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \int_V \frac{\exp(ik^{2\omega} |\vec{x} - \vec{x}'|)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} \vec{P}^{2\omega}(\vec{x}') d\vec{x}', \quad (5)$$

где  $\mu^{2\omega}$  – это магнитная проницаемость окружающей среды на частоте  $2\omega$ ,  $c$  – скорость света. В дальней зоне формула (5) для боковой поверхности цилиндрической частицы преобразуется к следующему виду:

$$\vec{E}(\vec{x}) = 2\pi i \mu^{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} d_0 a h E_0^2 (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \frac{\sin(k^\omega h (\cos \theta_{in} - \xi \cos \theta))}{k^\omega h (\cos \theta_{in} - \xi \cos \theta)} \vec{f}_{lat}(\vec{x}), \quad (6)$$

где  $\xi = n^{2\omega} / n^\omega$  – это дисперсия окружающей среды, а  $\vec{f}$  задаётся выражением:

$$\vec{f}_{lat}(\vec{x}) = \vec{v} \left[ \left( \vec{e}_{\perp}^{in} \vec{v} \right)^2 \chi_1 J_3(z) - \left( \vec{e}^{in} \vec{e}^{in} \right) \chi_2 J_1(z) - \left( \vec{e}_{\perp}^{in} \vec{e}_{\perp}^{in} \right) \chi_1 \left( J_1(z) + J_3(z) \right) / 4 \right] - \quad (7)$$

$$- 2 \vec{e}^{in} \left( \vec{e}_{\perp}^{in} \vec{v} \right) \chi_3 J_1(z) - 2 \vec{e}_{\perp}^{in} \left( \vec{e}_{\perp}^{in} \vec{v} \right) \chi_1 \left( J_1(z) + J_3(z) \right) / 4,$$

записанным через функции Бесселя  $J_i(z)$ . Здесь

$$\vec{e}_{\perp}^{in} = \frac{\left( \sin \varphi_{in} \sin \varphi - \cos \varphi_{in} \cos \theta_{in} \cos \varphi - i \sigma \left( \cos \varphi_{in} \sin \varphi + \sin \varphi_{in} \cos \theta_{in} \cos \varphi \right) \right) \mathbf{e}_{\rho}}{\sqrt{1 + \sigma^2}} + \quad (8)$$

$$+ \frac{\left( \sin \varphi_{in} \cos \varphi + \cos \varphi_{in} \cos \theta_{in} \sin \varphi + i \sigma \left( -\cos \varphi_{in} \cos \varphi + \sin \varphi_{in} \cos \theta_{in} \sin \varphi \right) \right) \mathbf{e}_{\varphi}}{\sqrt{1 + \sigma^2}}$$

– это проекция вектора поляризации падающей волны на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра;

$$q_{\perp} = |\vec{q}_{\perp}| = 2k^{\omega} \sqrt{\sin^2 \theta_{in} - 2\xi \sin \theta \sin \theta_{in} \cos \varphi + \xi^2 \sin^2 \theta} \quad (9)$$

– это модуль составляющей вектора рассеяния  $\vec{q} = 2\vec{k}^{\omega} - \vec{k}^{2\omega}$  в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра;

$$\vec{v} = \vec{q}_{\perp} / |\vec{q}_{\perp}| = \frac{\left( \sin \theta_{in} \cos \varphi - \xi \sin \theta \right) \mathbf{e}_{\rho} - \sin \theta_{in} \sin \varphi \mathbf{e}_{\varphi}}{\sqrt{\sin^2 \theta_{in} - 2\xi \sin \theta \sin \theta_{in} \cos \varphi + \xi^2 \sin^2 \theta}} \quad (10)$$

– это единичный вектор в направлении  $\vec{q}_{\perp}$ .

Интеграл (5) после вычисления для торцов цилиндра, имеющих форму дисков, принимает вид

$$\vec{E}(\vec{x}) = 2\pi i \mu^{2\omega} \frac{(2\omega)^2}{c^2} \frac{\exp\left(ik^{2\omega}|\vec{x}|\right)}{|\vec{x}|} d_0 a^2 E_0^2 \sin\left(k^{\omega}(\cos \theta_{in} - \xi \cos \theta)h\right) \times \quad (11)$$

$$\times \left( J_0(q_{\perp}a) + J_2(q_{\perp}a) \right) (1 - \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r) \vec{f}_{but}(\vec{x}),$$

где векторная функция  $\vec{f}_{but}(\vec{x})$  записывается как

$$\vec{f}_{but}(\vec{x}) = \left\{ \left[ \left( \chi_1 + 2\chi_3 \right) \left( \vec{e}^{in} \mathbf{e}_z \right)^2 + \chi_2 \left( \vec{e}^{in} \vec{e}^{in} \right) \right] \cos \theta + \right. \left. + 2\chi_3 \left( \vec{e}^{in} \mathbf{e}_z \right) \left( e_x^{in} \sin \theta \cos \varphi + e_y^{in} \sin \theta \sin \varphi \right) \right\} \mathbf{e}_r + \quad (12)$$

$$+ \left\{ - \left[ \left( \chi_1 + 2\chi_3 \right) \left( \vec{e}^{in} \mathbf{e}_z \right)^2 + \chi_2 \left( \vec{e}^{in} \vec{e}^{in} \right) \right] \sin \theta + \right. \left. + 2\chi_3 \left( \vec{e}^{in} \mathbf{e}_z \right) \left( e_x^{in} \cos \theta \cos \varphi + e_y^{in} \cos \theta \sin \varphi \right) \right\} \mathbf{e}_{\theta} +$$

$$+ 2\chi_3 \left( \vec{e}^{in} \mathbf{e}_z \right) \left( -e_x^{in} \sin \varphi + e_y^{in} \cos \varphi \right) \mathbf{e}_{\varphi}.$$

Полученные зависимости имеют сложную форму, поэтому их анализ проще проводить построением диаграмм направленностей (ДН), характеризующих распределение генерируемой волны в пространстве.

### 3. Численный анализ

Построим диаграммы направленности для следующих параметров задачи:

$$\xi = 1,1; a = 0,5; h = 0,23; \sigma = 0,5; \theta_{in} = \pi / 4; \chi_1 = 0, \chi_2 = 0, \chi_3 = 1. \quad (13)$$

На рисунках введены цветовые обозначения. Зелёная стрелка – ось цилиндра, синяя стрелка – направление падающей волны, красная стрелка – направление большей полуоси эллипса поляризации. Цвет поверхности ДН означает поляризацию генерируемого излучения. Красный цвет – право циркулярно поляризованная волна, синий цвет – лево циркулярно поляризованная волна, белый цвет – линейно поляризованная волна. Сплошные и штриховые линии на поверхности ДН – это проекции больших и меньших полуосей генерируемого излучения на поверхность ДН. Углы между большей полуосью эллипса поляризации и плоскостью падения слева направо:

$$\varphi_{in} = 0, \varphi_{in} = \pi / 4, \varphi_{in} = \pi / 2. \quad (14)$$

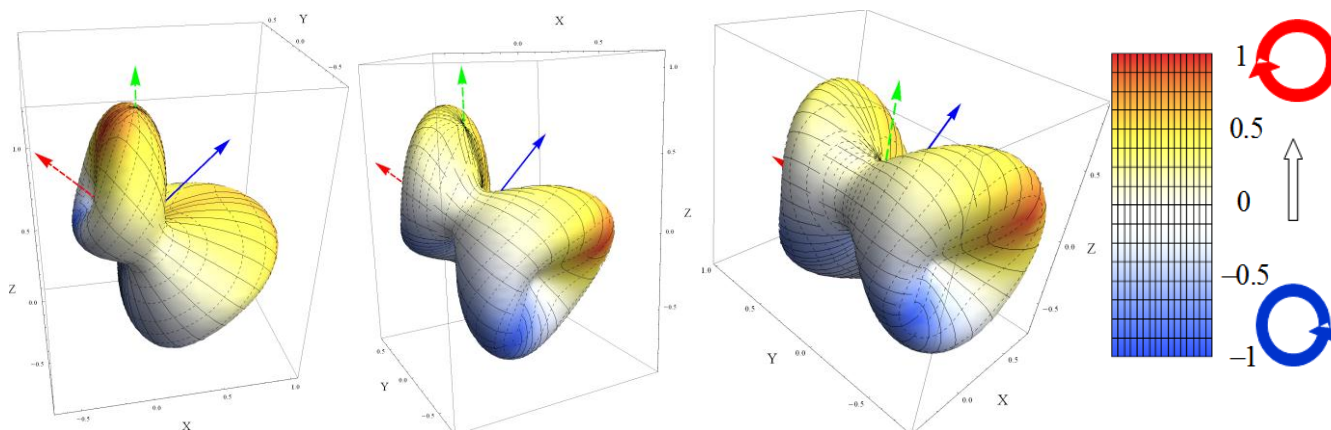


Рисунок 2 – ДН для различных ориентаций эллипса поляризации

Из рисунка 2 видно, что ориентация эллипса поляризации оказывает самое непосредственное влияние на форму ДН. Изменение угла наклона большей полуоси эллипса поляризации к плоскости падения ведёт к проявлению асимметрии формы ДН и изменению направления преимущественного излучения.

### Заключение

С помощью аналитических формул (6)–(12), описывающих пространственное распределение излучения удвоенной частоты, обнаружено, что ориентация эллипса поляризации по отношению к плоскости падения влияет на направление главных лепестков излучения. Стоит отметить, что эти же формулы характери-

зуют влияние размеров частицы на пространственное распределение генерируемых волн, что было ранее получено экспериментально для сферических частиц. Поле второй гармоники состоит из части, создаваемой боковой поверхностью цилиндра, и части, создаваемой торцами цилиндра. Поэтому дальнейшие расчёты покажут, что увеличение радиуса цилиндра по отношению к его высоте ведёт к увеличению влияния торцов на результирующую ДН и изменению её формы.

### Литература

1. Viarbitskaya, S. Size dependence of second-harmonic generation at the surface of microspheres / S. Viarbitskaya, V. Kapshai, P. van der Meulen, and T. Hansson // *Phys. Rev. A.* – 2010. – № 81. – P. 053850.
2. Шен, И.Р. Принципы нелинейной оптики / И.Р. Шен; пер. с англ.; под ред. С.А. Ахманова. – М. : Наука. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1989. – 558 с.
3. Liu, J. Second Harmonic Studies of Ions Crossing Liposome Membranes in Real Time / J. Liu, M. Subir, K. Nguyen, K. B. Eisenthal // *J. Phys. Chem. B.* – 2008. – № 112. – P. 15263–15266.

### П.С. Шаповалов

УО «Гомельский государственный технический университет  
имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

### ОПИСАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛАЗЕРНЫХ ПУЧКОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ СРЕДАХ

Для описания физических нелинейных систем используются системы нелинейных дифференциальных уравнений. Случаи интегрируемых систем крайне редки [1]. Часто для таких систем отсутствуют интегралы движения, что указывает на наличие в динамике сложных (в том числе и хаотических) режимов. Задачи исследования нелинейных осцилляторов часто сводятся к системам Ермакова, для которой существует Ермаков-Левис-Рей-Рейд инвариант [2].

В данной работе задача взаимодействия гауссовых лазерных пучков в средах с кубической нелинейностью с помощью вариационного метода сводится к системе уравнений Ермакова, для которой найден интеграл движения. Распространение взаимодействующих пучков сводится к системе нескольких нелинейных уравнений, имеющих форму и инвариант движения, аналогичный обычной системе Ермакова из двух уравнений. Поэтому данную систему можно рассматривать как обобщение систем Ермакова.

Для описания взаимодействия световых пучков в среде с кубической нелинейностью и квадратичной неоднородностью будем исходить из системы нелинейных параболических уравнений [3], записанных в декартовой системе координат  $(x, y, z)$ . В данном случае пучки считаются некогерентными поэтому интерференционное взаимодействие света не учитывается.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} - 2ik_1 \frac{\partial U_1}{\partial z} - k_1^2 \alpha (x^2 + y^2) U_1 + k_1^2 \beta (|U_1|^2 + 2|U_2|^2) U_1 &= 0, \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2ik_2 \frac{\partial U_2}{\partial z} - k_2^2 \alpha (x^2 + y^2) U_2 + k_2^2 \beta (|U_2|^2 + 2|U_1|^2) U_2 &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь для  $j$ -го пучка ( $j=1, 2$ )  $U_j$  – комплексная амплитуда электромагнитного поля на круговой частоте колебаний  $\omega_j$ ,  $k_j = \sqrt{\varepsilon_j} \omega_j$  – волновое число,  $\varepsilon_j$  – линейная диэлектрическая проницаемость среды,  $\alpha$  – коэффициент квадратичной неоднородности среды ( $\alpha=0$  – среда однородная),  $\beta$  – коэффициент нелинейности. Система (1) описывает взаимодействие лазерных пучков в диапазоне частот, где временная дисперсия среды пренебрежимо мала.

Для системы уравнений (1) запишем интеграл действия

$$\begin{aligned} J = \int_0^z dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[ \frac{1}{k_1^2} \left( \left| \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_1}{\partial y} \right|^2 \right) - \frac{i}{k_1} \left( U_1 \frac{\partial U_1^*}{\partial z} - U_1^* \frac{\partial U_1}{\partial z} \right) + \frac{1}{k_2^2} \left( \left| \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial U_2}{\partial y} \right|^2 \right) - \right. \\ \left. - \frac{i}{k_2} \left( U_2 \frac{\partial U_2^*}{\partial z} - U_2^* \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) + \alpha (x^2 + y^2) (|U_1|^2 + |U_2|^2) - \frac{\beta}{2} (|U_1|^4 + 4|U_1|^2 |U_2|^2 + |U_2|^4) \right]. \end{aligned}$$

Решая систему (1) вариационным методом в классе круговых гауссовых пучков для их радиусов, получим систему уравнений [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \alpha w_1 &= \left[ \frac{4(1 - k_1^2 \mu_1) w_2}{k_1^2 w_1} - \frac{32 \mu_2 w_1 / w_2}{(w_1 / w_2 + w_2 / w_1)^2} \right] \frac{1}{w_1^2 w_2}, \\ \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} + \alpha w_2 &= \left[ \frac{4(1 - k_2^2 \mu_2) w_1}{k_2^2 w_2} - \frac{32 \mu_1 w_2 / w_1}{(w_1 / w_2 + w_2 / w_1)^2} \right] \frac{1}{w_1 w_2^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $i=1, 2$ ,  $\mu_i = \beta P_i / 4\pi$ ,  $P_i$  – мощность  $i$ -го пучка,  $w_i$  – радиус светового пятна кругового пучка. Система (2) представляет собой систему уравнений для двух связанных нелинейных осцилляторов и записана в стандартной ермаковской форме [5]:

$$\ddot{a} + \omega^2 a = f(b/a) / a^2 b, \quad \ddot{b} + \omega^2 b = g(a/b) / ab^2. \quad (3)$$

В случае, когда мощности взаимодействующих пучков совпадают ( $P_1 = P_2$ ,  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ), система (2) относится к классу гамильтоновых систем.

Гамильтониан для нее будет равен:

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_1}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_2}{\partial z} \right)^2 + \frac{\alpha(w_1^2 + w_2^2)}{2} + \frac{2(1-k_1^2\mu)}{w_1^2} + \frac{2(1-k_2^2\mu)}{w_2^2} + \frac{16\mu}{w_1^2 + w_2^2}. \quad (4)$$

Данное утверждение легко проверить, подставляя (4) в систему:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} = -\frac{\partial H}{\partial w_1}, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} = -\frac{\partial H}{\partial w_2}. \quad (5)$$

Умножая первое уравнения системы (2) на  $\mu_1$ , а второе уравнения на  $\mu_2$ , дифференцируя их по  $z$  и складывая, получим соотношение

$$\frac{d^3(\mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2)}{dz^3} + 4\alpha \frac{d(\mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2)}{dz} = 0. \quad (6)$$

Общее решение уравнения (6), в случае однородной среды ( $\alpha = 0$ ), имеет вид:

$$\mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2 = C_2 z^2 + C_1 z + C_0. \quad (6a)$$

Для квадратично неоднородной среды ( $\alpha \neq 0$ ) решение имеет вид:

$$\mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2 = S_2 \sin(2\sqrt{\alpha}z) + S_1 \cos(2\sqrt{\alpha}z) + S_0. \quad (6b)$$

Взаимодействие нескольких пучков, можно формально свести к распространению одного пучка в нелинейной среде, эффективный размер которого равен  $w_3^2 = \mu_1 w_1^2 + \mu_2 w_2^2$ , реальные пучки будут осциллировать вокруг эффективного.

При взаимодействии двух эллиптических гауссовых пучков система уравнений для полуосей светового пятна ( $w_{xi}, w_{yi}$ ) имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial z^2} + \alpha w_{x1} &= \left[ \frac{4w_{y1}}{k_1^2 w_{x1}} - 4\mu_1 - \frac{32\mu_2}{\sqrt{(1+w_{x2}^2/w_{x1}^2)^3(1+w_{y2}^2/w_{y1}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x1}^2 w_{y1}}, \\ \frac{\partial^2 w_{y1}}{\partial z^2} + \alpha w_{y1} &= \left[ \frac{4w_{x1}}{k_1^2 w_{y1}} - 4\mu_1 - \frac{32\mu_2}{\sqrt{(1+w_{y2}^2/w_{y1}^2)^3(1+w_{x2}^2/w_{x1}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x1} w_{y1}^2}, \\ \frac{\partial^2 w_{x2}}{\partial z^2} + \alpha w_{x2} &= \left[ \frac{4w_{y2}}{k_2^2 w_{x2}} - 4\mu_2 - \frac{32\mu_1}{\sqrt{(1+w_{x1}^2/w_{x2}^2)^3(1+w_{y1}^2/w_{y2}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x2}^2 w_{y2}}, \\ \frac{\partial^2 w_{y2}}{\partial z^2} + \alpha w_{y2} &= \left[ \frac{4w_{x2}}{k_2^2 w_{y2}} - 4\mu_2 - \frac{32\mu_1}{\sqrt{(1+w_{y1}^2/w_{y2}^2)^3(1+w_{x1}^2/w_{x2}^2)}} \right] \frac{1}{w_{x2} w_{y2}^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Для системы уравнений (7), аналогично как и для системы уравнений (2), при одинаковых мощностях пучков ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ) получим инвариант по форме близкой гамильтониану (4).

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{x1}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{y1}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{x2}}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_{y2}}{\partial z} \right)^2 + \frac{\alpha(w_{x1}^2 + w_{y1}^2)}{2} + \frac{\alpha(w_{x2}^2 + w_{y2}^2)}{2} +$$

$$+ \frac{2}{k_1^2} \left( \frac{1}{w_{x1}^2} + \frac{1}{w_{y1}^2} \right) + \frac{2}{k_2^2} \left( \frac{1}{w_{x2}^2} + \frac{1}{w_{y2}^2} \right) - \frac{4\mu}{w_{x1}w_{y1}} - \frac{4\mu}{w_{x2}w_{y2}} + \frac{16\mu}{\sqrt{(w_{x1}^2 + w_{x2}^2)(w_{y1}^2 + w_{y2}^2)}}$$

Систему уравнений (7) можно рассматривать как обобщение систем Ермакова на случай многомерных нелинейных осцилляторов. Такие системы должны подчиняться тем же закономерностям, что и классические системы Ермакова, т.е. они должны быть разрешимы.

Умножая первое второе уравнения системы (7) на  $\mu_1$ , а третье и четвертое уравнения на  $\mu_2$ , дифференцируя их по  $z$  и складывая, получим соотношение

$$\frac{d^3(\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2))}{dz^3} + 4\alpha \frac{d(\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2))}{dz} = 0. \quad (8)$$

Общее решение уравнения (8), в случае однородной среды ( $\alpha = 0$ ), имеет вид:

$$\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2) = C_2 z^2 + C_1 z + C_0. \quad (8a)$$

Для квадратично неоднородной среды ( $\alpha \neq 0$ ) решение имеет вид:

$$\mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2) = S_2 \sin(2\sqrt{\alpha}z) + S_1 \cos(2\sqrt{\alpha}z) + S_0. \quad (8б)$$

Постоянные интегрирования находятся из граничных условий. Осцилляции реальных пучков, относительно эффективного размера  $w_s^2 = \mu_1(w_{x1}^2 + w_{y1}^2) + \mu_2(w_{x2}^2 + w_{y2}^2)$ , можно изучить с помощью построения фазовой поверхности уравнения.

## Литература

1. Лихтенберг, А. Регулярная и стохастическая динамика / А. Лихтенберг, М. Либерман. – М.: Мир, 1985. – 529 с.
2. Haas, F. Dynamical symmetries and the Ermakov invariant / F. Haas, J. Goedert // Phys. Lett. A. – 2001. – Vol. 279. – P. 181–188.
3. Гончаренко, А.М. О взаимодействии круговых гауссовых пучков света в нелинейных средах / А.М. Гончаренко, П.С. Шаповалов // Доклады НАНБ. – 2003. – Т. 47. – № 2. – С. 66–68.
4. Шаповалов, П.С. О нелинейном взаимодействии соосных гауссовых пучков света в неоднородной среде / П.С. Шаповалов, Е.А. Ермолаев // Известия НАНБ Сер. Физ.-мат. наук – 2006. – № 1. – С. 81–85.
5. Беркович, Л.М. Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений / Л.М. Беркович. – М.: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 464 с.



# Теория фундаментальных взаимодействий

Председатель – Тимошин С.И., Максименко Н.В.

**Е.З. Авакян, С.Л. Авакян, М.В. Задорожнюк**

УО «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», Гомель, Беларусь

## АДРОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТЯЖЕЛОГО ЛЕПТОНА

С момента открытия в 1975 году  $\tau$ -лептон представляет собой важнейший инструмент для проверки фундаментальных аспектов электрослабого взаимодействия. В частности, в связи с тем, что масса  $\tau$ -лептона велика, кинематически допустимыми являются адронные распады, а именно, распады в нестранные и странные мезоны. Это позволяет дополнительно изучать как явления, связанные с сильным взаимодействием, так и явления, связанные со слабым взаимодействием. В отличие от хорошо известного процесса  $e^+e^- \rightarrow \gamma N$  ( $N$ -адроны), который позволяет судить лишь о электромагнитном векторном токе, полуплептонные распады  $\tau$ -лептона дают возможность изучать как векторные, так и аксиальные токи.

В настоящее время экспериментальное изучение распадов тяжелого лептона ведется несколькими группами [1], [2]. Теоретическое изучение взаимодействий  $\tau$ -лептона проводилось в различных подходах, обзор которых имеется в [3], [4].

Аналитическое выражение для ширины распада  $\tau$ -лептона в легкие адроны содержит спектральные функции, явный вид которых зависит от выбранной модели «сильных» и «слабых» взаимодействий лептонов и кварков. Это, естественно, открывает большие перспективы исследований за рамками Стандартной Модели, что является на сегодняшний день одной из актуальнейших задач физики высоких энергий.

Особый интерес представляет изучение распадов, в конечных состояниях которых присутствуют псевдоскалярные мезоны.

Изучение полуадронных распадов  $\tau$ -лептона требует привлечения дополнительной модели сильных взаимодействий при низких энергиях, например, различные киральные подходы [5], [6].

В данной работе адрон-кварковые взаимодействия будем описывать в рамках Модели Конфайнмированных Кварков (МКК) [7].

## 1. Распады $\tau \rightarrow P\nu_\tau$

Амплитуда данного распада определяется диаграммой, приведенной на рисунке 1.

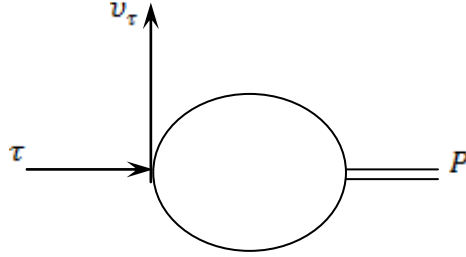


Рисунок 1 – Диаграмма процесса  $\tau \rightarrow P\nu_\tau$

Аналитически она может быть записана в виде:

$$M = \frac{G_F}{\sqrt{2}} f_\pi \cos \theta_C p^\mu \bar{u}_\nu \gamma_\mu (1 - \gamma^5) u_\tau, \quad (1)$$

где

$$f_\pi = \frac{\Lambda \sqrt{3} F_P(\mu_\pi^2)}{\pi \sqrt{2} F_{PP}(\mu_\pi^2)}. \quad (2)$$

Функции  $F_P(\mu_\pi^2)$  и  $F_{PP}(\mu_\pi^2)$  имеют следующий вид:

$$F_P(x) = \int_0^\infty a(u) du + \frac{x}{4} \int_0^1 du a\left(-u \frac{x}{4}\right) \sqrt{1-u}, \quad (3)$$

$$F_{PP}(x) = \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4} \int_0^1 du b\left(-u \frac{x}{4}\right) \frac{1-u/2}{\sqrt{1-u}}, \quad (4)$$

Здесь  $\mu_\pi^2 = \frac{m_\pi^2}{\Lambda^2}$ , а функции  $a(u)$  и  $b(u)$  определены в [7]:

$$a(u) = 2e^{-u^2 - u}, \quad b(u) = 2e^{-u^2 + 0,4u}.$$

Ширина и брэнчинг распада  $\tau \rightarrow \pi\nu_\tau$  имеет вид:

$$\Gamma(\tau \rightarrow \pi\nu_\tau) = \frac{1}{16\pi} G_F^2 \cos^2 \theta_C f_\pi^2 m_\tau^3 \left(1 - \frac{m_\pi^2}{m_\tau^2}\right)^2, \quad Br(\tau \rightarrow \pi\nu_\tau) = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \pi\nu_\tau)}{\Gamma_{tot}}.$$

При получении матричного элемента распада  $\tau \rightarrow K\nu_\tau$ , необходимо различать странный и нестранные кварки. В рамках используемой модели это приводит к модификации структурных интегралов (3), (4).

Ширина распада  $\tau \rightarrow K\nu_\tau$  получена в виде:

$$\Gamma(\tau \rightarrow K\nu_\tau) = \frac{1}{16\pi} G_F^2 \sin^2 \theta_C f_K^2 m_\tau^3 \left(1 - \frac{m_K^2}{m_\tau^2}\right)^2.$$

## 2. Распады $\tau \rightarrow V\nu_\tau$ , $\tau \rightarrow a_1\nu_\tau$

Изучение распада  $\tau$ -лептона в векторные частицы представляется необходимым в связи с тем, что  $\rho$ -мезонный канал является основным каналом распада тяжелого лептона. Кроме того, вычисление ширины распада  $\tau \rightarrow \rho\nu_\tau$  является дополнительной проверкой выбранной модели сильных взаимодействий, претендующей на адекватное описание импульсной зависимости матричных элементов. Следует подчеркнуть, что вычисление амплитуд данного распада в других подходах, например, в киральных [6], связано с использованием константы распада  $\rho \rightarrow \gamma$ , которая, как известно, в указанных подходах вычисляется при нулевых импульсах.

Амплитуда распада  $\tau \rightarrow \rho\nu_\tau$  может быть представлена в виде:

$$M^{\mu\nu}(\tau \rightarrow \rho\nu_\tau) = [g^{\mu\nu}q^2 - q^\mu q^\nu] F_{\tau-\rho\nu_\tau}(q^2), \quad (5)$$

где  $F_{\tau-\rho\nu_\tau}(q^2)$  имеет вид:

$$F_{\tau-\rho\nu_\tau}(q^2) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \cos\theta_c \sqrt{h_\rho} \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Lambda^2 \Pi_V(q^2). \quad (6)$$

Формфактор  $\Pi_V(q^2)$  получен в следующем виде:

$$\Pi_V(q^2) = \frac{1}{3\Lambda^2} \left( \int_0^\infty b(u) du + \frac{x}{4} \int_0^1 du b\left(-u \frac{x}{4}\right) \sqrt{1-u} \right). \quad (7)$$

Амплитуда распада  $\tau \rightarrow K^* \nu_\tau$  имеет вид аналогичный (5), (6), однако при вычислении формфактора (6) нами учтено отличие между параметрами странных и нестранных кварков.

Ширины двухчастичных распадов  $\tau$ -лептона с векторными частицами в конечном состоянии, вычисленные по стандартным формулам с учетом (5)–(7), имеют вид:

$$\Gamma(\tau \rightarrow \rho\nu_\tau) = \frac{G_F^2 m_\tau^3}{16\pi} \cos^2\theta_c \frac{3h_\rho \Lambda^4}{8\pi^2 m_V^2} \left(1 - \frac{m_V^2}{m_\tau^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2m_V^2}{m_\tau^2}\right)^2 \Pi_V(q^2). \quad (8)$$

Изучение распада  $\tau$ -лептона в аксиально-векторный мезон представляется крайне интересным как с точки зрения изучения физики самого тяжелого лептона (изучения его распадов в  $(2n+1)\pi$ -мезон), так и с точки зрения проверки и развития используемой модели. Используемая модель позволяет вычислить матричный элемент этого распада, не прибегая ни к каким дополнительным предположениям и не вводя феноменологических параметров.

### 3. Трехчастичные распады $\tau$ -лептона

Распад  $\tau \rightarrow \bar{\pi} \pi^0 \nu_\tau$  является одним из основных мод распада тяжелого заряженного лептона. В связи с этим вычисление ширины этого распада представляется необходимым при изучении адронных распадов  $\tau$ -лептона. Кроме этого, изучение указанного распада дает важную информацию о свойствах нестранных векторных мезонов.

Матричный элемент распада  $\tau \rightarrow \bar{\pi} \pi^0 \nu_\tau$  определяется суммой вкладов диаграмм, приведенных на рисунке 2. Нами рассмотрены вклады каждой из диаграмм.

Ширина данного распада, полученная с помощью стандартной процедуры суммирования по поляризациям  $\tau$ -лептона и интегрирования по фазовому объему. При получении численного значения указанной ширины нами использовались следующие значения параметров промежуточного векторного мезона:

$$m_\rho = 768,5 \pm 0,6 \text{ МэВ}, \Gamma_\rho^{full} = 150,7 \pm 1,2 \text{ МэВ}.$$

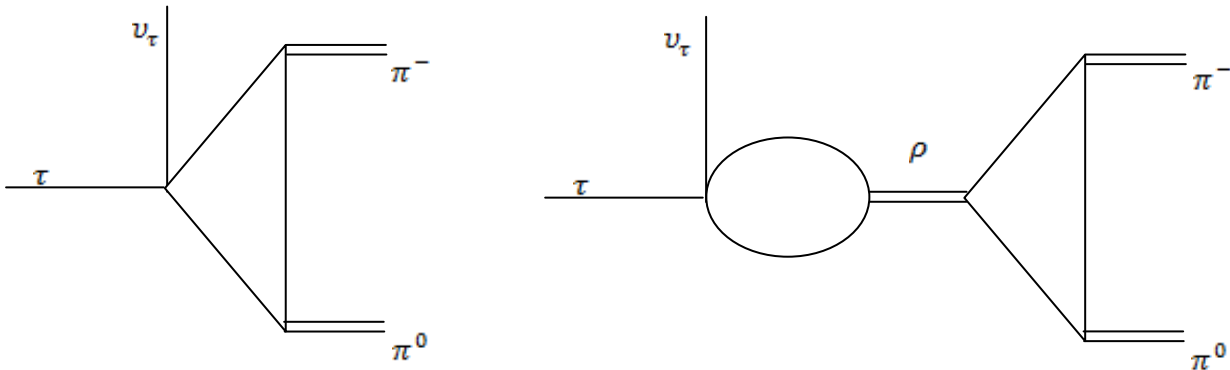


Рисунок 2 – Диаграммы процесса  $\tau \rightarrow \bar{\pi} \pi^0 \nu_\tau$

Рассмотрим матричный элемент, определяемый прямой диаграммой. Нами получено следующее аналитическое выражение для амплитуды:

$$M_{dir}^\mu (\tau \rightarrow \bar{\pi} \pi^0 \nu_\tau) = G_F \cos \theta_c h_\pi (q_1 - q_2)^\mu F_-(s, q_1^2, q_2^2), \quad (9)$$

где  $q_1, q_2$  – 4-импульсы конечных  $\pi$ -мезонов,  $s = (p_\tau - p_{\nu_\tau})^2$ .

Полученное нами аналитическое выражение для формфактора  $F_-(s, q_1^2, q_2^2)$ , имеет вид:

$$F_-(s, q_1^2, q_2^2) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 b(u) du + \frac{s}{4\Lambda^2} \int_0^1 du b\left(-u \frac{x}{4}\right) \sqrt{1-u} + \right.$$

$$\dots + \frac{1}{\Lambda^2} \int_0^1 d^3\alpha \delta\left(1 - \sum_{i=1}^3 \alpha_i\right) \left(s\alpha_1\alpha_2 + q_1^2\alpha_1(1+\alpha_3) + q_2^2\alpha_2(1+\alpha_3)\right) b(-Q) \Big\}, \quad (10)$$

где

$$Q = \frac{s\alpha_1\alpha_2 + q_1^2\alpha_1\alpha_3 + q_2^2\alpha_2\alpha_3}{\Lambda^2}.$$

Полученные значения брэнчингов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Полученные значения брэнчингов адронных распадов тяжелого лептона

Распад	Полученное значение <i>Br</i> %	Экспериментальное значение <i>Br</i> <sup>exp</sup> % [8]
$\tau \rightarrow \pi \nu_\tau$	10,77	$10,83 \pm 0,06$
$\tau \rightarrow K \nu_\tau$	$7,28 \times 10^{-3}$	$(7,00 \pm 0,10) \times 10^{-3}$
$\tau \rightarrow \rho \nu_\tau$	22,5	–
$\tau \rightarrow K^* \nu_\tau$	1,31	$1,20 \pm 0,07$
$\tau \rightarrow a_1 \nu_\tau$	9,96	–
$\tau \rightarrow \bar{\pi} \pi^0 \nu_\tau$	23,7	$25,52 \pm 0,09$

### Литература

1. Search for CP Violation in the Decay  $\tau \rightarrow \pi^- K_S^0 (\geq 0\pi^0) \nu_\tau$  / BaBar Collaboration (J.P. Lees [et al.]) // Phys. Rev. – 2012. – Vol. D85. – № 3. – P. 031102.
2. High-Statistics Study of the  $\tau \rightarrow \pi^- \pi^0 \nu_\tau$  Decay / Belle Collaboration (M. Fujikawa [et al.]). // Phys. Rev. – 2008. – Vol. D78. – № 6. – P. 072006.
3. Pich, A. Theoretical overview on tau physics / A. Pich // Int. J. Mod. Phys. – 2006. – Vol. A21. – P. 5652–5659.
4. Portoles, J. Hadronic decays of the tau lepton: Theoretical outlook / J. Portoles // arXiv: hep-ph/0702132v2. – 2007.
5. Roig, P. Hadronic  $\tau$  Decays into Two and Three Meson Modes within Resonance Chiral Theory / P. Roig // arXiv: 0907.5540v1 [hep-ph]. – 2009.
6. Paver, N. On the branching ratio of the «second class»  $\tau \rightarrow \eta' \pi \nu_\tau$  decay / N. Paver, Riazuddin // arXiv: 1105.3595v1 [hep-ph]. – 2011.
7. Efimov, G. V. The Quark Confinement Model of Hadrons / G.V. Efimov, M.A. Ivanov // London: IOP Publishing Ltd. – 1993. – 177 p.
8. Particle Data Group J. / Beringer [et al.] // Phys.Rev. – 2012. – Vol. D86. – № 1. – P. 010001.

В.В. Андреев<sup>1</sup>, К.С. Бабич<sup>1</sup>, А.Е. Дорохов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Россия

## СТРУКТУРНЫЕ РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ЭФФЕКТЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ДЛЯ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ СИСТЕМ

### Введение

Изучение характеристик связанных систем является важнейшим источником информации о свойствах взаимодействий элементарных частиц. В этой связи, для объяснения экспериментальных данных в рамках квантовополевых моделей необходимо учитывать как релятивистские эффекты, так и эффекты высших порядков по константе взаимодействия. Для такого рода вычислений требуются методики, позволяющие проводить численные расчеты этих эффектов с высокой точностью.

В данной работе предлагается для определения вклада релятивистских эффектов в структурные поправки спектра водородоподобных систем использовать методику вычислений, основанную на использовании импульсного представления и точного вычисления спинорной части потенциала таких систем. С помощью этой методики рассчитаны релятивистские вклады высших порядков для мюонного и обычного атома водорода, связанные состояния которых описываются калибровочно-инвариантной пуанкаре-ковариантной моделью, основанной на точечной форме пуанкаре-инвариантной квантовой механики (ПИКМ).

### 1. Описание связанной двухчастичной системы в пуанкаре-ковариантной модели

Главным требованием ПИКМ является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц. В случае системы двух частиц с массами  $m_q$  и  $m_Q$  и соответственно с 4-импульсами  $p_1 = (\omega_{m_q}(\mathbf{p}_1), \mathbf{p}_1)$  и  $p_2 = (\omega_{m_Q}(\mathbf{p}_2), \mathbf{p}_2)$  это требование, в рамках мгновенной и точечной форм ПИКМ, приводит к уравнению для связанного состояния с волновой функцией  $\Phi_{\ell,S}^{J,\mu}(k)$ :

$$\sum_{\ell',S'} \int_0^\infty V_{\ell,S;\ell',S'}^J(k,k') \Phi_{\ell',S'}^{J,\mu}(k') k'^2 dk' = (M - M_0) \Phi_{\ell,S}^{J,\mu}(k), \quad (1)$$

где  $M_0 = \omega_{m_Q}(\mathbf{k}) + \omega_{m_q}(\mathbf{k})$  – эффективная масса системы невзаимодействующих частиц, имеющих импульс относительного движения  $\mathbf{k}$  ( $k = |\mathbf{k}|$ ). Расчеты поправок проведем для связанных систем:  $e^-p$  (атом водорода) и  $\mu^-p$  (мюонный атом водорода).

## 2. Оценка релятивистских вкладов

Как правило, при вычислении энергетических поправок водородоподобных систем используется разложение потенциала:  $k^2/m^2$  (см. обзор [1]). Включение слагаемых более высокого порядка, чем  $0: k^2/m^2$ , при разложении по скоростям фермионов приводит к сложностям, а именно, при вычислениях релятивистских поправок появляются расходящиеся интегралы за счет высоких степеней  $k$ . Поэтому, для исследования релятивистских вкладов более высокого порядка, воспользуемся точным выражением для ядра интегрального уравнения (1). Ядро потенциала было получено в работах [2, 3] без всяких допущений относительно скоростей фермионов и величины  $q^2$ , а следовательно является адекватным способом анализа релятивистских вкладов более высокого порядка, чем  $k^2/m^2$ .

Для численных расчетов используем значения фундаментальных физических констант, взятые из [4]. Энергетические поправки релятивистской водородоподобной системы с  $J = S$  найдем с помощью выражения

$$\Delta E = \iint_{00}^{\infty} \tilde{R}_{n\ell=0}^C(\mathbf{k}) \Delta V^{J=S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \tilde{R}_{n\ell=0}^C(\mathbf{k}') k'^2 k^2 dk' dk, \quad (2)$$

где  $\Delta V^{J=S}(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  – добавка к потенциалу с точечными фермионами и  $R_{n\ell}^C(\mathbf{k})$  пробные волновые функции

$$\tilde{R}_{n\ell}^C(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{2(n-\ell-1)!}{\pi(n+\ell)!}} \frac{n^2 2^{2(\ell+1)} \ell! n^\ell (k/\beta)^\ell}{\beta^{3/2} (n^2 (k/\beta)^2 + 1)^{\ell+2}} G_{n-\ell-1}^{\ell-1} \left( \frac{n^2 (k/\beta)^2 + 1}{n^2 (k/\beta)^2 + 1} \right) \quad (3)$$

с полиномами Гегенбауэра  $G_n^\ell(x)$  и  $\beta = \mu\alpha$ .

Ядро фермион-фермионной системы в  $\ell-S$  базисе для произвольного полного углового момента  $J$ , после точного вычисления спинорной части методом базисных спиноров, запишется в виде:

$$V_{\ell', S'; \ell, S}^J(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{(2\ell+1)(2\ell'+1)}}{2J+1} \sum_{\lambda_{k_i}, \lambda_{p_i}=-1}^1 C_{\lambda_{k_1}/2, \lambda_{k_2}/2, \lambda/2}^{1/2, 1/2, S} C_{0, 0, \lambda}^{\ell, S, J} C_{0, 0, \lambda'}^{\ell', S', J} \times \quad (4)$$

$$C_{\lambda_{p_1}/2, \lambda_{p_2}/2, \lambda'/2}^{1/2, 1/2, S'} \frac{Z\alpha}{4\pi} \left( \sum_{i=I-IV} V_i^{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} + V^{(B)}_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \right),$$

где составные части  $V_{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^i(k, k')$  представляют собой комбинацию функций  $\tilde{R}_\ell^{(i)}(k, k')$  и  $\tilde{U}_\ell^{(i)}(k', k)$ . Эти функции выражаются в виде одномерных интегралов:

$$\tilde{R}_\ell^{(i)}(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{K^i(\tilde{q}^2) P_\ell(x)}{q^2} dx, \quad \tilde{U}_\ell^{(i)}(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{K^i(\tilde{q}^2) P_\ell(x)}{q^4} dx$$

с функциями  $K^i(\tilde{q}^2)$  зависящими только от формфакторов. Для обозначения коэффициентов Клебша-Гордана используем выражение вида  $C_{\lambda_{k_1}^{1/2} \lambda_{k_2}^{1/2} \lambda_{p_1}^{1/2} \lambda_{p_2}^{1/2}}^S$ .

### 3. Оценка релятивистских вкладов

Проведем оценку релятивистских поправок высших порядков, связанных с движением фермионов, а также эффектов высоких переданных импульсов для структурных вкладов в  $1s$  и  $2s$ -состояний водородоподобных систем. Для выделения слагаемых, связанных с конечными размерами протона, саксовские формфакторы протона представим виде сумм:

$$G_M^p(q^2) = \mu_p + \Delta G_M^p(q^2), \quad G_E^p(q^2) = 1 + \Delta G_E^p(q^2), \quad (4)$$

где  $\Delta G_{M,E}^p(q^2) = \langle r_p^2 \rangle$  при малых  $q^2$ .

Далее произведем вычисления трех видов поправок:  $\Delta E_{NR}$ ,  $\Delta E_{LC}$  и  $\Delta E_{rel}$ , используя различные приближения:

- нерелятивистское приближение  $\Delta E_{NR}$  ( $k^2 / m_{1,p}^2, k'^2 / m_{1,p}^2 = 1$  и  $q^2 = m_p^2$ )
- лидирующий вклад  $\Delta E_{LC}$  (используется только приближение  $k^2 / m_{1,p}^2, k'^2 / m_{1,p}^2 = 1$ );
- точное вычисление  $\Delta E_{rel}$  (без разложения по параметрам  $k^2, k'^2 / m_{1,p}^2$  и  $q^2 / m_p^2$ ).

Поправка  $\Delta E_{Rel}$  с потенциалом (4) даст результат с учетом релятивистского движения фермионов системы. Для оценки релятивистских вкладов высших порядков используем величину:

$$\Delta_{HO} = \Delta E_{Rel} - \Delta E_{LC}. \quad (5)$$

Явный вид слагаемых потенциала, которые содержат интегралы вида

$$G_\ell^p(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{\Delta G^p(q^2)}{q^2} P_\ell(x) dx, \quad F_\ell^p(k', k) = \int_{-1}^1 \frac{\Delta G^p(q^2)}{q^2 (1 - q^2 / (4m_p^2))} P_\ell(x) dx \quad (6)$$

будет зависеть от формфакторов протона.

Для расчета поправок используем различные параметризации протонных формфакторов:



- стандартная дипольная параметризация

$$G_E^p(Q^2) = G_D(Q^2), \quad G_M^p(Q^2) = \mu_p G_D(Q^2), \quad (7)$$

$$G_D(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{m_D^2}\right)^{-2}, \quad Q^2 = -q^2, \quad (8)$$

где  $m_D^2 = 0,71 \text{ ГэВ}^2$ . Данный вариант параметризации будем называть как фит I;

- вариант параметризации [5] будем называть фитом II:

$$G_{E,M}(Q^2) = \left(1 + \frac{Q^2}{a_{E,M}}\right)^{-2}, \quad \langle r_{E,M}^2 \rangle = \frac{12}{a_{E,M}}, \quad (9)$$

где

$$\langle r_M^2 \rangle^{1/2} = (0,777 \pm 0,013_{\text{stat}} \pm 0,009_{\text{syst}} \pm 0,005_{\text{model}} \pm 0,002_{\text{group}}) \Phi_M, \quad (10)$$

$$\langle r_E^2 \rangle^{1/2} = (0,879 \pm 0,005_{\text{stat}} \pm 0,004_{\text{syst}} \pm 0,002_{\text{model}} \pm 0,004_{\text{group}}) \Phi_M;$$

- параметризация [6]

$$G_M^p(Q^2) = \mu_p \frac{1 + a_{p,1}^M \tau_p}{1 + b_{p,1}^M \tau_p + b_{p,2}^M \tau_p^2 + b_{p,3}^M \tau_p^3}, \quad \tau_p = Q^2 / (4m_p^2), \quad (11)$$

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{\mu_p} (c_0 + c_1 Q^2) \quad (12)$$

была применена в [7] для описания поведения формфакторов протона с параметрами:

$$\begin{aligned} a_{p,1}^M &= 1,53 \pm 0,01, & b_{p,1}^M &= 12,87 \pm 0,07, & c_0 &= 1,02 \pm 0,01, \\ b_{p,2}^M &= 29,16 \pm 0,25, & b_{p,3}^M &= 41,40 \pm 0,33, & c_1 &= -0,13 \pm 0,01. \end{aligned} \quad (13)$$

Этот вариант параметризации обозначим – фит III.

В таблице 1 представлены результаты вычислений для атома водорода.

Таблица 1 – Поправки для варианта «фит II», связанные с внутренней структурой протона и вклады  $\Delta E_{\text{NR}}$ ,  $\Delta E_{\text{LC}}$  и релятивистские поправки высоких порядков  $\Delta E_{\text{Rel}}$  для атома водорода (в кГц)

$n$	$\Delta E_{\text{NR}}$	$\Delta E_{\text{LC}}$	$\Delta E_{\text{Rel}}$	$\Delta_{\text{HO}}$
1	1208,31	1208,30	1202,52	-5,78
2	151,04	151,04	150,31	0,72

Как следует из данных таблицы 1, учет высоких  $q^2$  посредством параметризации (9) не вносит существенного изменения по сравнению линейным поведением. А вот поправки, связанные с релятивистским

движением фермионов в данной ситуации дают видимый, хоть и относительно малый в процентном выражении  $\approx 0,48\%$  эффект.

Расчеты с использованием стандартной дипольной параметризацией (7) (фит I) отличаются от данных таблицы 1 за счет различного поведения функций (7) и (9) при малых  $q^2$ . Так для  $1s$  и  $2s$ -состояний имеем, что  $\Delta E_{\text{Rel}} = 1024,33$  кГц и  $\Delta E_{\text{Rel}} = 150,32$  кГц соответственно. Величина:  $178$  кГц и величина:  $22$  кГц для структурной поправки превосходят экспериментальную точность энергетических интервалов.

Для более полного представления о зависимости структурных поправок для водородоподобных атомов от вида параметризации рассмотрим численный расчет для варианта «фит III» (смотри таблицу 2).

Таблица 2 – Поправки для варианта параметризации фит III (в кГц)

$n$	$\Delta E_{\text{NR}}$	$\Delta E_{\text{LC}}$	$\Delta E_{\text{Rel}}$	$\Delta_{\text{HO}}$
1	$1223,15 \pm 22,36$	$1200,10 \pm 34,86$	$1194,43 \pm 33,67$	$-5,67$
2	$152,89 \pm 2,39$	$150,01 \pm 4,23$	$149,30 \pm 4,21$	$0,71$

Релятивистские поправки высших порядков  $\Delta_{\text{HO}}$ :  $-5,67$  кГц и  $0,71$  кГц составляют  $\approx 0,47\%$  для  $1s$  и  $2s$ -состояний и практически не отличаются от параметризации «фит II», в то время, сами вклады отличаются за счет различного поведения при малых  $q^2$ . Однако, интервальные оценки обеих фитов практически совпадают.

В данном подходе имеется возможность вычислить вклад  $\Delta_{\text{Lab}}$ , связанный с эффектом «Lab» (разница между двумя случаями  $R(q^2) = 1$  и  $R(q^2) = c_0 + c_1 q^2$ ,  $c_1 = 0,13$  ГэВ<sup>-2</sup>):  $\Delta_{\text{Lab}} = \{-23,42$  кГц  $- 2,93$  кГц} для  $1s$  и  $2s$ -состояний.

Проведем аналогичные вышеприведенным, вычисления для мюонного атома водорода. Интерес к этой системе связан с необычными следствиями, вытекающими из эксперимента [8]. Вычисления для мюонного атома водорода для ситуации «фит II» представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Поправки для варианта «фит II», связанные с внутренней структурой протона ( $\Delta E_{\text{NR}}$  и  $\Delta E_{\text{LC}}$ ) и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков  $\Delta E_{\text{Rel}}$  для мюонного атома водорода ( $\mu^- p$  система) (в миллиэВ)

$n$	$\Delta E_{\text{NR}}$	$\Delta E_{\text{LC}}$	$\Delta E_{\text{Rel}}$	$\Delta_{\text{HO}}$ , миллиэВ
1	32,1261	31,9498	32,0591	0,1093
2	4,0158	3,9937	4,0065	0,0128

Из таблицы 3 следует, что в отличие от атома водорода,  $\mu-p$  система более чувствительна к поведению формфактора протона и менее чувствительна к релятивистским эффектам высоких порядков. Это объясняется тем, что первая боровская орбита этой системы ближе к ядру, чем в атоме водорода.

Численные оценки показывают, что релятивистские эффекты ( $\approx 0,38\%$ ) больше необходимой точности для тонкой структуры:  $10^{-4}$  миллиэВ и поэтому их также необходимо учитывать.

Как и в случае атома водорода, расчеты с использованием стандартной дипольной параметризацией (7) (фит I) отличаются от данных таблицы 1. Данный эффект усиливается, поскольку  $\mu^-p$ -система чувствительна к поведению формфакторов в зависимости от  $q^2$  и составляет почти  $14,7\%$ . Поэтому для мюонного атома водорода важнейшую роль играет поведение формфакторов и, следовательно, зависимость от параметризации более сильная, чем для атома водорода. Расчеты для варианта «фит III» представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Поправки для варианта «фит III», связанные с внутренней структурой протона  $\Delta E_{NR}$  и  $\Delta E_{LC}$  и с учетом релятивистских вкладов высоких порядков  $\Delta E_{Rel}$  для мюонного атома водорода ( $\mu^-p$  система) (в миллиэВ)

$n$	$\Delta E_{NR}$	$\Delta E_{LC}$	$\Delta E_{Rel}$	$\Delta_{HO}$ , миллиэВ
1	32,5205	31,7717	31,8929	0,1212
2	4,0651	3,9715	3,9866	0,0152

Данные из таблиц 3 и 4 показывают, что для мюонного водорода эффекты высоких  $q^2$  компенсируются релятивистскими эффектами, связанных с движением фермионов в отличие от обычного атома водорода.

Также оценим дополнительный вклад, связанный эффектом, обнаруженный на *Lab*. Поскольку он видоизменяет поведение зарядового формфактора протона, то следует ожидать большей чувствительности мюонного атома водорода к этим эффектам. Действительно, для  $1s$ - и  $2s$ -состояний атома водорода этот эффект дает дополнительные поправки равные  $-0,6158$  миллиэВ и  $-0,0770$  миллиэВ соответственно.

### Заключение

Как следует из расчетов, предлагаемая методика вычислений, использующая представление потенциала взаимодействия фермионов в виде (4), является инструментом, позволяющим оценить релятивистские вклады

высоких, чем  $k^2/m^2$  слагаемых. Расчеты показывают что, такие поправки лежат в пределах чувствительности современных экспериментов по измерению энергетических характеристик таких систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований (г. Минск, Беларусь).

## Литература

1. Eides, M.I. Theory of light hydrogenlike atoms / M.I. Eides, H. Grotch, V.A. Shelyuto // Phys. Rept. – 2001. – Vol. 342. – P. 63–261.
2. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / В.В. Андреев. – Гомель: УО «Гомельский государственный университет им.Ф. Скорины», 2008. – 294 с.
3. Андреев, В.В. Вычисление ядра уравнения релятивистской двухфермионной системы / В.В. Андреев // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. – 2012. – № 1. – С. 88–95.
4. Review of Particle Physics / W.-M. Yao [et al.] // Journal of Physics G. – 2006. – Vol. 33. – P. 1.
5. High-precision determination of the electric and magnetic form factors of the proton / J. Bernauer [et al.] // Phys.Rev.Lett. – 2010. – Vol. 105. – P. 242001.
6. Kelly, J.J. Simple parametrization of nucleon form factors / J.J. Kelly // Phys. Rev. – 2004. – Vol. C70. – P. 068202.
7. Electromagnetic form factors of the nucleon: New fit and analysis of uncertainties / W. Alberico, S. Bilenky, C. Giunti, K. Graczyk // Phys.Rev. – 2009. – Vol. C79. – P. 065204.
8. The size of the proton / R. Pohl [et al.] // Nature. – 2010. – Vol. 466. – P. 231–216.

**В.В. Андреев<sup>1,2</sup>, А.Ф. Крутов<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королёва, Самара, Россия

## УГЛЫ СМЕШИВАНИЯ ИЗ РАСПАДОВ ВЕКТОРНЫХ МЕЗОНОВ

### Введение

Значения углов смешивания  $\phi-\omega$  и  $\eta-\eta'$  обсуждались много раз за последние пятьдесят лет. Интерес к такой тематике связан с нарушением

$SU(3)$  симметрии для процессов с указанными адронами. Имеются многочисленные исследования по извлечению значения углов смешивания на основе различных экспериментальных данных (см., например, [1–4]).

Важным моментом в процедуре извлечения углов смешивания из распадов легких мезонов являются построения матричных элементов данных процессов. Это делается с использованием тех или иных моделей (модельные киральные лагранжианы [4], релятивистские кварковые модели [5] и т. д.), включая даже предположения о массах кварков [1].

В данной работе предлагается провести процедуру извлечения углов смешивания из распадов псевдоскалярных  $P$  и векторных мезонов  $V$  типа  $V \rightarrow \ell^- \ell^+$  (распад в лептонную пару  $\ell^- \ell^+$ ) и  $V \rightarrow P\gamma$ ,  $P \rightarrow V\gamma$  (радиационные распады) с использованием только структуры матричных элементов в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики [6, 7] (ПИКМ). При этом не используется никаких предположений о параметрах релятивистской кварковой модели на основе ПИКМ: кварковые массы, параметры потенциала взаимодействия и др. Основное требование вычислений состоит в соответствии модельных расчетов экспериментальным данным, взятым из PDG [8].

## 1. Определения

Простейшая схема смешивания  $SU(3)$ -синглетных и октетных состояний

$$|\psi_8\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \{ |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle \}, \quad |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ |u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle \}, \quad (1)$$

приводит к физическим состояниям  $\phi-\omega$  и  $\eta-\eta'$  мезонов:

$$|\omega\rangle = \sin\theta_V |\psi_8\rangle + \cos\theta_V |\psi_1\rangle, \quad |\phi\rangle = \cos\theta_V |\psi_8\rangle - \sin\theta_V |\psi_1\rangle, \quad (2)$$

$$|\eta'\rangle = \sin\theta_P |\psi_8\rangle + \cos\theta_P |\psi_1\rangle, \quad |\eta\rangle = \cos\theta_P |\psi_8\rangle - \sin\theta_P |\psi_1\rangle, \quad (3)$$

где  $\theta_V$  и  $\theta_P$  углы смешивания для векторных и псевдоскалярных мезонов соответственно.

Предполагая ортогональность физических состояний  $\phi-\omega$  и  $\eta-\eta'$  состояний и отсутствие смешивания с другими векторными и псевдоскалярными мезонами соотношения (2) и (3) можно записать в виде:

$$|\omega\rangle = \sin\delta_V |\eta_{NS}\rangle + \cos\delta_V |\eta_S\rangle, \quad |\phi\rangle = \cos\delta_V |\eta_{NS}\rangle - \sin\delta_V |\eta_S\rangle, \quad (4)$$

$$|\eta'\rangle = \sin\delta_P |\eta_{NS}\rangle + \cos\delta_P |\eta_S\rangle, \quad |\eta\rangle = \cos\delta_P |\eta_{NS}\rangle - \sin\delta_P |\eta_S\rangle, \quad (5)$$

где  $|\eta_{NS}\rangle = |u\bar{u} + d\bar{d}\rangle / \sqrt{2}$  и  $|\eta_S\rangle = |s\bar{s}\rangle$ .

Функции от углов  $\delta_a$  ( $a=V$  или  $a=P$ ) связаны с углами смешивания  $\theta_a$  соотношениями:

$$\sin \varphi_a = \sqrt{\frac{2}{3}} \cos \theta_a + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta_a, \quad \cos \delta_a = \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta_a - \sqrt{\frac{2}{3}} \sin \theta_a, \quad (6)$$

## 2. Векторные распады мезонов

Реакция распада мезона  $h$  в лептонную пару  $\ell_1, \ell_2$

$$h \rightarrow \ell_1 + \ell_2 \quad (7)$$

характеризуется S -матричным элементом

$$M(h \rightarrow \ell_1 \ell_2) = {}_{\text{out}} \langle \ell_1, \ell_2 | S - I | \Psi_{\mathbf{Q}, M, J \mu} \rangle. \quad (8)$$

Здесь вектор

$$| \Psi_{\mathbf{Q}, M, J \mu} \rangle \quad (9)$$

определяет состояние мезона спина  $J$ , массы  $M$  и импульса  $\mathbf{Q}$  в представлении Гейзенберга [9].

Мезон  $h$  как релятивистскую составную систему кварка  $Q$  и антикварка  $\bar{q}$  рассмотрим в рамках пуанкаре-инвариантной квантовой механики [7, 10]. Пуанкаре-инвариантная квантовая механика дает возможность связать вектор состояния мезона (9) с векторами состояний, входящих в него кварков на основе представлений группы Пуанкаре. Главным требованием пуанкаре-инвариантной квантовой механики является условие сохранения пуанкаре-инвариантности как для систем без взаимодействия, так и для взаимодействующих частиц.

Схема решения поставленной задачи состоит в следующем: на первом этапе строится базис прямого произведения двух частиц без учета взаимодействия. В случае системы двух частиц с массами  $m_q$  и  $m_Q$  и соответственно с 4-импульсами  $p_1 = (\omega_{m_q}(\mathbf{p}_1), \mathbf{p}_1)$  и  $p_2 = (\omega_{m_Q}(\mathbf{p}_2), \mathbf{p}_2)$  этот базис

$$| \mathbf{p}_1, \lambda_1 \rangle | \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \equiv | \mathbf{p}_1, \lambda_1; \mathbf{p}_2, \lambda_2 \rangle \quad (10)$$

определяет приводимое представление группы Пуанкаре.

На втором этапе с помощью разложения Клебша-Гордана для группы Пуанкаре (см., например, [11, 12]) строится базис неприводимого представления, который характеризует систему целиком. Для этого введем полный импульс

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 \quad (11)$$

и относительный импульс  $\mathbf{k}$  двух частиц. Базис двухчастичного неприводимого представления определяется квантовыми числами полного импульса (11), полного углового момента  $J$ , его проекцией  $\mu$ , эффективной массой невзаимодействующих частиц

$$M_0 = \omega_{m_Q}(\mathbf{k}) + \omega_{m_q}(\mathbf{k}), \quad \omega_m(\mathbf{k}) = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (12)$$

или  $k = |\mathbf{k}|$ , а также двумя дополнительными числами, которые снимают вырождение данного базиса.

В зависимости от выбор чисел, снимающих вырождение, различают две схемы: схема с «L-S» связью с квантовыми числами орбитального момента относительного движения  $\ell$  и полного спинового момента  $S$  и схема «спиральность» с пуанкаре-инвариантными спиральностями  $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$  [12]. В системе центра инерции ( $\mathbf{P} = 0$ ) числа  $\tilde{\lambda}_1$  и  $\tilde{\lambda}_2$  совпадают с обычными спиральностями фермионов.

В схеме «спиральность» разложение Клебша-Гордана группы Пуанкаре имеет вид [12]:

$$|\mathbf{P}, \mathbf{k}, J, \mu, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2\rangle = \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(\mathbf{p}_1)\omega_{m_Q}(\mathbf{p}_2)M_0}{\omega_{m_q}(\mathbf{k})\omega_{m_Q}(\mathbf{k})\omega_{M_0}(\mathbf{P})}} \times \quad (13)$$

$$\times \sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}} \int d^2\mathbf{k} D_{\mu, \lambda}^{*J}(\phi_k, \theta_k, -\phi_k) |\mathbf{p}_1, \tilde{\lambda}_1; \mathbf{p}_2, \tilde{\lambda}_2\rangle,$$

с  $\lambda = \tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2$ . Функция  $D_{\mu, \lambda}^J(\phi_k, \theta_k, -\phi_k)$  задает матрицы неприводимого представления группы  $SU(2)$  индекса  $J$ . Явный вид матрицы  $D$  определяется через сферические углы вектора относительного движения  $\hat{\mathbf{k}} = \{\sin \theta_k \cos \phi_k, \sin \theta_k \sin \phi_k, \cos \theta_k\}$ .

На третьем этапе от системы без взаимодействия переходят к одночастичному базису связанной системы, путем добавления в один из операторов полного набора базиса (13) оператора взаимодействия. Требование сохранения пуанкаре-инвариантности в рамках точечной и мгновенной форм ПИКМ приводит к появлению волновой функции (ВФ) связанной системы  $\Phi$ :

$$\langle \mathbf{P}, \mathbf{k}, J', \mu', \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 | \Psi_{\mathbf{Q}, M, J, \mu} \rangle = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{Q}) \delta_{J, J'} \delta_{\mu, \mu'} \Phi_{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2}^J(\mathbf{k}). \quad (14)$$

Нормировка ВФ с учетом числа цветов кварков  $N_c$ , которая следует из нормировки векторов состояний имеет вид

$$N_c \int_0^\infty dk k^2 |\Phi_{\ell, S}^J(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (15)$$

Использование связи между векторами состояний в схеме с «L-S» в схеме «спиральность» приводит к следующему результату [12, 13]:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{\mathbf{P}, J\mu, M}\rangle &= \int_0^\infty d\mathbf{k} k^2 \Phi_{\ell, S}^J(\mathbf{k}) \sqrt{\frac{\omega_{m_1}(\mathbf{p}_1)\omega_{m_2}(\mathbf{p}_2)M_0}{\omega_{m_1}(\mathbf{k})\omega_{m_2}(\mathbf{k})\omega_{M_0}(\mathbf{P})}} \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \times \\
&\times \sum_{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2} \mathbf{C}_{\tilde{\lambda}_1 - \tilde{\lambda}_2}^{1/2 \ 1/2 \ S} \mathbf{C}_{0 \ 0 \ \lambda}^{\ell \ S \ J} \int d^2\mathbf{k} D_{\mu \lambda}^{*J}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k) |\mathbf{p}_1, \tilde{\lambda}_1, \mathbf{p}_2, \tilde{\lambda}_2\rangle,
\end{aligned} \tag{16}$$

где  $\mathbf{C}_{\lambda_{k_1} \ \lambda_{k_2} \ \lambda}^{1/2 \ 1/2 \ S}$  – коэффициенты Клебша-Гордана,

Постоянная  $f_V$  лептонного распада  $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$  для векторного мезона  $V(Q\bar{q})$  массы  $M_V$ , обычно определяется следующим соотношением:

$$\langle 0 | J_V^\mu(0) | \Psi_{\mathbf{P}, \lambda, M_V} \rangle = i(1/2\pi)^{3/2} \frac{\varepsilon_\lambda^\mu M_V f_V}{\sqrt{2} \omega_{M_V}(\mathbf{P})} \tag{17}$$

с вектором поляризации  $\varepsilon_\lambda^\mu$  векторного мезона.

В рамках ПИКМ, процесс распада  $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$  обусловлен электромагнитным взаимодействием кварков, входящих в мезон  $h$ , поэтому в случае легких мезонов ток  $J_V^\mu(0)$  запишется в виде:

$$J_V^\mu(0) = e_u \bar{u} \gamma^\mu u + e_d \bar{d} \gamma^\mu d + e_s \bar{s} \gamma^\mu s. \tag{18}$$

Ширина распада  $V(Q\bar{q}) \rightarrow \ell + \bar{\ell}$  задается выражением

$$\Gamma_V = \frac{4\pi\alpha^2}{3M_V} f_V^2 \left(1 + \frac{2m_\ell^2}{M_V^2}\right) \sqrt{1 - \frac{4m_\ell^2}{M_V^2}}, \tag{19}$$

где  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры.

Используя соотношения (16)–(18) и уравнение (4), получим, что константы  $\rho^0$ ,  $\phi$  и  $\omega$ -мезонов в рамках импульсного приближения запишутся в виде

$$\begin{aligned}
f_\rho^V &= \frac{g(u)(e_u - (1+\Delta)e_d)}{\sqrt{2}}, \\
f_\phi^V &= \frac{g(u)(e_u + (1+\Delta)e_d)\cos\delta_V}{\sqrt{2}} - e_s g(s)\sin\delta_V, \\
f_\omega^V &= \frac{g(u)(e_u + (1+\Delta)e_d)\sin\delta_V}{\sqrt{2}} + e_s g(s)\cos\delta_V.
\end{aligned} \tag{20}$$

В соотношении (20) предполагается «слабое» нарушение изотопической инвариантности между  $u$  и  $d$  кварками за счет малого параметра  $\Delta \approx 0,01 \div 0,02$ . Функция  $g$  представляет интеграл вида [14, 15]:

$$g(q) = \frac{N_c m_q}{\pi} \int_0^\infty d\mathbf{k} \frac{k^2}{(k^2 + m_q^2)^{3/4}} \Phi_V(\mathbf{k}, \beta_{qq}). \tag{21}$$



Таким образом в рамках ПИКМ, на основе требования соответствия модельных расчетов экспериментальным данным появляется возможность определить углы смешивания  $\phi - \psi$  мезонов с помощью системы уравнений (20). Результаты вычисления углов смешивания представлены в таблице 1 в зависимости от параметра  $\Delta$ .

Таблица 1 – Угол смешивания  $\theta_V$  в зависимости от параметра  $\Delta$  и экспериментальные значения лептонных констант

Распад	$f_{\text{exp}}^V$ , ГэВ	$\Delta$	$\theta_V, ^\circ$
$\rho^0 \rightarrow e^+e^-$	$0,1564 \pm 0,0007$	0,00	$(30,4 \pm 0,7)^\circ$
$\phi \rightarrow e^+e^-$	$0,0762 \pm 0,0012$	0,01	$(31,0 \pm 0,7)^\circ$
$\omega \rightarrow e^+e^-$	$0,0459 \pm 0,0008$	0,02	$(31,5 \pm 0,7)^\circ$

### 3. Радиационные распады $V \rightarrow P\gamma$ и $P \rightarrow V\gamma$

Методика вычисления констант радиационных распадов  $V \rightarrow P\gamma$  и  $P \rightarrow V\gamma$  аналогична расчету распада векторного мезона в лептонную пару.

Используя параметризацию матричного элемента для перехода  $V \rightarrow P\gamma$  в виде:

$$\langle \Psi_{Q,M_P} | J_V^\alpha(0) | \Psi_{P,\mu,M_V} \rangle = i \frac{g_{VP\gamma}}{(2\pi)^3} \frac{\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \varepsilon_\nu(\mu) P_\rho Q_\sigma}{\sqrt{4\omega_{M_V}(P)\omega_{M_P}(Q)}}, \quad (22)$$

где  $g_{VP\gamma}$  – константа радиационного распада получим, что ширина распада запишется следующим образом:

$$\Gamma(V \rightarrow P\gamma) = \frac{\alpha}{24} g_{VP\gamma}^2 \left( \frac{m_V^2 - m_P^2}{m_V} \right)^3, \quad \Gamma(P \rightarrow V\gamma) = \frac{\alpha}{8} g_{VP\gamma}^2 \left( \frac{m_P^2 - m_V^2}{m_P} \right)^3. \quad (23)$$

Используя соотношения (16), (18) и (17), а также формулы (4) и (5) можно найти интегральные представления константы  $g_{VP\gamma}$  для различных переходов (смотри таблицу 2). Для легких мезонов константа  $g_{VP\gamma}$  представляется линейную комбинацию функций;

$$X_{ud} = e_d I_v(d) + e_u I_v(u), \quad Z_{ud} = e_u I_v(u) - e_d I_v(d), \quad X_s = e_s I_v(s), \quad (24)$$

где  $I_v(q)$  в рамках точечной формы ПИКМ (в отсутствие аномальных магнитных моментов кварков) может быть записана в виде [16]:

$$I_v(q) = \frac{1}{\sqrt{M_p M_V}} \int_{-1}^1 \int_0^1 \left( \frac{k^2(2x^2+1)}{\omega_{m_q}(k) + m_q} - 3\omega_{m_q}(k) - m_q \right) \frac{k^2 |\Phi_v(k, \beta_{qq})|^2}{2\omega_{m_q}(k)} dx dk. \quad (25)$$

Соотношения из таблицы 2 позволяют провести анализ возможных значений углов смешивания путем сравнения с экспериментальными данными. Так из распадов  $\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$ ,  $\phi \rightarrow \pi^0 \gamma$  и  $\eta' \rightarrow \rho^0 \gamma$ ,  $\rho^0 \rightarrow \eta \gamma$  путем решения системы уравнений находим, что

$$\theta_v = (31,94 \pm 0,30)^\circ, \quad \theta_p = (-14,90 \pm 1,10)^\circ. \quad (26)$$

Минимизация функционала как функции от  $\theta_p$  и  $\theta_v$

$$\chi^2(\theta_p, \theta_v) = \sum_{n=2}^9 \frac{g_{\text{exp}}^2(n) - g_{\text{model}}^2(n)}{\delta g_{\text{exp}}^2(n)} \quad (27)$$

с использованием всех распадов ( $n = (2-9)$  в таблице 2) и в предположении, что  $X_{ud} = 0,830 \pm 0,056$  ( $n = 1$  в таблице 2) дает, что  $\chi_{\text{min}}^2$  достигается при

$$\theta_v = (31,94 \pm 0,29)^\circ, \quad \theta_p = (-18,83 \pm 2,94)^\circ. \quad (28)$$

Таблица 2 – Модельные представления для константы распада  $V \rightarrow P\gamma$  вместе с извлеченными из соотношений (23) экспериментальными значениями  $|g_{VP\gamma}|$

$n$	Распад	Представление $g_{VP\gamma}$ в ПИКМ	$ g_{VP\gamma} (\text{exp.}), \text{ГэВ}^{-2}$
1	$\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma$	$X_{ud}$	$0,830 \pm 0,056$
2	$\rho^0 \rightarrow \eta \gamma$	$Z_{ud} \cos \delta_p$	$1,586 \pm 0,055$
3	$\omega \rightarrow \pi^0 \gamma$	$Z_{ud} \sin \delta_v$	$2,298 \pm 0,040$
4	$\omega \rightarrow \eta \gamma$	$X_{ud} \sin \delta_v \cos \delta_p - 2X_s \sin \delta_p \cos \delta_v$	$0,449 \pm 0,020$
5	$\phi \rightarrow \pi^0 \gamma$	$Z_{ud} \cos \delta_v$	$0,133 \pm 0,003$
6	$\phi \rightarrow \eta \gamma$	$X_{ud} \cos \delta_p \cos \delta_v + 2X_s \sin \delta_p \sin \delta_v$	$0,694 \pm 0,006$
7	$\phi \rightarrow \eta' \gamma$	$X_{ud} \sin \delta_p \cos \delta_v - 2X_s \sin \delta_v \cos \delta_p$	$0,716 \pm 0,012$
8	$\eta' \rightarrow \rho^0 \gamma$	$Z_{ud} \sin \delta_p$	$1,323 \pm 0,025$
9	$\eta' \rightarrow \omega \gamma$	$2X_s \cos \delta_p \cos \delta_v + X_{ud} \sin \delta_p \sin \delta_v$	$0,429 \pm 0,025$

Углы смешивания  $\phi$  и  $\omega$  мезонов (26), (28) и в таблице 1 согласуются с другом пределах  $0,6^\circ$ . В работе [5] на основе анализа распадов векторных мезонов предлагается использовать значение  $\delta_v = -3,3^\circ$ , что с учетом определения углов смешивания в данной работе приводит к значению  $\theta_v = 31,96^\circ$ , что практически совпадает с (26) и (28).

Угол смешивания псевдоскалярных мезонов (28) тесно коррелирует с значением  $\theta_p = -18,2^\circ \pm 1,4^\circ$ , полученное в [1] и значением  $\theta_p = -18,5^\circ \pm 1,0^\circ$ , используемое в рамках релятивистской кварковой модели [5] для радиационных распадов  $V \rightarrow P\gamma$  и  $P \rightarrow V\gamma$ .

Отметим, что в частных случаях (см. (26)), значения  $\theta_p$  могут отличаться от величины (28). Аналогичный вывод сделан и в работах [4, 5], где показано, что для различных комбинаций наблюдаемых величин оптимальные с точки зрения экспериментальных данных значения  $\theta_p$  могут изменяться в пределах от  $-11,0^\circ$  до  $-19,0^\circ$ .

### Заключение

На основе общей структуры констант лептонных и радиационных распадов легких мезонов, возникающих в ПИКМ, проведен анализ углов смешивания для  $\phi$ ,  $\omega$  и  $\eta$ ,  $\eta'$ -мезонов. Результаты согласуются в пределах ошибок с работами [1, 4, 5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского Республиканского Фонда Фундаментальных Исследований (г.Минск, Беларусь). Авторы также благодарны Самарскому университету (г.Самара, Россия) за поддержку.

### Литература

1. Bramon, A. The eta-eta-prime mixing angle revisited / A. Bramon, R. Escribano, M.D. Scadron // Eur. Phys. J. – 1999. – Vol. C7. – P. 271–278.
2. Durand, L. Light meson masses and mixings [Electronic resource] / L. Durand. – 2001. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0105310>. – Date of access: 14.01.2001.
3. Burakovsky, L. The Schwinger nonet mass and Sakurai mass-mixing angle formulae reexamined / L. Burakovsky, J.T. Goldman // Phys. Lett. – 1998. – Vol. B427. – P. 361.
4. Pham, T.N.  $\eta$ - $\eta'$  Mixing Angle from Vector Meson Radiative Decays / T.N. Pham // Nucl. Part. Phys. Proc. – 2016. – Vol. 270–272. – P. 73–77.
5. Jaus, W. Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // Phys. Rev. – 1991. – Vol. D44. – P. 2851–2859.
6. Mini review of Poincaré invariant quantum theory / W.N. Polyzou, Y. Huang, C. Elster [et al.] // Few Body Syst. – 2011. – Vol. 49. – P. 129–147.
7. Крутов, А.Ф. Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем / А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40. – № 2. – С. 268–318.
8. Olive, K.A. Review of Particle Physics / K.A. Olive // Chin. Phys. – 2016. – Vol. C40. – № 10. – P. 100001.

9. Биленький, С.М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С.М. Биленький. – Москва : Энергоатомиздат, 1990. – 327 с.
10. Keister, B.D. Relativistic Hamiltonian dynamics in nuclear and particle physics / B.D. Keister, W.N. Polyzou // *Adv. Nucl. Phys.* – 1991. – Vol. 20. – P. 225–479.
11. Широков, Ю.М. Релятивистская теория поляризованных эффектов / Ю.М. Широков // *ЖЭТФ.* – 1958. – Т. 34. – № 4. – С. 1005–1011.
12. Верле, Ю. Релятивистская теория реакций / Ю. Верле. – Москва : Атомиздат, 1969. – 442 с.
13. Браун, Д.Е. Нуклон-нуклонные взаимодействия / Д.Е. Браун, А.Д. Джексон. – Москва : Атомиздат, 1979. – 248 с.
14. Андреев, В.В. Область константы КХД ниже 1 ГэВ в пуанкаре-ковариантной модели / В.В. Андреев // *Письма в ЭЧАЯ.* – 2011. – Т. 8. – № 4 (167). – С. 581–596.
15. Krutov, A.F. The radius of the rho meson determined from its decay constant / A.F. Krutov, R.G. Polezhaev, V.E. Troitsky // *Phys. Rev.* – 2016. – Vol. D93. – № 3. – P. 036007.
16. Андреев, В.В. Константа радиационного распада векторного мезона в пуанкаре-инвариантной квантовой механике / В.В. Андреев, В.Ю. Гавриш // *Известия ГГУ им. Ф. Скорины.* – 2013. – № 6(81). Естественные науки. – С. 162–166.

**Н.А. Ахраменко**

УО «Белорусский государственный университет транспорта»,  
Гомель, Беларусь

## **ГРАВИТАЦИОННЫЙ ДЕФЕКТ МАССИВНОГО ШАРА**

### **Введение**

В теории тяготения Ньютона гравитационная масса является источником гравитационного поля. Напряженность гравитационного поля, представляет собой его силовую характеристику. Как известно [1–5] в теории тяготения Ньютона напряженность статического поля тяготения определяется величиной силы, действующей на покоящееся пробное тело единичной массы.

Многие небесные тела, в числе которых звезды, планеты и спутники планет, имеют форму близкую к шаровидной. С течением времени эти тела могут изменять как размеры, так и плотность. Например, звезда по мере уплотнения

вещества может превратиться в белый карлик с плотностью, достигающей порядка  $\sim 10^{12}$  кг/м<sup>3</sup> или нейтронную звезду с плотностью порядка  $\sim 10^{18}$  кг/м<sup>3</sup>.

В классической механике считается, что масса системы равна сумме масс составляющих ее тел [1–5]. В релятивистской механике масса может быть определена через полную энергию тела  $E$  и импульс  $p$  [6]

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m^2 c^2, \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Полная энергия включает и энергию взаимодействия частей системы друг с другом. Поэтому масса при изменении конфигурации системы, и соответственно энергии взаимодействия, может изменяться. В частности масса массивной сферической пылевидной оболочки может зависеть от радиуса, что рассмотрено в [7, 8].

В данной работе определяется масса массивного тела шаровидной формы в зависимости от радиуса и плотности. Будем считать, что шар представляет собой пылевидную систему частиц, которые взаимодействуют друг с другом только посредством гравитационного поля.

### 1. Изменение массы шарового слоя при увеличении его радиуса

Пусть имеется однородный массивный шар радиусом  $R$  и массой  $M$ , представляющий собой пылевидную систему частиц, взаимодействующих между собой только посредством гравитационного поля. Выделим тонкий поверхностный шаровой слой. Подействуем внешними силами на этот слой в радиальном направлении и распределим его на бесконечность без придания ему кинетической энергии. В этом случае будет совершена некоторая работа против сил тяготения. Принимая во внимание связь массы с энергией можно положить, что масса шарового слоя возрастет соответственно затраченной работе при перемещении его с поверхности шара на бесконечность. После этого выделим следующий шаровой слой и опять, совершая работу внешними силами против сил тяготения, переместим его на бесконечность аналогично предыдущему слою. И так слой за слоем можно весь шар, перемещая его составляющие в радиальном направлении, распределить по бесконечности. Масса каждого шарового слоя при распределении его по бесконечности будет возрастать соответственно затраченной работе. В итоге масса всего шара возрастет до значения  $M_0$ .

Величина

$$\Delta M = M_0 - M \quad (2)$$

и будет представлять собой гравитационный дефект массы.

Теперь определим количественно  $\Delta M$ . Для этого выделим промежуточный тонкий шаровой слой массой  $\Delta m$  (рисунок 1).

Внутри этого слоя сосредоточена масса  $m$ , определяемая радиусом  $r$ . При перемещении частиц этого слоя в радиальном направлении на  $dr$  будет совершена работа против сил тяготения. При этом будем учитывать взаимодействие только частиц шарового слоя  $\Delta m$  с массой  $m$ . Взаимодействием частиц самого слоя между собой пренебрежем ввиду малости величины. В этом случае элементарная работа против сил тяготения

$$\delta A = \frac{Gm\Delta m}{r^2} dr, \quad (3)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная.

Совершаемая работа приводит к росту массы шарового слоя:

$$\delta A = c^2 d(\Delta m), \quad (4)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме. Тогда:

$$\frac{Gm\Delta m}{r^2} dr = c^2 d(\Delta m). \quad (5)$$

Интегрируя это выражение, получаем:

$$\Delta m(\infty) = \Delta m(r) \exp\left(\frac{Gm}{c^2 r}\right), \quad (6)$$

где  $\Delta m(\infty)$  и  $\Delta m(r)$  – масса шарового слоя распределенного по бесконечности и в исходном положении.

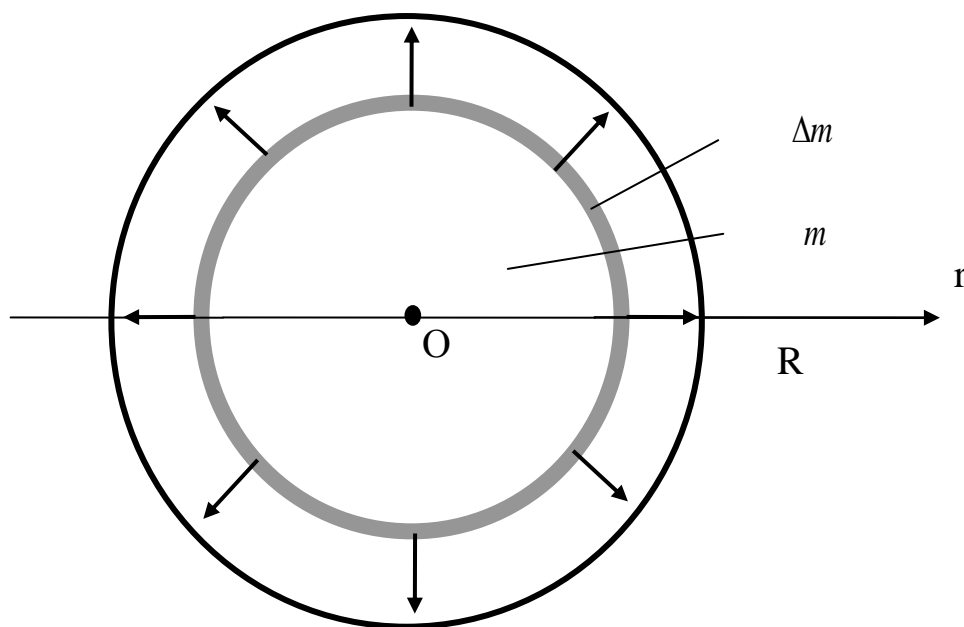


Рисунок 1 – Шаровой слой массы  $\Delta m$

## 2. Изменение массы всего шара

Масса всего шара при распределении его по бесконечности (свободная масса) будет определяться суммой масс всех шаровых слоев его составляющих. Это можно, учитывая выражение (6), выразить через интеграл вида

$$M_0 = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \exp\left(\frac{4\pi G\rho r^2}{3\tilde{n}^2}\right) dr, \quad (7)$$

где принято, что масса шарового слоя:

$$dm = 4\pi r^2 dr,$$

масса внутри шарового слоя:

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

$dr$  – толщина шарового слоя.

Следовательно, гравитационный дефект массы можно определить выражением

$$\Delta M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \exp\left(\frac{4\pi G\rho r^2}{3\tilde{n}^2}\right) dr - M. \quad (8)$$

Преобразуя последнее выражение путем разложения экспоненты в ряд, получим:

$$\Delta M = M \left( \frac{3}{5} \frac{GM}{\tilde{n}^2 R} + \frac{3}{14} \left( \frac{GM}{\tilde{n}^2 R} \right)^2 + \dots \right), \quad (9)$$

где масса всего шара выражена через плотность и объем:

$$M = V\rho = \frac{4}{3} \pi \rho R^3.$$

Тогда первое приближение для гравитационного дефекта массы составит:

$$\Delta M = \frac{3}{5} \frac{GM^2}{Rc^2}, \quad (10)$$

что представляет собой отношение модуля потенциальной энергии шара в ньютоновской механике к величине  $c^2$ .

### Заключение

Таким образом, определен гравитационный дефект массы массивного шара. Из полученного выражения в первом приближении следует выражение для дефекта массы через величину потенциальной энергии шара в классической механике.

## Литература

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики в 5-ти т. Т. 1. Механика / Д.В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2005. – 560 с.
2. Савельев, И.В. Курс физики в 3 т. Т 1. Механика. Молекулярная физика / И.В. Савельев. – М. : Наука, 1989. – 352 с.
3. Матвеев, А.Н. Механика и теория относительности / А.Н. Матвеев. – М.: ОНИКС 21 век, 2003. – 432 с.
4. Детлаф, А.А. Курс физики / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М. : Высш. шк., 1989. – 608 с.
5. Яворский, Б.М. Справочник по физике / Б.М. Яворский, А.А. Детлаф. – М. : Наука, 1990. – 624 с.
6. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц – М. Наука, 1988. – 512 с.
7. Сердюков, А.Н. Калибровочная теория скалярного гравитационного поля / А.Н. Сердюков. – Гомель, изд-во Гомельского гос. ун-та, 2005. – 257 с.
8. Ахраменко, Н.А. Масса массивной сферической оболочки с учетом гравитационного дефекта. / Н.А. Ахраменко, Л.М. Булавко // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3(20). – С. 13–15.

**Е.В. Вакулина<sup>1</sup>, Н.В. Максименко<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Филиал Брянского государственного университета  
имени академика И.Г. Петровского, Новозыбков, Россия

<sup>2</sup>УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

### **СПИНОВЫЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ И ХАРАКТЕРИСТИКИ АДРОНОВ СПИНА 1 СВЯЗАННЫЕ С НЕСОХРАНИЕМ ЧЕТНОСТИ В ФОРМАЛИЗМЕ ДАФФИНА-КЕММЕРА-ПЕТЬЮ**

На основе низкоэнергетических теорем [1, 2] были установлены электромагнитные характеристики нуклонов – спиновые поляризуемости, которые отражают структурные свойства взаимодействия электромагнитного поля с адронами в области низких энергий. С целью экспериментального и теоретического изучения поляризуемостей используется достаточно широкий класс электродинамических двухфотонных процессов [3]. С развитием стандартной модели электрослабых взаимодействий в последнее время введены новые электромагнитные характеристики, связанные с несохранением четности [4, 5] подобные гирациям [6].



Для совершенствования методов повышения точности измерения поляризуемостей, гираций и фитирования экспериментальных данных по комптоновскому рассеянию на адронах в области низких и средних энергий возникает необходимость релятивистского теоретико-полевого определения вкладов этих характеристик в амплитуды и сечения электродинамических процессов [7, 8]. С этой целью, в данной работе, предлагается метод релятивистски-инвариантного эффективного тензорного представления разложения лагранжианов и амплитуд двухфотонного взаимодействия с адронами по энергии фотонов в рамках формализма Даффина-Кеммера-Петью (ДКП) [9–11].

Уравнение ДКП для свободной частицы спина единица имеют вид [12]:

$$(\beta_\mu \vec{\partial}_\mu + m)\psi(x) = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\psi}(x)(\beta_\mu \vec{\partial}_\mu - m) = 0, \quad (2)$$

где  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x) = \psi^+(x)\eta$  – десятимерные функции частиц,  $\eta = 2(\beta_4^{(10)})^2 - I$ , стрелки над производными  $\vec{\partial}_\mu$  указывают направление их действия, а четырехмерный вектор определяется компонентами  $a_\mu\{\vec{a}, ia_0\}$ . В уравнениях (1) и (2)  $\beta_\mu$  – десятимерные матрицы ДКП, которые удовлетворяют перестановочным соотношениям:

$$\beta_\mu\beta_\nu\beta_\rho + \beta_\rho\beta_\nu\beta_\mu = \delta_{\mu\nu}\beta_\rho + \delta_{\rho\nu}\beta_\mu.$$

Эффективный лагранжиан взаимодействия электромагнитного поля с частицей спина единица с учетом поляризуемостей в рамках теоретико-полевого ковариантного подхода имеет вид [10]:

$$L = -\frac{\pi}{2m}\bar{\psi}[\beta_\nu\hat{L}_{\nu\sigma}\vec{\partial}_\sigma + \hat{L}_{\nu\sigma}\beta_\nu\vec{\partial}_\sigma]\psi, \quad (3)$$

где  $\vec{\partial}_\sigma = \vec{\partial}_\sigma - \vec{\partial}_\sigma$ . В определении лагранжиана (3) тензор  $\hat{L}_{\nu\sigma}$  выражается через поляризуемости и гирации следующим образом:

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\alpha, \chi_E, \gamma_E) = \hat{L}_{\nu\sigma}(\alpha) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\bar{\alpha}) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_1}) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\chi_E) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_2}), \quad (4)$$

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\beta, \chi_M, \gamma_M) = \hat{L}_{\nu\sigma}(\beta) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\bar{\beta}) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{M_1}) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\chi_M) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{M_2}). \quad (5)$$

В определениях (4) и (5)  $\alpha$  и  $\beta$  – скалярные дипольные электрические и магнитные поляризуемости,  $\bar{\alpha}$  и  $\bar{\beta}$  – тензорные поляризуемости,  $\gamma_{E_1}, \gamma_{E_2}$  и  $\gamma_{M_1}, \gamma_{M_2}$  – спиновые поляризуемости, а  $\chi_E$  и  $\chi_M$  – электрические и магнитные гирации.

С целью установления влияния перекрестной симметрии на вклады спиновых поляризуемостей и гираций в амплитуду комптоновского рассеяния в дипольном представлении определим в (4) тензоры следуя работе [10]:

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\alpha) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\bar{\alpha}) = F_{\nu\mu} \hat{\alpha}_{\mu\rho}(\alpha) F_{\rho\sigma} + F_{\nu\mu} \hat{\alpha}_{\mu\rho}(\bar{\alpha}) F_{\rho\sigma}, \quad (6)$$

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_1}) + \hat{L}_{\nu\sigma}(\chi_E) = F_{\nu\mu} \vec{\partial}_\lambda F_{\rho\sigma} \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_1}) + F_{\nu\mu} \vec{\partial}_\lambda F_{\rho\sigma} \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\chi_E), \quad (7)$$

$$\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_2}) = (F_{\nu\rho} \vec{\partial}_\kappa \tilde{F}_{\sigma\rho} + \tilde{F}_{\nu\rho} \vec{\partial}_\rho F_{\sigma\kappa}) \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_2}). \quad (8)$$

Производные в (7)–(8) действуют только на тензоры электромагнитного поля  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Тензоры  $\hat{\alpha}^{\mu\rho}(\alpha)$  и  $\hat{\alpha}^{\mu\rho}(\bar{\alpha})$ , а также  $\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_1})$ ,  $\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_2})$  и  $\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\chi_E)$  представляются следующим образом:

$$\hat{\alpha}_{\mu\rho}(\alpha) = \alpha \delta_{\mu\rho}, \quad \hat{\alpha}_{\mu\rho}(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} (\hat{W}_\mu \hat{W}_\rho + \hat{W}_\rho \hat{W}_\mu),$$

$$\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_1}) = i\gamma_{E_1} \delta_{\mu\rho\kappa\lambda} \hat{W}_\kappa, \quad \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\chi_E) = \frac{i\chi_E}{2m} \delta_{\mu\rho\kappa\lambda} \vec{\partial}_\kappa, \quad \hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_2}) = -\gamma_{E_2} \hat{W}_\kappa.$$

В этих уравнениях использовано определение ковариантного спинового вектора, который выражается через матрицы  $\beta_\nu$  согласно [12]  $\hat{W}_\mu = -\frac{i}{4m} \delta_{\mu\kappa\delta\eta} \hat{j}^{[\delta\eta]} \vec{\partial}_\kappa$ , где  $\hat{j}^{[\delta\eta]} = \beta_\delta \beta_\eta - \beta_\eta \beta_\delta$ . Все производные и операторы содержащиеся в уравнениях, действуют на волновые функции  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ .

Аналогичным образом определяется тензор (5), если в (6)–(7) ввести константы  $\beta, \bar{\beta}, \gamma_{M_1}$  и  $\chi_M$ , а также сделать замену  $F_{\nu\mu} \rightarrow \tilde{F}_{\nu\mu}$ , где  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \delta_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$ , а вместо тензора  $\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{E_2})$  необходимо ввести  $\hat{k}_{\mu\rho\lambda}(\gamma_{M_2}) = \gamma_{M_2} \hat{W}_\kappa$ .

Спиновые структуры амплитуды комптоновского рассеяния на частице спина единица с учетом вкладов  $\alpha, \beta$  и  $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$  на основе лагранжиана (3) получены в [10].

Учитывая вклады спиновых поляризуемостей  $L(\gamma_{E_1})$  и  $L(\gamma_{M_1})$  в лагранжиан (3) в формализме ДКП, получим

$$L(\gamma_{E_1}) = -i \frac{\pi}{2m} \gamma_{E_1} \delta_{\mu\rho\kappa\lambda} F_{\nu\mu} \vec{\partial}_\lambda F_{\rho\sigma} \bar{\psi} (\beta_\nu \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \beta_\nu) \vec{\partial}_\sigma \psi,$$

$$L(\gamma_{M_1}) = -i \frac{\pi}{2m} \gamma_{M_1} \delta_{\mu\rho\kappa\lambda} \tilde{F}_{\nu\mu} \vec{\partial}_\lambda \tilde{F}_{\rho\sigma} \bar{\psi} (\beta_\nu \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \beta_\nu) \vec{\partial}_\sigma \psi.$$

В системе покоя мишени в приближении, когда импульс отдачи частицы равен нулю, эти лагранжины определяются следующим образом

$$L(\gamma_{E_1}) = 4\pi\gamma_{E_1} \left( \vec{S} \left[ \vec{E} \vec{E} \right] \right), \quad L(\gamma_{M_1}) = 4\pi\gamma_{M_1} \left( \vec{S} \left[ \vec{H} \vec{H} \right] \right).$$

Получим теперь спиновые структуры амплитуд с учетом вкладов спиновых поляризуемостей  $\gamma_{E_1}, \gamma_{M_1}, \gamma_{E_2}, \gamma_{M_2}$ , которые согласно работе [13] связаны с дипольным и квадрупольным моментом адронов соответственно. А также учтем и гирации  $\chi_E, \chi_M$ :

$$M = M(\gamma_{E_1}, \gamma_{M_1}) + M(\chi_E, \chi_M) + M(\gamma_{E_2}, \gamma_{M_2}).$$

Используя слагаемые лагранжиана (4) и (5)  $\hat{L}_{\nu\sigma}(\chi_M)$  и  $\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_1})$ ,  $\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{E_2})$ ,  $\hat{L}_{\nu\sigma}(\chi_E)$ ,  $\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{M_1})$ ,  $\hat{L}_{\nu\sigma}(\gamma_{M_2})$ , а также методику определения вкладов в амплитуду комптоновского рассеяния поляризуемостей, получим:

$$M(\gamma_{E_1}, \gamma_{M_1}) = i \frac{\pi}{m} (k_1 + k_2) \lambda \delta_{\mu\rho\lambda\kappa} \{ \gamma_{E_1} [F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} - F_{\nu\mu}^{(1)} F_{\rho\sigma}^{(2)}] + \gamma_{M_1} [\tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} - \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(2)}] \} \bar{\psi}^{(r_2)}(p_2) [\beta_\nu \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \beta_\nu] P_\sigma \psi^{(r_1)}(p_1), \quad (9)$$

где  $F_{\mu\sigma}^{(1)} = k_{1\mu} e_\sigma^{(\lambda_1)} - k_{1\sigma} e_\mu^{(\lambda_1)}$ ,  $\tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} = \frac{i}{2} \delta_{\nu\mu\kappa\delta} F_{\kappa\delta}^{(1)}$ . В системе покоя мишени и в пренебрежении отдачи частицы мишени амплитуда (9) принимает вид:

$$M(\gamma_{E_1}, \gamma_{M_1}) = -4i\pi(\omega_1 + \omega_2)\omega_1\omega_2 \vec{\lambda}^{(r_2)*} \cdot \left\{ \gamma_{E_1} (\vec{S} [\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)}]) + \gamma_{M_1} (\vec{S} [[\vec{n}_2 \vec{e}^{(\lambda_2)*}] [\vec{n}_1 \vec{e}^{(\lambda_1)}]]) \right\} \vec{\lambda}^{(r_1)}. \quad (10)$$

Из (9) и (10) следует, что спиновые поляризуемости  $\gamma_{E_1}$  и  $\gamma_{M_1}$  вносят вклад в амплитуду комптоновского рассеяния на частице спина единица в третьем порядке по энергии фотонов и, при этом, выполняются условия перекрестной симметрии и сохранение четности относительно инверсии пространства.

В рамках вышеприведенного подхода определим теперь релятивистски-инвариантный лагранжиан и амплитуду, в которых, как было показано в работе [13], учитываются вклады спиновых поляризуемостей, связанных с электрическим квадрупольным моментом адронов

$$L(\gamma_{E_2}) = \frac{\pi\gamma_{E_2}}{2m} [(F_{\nu\rho} \tilde{\partial}_\kappa \tilde{F}_{\sigma\rho} + \tilde{F}_{\nu\rho} \tilde{\partial}_\rho F_{\sigma\kappa})] \bar{\psi} [\beta_\nu \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \beta_\nu] \vec{\partial}_\sigma \psi. \quad (11)$$

Используя лагранжиан (11)  $S$  – матричный элемент можно представить следующим образом:

$$S_{fi} = \frac{i\delta(k_1 + p_1 - k_2 - p_2)}{(2\pi)^2 \sqrt{4\omega_1\omega_2 E_1 E_2}} M.$$

В этом соотношении амплитуда имеет вид:

$$M(\gamma_{E_2}) = \frac{\pi\gamma_{E_2}}{2m} P_\sigma \bar{\psi}^{(r_2)}(p_2) [\beta_\nu \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \beta_\nu] \psi^{(r_1)}(p_1) \cdot [\delta_{\sigma\rho\alpha\beta} (k_{2\kappa} F_{\nu\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} - k_{1\kappa} F_{\nu\rho}^{(1)} F_{\alpha\beta}^{(2)}) + \delta_{\nu\rho\alpha\beta} (k_{2\rho} F_{\sigma\kappa}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)} - k_{1\rho} F_{\sigma\kappa}^{(1)} F_{\alpha\beta}^{(2)})]. \quad (12)$$

В системе покоя мишени и в пренебрежении импульсом отдачи частицы, лагранжиан (11) принимает вид:

$$L(\gamma_{E_2}) = -4\pi\gamma_{E_2} E_{ik} H_i \hat{S}_k, \quad (13)$$

а амплитуда (12) выглядит следующим образом:

$$M(\gamma_{E_2}) = -4\pi\gamma_{E_2} \vec{\lambda}^{(r_2)*} \left[ \omega_1 \left( \hat{S} \vec{e}^{(\lambda_1)} \right) \left( \vec{e}^{(\lambda_2)*} [\vec{k}_2 \vec{k}_1] \right) + \omega_2 \left( \hat{S} \vec{e}^{(\lambda_2)*} \right) \left( \vec{e}^{(\lambda_1)} [\vec{k}_2 \vec{k}_1] \right) \right. \\ \left. - \omega_1 \left( \hat{S} \vec{k}_1 \right) \left( \vec{k}_2 [\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)}] \right) - \omega_2 \left( \hat{S} \vec{k}_2 \right) \left( \vec{k}_1 [\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)}] \right) \right] \vec{\lambda}^{(r_1)}. \quad (14)$$

В уравнениях (13) и (14)  $\vec{\lambda}^{(r_2)*}$  и  $\vec{\lambda}^{(r_1)}$  – векторы поляризации конечной и начальной частицы, а  $\vec{e}^{(\lambda_2)*}$  и  $\vec{e}^{(\lambda_1)}$  – аналогичные векторы поляризации фотонов, тензор  $E_{ik} = \frac{1}{2} (\partial_i E_k + \partial_k E_i)$ .

Эффективный лагранжиан двухфотонного взаимодействия с частицей спина 1 с учетом вклада спиновой поляризуемости, связанной с магнитным квадрупольным моментом адронов [13], в данном подходе определяется следующим образом:

$$L(\gamma_{M_2}) = -i \frac{\pi\gamma_{M_2}}{2m} \left[ (\tilde{F}_{\nu\rho} \tilde{\partial}_k F_{\sigma\rho} + F_{\nu\rho} \tilde{\partial}_\rho \tilde{F}_{\sigma\rho}) \right] \bar{\psi} [\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu] \vec{\partial}_\sigma \psi. \quad (15)$$

Используя лагранжиан (15), получим амплитуду комптоновского рассеяния:

$$M(\gamma_{M_2}) = -\frac{\pi\gamma_{M_2}}{m} P_\sigma \bar{\psi}^{(r_2)}(p_2) [\beta_\nu \hat{W}_k + \hat{W}_k \beta_\nu] \psi^{(r_1)}(p_1) \cdot \\ \cdot \left[ \delta_{\nu\rho\alpha\beta} (k_{2k} F_{\alpha\beta}^{(2)} F_{\sigma\rho}^{(1)} - k_{1k} F_{\sigma\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)}) + \delta_{\sigma k\alpha\beta} (k_{2\rho} F_{\alpha\beta}^{(2)} F_{\nu\rho}^{(1)} - k_{1\rho} F_{\nu\rho}^{(2)} F_{\alpha\beta}^{(1)}) \right]. \quad (16)$$

Как следует из (15) и (16), в системе покоя мишени и в пренебрежении импульсом отдачи мишени, эффективный лагранжиан принимает вид:

$$L(\gamma_{M_2}) = 4\pi\gamma_{M_2} H_{ki} \hat{S}_k E_i, \quad (17)$$

а амплитуда рассеяния определяется так:

$$M(\gamma_{M_2}) = -4\pi\gamma_{M_2} \vec{\lambda}^{(r_2)*} \left[ \omega_1 \left( \hat{S} \vec{k}_2 \right) \left( \vec{k}_2 [\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)}] \right) + \omega_2 \left( \hat{S} \vec{k}_1 \right) \left( \vec{k}_1 [\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)}] \right) \right. \\ \left. + \omega_1 \left( \vec{k}_2 \vec{e}^{(\lambda_1)} \right) \left( \hat{S} [\vec{k}_2 \vec{e}^{(\lambda_2)*}] \right) - \omega_2 \left( \vec{k}_1 \vec{e}^{(\lambda_2)*} \right) \left( \hat{S} [\vec{k}_1 \vec{e}^{(\lambda_1)}] \right) \right] \vec{\lambda}^{(r_1)}.$$

Тензор  $H_{ki}$  в (17) имеет вид:

$$H_{ki} = \frac{1}{2} (\partial_k H_i + \partial_i H_k).$$

Аналогичным методом построения ковариантных блоков эффективного лагранжиана получим выражение для лагранжиана с учетом электрической и магнитной гирации соответственно

$$L(\chi_E) = -\frac{\pi\chi_E}{4m^2} \delta_{\mu\rho k\lambda} (F_{\nu\mu} \vec{\partial}_\lambda F_{\rho\sigma}) \bar{\psi} \beta_\nu \vec{\partial}_\sigma \vec{\partial}_k \psi, \quad (18)$$

$$L(\chi_M) = -\frac{\pi\chi_M}{4m^2} \delta_{\mu\rho\lambda k} (F_{\nu\mu} \vec{\partial}_\lambda F_{\rho\sigma}) \bar{\psi} \beta_\nu \vec{\partial}_k \vec{\partial}_\sigma \psi. \quad (19)$$

В нерелятивистском приближении для выражений (18) и (19) имеем:

$$L(\chi_E) = 2\pi\chi_E (\vec{E}[\vec{\nabla}\vec{E}]), \quad L(\chi_M) = 2\pi\chi_M (\vec{H}[\vec{\nabla}\vec{H}]).$$

С учетом перекрестной симметрии и несохранения четности, получим слагаемое амплитуды, которое определяется вкладами электрической и магнитной гирациями [11]:

$$M(\chi_E, \chi_M) = \frac{2\pi i}{m^2} (k_1 + k_2)_\lambda \delta_{\mu\rho\lambda\kappa} \{ \chi_E [F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} - F_{\nu\mu}^{(1)} F_{\rho\sigma}^{(2)}] + \chi_M [\tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} - \tilde{F}_{\nu\mu}^{(1)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(2)}] \} P_\kappa P_\sigma \bar{\psi}^{(r_2)}(p_2) \beta_\nu \psi^{(r_1)}(p_1). \quad (20)$$

Если в уравнении (20) воспользуемся приближением  $\vec{P} = 0$ , то есть когда частица покоится, и пренебрежем импульсом ее отдачи, то из (20) в этом случае следует:

$$M(\chi_E, \chi_M) = 4\pi\omega_1\omega_2 (\vec{\lambda}^{(r_2)*} \vec{\lambda}^{(r_1)}) \{ \chi_E (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) [\vec{e}^{(\lambda_2)*} \vec{e}^{(\lambda_1)}] + \chi_M (\vec{k}_1 + \vec{k}_2) [\vec{\Sigma}_2 \vec{\Sigma}_1] \},$$

где  $\vec{\Sigma}_2 = [\vec{n}_2 \vec{e}^{(\lambda_2)*}]$ ,  $\vec{\Sigma}_1 = [\vec{n}_1 \vec{e}^{(\lambda_1)}]$ .

Таким образом, в рамках формализма Даффина-Кеммера-Петью установлены спиновые поляризуемости частиц спина 1, которые характерны и для адронов спина 1/2. Показано, что в предложенном ковариантном подходе с учетом перекрестной симметрии, инверсии пространства и калибровочной инвариантности, определенные спиновые поляризуемости и гирации частицы спина единица вносят вклад в разложение амплитуды комптоновского рассеяния, начиная с соответствующих порядков по энергии фотонов в согласии с низкоэнергетическими теоремами для этого процесса.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований.

## Литература

1. Raguza, S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: I / S. Raguza // Phys. Rev. D. – 1993. – Vol. 47. – № 9. – P. 3757–3767.
2. Raguza, S. Third-order spin polarizabilities of the nucleon: II / S. Raguza // Phys. Rev. D. – 1994. – Vol. 49. – № 7. – P. 3157–3159.
3. Holstein, B.R. Hadron polarizabilities / B.R. Holstein, S. Scherer. [Electronic resource]. – 2013. – Mode of access: <http://hep-ph/1401.0140v1>. – Date of access: 31.12.2013].
4. Bedaque, P.F. Parityviolation in  $\gamma p$  Compton Scattering / P.F. Bedaque, M.J. Savage // Phys. Rev. C. – 2000. – Vol. 62 – P. 018501-1-6.

5. Gorchtein, M. Forward Compton Scattering with neutral current: constraints from sum rules / M. Gorchtein, X. Zhang [Electronic resource]. – 2015. Mode of access: <http://nucl-th/1501.0535v1>. – Date of access: 22.01.2015.

6. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.

7. Plyichev, A. Static polarizability vertex and its applications / A. Plyichev, S. Lukashevich, N. Maksimenko // [Electronic resource]. – 2006. – Mode of access: arXiv: // hep-ph/0611327v1. – Date of access: 27.11.2006.

8. Zhang, Y. Proton Compton scattering in a unified proton -  $\Delta^+$  Model / Y. Zhang, K. Savvidy // Phys. Rev. C. – 2013. – Vol. 88. – P. 064614-1-12.

9. Андреев, В.В. Ковариантное представление спиновых поляризуемостей нуклона / В.В. Андреев, О.М. Дерюжкова, Н.В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – №3(20). – С. 7–12.

10. Maksimenko, N.V. Spin1 Particle Polarizability in the Duffin–Kemmer–Petiau Formalism / N.V. Maksimenko, E.V. Vakulina, S.M. Kuchin // Physics of Particles and Nuclei Letters. – 2015. – Vol. 12. – №. 7. – P. 807–812.

11. Максименко, Н.В. Дипольные спиновые поляризуемости и гирации частиц спина единица в формализме Даффина-Кеммера-Петью / Н.В. Максименко, Е.В. Вакулина, С.М. Кучин // Известия ВУЗов. Физика. – 2016. – Т. 59. – № 6. – С. 106–112.

12. Богуш, А.А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А.А. Богуш. – Минск : Наука и техника, 1987. – 359 с.

13. Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons / D. Babusci [et. al.] // Rev. C. – 1998. – Vol. 58. – P. 1013–1041.

**В.Ю. Гавриш<sup>1</sup>, В.В. Андреев<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный технический университет имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **РАСПАД $\phi \rightarrow \eta e^+ e^-$ В ТОЧЕЧНОЙ ФОРМЕ ПУАНКАРЕ-ИНВАРИАНТНОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ**

### **Введение**

Изучение процессов распада адронов является удобным средством для понимания механизма взаимодействия кварков внутри адронов. Особый интерес в исследованиях такого рода представляют распады  $V \rightarrow P\gamma^* \rightarrow P\ell^-\ell^+$  ме-

зонов легкого сектора ( $\varphi$ -мезонов), поскольку экспериментальные данные процессов такого рода были получены с высокой степенью точности [1].

Помимо наличия экспериментальных данных, указанные процессы удобны параметризацией матричного элемента: разделение на адронную и лептонную части дает возможность изучать механизм взаимодействия кварков посредством анализа различных форм-факторов, которые является функцией переданного импульса  $t = q^2$ .

Изучение таких процессов в рамках КХД, как квантовой теории, делается невозможным в силу групповых свойств теории; также, поведение константы КХД  $\alpha_s(q^2)$  при малых энергиях делает теорию возмущений неприменимой к расчетам. Наличие вышеперечисленных трудностей привело к появлению непертурбативных КХД-подходов, таких как КХД на решетке [2], правила сумм [3] и др. (см. обзор [4]).

В теоретико-групповых исследованиях связанных систем интерес представляют методы, использующие группу Пуанкаре, на базе которой построена пуанкаре-инвариантная квантовая механика (ПИКМ) (см. обзор [5]). В настоящее время из трех форм ПИКМ для описания релятивистских связанных систем используется динамика на световом фронте [6], однако, в данной форме динамики существует ряд принципиальных трудностей. Авторы полагают, что точечная форма динамики, вследствие равенства 4-скоростей частиц с взаимодействием и без него, делает описание релятивистских составных систем наиболее эффективным. Основные черты точечной формы ПИКМ с КХД-мотивированным потенциалом были детально обсуждены в работах [7–9], поэтому мы сразу перейдем к описанию электромагнитных распадов в рамках данной модели.

## 1. Модель электромагнитных распадов

Матричный элемент перехода векторного мезона с 4-импульсом  $Q$  в псевдоскалярный мезон с 4-импульсом  $Q'$  с испусканием виртуального  $\gamma^*$ -кванта может быть параметризован с помощью 4-скоростей  $V = Q/M_V$  и  $V' = Q'/M_P$  следующим выражением:

$$g_{VP\gamma^*} K^\alpha(\mu) = (2\pi)^3 \frac{\sqrt{4V_0 V'_0}}{\sqrt{M_V M_P}} {}_P \langle \vec{Q}' | J^\alpha | \vec{Q} \rangle_V, \quad (1)$$

где введено обозначение  $K^\alpha(\mu) = i\varepsilon^{\alpha\nu\rho\sigma} \varepsilon_\nu(\mu) V_\rho V'_\sigma$ . Такая параметризация является естественной для точечной формы пуанкаре-инвариантной квантовой механики.

В данной работе будем рассматривать мезоны  $V$  и  $P$  как релятивистскую составную систему кварка и антикварка с конституэнтными массами  $m_q$  и  $m_{\bar{q}}$  в рамках ПИКМ. В таком подходе данный распад обусловлен испусканием кварками  $\gamma^*$ -кванта, входящими в мезон  $V$ . Соответствующий данному переходу форм-фактор в обобщенной системе Брейта может быть представлен в виде [9]:

$$\begin{aligned}
g_{VP\gamma^*} = & \frac{1}{4\pi\sqrt{2MM'}} \sum_{v_1, v_1'} \int d\vec{k} \sqrt{\frac{3+4v_1(\mu-v_1)}{\omega_{m_q}(k)\omega_{m_{\bar{q}}}(k)}} v_2' \Psi(k) \left[ \sqrt{\frac{\omega_{m_{\bar{q}}}(k_2)}{\omega_{m_q}(k_2)}} \Phi(k_2) \times \right. \\
& \times e_q \bar{u}_{v_1'}(\vec{k}_2, m_q) B^{-1}(\vec{u}_{\bar{q}'}) \frac{(\Gamma_1^\mu \cdot K_\mu^*)}{(K \cdot K^*)} u_{v_1}(\vec{k}, m_q) D_{-v_1', \mu-v_1}^{1/2}(\vec{n}_{w_2}(\vec{k}, \vec{u}_{\bar{q}'})) + \\
& + \sqrt{\frac{\omega_{m_q}(k_1)}{\omega_{m_{\bar{q}}}(k_1)}} \Phi(k_1) \times \\
& \left. \times e_{\bar{q}} \bar{v}_{\mu-v_1}(\vec{k}, m_{\bar{q}}) \frac{(\Gamma_2^\mu \cdot K_\mu^*)}{(K \cdot K^*)} B(\vec{u}_{\bar{q}'}) v_{-v_1}(\vec{k}_1, m_{\bar{q}}) D_{v_1', v_1}^{1/2}(\vec{n}_{w_1}(\vec{k}, \vec{u}_{\bar{q}'})) \right], \tag{2}
\end{aligned}$$

где вершина взаимодействия фотона с кварком определяется выражением

$$\Gamma_{1,2}^\mu = F_1(t) \gamma^\mu + i F_2(t) \frac{\sigma^{\mu\nu} (k_{1,2} - k)_\nu}{2m_{q,\bar{q}}}. \tag{3}$$

Форм факторы кварков нормированы в естественных единицах магнитного  $\mu_q$  и аномального магнитного момента кварков  $\kappa_q$  [9].

Для исследования поведения  $g_{VP\gamma^*}(t)$  при  $t \neq 0$  введем форм факторы Сакса

$$G_E(t) = F_1(t) + F_2(t) \frac{t}{4m^2}, \quad G_M(t) = F_1(t) + F_2(t), \tag{4}$$

связь между которыми определяется соотношением (см., например, [9]):

$$G_E(t) = \frac{G_M(t)}{\mu_q} = G_D(t). \tag{5}$$

Выбирая функцию  $G_D(t)$  в виде [4,5]

$$G_D(t) = \frac{1}{\ln(1-t r_q^2/6) + 1}, \quad r_q^2 = \frac{a}{m_q^2}, \tag{6}$$

с учетом выражений

$$\vec{k}_{1,2} = \vec{k} + \vec{u}_{\bar{q}'} ((\varpi + 1) \omega_{m_{q,\bar{q}}}(k) + \sqrt{\varpi^2 - 1} \cdot |\vec{k}| \cos \theta), \tag{7}$$

$$\omega_{m_{q,\bar{q}}} = \varpi \omega_{m_{q,\bar{q}}}(k) - |\vec{k}| \cos \theta \sqrt{\varpi^2 - 1}, \tag{8}$$



$$\vec{n}_{W_{2,1}} = -\frac{[\vec{k}, \vec{V}]}{\omega_{m_{q,Q}}(k) + m_{q,Q} - (\vec{k}\vec{V})}, \quad \vec{V} = \frac{\vec{Q}}{Q_0}, \quad (9)$$

$$\varpi = \frac{M_0^2 + M_0'^2 - t}{2M_0 M_0'}, \quad M_0 = \omega_{m_q}(k) + \omega_{m_Q}(k) \quad (10)$$

получаем  $g_{VP\gamma^*}$  как функцию переданного импульса  $t$  и конститuentных масс кварков  $m_q$  и  $m_{\bar{Q}}$ .

## 2. Численное моделирование поведения $g_{VP\gamma^*}(t)$

Процедура получения параметров модели, основанной на точечной форме ПИКМ, подробно была изложена в работе [8]. Используя интегральные представления для лептонных констант распада псевдоскалярных и векторных мезонов с учетом экспериментальных данных [11], получаем следующие ограничения для масс кварков и параметров волновой функции  $\Phi(k, \beta) = 2 \exp(-k^2 / (2\beta^2)) / (\sqrt[4]{\pi} \beta^{3/2} \sqrt{3})$ :

$$m_u = 0,240 \pm 0,002 \text{ ГэВ}, \quad m_d = 0,244 \pm 0,002 \text{ ГэВ}, \quad m_s = 0,462 \pm 0,021 \text{ ГэВ},$$

$$\theta_V = 30,43^0 \pm 2,00^0, \quad \theta_p = -12,24^0 \pm 2,00^0, \quad a = 0,18, \quad (11)$$

$$\beta_{uu} = \beta_{dd} = \beta_{ud} = 0,3287 \pm 0,0014 \text{ ГэВ}, \quad \beta_{ss} = 0,3347 \pm 0,0062 \text{ ГэВ}.$$

Подставляя значения (11) в выражение (2) с учетом соотношений (6)–(10) получаем зависимость  $F_{VP\gamma^*}(t) = \frac{g_{VP\gamma^*}(t)}{g_{VP\gamma}(0)}$  для распада  $\phi \rightarrow \eta\gamma^* \rightarrow \eta e^+ e^-$ .

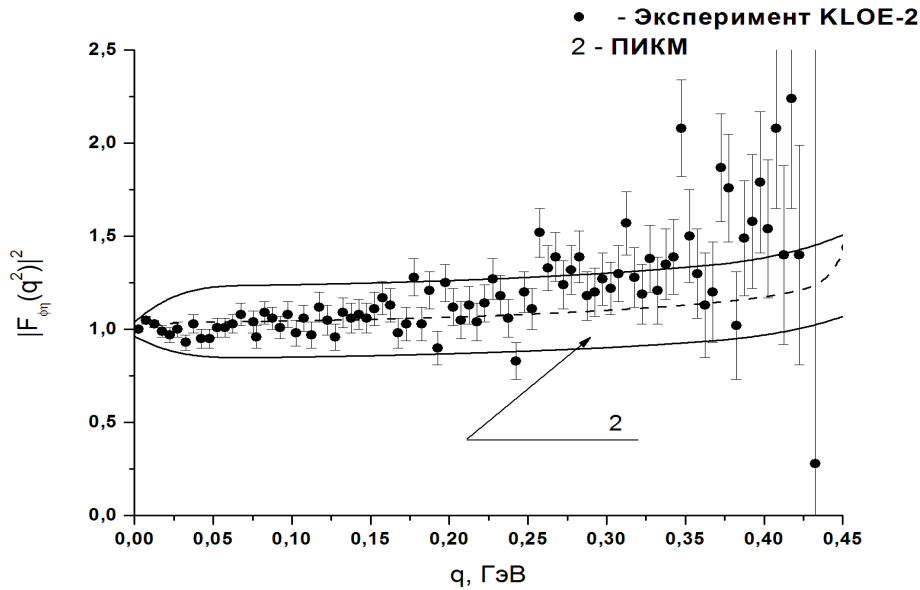


Рисунок 1 – Поведение форм фактора  $|F_{\phi\eta e^+ e^-}(q^2)|^2$  для распада  $\phi \rightarrow \eta e^+ e^-$

На рисунке 1 представлен сравнительный анализ экспериментальных данных работы [1] с теоретическими расчетами в рамках пуанкаре-ковариантной кварковой модели, основанной на точечной форме ПИКМ (область 2 получена с учетом экспериментальных и теоретических неопределенностей модели).

Отметим, что вплоть до  $q = 0,35$  ГэВ сравнение модельных и экспериментальных результатов является удовлетворительным. Для области  $q > 0,35$  ГэВ наблюдается некоторое отклонение от экспериментальных данных, однако большие экспериментальные погрешности в этой области не позволяют сделать однозначных выводов.

### Заключение

В ходе работы было получено интегральное представление константы распада  $V \rightarrow P\gamma^*$  в точечной форме ПИКМ. Сравнительный анализ показывает, что поведение форм фактора  $F_{VP\gamma^*}(t) = \frac{g_{VP\gamma^*}(t)}{g_{VP\gamma^*}(0)}$  для распада  $\phi \rightarrow \eta e^+ e^-$  достаточно близко к экспериментальным данным, полученным в работе [1], что дает возможность использовать данную схему для анализа аналогичных распадов других мезонов.

Работа выполнена при поддержке Белорусского Республиканского фонда Фундаментальных Исследований.

### Литература

1. Study of the Dalitz decay  $\phi \rightarrow \eta e^+ e^-$  with the KLOE detector / D. Babuscih [et al.] // Phys. Lett. B. – 2015. – Vol. 742. – P. 1–6.
2. Jansen, K. Meson masses and decay constants from unquenched lattice QCD / K. Jansen, C. McNeile // Phys.Rev. D. – 2009. – Vol. 80. – P. 1–36.
3. Dominguez, C.A. Introduction to QCD sum rules / C.A. Dominguez // Mod. Phys. Lett. – 2013. – Vol. A28. – P. 1–8.
4. Андреев, В.В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевым и потенциалами / В.В. Андреев // УО «ГГУ им. Ф. Скорины». – 2008. – 293 с.
5. Крутов, А.Ф. Мгновенная форма пуанкаре-инвариантной квантовой механики и описание структуры составных систем/ А.Ф. Крутов, В.Е. Троицкий // ЭЧАЯ. – 2009. – Т. 40. – С. 268–318.
6. Jaus, W. Relativistic constituent quark model of electroweak properties of light mesons / W. Jaus // Phys. Rev. D. – 1991. – Vol. 44. – P. 2851–2859.
7. Andreev, V.V. Nonperturbative region of effective strong coupling

[Electronic resource] / V.V. Andreev. – 2013. – Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph 1305.4266>. – Date of access: 14.08.2016.

8. Andreev, V.V. QCD coupling constant below 1 GeV in the Poincare-covariant model / V.V. Andreev // *Physics of Particles and Nuclei Letters*. – 2011. – Vol. 8. – P. 347–355.

9. Andreev, V.V. Radiative decays of light vector mesons in Poincare invariant quantum mechanics / V.V. Andreev, V.Yu. Haurysh // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2016. – Vol. 678. – P. 1–5.

10. Perdrisat, C.F. Nucleon electromagnetic form-factors / C.F. Perdrisat, V. Punjabi, M. Vanderhaeghen // *Prog. Part. Nucl. Phys.* – 2007. – Vol. 58. – P. 694–764.

11. Review of particle physics / K.A. Olive [et al.] // *Chin. Phys. C*. – 2014. – Vol. 38. – P. 1–1677.

**Е.А. Дегтярёва, С.И. Тимошин**

**УО «Гомельский государственный технический университет  
имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь**

**ПОЛУИНКЛЮЗИВНОЕ ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ РАССЕЙАНИЕ  
ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЛЕПТОНОВ  
НА ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ДЕЙТРОНАХ**

Исследование спиновой структуры нуклона [1, 2] является одной из актуальных задач физики частиц. Полуинклюзивные процессы – это источник новых данных о спиновой структуре нуклона [3]. С помощью данных, которые могут быть получены в экспериментах такого типа, можно получить информацию о вкладах кварков и антикварков в нуклонный спин.

Рассмотрим процесс полуинклюзивного глубоконеупругого рассеяния (ГНР) поляризованных лептонов на поляризованных дейтронах с заряженным слабым током

$$\ell^\pm + d \rightarrow \nu(\bar{\nu}) + h + X. \quad (1)$$

Сечение  $\frac{d^3\sigma_{\ell d}^a}{dx dy dz}$  без учета поляризации начальных частиц и  $\frac{d^3\sigma_{\ell d}^{pol}}{dx dy dz}$  – по-

ляризационная часть сечения определяются из соответствующих сечений для протона (p) и нейтрона (n) следующим образом:

$$\frac{d^3\sigma_d^a}{dxdydz} = \frac{1}{2} \left( \frac{d^3\sigma_p^a}{dxdydz} + \frac{d^3\sigma_n^a}{dxdydz} \right), \quad (2)$$

$$\frac{d^3\sigma_d^{pol}}{dxdydz} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{3}{2} \omega \right) \cdot \left( \frac{d^3\sigma_p^{pol}}{dxdydz} + \frac{d^3\sigma_n^{pol}}{dxdydz} \right). \quad (3)$$

Сечения процессов (1) для рождения  $\pi$ -мезона [4], входящие в (2) и (3), получены в виде

$$\frac{d^3\sigma_{\ell^-p}^a}{dxdydz} = 2\rho x \left\{ u(x, Q^2) D_d^{\pi^+ - \pi^-}(z, Q^2) + y_1^2 \bar{d}(x, Q^2) D_u^{\pi^+ - \pi^-}(z, Q^2) \right\}, \quad (4)$$

$$\frac{d^3\sigma_{\ell^-p}^{pol}}{dxdydz} = 2\rho x (\Delta u(x, Q^2) D_d^{\pi^+ - \pi^-}(z, Q^2) - y_1^2 \Delta \bar{d}(x, Q^2) D_u^{\pi^+ - \pi^-}(z, Q^2)),$$

$$\frac{d^3\sigma_{\ell^+p}^a}{dxdydz} = 2\rho x \left\{ y_1^2 d(x, Q^2) D_u^{\pi^+ - \pi^-}(z, Q^2) + \bar{u}(x, Q^2) D_d^{\pi^+ - \pi^-}(z, Q^2) \right\}, \quad (5)$$

$$\frac{d^3\sigma_{\ell^+p}^{pol}}{dxdydz} = 2\rho x \left\{ y_1^2 \Delta d(x, Q^2) D_u^{\pi^+ - \pi^-}(z, Q^2) - \Delta \bar{u}(x, Q^2) D_d^{\pi^+ - \pi^-}(z, Q^2) \right\}.$$

Сечения для нейтрона можно получить из (4), (5) заменой « $u \leftrightarrow d$ ».

Измеряемые поляризационные асимметрии процессов (1) определим как комбинации сечений:

$$A_{\ell^-d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\left( d\sigma_{\ell^-d}^{\downarrow\uparrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} - \left( d\sigma_{\ell^-d}^{\downarrow\downarrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-}}{\left( d\sigma_{\ell^-d}^{\downarrow\uparrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} + \left( d\sigma_{\ell^-d}^{\downarrow\downarrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-}}, \quad (6)$$

$$A_{\ell^+d}^{h^+ - h^-} = \frac{\left( d\sigma_{\ell^+d}^{\uparrow\uparrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} - \left( d\sigma_{\ell^+d}^{\uparrow\downarrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-}}{\left( d\sigma_{\ell^+d}^{\uparrow\uparrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} + \left( d\sigma_{\ell^+d}^{\uparrow\downarrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-}}, \quad (7)$$

где  $d\sigma = \frac{d^3\sigma}{dxdydz}$ .

Первая стрелка означает направление спина начального лептона ( $\downarrow$ ) или антилептона ( $\uparrow$ ), а вторая – направление спина протона:  $\uparrow (P_N = +1)$ ,  $\downarrow (P_N = -1)$ .

Подставляя в (6), (7) сечения (2)–(5) и учитывая соотношения для функций фрагментации  $\pi$ -мезона [5], для асимметрии  $A_{\ell^\pm d}^{\pi^+ - \pi^-}$  получаем:

$$A_{\ell^- d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\Delta u(x, Q^2) + \Delta d(x, Q^2) - y_1^2 (\Delta \bar{d}(x, Q^2) + \Delta \bar{u}(x, Q^2))}{u(x, Q^2) + d(x, Q^2) + y_1^2 (\bar{d}(x, Q^2) + \bar{u}(x, Q^2))} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right), \quad (8)$$

$$A_{\ell^+ d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{y_1^2 (\Delta d(x, Q^2) + \Delta u(x, Q^2)) - \Delta \bar{u}(x, Q^2) - \Delta \bar{d}(x, Q^2)}{\bar{u}(x, Q^2) + \bar{d}(x, Q^2) + y_1^2 (d(x, Q^2) + u(x, Q^2))} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right). \quad (9)$$

Рассмотрим поляризационные асимметрии, построенные одновременно из сечений  $\ell^- d$  – и  $\ell^+ d$  – ГНР

$$A_{\pm, d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\left[ \left( d\sigma_{\ell^- d}^{\downarrow \uparrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} \pm \left( d\sigma_{\ell^+ d}^{\uparrow \uparrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} \right] - \left[ \left( d\sigma_{\ell^- d}^{\downarrow \downarrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} \pm \left( d\sigma_{\ell^+ d}^{\uparrow \downarrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} \right]}{\left[ \left( d\sigma_{\ell^- d}^{\downarrow \uparrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} \pm \left( d\sigma_{\ell^+ d}^{\uparrow \uparrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} \right] + \left[ \left( d\sigma_{\ell^- d}^{\downarrow \downarrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} \pm \left( d\sigma_{\ell^+ d}^{\uparrow \downarrow} \right)^{\pi^+ - \pi^-} \right]}. \quad (10)$$

С помощью (2), (3), (4), (5) получаем для них следующие выражения:

$$A_{+, d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\Delta u(x, Q^2) + \Delta \bar{u}(x, Q^2) + \Delta d(x, Q^2) + \Delta \bar{d}(x, Q^2)}{u_V(x, Q^2) + d_V(x, Q^2)} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right), \quad (11)$$

$$A_{-, d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\Delta u_V(x, Q^2) + \Delta d_V(x, Q^2)}{u(x, Q^2) + \bar{u}(x, Q^2) + (d(x, Q^2) + \bar{d}(x, Q^2))} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right). \quad (12)$$

Для дальнейшего исследования спиновой структуры лептона будем использовать дополнительную измеряемую величину – аксиальный заряд  $a_3$ , который в кварк-партонной модели равен

$$a_3 = (\Delta u + \Delta \bar{u}) - (\Delta d + \Delta \bar{d}). \quad (13)$$

Вклады кварковых ароматов  $(\Delta u + \Delta \bar{u})$ ,  $(\Delta d + \Delta \bar{d})$  получим в результате совместного решения (11) и (13)

$$\Delta u + \Delta \bar{u} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( a_3 + \frac{u_V + d_V}{1 - 1,5\omega} \cdot A_{+, d}^{\pi^+ - \pi^-} \right) dx, \quad \Delta d + \Delta \bar{d} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left( \frac{u_V + d_V}{1 - 1,5\omega} \cdot A_{+, d}^{\pi^+ - \pi^-} - a_3 \right) dx.$$

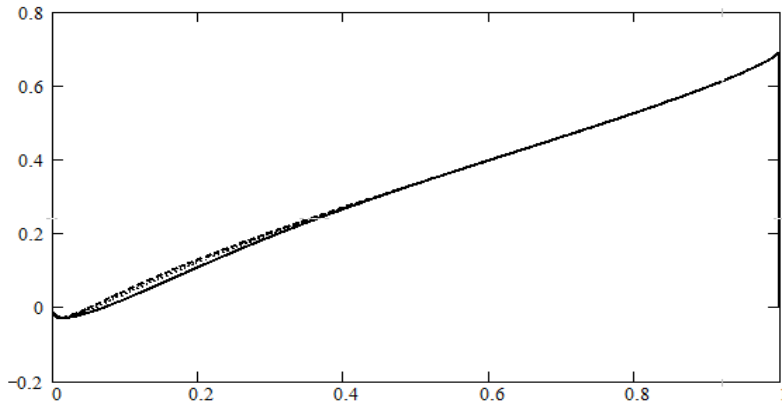


Рисунок 1 – Асимметрия  $A_{\ell^- d}^{\pi^+ - \pi^-}$  (нижняя линия при  $y = 0,1$ , средняя – при  $y = 0,5$ , верхняя – при  $y = 0,9$ )

Асимметрия  $A_{\ell^- d}^{\pi^+ - \pi^-}$  (рисунок 1) и  $A_{\ell^+ d}^{\pi^+ - \pi^-}$  (рисунок 2) являются значимыми в измеряемой кинематической области  $(x, y)$  и могут достигать 70% в области больших  $x$ .

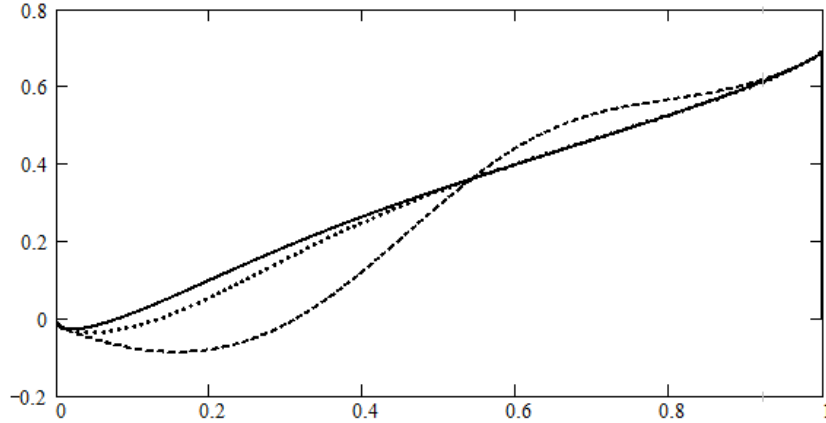


Рисунок 2 – Асимметрия  $A_{\ell^+ d}^{\pi^+ - \pi^-}$  (верхняя линия при  $y = 0,1$ , средняя – при  $y = 0,5$ , нижняя – при  $y = 0,9$ )

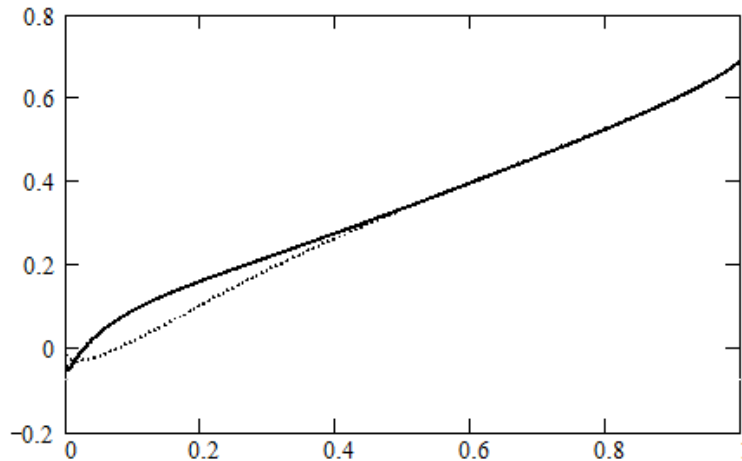


Рисунок 3 – Асимметрии  $A_{+,d}^{\pi^+ - \pi^-}$  (сплошная линия) и  $A_{-,d}^{\pi^+ - \pi^-}$  (пунктирная линия)

Поведение асимметрии  $A_{+,d}^{\pi^+ - \pi^-}$  и  $A_{-,d}^{\pi^+ - \pi^-}$  (рисунок 3) практически одинаковое, за исключением области малых  $x$ , где их разница составляет около 10%.

Представляет интерес рассмотрение области малых ( $y \rightarrow 0$ ) и больших ( $y \rightarrow 1$ ) значений  $y$ . При  $y \rightarrow 0$  асимметрии (8) и (9) принимают вид

$$A_{\ell^- d}^{\pi^+ - \pi^-} = A_{\ell^+ d}^{\pi^+ - \pi^-} \frac{\Delta u_V(x, Q^2) + \Delta d_V(x, Q^2)}{u(x, Q^2) + \bar{u}(x, Q^2) + d(x, Q^2) + \bar{d}(x, Q^2)} \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right).$$

Отсюда можно получить вклад валентных кварков и антикварков в спин нуклона

$$\Delta u_V + \Delta d_V = \frac{1}{1-1,5\omega} \int_0^1 \left( (u + \bar{u} + d + \bar{d}) \cdot A_{\ell^\pm d}^{\pi^+ - \pi^-} \right) dx.$$

В случае, когда  $y \rightarrow 1$ , выражения для асимметрий следующие:

$$A_{\ell^- d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\Delta u(x, Q^2) + \Delta d(x, Q^2)}{u(x, Q^2) + d(x, Q^2)} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2} \omega \right), \quad (17)$$

$$A_{\ell^+ d}^{\pi^+ - \pi^-} = \frac{\Delta \bar{u}(x, Q^2) + \Delta \bar{d}(x, Q^2)}{\bar{u}(x, Q^2) + \bar{d}(x, Q^2)} \cdot \left( 1 - \frac{3}{2} \omega \right). \quad (18)$$

С помощью (18) можно получить суммарный вклад легких кварков

$$\Delta \bar{u} + \Delta \bar{d} = \frac{1}{1-1,5\omega} \int_0^1 \left( (u + d) \cdot A_{\ell^+ d}^{\pi^+ - \pi^-} \right) dx.$$

Таким образом, рассмотрен процесс полуинклюзивного ГНР поляризованных лептонов на продольно поляризованных дейтронах.

Получены поляризационные асимметрии  $A^{\pi^+ - \pi^-}$  для рождения  $\pi$ -мезонов, которые не зависят от функций фрагментации. Получены выражения для вкладов  $(\Delta u + \Delta \bar{u})$  и  $(\Delta d + \Delta \bar{d})$  в спин нуклона, а также  $(\Delta u_V + \Delta d_V)$  и  $(\Delta \bar{u} + \Delta \bar{d})$  при  $y \rightarrow 0$  и  $y \rightarrow 1$  соответственно.

Численные оценки асимметрий показывают, что они являются значительными в большей части кинематической области  $(x, y)$ , и, следовательно, могут быть измерены в поляризационных полуинклюзивных экспериментах.

## Литература

1. Burcardt, M. Spin-polarized high-energy scattering of charged leptons on nucleons / M. Burcardt, C.A. Miller, W-D. Nowak // Rep. Prog. Phys. – 2010. – Vol. 73. – P.016201.
2. Bass, S.D. The proton spin puzzle: where are we today? / S.D. Bass // Mod. Phys. Lett. – 2009. – Vol. A24. – P. 1087–1101.
3. Сисакян, А.Н. КХД-анализ экспериментальных данных по процессам глубоконеупругого поляризованного рассеяния / А.Н. Сисакян, О.Ю. Шевченко, О.Н. Иванов // ЭЧАЯ. – 2008. – Т. 39. – № 5. – С. 1309–1466.
4. Дегтярёва, Е.А. Спиновая структура нуклона в полуинклюзивных процессах  $\ell p$  – ГНР с заряженным слабым током / Е.А. Дегтярёва, С.И. Тимошин // Известия НАН Беларуси. Серия физ.-мат. наук. – 2010. – № 2. – С. 66–70.
5. Christova, E. A strategy for the analysis of semi-inclusive deep inelastic scattering / E. Christova, E. Leader. – 2001. – P. 26. – [ArXiv: hep-ph / 0007303].

Е.А. Дей

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## РАСЧЕТ СВОЙСТВ МЕЗОНОВ НА ОСНОВЕ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СОЛПИТЕРА

### Введение

Теоретически и численно свойства мезонов как связанных состояний кварка и антикварка в настоящее время исследуются в рамках различных моделей [1–3]. Одним из наиболее эффективных является подход, основанный на применении уравнений Солпитера [3,4], получаемых выполнением операции мгновенного приближения в уравнении Бете-Солпитера. В этом случае оператор взаимодействия зависит только от трехмерных импульсов частиц  $V \equiv V(\vec{p} - \vec{k})$ .

В данной работе реализовано численное решение системы интегральных уравнений Солпитера для состояний кваркония с квантовыми числами  $0^{-+}$ ,  $1^{+-}$  методом конечных элементов, причем интегралы от функций формы вычисляются аналитически.

### 1. Система интегральных уравнений Солпитера

Для описания кварк-антикваркового взаимодействия обычно используют суперпозицию потенциала одноглюонного обмена, запирающего потенциала, соответствующего линейному поведению в координатном представлении, и постоянной составляющей [4]

$$V(\vec{p} - \vec{k}) = \frac{4\pi\bar{\alpha}_s}{(\vec{p} - \vec{k})^2} \gamma_\mu^{(1)} \gamma_\mu^{(2)} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} \left( \frac{4\pi\lambda}{(\vec{p} - \vec{k})^2 + \varepsilon^2} \right) + U. \quad (1)$$

Здесь  $\bar{\alpha}_s$  – константа одноглюонного обмена,  $\lambda$  – интенсивность запирающего взаимодействия,  $U$  – постоянная составляющая.

Учет квантовых чисел мезона выполняется разложением оператора взаимодействия по полной системе инвариантов алгебры Дирака и выделением в полной волновой функции скалярных амплитуд и множителей, определяющих ее трансформационные свойства. Для рассматриваемых состояний с квантовыми числами  $0^{-+}$ ,  $1^{+-}$  соответственно в трехмерном импульсном пространстве вводятся по две скалярные функции [4]:

$$\psi(\vec{q}) = \psi_P(q) \gamma^5 + \psi_A(q) \left( \gamma^0 \gamma^5 + \gamma^5 \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{q}}{m} \right) Y_{00}(\vec{n}_q); \quad (2a)$$



$$\psi(\vec{q}) = \psi_P(q)\gamma^5 + \psi_A(q)\left(\gamma^0\gamma^5 + \gamma^5\frac{\vec{\alpha}\cdot\vec{q}}{m}\right)Y_{1m}(\vec{n}_q). \quad (2b)$$

В каждом случае для скалярных функций в результате парциального разложения получается система интегральных уравнений с симметричными ядрами, которую можно записать в общем виде

$$\begin{cases} A_1(p)\psi_1(p) + \int_0^\infty W_1(p,k)\psi_1(k)dk = M\psi_2(p); \\ A_2(p)\psi_2(p) + \int_0^\infty W_2(p,k)\psi_2(k)dk = M\psi_1(p). \end{cases} \quad (3)$$

Функциональные коэффициенты системы (3) и условие нормировки волновых функций для состояния  $0^{-+}$  имеют вид

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \frac{2\omega^2(p)}{m} + \frac{mU}{\omega(p)}\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right); & A_2(p) &= m\left(2 + \frac{U}{\omega(p)}\right); \\ W_1(p,k) &= \frac{mpk}{(2\pi)^3\omega(p)}\left[F_0^S(p,k) - \frac{pk}{m^2}F_1^S(p,k) + 2F_0^V(p,k)\right]; \\ W_2(p,k) &= \frac{mpk}{(2\pi)^3\omega(p)}\left[F_0^S(p,k) - 4F_0^V(p,k)\right]; \\ \frac{8}{m}\int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2\omega(p)\psi_1(p)\psi_2(p) &= 2M. \end{aligned} \quad (4a)$$

Коэффициенты уравнений системы (3) для состояния  $1^{+-}$  заданы соотношениями

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \frac{2\omega^2(p)}{m} + \frac{mU}{\omega(p)}\left(1 - \frac{p^2}{m^2}\right); & A_2(p) &= m\left(2 + \frac{U}{\omega(p)}\right); \\ W_1(p,k) &= \frac{mk^2}{(2\pi)^3\omega(p)}\left[F_1^S(p,k) - \frac{pk}{3m^2}F_0^S(p,k) - \frac{2pk}{3m^2}F_2^S(p,k) + 2F_1^V(p,k)\right]; \\ W_2(p,k) &= \frac{mk^2}{(2\pi)^3\omega(p)}\left[F_1^S(p,k) - 4F_1^V(p,k)\right]; & \frac{8}{m}\int_0^\infty \frac{dp}{(2\pi)^3} p^2\omega(p)\psi_1(p)\psi_2(p) &= 2M. \end{aligned} \quad (4b)$$

Интегральные ядра приведенных систем уравнений содержат компоненты

$$F_L^S(p,k) = \frac{8\pi^2\lambda}{p^2k^2}Q_L'\left(\frac{p^2+k^2}{2pk}\right); \quad F_L^V(p,k) = \frac{8\pi^2\bar{\alpha}_s}{pk}Q_L\left(\frac{p^2+k^2}{2pk}\right), \quad (5)$$

где  $Q_L(z)$  – функции Лежандра второго рода, штрих означает производную по аргументу  $z = (p^2 + k^2)/(2pk)$ .

Наличие сингулярных функций (5) в интегральных уравнениях представляет собой проблему для применения метода квадратур. В ряде работ развита технология устранения особенностей с помощью различных вычитательных процедур [5, 6], однако точность результатов при этом не может быть существенно повышена. Отметим, что более точные результаты при решении интегральных уравнений в импульсном представлении дает предложенный в работе [7] спектральный метод, использующий свойства полиномов Чебышева. Вычислительная процедура метода была существенно усовершенствована в работе [8].

## 2. Описание численного метода решения уравнений

В методе конечных элементов искомые функции  $\psi_1(k)$ ,  $\psi_2(k)$  выражаются через функции формы  $N_i(p)$ , представляющие собой полиномы выбранного порядка, для которых и реализуется интегрирование в (3):

$$\psi_1(p) = \sum_{i=1}^n \psi_i N_i(p); \quad \psi_2(p) = \sum_{i=1}^n \psi_{N+i} N_i(p), \quad (6)$$

Учтем, что в (5) функции  $F_L^V(p, k)$  выражаются через функции Лежандра второго рода  $Q_0(p, k) = \ln((p+k)/(p-k))$  и имеют интегрируемую логарифмическую особенность, а функции  $F_L^S(p, k)$  выражаются через первую производную функции Лежандра второго рода  $Q_0'(p, k) = 1/(p-k)^2$ . Интегралы, содержащие такое ядро, относятся к классу гиперсингулярных и вычисляются в смысле конечной части (finite-part) по Адамару [9]

$$(H) \int_a^b \frac{F(x)}{(x-s)^2} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_a^{s-\varepsilon} \frac{F(x)}{(x-s)^2} dx + \int_{s+\varepsilon}^b \frac{F(x)}{(x-s)^2} dx - \frac{2F(s)}{\varepsilon} \right\}, \quad (7)$$

например:

$$\int_{k_{j-1}}^{k_j} k^2 F_1^S(p_i, k) dk = \frac{8\pi^2 \lambda}{p_i^2} \left\{ p_i^2 \left( \frac{1}{k-p_i} - \frac{1}{k+p_i} \right) + k \ln \left| \frac{k+p_i}{k-p_i} \right| \right\}_{k_{j-1}}^{k_j};$$

$$\int_{k_{j-1}}^{k_j} pk F_0^V(p_i, k) dk = 8\pi^2 \bar{\alpha}_s \left\{ k \ln \left| \frac{k+p_i}{k-p_i} \right| + p_i \ln(k^2 - p_i^2) \right\}_{k_{j-1}}^{k_j}. \quad (8)$$

Формулы (7), (8) и аналогичные им использовались в ходе численного решения уравнений (3). При этом область изменения аргументов ограничивалась достаточно большим значением  $0 \leq p \leq p_{max}$  и разбивалась на  $n$  равных конечных элементов. В соответствии с методом коллокаций, в каждом узле невязка точного и численного решения системы уравнений (3) должна обращаться в ноль. При использовании кусочно-постоянных конечных элементов в качестве узлов коллокации использовались центральные точки. С учетом выражений (6)

при этом получаем стандартную задачу на собственные значения  $M$  квадратной симметричной матрицы, действующей на объединенный вектор  $\psi = (\psi_1, \psi_2) = (\psi_{1,1}, \dots, \psi_{1,N}, \psi_{2,1}, \dots, \psi_{2,N})$ . Для расчета элементов матрицы использовались программные блоки, составленные в системе Mathcad. Собственные значения и собственные векторы вычислялись с помощью встроенных функций.

### 3. Результаты вычислений

Таблица 1 – Спектр масс состояний кваркония

$J^{PC}(^{2S+1}L_J)$	Параметры расчета	Полученные результаты	Результаты [3]	Эксперимент
$c\bar{c} \ 0^{-+}(^1S_0) \ 1$	$m_c = 1,616$ $\bar{\alpha}_s = 0,3$ $\lambda = 0,2$ $U = -0,534$	2 980,8	2 980,3	2 983,6
$c\bar{c} \ 0^{-+}(^1S_0) \ 2$		3 582,4	3 576,4	3 639,4
$c\bar{c} \ 0^{-+}(^1S_0) \ 3$		3 976,2	3 948,8	
$c\bar{c} \ 0^{-+}(^1S_0) \ 4$		4 284,8		
$c\bar{c} \ 1^{+-}(^1P_1) \ 1$	$m_c = 1,616$ $\bar{\alpha}_s = 0,3$ $\lambda = 0,2$ $U = 0,2$	3 525,2	3 526,0	3 525,38
$c\bar{c} \ 1^{+-}(^1P_1) \ 2$		3 938,1	3 943,0	
$c\bar{c} \ 1^{+-}(^1P_1) \ 3$		4 265,0	4 242,4	
$c\bar{c} \ 1^{+-}(^1P_1) \ 4$		4 538,8		
$b\bar{b} \ 0^{-+}(^1S_0) \ 1$	$m_b = 4,96$ $\bar{\alpha}_s = 0,23$ $\lambda = 0,28$ $U = -0,794$	9 390,2	9 390,2	9 388,9
$b\bar{b} \ 0^{-+}(^1S_0) \ 2$		9 940,1	9 950,0	
$b\bar{b} \ 0^{-+}(^1S_0) \ 3$		10 325,7	10 311,4	
$b\bar{b} \ 0^{-+}(^1S_0) \ 4$		10 645,1		
$b\bar{b} \ 1^{+-}(^1P_1) \ 1$	$m_b = 4,96$ $\bar{\alpha}_s = 0,23$ $\lambda = 0,28$ $U = -0,576$	9 900,0	9 900,2	
$b\bar{b} \ 1^{+-}(^1P_1) \ 2$		10 233,7	10 280,4	
$b\bar{b} \ 1^{+-}(^1P_1) \ 3$		10 509,7	10 562,0	
$b\bar{b} \ 1^{+-}(^1P_1) \ 4$		10 751,4		

В настоящее время известно одно состояние системы  $c\bar{c}$  с квантовым числом  $1^{+-}$  – мезон  $h_c$ . Параметры расчета подбирались по экспериментальной массе состояния  $1S$   $M_{h_c} = 3525,38$  МэВ [10]. Вычисленные значения массы последующих состояний  $c\bar{c}$  и результаты расчетов массы  $b\bar{b}$ -системы при  $r_{max} = 8$ ,  $n = 200$  приведены в таблице 1. Для сравнения в таблице приведены и результаты вычислений из работы [3], в которой использована иная пара-

метризация взаимодействия. В целом можно отметить хорошее согласие полученных результатов с имеющимися данными.

### **Заключение**

Таким образом, метод коллокации по системе конечных элементов с аналитическим вычислением интегралов от функций формы является удобным инструментом для численного решения системы интегральных уравнений Солпитера.

Дальнейшее повышение точности численных результатов может быть достигнуто как использованием конечных элементов высших порядков, так и применением эрмитовых конечных элементов, обеспечивающих непрерывность не только волновой функции, но и ее первых производных.

### **Литература**

1. Yang, J.H. Analysis of X Particle Spectra in Quarkonium Model / J.H. Yang, S.K. Lee, E.-J. Kim, J.B Choi // arXiv:1506.04481v1 [hep-ph] 15 Jun 2015.
2. Ebert, D. Spectroscopy and Regge trajectories of heavy quarkonia and  $B_c$  mesons / D. Ebert, R.N. Faustov, V.O. Galkin // Eur. Phys. J. C. – 2011. – Vol. 71. – P. 1825.
3. Chang, C.-H. Spectrum for Heavy Quarkonia and Mixture of the Relevant Wave Functions within the Framework of Bethe-Salpeter Equation / C.-H. Chang, G.-L. Wang // Science China. Physics, Mechanics, Astronomy. – 2010. – Vol. 53. – № 11. – P. 2005–2018.
4. Linde, J. Charmonium in the instantaneous approximation / J. Linde, H. Snellman // Nuclear Physics. – 1977. – Vol. A 619. – P. 346.
5. Tang, A. Nystrom plus Correction Method for Solving Bound State Equations in Momentum Space / A. Tang, J.W. Norbury // Pys. Rev. E. – 2001. – Vol. 63. – P. 066703.
6. Chen, J.-K. Extended Simpson's rule for the screened Cornell potential in momentum space / J.-K. Chen // Pys. Rev. D. – 2012. – Vol. 86. – P. 036013.
7. Deloff, A. Quarkonium bound-state problem in momentum space revisited / A. Deloff // Annals of Physics. – 2007. – Vol. 322. – P. 2315–2326.
8. Андреев, В.В. Квантовые и релятивистские эффекты для двухчастичных систем с корнельским потенциалом / В.В. Андреев, К.С. Бабич // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 3(8). – С. 7–14.
9. Wu, J. The superconvergence of the composite midpoint rule for the finite-part integral / J. Wu, Z. Dai, X. Zhang // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2010. – Vol. 233. – P. 1954–1968.
10. Particle Data Group / K.A. Olive [et al.] // Chinese Phys. C. – 2014. – Vol. 38. – 090001.

Е.А. Дей

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ДВУМЕРНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

### Введение

Развитие и исследование эффективности численных методов играет важную роль при расчете параметров двумерных квантовых систем [1–5].

В работе [6] была исследована вычислительная эффективность метода конечных разностей, основанного на высших порядках аппроксимации второй производной, при решении одномерного уравнения Шредингера и отмечена его высокая точность и удобство программной реализации.

В данной работе исследуются вычислительные свойства метода конечных разностей с высшими порядками аппроксимации частных производных применительно к задаче численного решения двумерного стационарного уравнения Шредингера. Получены расчетные формулы и выполнена их программная реализация в системах Mathcad и Matlab. Для тестовых задач квантовой механики вычислены собственные значения энергии, выполнена оценка их погрешности, построены графики двумерных волновых функций.

### 1. Конечно-разностная аппроксимация двумерного уравнения Шредингера

Рассмотрим задачу нахождение собственных значений стационарного двумерного уравнения Шредингера [1–5]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} \right) + V(x, y)\psi(x, y) = E\psi(x, y). \quad (1)$$

Для численного решения уравнения будем рассматривать ограниченную область изменения аргументов  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}$ ;  $y_{\min} \leq y \leq y_{\max}$ , в которой по каждой переменной введем равномерную сетку с шагом  $h$ , так что  $x_i = x_{\min} + i \cdot h$ ,  $y_j = y_{\min} + j \cdot h$ ,  $N_x = (x_{\max} - x_{\min}) / h$ ,  $N_y = (y_{\max} - y_{\min}) / h$ ,  $\psi_{i,j} \equiv \psi(x_i, y_j)$ ,  $V_{i,j} \equiv V(x_i, y_j)$ . Используем далее центральные конечно-разностные аппроксимации для вторых производных волновой функции

$$\left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{x_i, y_j} = \frac{1}{h^2} \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k \psi_{i+k, j} + O(h^p), \quad \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right|_{x_i, y_j} = \frac{1}{h^2} \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k \psi_{i, j+k} + O(h^p), \quad (2)$$

где  $C_{-p/2}, C_{-p/2+1}, \dots, C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_{p/2-1}, C_{p/2}$  – искомые коэффициенты. Вследствие симметрии центральных конечно-разностных выражений справедливы равенства  $C_{-p/2} = C_{p/2}, \dots, C_{-1} = C_1$ .

Для получения коэффициентов рассмотрим разложение сеточных значений волновых функций в ряд Тейлора в форме Лагранжа, например, по переменной  $x$  (по переменной  $y$  выражения аналогичны) [6]:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k \psi_{i+k,j} &= \frac{1}{h^2} \sigma_0 \psi_{i,j} + \frac{1}{h} \sigma_1 \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{i,j} + \frac{1}{2!} \sigma_2 \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \frac{h}{3!} \sigma_3 \left. \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} \right|_{i,j} + \\ &+ \frac{h^p}{(p+2)!} \sigma_{p+2} \left. \frac{\partial^{3+2} \psi}{\partial x^{3+2}} \right|_{i,j} + \frac{h^{p+2}}{(p+4)!} \sigma_{p+4} \left. \frac{\partial^{3+4} \psi}{\partial x^{3+4}} \right|_{x=\xi_k, y=y_j} ; \quad \sigma_s = \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k k^s. \end{aligned} \quad (3)$$

С учетом (2) приходим к системе  $(P+1)$  линейных уравнений для вычисления коэффициентов  $C_k$

$$\sigma_0 = 0; \quad \sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = 2; \quad \sigma_3 = 0; \quad \sigma_4 = 0; \quad \dots \quad \sigma_p = 0. \quad (4)$$

Решая системы уравнений (4) для различных значений  $P$ , получаем коэффициенты для центральных конечно-разностных аппроксимаций вторых производных (таблица 1).

Таблица 1 – Коэффициенты конечно-разностных аппроксимаций вторых производных

P	$C_0$	$C_{\pm 1}$	$C_{\pm 2}$	$C_{\pm 3}$	$C_{\pm 4}$	$C_{\pm 5}$	$C_{\pm 6}$	$C_{\pm 7}$	$C_{\pm 8}$
2	-2	1							
4	-5/2	4/3	-1/12						
6	-49/18	3/2	-3/20	1/90					
8	-205/72	8/5	-1/5	8/315	-1/560				
10	-5 269/1800	5/3	-5/21	5/126	-5/1 008	1/3 150			
12	-5 369/1800	12/7	-15/56	10/189	-1/112	2/1 925	-1/16 632		
14	-266 681/88 200	7/4	-7/24	7/108	-7/528	7/3 300	-7/30 888	1/84 084	
16	-1 077 749/352800	16/9	-14/45	112/1 485	-7/396	112/32 175	-2/3 861	16/315 315	-1/411 840

Заменяя вторые производные в уравнении Шредингера на конечно-разностные выражения (2), получаем систему линейных однородных уравнений относительно значений волновой функции в узлах сетки, образующую матричную задачу на собственные значения. В системе единиц  $\hbar = 1, m = 1$  уравнения системы имеют вид ( $i = 1..N_x - 1, j = 1..N_y - 1$ )

$$-\frac{1}{2h^2} \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k \psi_{i+k,j} - \frac{1}{2h^2} \sum_{k=-p/2}^{p/2} C_k \psi_{i,j+k} + V(x_i, y_j) \psi_{i,j} = E \psi_{i,j}. \quad (5)$$

На основании (7) несложно записать явный вид системы линейных уравнений для любого значения  $P$ .

Так как за пределами области волновую функцию для связанных состояний можно при численном расчете считать равной 0, в точках вблизи границы значения функции с отрицательными номерами узлов и с номерами, превышающими  $N$ , не дают вклада в систему уравнений:  $\psi_{-k} = \psi_{N+k} = 0$ ,  $k = 0..P/2$ .

## 2. Исследование вычислительных свойств метода конечных разностей при решении двумерного уравнения Шредингера

В качестве тестовой задачи рассмотрим двумерное уравнение Шредингера с потенциалом гармонического осциллятора  $V(x) = (x^2 + y^2)/2$  в области  $-L \leq x \leq L$ ,  $-L \leq y \leq L$ . Эта задача позволяет протестировать метод для случая гладкого запирающего потенциала и сравнить результаты с точными значениями  $E_n^{точн} = n + 1$ ,  $n = n_x + n_y$ ,  $n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$ . Для уровня  $E_n$  существует  $(n+1)$ -кратное вырождение. Значения абсолютной погрешности  $|E_n^{числен} - E_n^{точн}|$  первых последовательных  $i=1..50$  вычисленных уровней  $E_n^{числен}$  для значений параметров  $L=6$ ,  $h=0,2$  и различных  $P$  приведены в таблице 2.

Таблица 2 – погрешность вычисленных уровней энергии двумерного гармонического осциллятора для различных порядков ( $L=6$   $h=0,2$   $N=3481$ )

$i$	$n_x$	$n_y$	$n$	$E_n^{точн}$	$P=2$	$P=4$	$P=8$	$P=12$	$P=16$
1	0	0	0	1	2,5063e-003	3,2928e-005	2,2835e-008	4,7322e-011	1,4810e-013
10	3	0	3	4	2,2640e-002	5,2344e-004	8,0743e-007	2,8491e-009	1,3281e-010
20	4	1	5	6	4,7903e-002	1,4335e-003	3,2387e-006	1,4978e-008	1,7892e-008
30	1	6	7	8	1,4531e-001	9,1870e-003	7,2066e-005	2,1428e-007	4,1909e-009
40	3	5	8	9	1,5033e-001	9,2855e-003	7,2227e-005	1,4312e-007	1,8004e-008
50	4	5	9	10	1,6042e-001	9,5806e-003	7,4292e-005	1,5562e-007	1,8681e-007

По результатам трех последовательных расчетов величины шага  $h$ ,  $h/2$ ,  $h/4$  можно определить практический порядок сходимости численного метода [7]

$$\tilde{P} = \log_2 \left( \frac{E_n^{(h)} - E_n^{(h/2)}}{E_n^{(h/2)} - E_n^{(h/4)}} \right). \quad (6)$$

Значения практического порядка сходимости  $\tilde{P}$  для случая  $P=16$  приведены в таблице 3. Результаты показывают, что вычисленный практический порядок сходимости близок к теоретическому значению.

Таблица 3 – расчет практического порядка сходимости  $\tilde{P}$  для аппроксимации  $P = 16$  при  $L = 5,76$ .

$i$	$h=0,64$	$h=0,32$	$h=0,16$	$\tilde{P}$
1	0,99999589417533	0,9999999975167	1,0000000000213	14,00
10	3,99972097665498	3,9999997775903	4,00000000223164	13,48
20	5,99850624920467	5,9999986047893	6,00000019092883	12,14
30	7,92699287313520	7,9999568810675	7,9999996812922	14,06
40	8,92693945130686	8,9999704658610	9,00000019303501	14,50
50	9,92665837122424	9,9999758764318	10,00000169100347	14,12

Изложенный вариант метода конечных разностей был использован далее для численного решения двумерного уравнения Шредингера с потенциалом Хенона-Хейлеса [2–5]

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + (0.0125)^{1/2} \left( x^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \quad (7)$$

и double-well потенциала [4] при  $\mu=0,01$ .

$$V(x, y) = x^2 - y^2 + \mu y^2 (2y^2 - x^2) + \frac{1}{8\mu}. \quad (8)$$

В таблице 4 приведены значения энергетических уровней в сравнении с результатами работы [4].

Таблица 4 – вычисленные уровни энергии для потенциалов (7) и (8)

Потенциал Хенона-Хейлеса			Double-well потенциал		
$n$	Результаты [4]	МКР, $P=16$ $L=7.5, h=0.25$	$n$	Результаты [4]	МКР, $P=16$ $L=9, h=0.2$
0	0,998 594 772 604 6	0,998594772597	0	2,262 959 796 444 3	2,262959796447
5	2,985 326 428 064 3	2,985326427908	5	4,967 130 461753 8	4,967130461750
10	4,870 144 005 472 4	4,870143997903	10	7,469 353 731 555 3	7,469353731501
15	5,817 019 099 710 6	5,817019072179	15	8,458 314 106 626 8	8,458314106669
20	5,991 326 955 714 6	5,991326941994	20	9,898 300 048 694 0	9,898300050863
25	6,853 430 627 328 4	6,853430575254	25	10,937 895 835 513 1	10,937895834573
30	7,697 721 365 531 4	7,697721273069	30	11,936 552 764 608 6	11,936552764313
35	8,009 424 774 631 4	8,009424683826	35	12,672 302 141 021 8	12,672302138032
40	8,677 928 871 135 3	8,677928880847			
45	9,444 054 615 678 6	9,444055111210			

На рисунке 1 приведены графики нормированных волновых функций состояний  $n = 1$  и  $n = 8$  для случая потенциала (8).



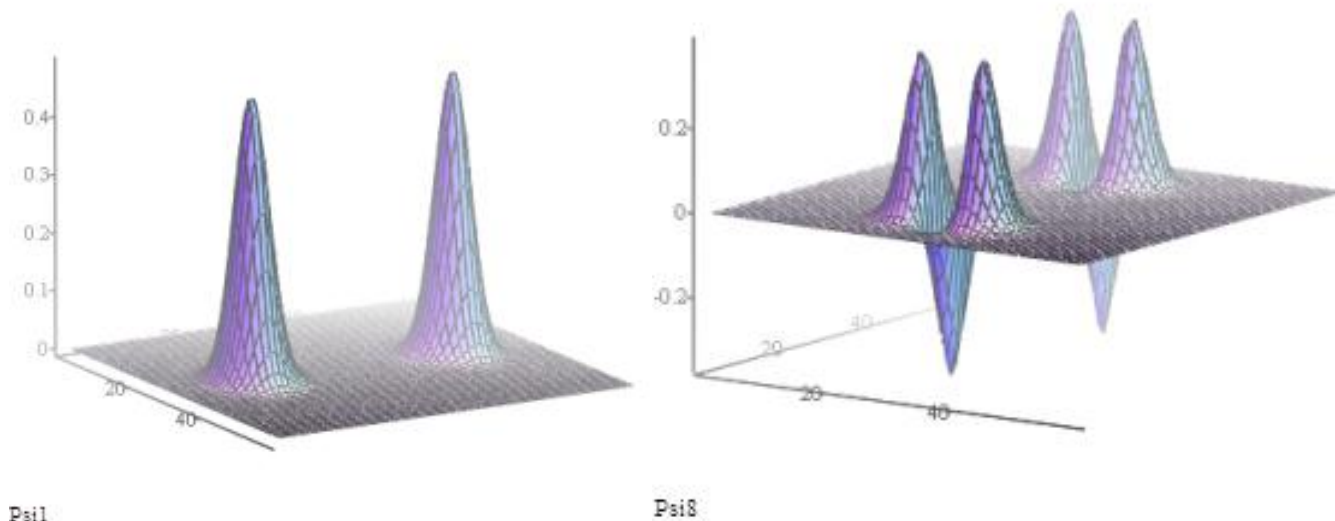


Рисунок 1 – График нормированных волновых функций для случая потенциала (8) при  $n = 1$  и  $n = 8$

Нормировка двумерной волновой функции выполнялась с применением кубатурной формулы Симпсона, которую, с учетом нулевых граничных условий, можно представить в виде

$$\iint_D \psi^2(x, y) dx dy = \frac{4h^2}{9} \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} (1 + \text{mod}(i, 2))(1 + \text{mod}(j, 2)) \psi^2(x_i, y_j). \quad (9)$$

### Заключение

В работе выполнено исследование вычислительной эффективности высших порядков метода конечных разностей при решении двумерного уравнения Шредингера. На практических примерах показано существенное уменьшение погрешности вычисления энергетических уровней при увеличении порядка конечно-разностной аппроксимации вторых производных волновой функции.

Результаты расчетов показывают, что точность метода конечных разностей сопоставима с возможностями таких методов как спектральный [4] и метод конечных элементов [5]. При этом метод конечных разностей в матричной форме, в отличие от метода конечных элементов, не требует вычисления интегралов и приводит к стандартной, а не обобщенной задаче на собственные значения.

### Литература

1. Liu, X.S. Numerical solution of a two-dimensional time-independent Schrödinger equation by using symplectic schemes / X.S. Liu, L.W. Su, X.Y. Liu, P.Z. Ding // Int. J. Quantum Chem. – 2001. – Vol. 83. – P. 303–309.

2. Monovasilis, Th. Numerical solution of the two-dimensional time independent Schrödinger equation by third order symplectic schemes / Th. Monovasilis, T.E. Simos // Chem. Phys. – 2005. – Vol. 313. – P. 293–298.

3. Ixaru, L.Gr. New numerical method for the eigenvalue problem of 2D Schrödinger equation / L.Gr. Ixaru // Comput.Phys.Commun. – 2010. – Vol. 181. – P. 1738–1742.

4. Alici, H. The Hermite pseudospectral method for the two-dimensional Schrödinger equation with nonseparable potentials / H. Alici // Computers and Mathematics with Applications – 2015. – Vol. 69. – P. 466–476.

5. Дей, Е.А. Численное решение двумерного уравнения Шредингера в базе эрмитовых конечных элементов / Е.А. Дей // Известия ГГУ – 2009. – № 4(55), часть 2. – С. 102–106.

6. Дей, Е.А. Эффективность высших порядков метода конечных разностей при решении стационарного уравнения Шредингера / Е.А. Дей // Известия ГГУ – 2013. – № 6. – С. 178–183.

7. Калиткин, Н.Н. Численные методы / Н.Н. Калиткин – М. : Наука, 1978. – 512 с.

**Т.П. Желонкина, С.А. Лукашевич, В.И. Яковенко**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **МЕТОДЫ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В СОВРЕМЕННОМ КУРСЕ ОБЩЕЙ ФИЗИКИ**

### **Введение**

Статистические методы наряду с квантовыми и релятивистскими составляют основу современной физики. После того как молекулярные воззрения получили господство в физике, появление в физических теориях статистических методов исследования стало неизбежным

Применение методов классической статистики в теории излучения абсолютно черного тела привело к величайшей революции в области физики – появлению квантов, созданию квантовой теории. На основе представлений Планка о дискретных значениях энергии осциллятора начала развиваться квантовая статистическая теория. Квантовая теория является принципиально статистической. Если в классической статистике движение каждой частицы могло быть рассчитано по законам Ньютона, а статистические закономерности применялись к огромному числу частиц, то в квантовой теории одни и те же статистические закономер-

ности описывают как поведение отдельной микрочастицы, так и совокупности их.

Идеи, методы статистической физики должны найти широкое применение в современном курсе общей физики. На протяжении всего курса физики необходимо формировать и развивать статистические представления. Уже при изучении механики необходимо говорить о существовании двух видов закономерностей: динамических и статистических. Причем наиболее глубокое описание любого процесса дается с помощью статистических закономерностей, а соответствующая динамическая теория, если она вообще возможна, является более глубоким приближением к истине. Такие понятия статистической физики, как вероятность и плотность вероятности, статистические средние физических величин, флуктуации физических величин в состоянии равновесия, функции распределения должны работать на протяжении всего курса физики.

### **1. Флуктуации**

Статистическая физика допускает возможность самопроизвольного выхода замкнутой системы из равновесного состояния. При этом система переходит из более вероятного состояния в менее вероятное и энтропия её уменьшается. Такой процесс характеризуется флуктуациями – отклонениями физических величин от средних значений. При малом числе частиц флуктуации становятся настолько значительными, что динамическое описание теряет смысл.

Количественно флуктуации могут быть изучены при рассмотрении броуновского движения. Броуновское движение – это первое детально исследованное явление, вызванное флуктуациями. Теория броуновского движения имеет принципиальное значение, проясняя статистическую природу второго начала термодинамики и показывая границы его применимости. Второе начало термодинамики, несмотря на его общность, не имеет абсолютного характера, и отклонения от него (флуктуации) являются вполне закономерными. Примером таких флуктуационных процессов являются броуновское движение тяжёлых частиц, возникновение зародышей новой фазы при фазовых превращениях, самопроизвольные флуктуации температуры и давления в равновесной системе и т. д.

При рассмотрении броуновского движения выявляется важная особенность – здесь статистический закон в определённом смысле присущ движению одной частицы. Подчеркнув этот факт в данном месте, мы облегчим в дальнейшем восприятие того, что в квантовой теории одни и те же статистические закономерности описывают как поведение отдельной микрочастицы, так и совокупности их. Методы статистической физики могут применяться не только к огромному числу частиц, но на определённом уровне изучения, и к одной частице.

Теория флуктуаций в дальнейшем используется при рассмотрении явлений переноса в жидкостях, критической опалесценции, изменении кинетических процессов вблизи критического состояния, электрических флуктуаций, флуктуаций числа фотонов в световых потоках малой интенсивности, рассеяния волн на флуктуациях плотности среды.

Систематическое углубление понятия о флуктуациях поможет правильному восприятию очень сложного понятия физического вакуума и всех явлений, связанных с ним. Вакуум является суперпозицией нулевых колебаний поля флуктуационного характера, т. е. состояний с виртуально возникающими и исчезающими фотонами, электронно-позитронными парами частиц и античастиц. Энергия этих колебаний равна

$$\varepsilon_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \hbar \omega_k. \quad (1)$$

Число степеней свободы поля бесконечно велико. Квантовые флуктуации поля неустранимы, и при взаимодействии электромагнитного поля с заряженными частицами они приводят к эффектам, наблюдаемым экспериментально. Сбрасывание атомов с возбуждённых уровней в стационарное состояние происходит под действием нулевых колебаний поля (спонтанные излучения в вакууме). Сдвиг уровней энергии атомов (опыт Лэмба-Резерфорда) объясняется наличием двух явлений: взаимодействием электрона с виртуально излучаемыми фотонами (изменяется эффективная масса электрона) и поляризацией вакуума (искажается кулоновское поле ядра на малых расстояниях от него).

## 2. Функция статистического распределения

Понятие о функции распределения «работает» на протяжении всего курса физики. Впервые с ним знакомятся при изучении идеальных газов. Целесообразно ввести барометрическую формулу, затем обобщить её для случая потенциальных полей внешних сил, получив функцию распределения Больцмана.

$$n = n_0 e^{-\frac{U}{k\tau}}; \quad \omega = c e^{-\frac{U}{k\tau}}. \quad (2)$$

Формула Больцмана в дальнейшем может быть использована при рассмотрении:

- распределения молекул по скоростям  $\omega = c e^{-\frac{mv^2}{2k\tau}}$ ;

- зависимости от температуры давления насыщенного пара  $\rho = A T e^{-\frac{U_0}{k\tau}}$

и диффузии  $D = A e^{-\frac{U}{k\tau}}$ ;

- распределения атомов по энергетическим уровням  $N_n = N_0 e^{-\frac{E_n}{k\tau}}$ ;
- излучения абсолютно чёрного тела по Эйнштейну.

В формировании статистических представлений очень важным является раздел «твёрдое тело», так как здесь появляется возможность ввести квантовые идеи, квантовые статистики – Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака. При рассмотрении теплоёмкости твёрдых тел необходимо остановиться на модели Эйнштейна. Согласно его теории тепловые свойства решётки, состоящей из  $N$  колеблющихся атомов, можно трактовать как свойства  $3N$  независимых одномерных гармонических осцилляторов, имеющих одну и ту же собственную частоту  $\omega$ , с энергией  $\varepsilon_{осц} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ :

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{\sum \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}{k\tau}}}{\sum e^{-\frac{\hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)}{k\tau}}} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k\tau}} - 1}, \quad (2)$$

где  $\frac{\hbar\omega}{2} = \varepsilon_0$  – нулевая энергия колебания с данной частотой;

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{k\tau}} - 1} - \text{функция распределения Планка.}$$

Получив функцию распределения Планка, следует перейти к статистике Бозе-Эйнштейна

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega - \mu}{k\tau}} - 1}, \quad (3)$$

где  $\mu$  – химический потенциал, зависящий от природы частицы. Для фотонов  $\mu = 0$ . Далее необходимо говорить о принципе Паули и ввести статистику Ферми-Дирака, применив её к электронам в металлах:

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega - \mu_F}{k\tau}} + 1}; \quad \langle \varepsilon \rangle = \varepsilon_0 + BT^2. \quad (4)$$

В этом разделе вводятся понятия вырожденного газа, температуры вырождения. Газ, свойства которого существенно отличается от свойств классического идеального газа, вследствие взаимного квантово-механического влияния частиц, называется вырожденным. Его особые свойства могут проявляться только при достаточно низких температурах – ниже так называемой температуры вырождения:

$$T_0 = \frac{\hbar^2}{3mk} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}. \quad (5)$$

В обычных атомных или молекулярных газах вырождение, как правило, не наступает: при охлаждении газ превращается в жидкость при более высоких температурах, чем температура вырождения. Явление вырождения крайне существенно при рассмотрении электронного газа  $T_0 \approx 10^4 \text{ K}$ . Здесь необходимо рассмотреть границы применимости классической статистики Больцмана-Максвелла как предельного случая квантовых статистик. В дальнейшем статистикой Ферми-Дирака пользуются при рассмотрении термоэлектронной эмиссии, контактных явлений и т. д.

Переходя к магнетизму необходимо подчеркнуть, что определение намагниченности магнетиков принципиально не возможно в рамках классической физики, так как из общих положений классической статистики следует, что магнитный момент любого магнетика в стационарном состоянии всегда равен нулю, что противоречит опыту. Объяснение магнитных свойств вещества возможно только на основе квантовой теории.

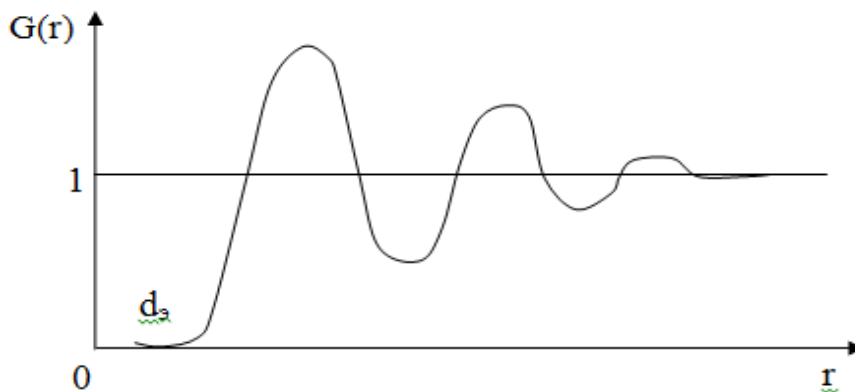


Рисунок 1 – Радиальная функция распределения

Необходимо остановиться на статистических идеях в теории жидкости. Понятие ближнего порядка может быть объяснено только на основе статистических представлений с введением радиальной функции распределения  $G(r)$ . Она определяет вероятность обнаружения некоторой частицы жидкости на расстоянии от  $r$  до  $r+dr$  от некоторой другой фиксированной частицы (рисунок 1). При  $r < d_s$ ,  $G(r) = 0$  ( $d_s$  – эффективный диаметр частицы). Эта область взаимной «непроницаемости» частиц. Области максимумов соответствуют наиболее вероятным взаимным расстояниям между ближними частицами в жидкости. При  $r \gg d_s$ ,  $G(r) = 1$ , т. е. все взаимные расположения далёких частиц оказываются равновероятными.

При низких температурах и больших плотностях максимумы становятся более резкими. Однако общий ход функции  $G(r)$  остаётся неизменным.

### **Заключение**

Опыт преподавания курса общей физики доказывает, что идеи, методы статистической физики должны находить широкое отражение в современном курсе физики. На протяжении изучения всего курса физики необходимо формировать и развивать статистические представления. Уже при изучении механики необходимо говорить о существовании двух видов закономерностей: динамических и статистических.

### **Литература**

1. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Том 2. Термодинамика и молекулярная физика / Д.В. Сивухин. – Москва : Наука, 1975. – 552 с.
2. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. Том 3. Электричество / Д.В. Сивухин. – Москва : Наука, 1977. – 688 с.
3. Матвеев, А.Н. Молекулярная физика / А.Н.Матвеев. – Москва : Высшая школа, 1981. – 400 с.

**Н. Капшай, С.И. Фиалка**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **СУПЕРПОЗИЦИЯ $\delta$ -ПОТЕНЦИАЛОВ В ЗАДАЧЕ О РАССЕЙЯНИИ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ СО СПИНАМИ 0 И $\frac{1}{2}$**

### **Введение**

Квазипотенциальный подход [1, 2] давно зарекомендовал себя как физически прозрачный и последовательный метод изучения релятивистской проблемы двух тел. Однако нахождение релятивистских потенциалов в рамках квантовой теории поля является достаточно сложной задачей, поэтому часто используются феноменологические потенциалы с такой же координатной зависимостью как у потенциалов квантовой механики. Несмотря на это, число аналитически решаемых задач в квазипотенциальном подходе намного меньше, чем в нерелятивистской теории.

Большой интерес представляет потенциал в виде  $\delta$ -функции. В нерелятивистской теории данный потенциал широко используется [3]. В квазипо-

тенциальном подходе решены уравнения для двух бесспиновых частиц с  $\delta$ -потенциалом [4]. В то же время, для описания взаимодействия таких двухчастичных систем как:  $\pi$ -мезон и  $\mu$ -лептон; ядро гелия и электрон, более естественными являются квазипотенциальные уравнения для частиц со спинами 0 и  $1/2$ , так как при их решении используется минимальное число допущений.

В данной работе изложен метод приближённого решения задач о рассеянии релятивистских частиц одинаковой массы со спинами 0 и  $1/2$ . Метод основан на аппроксимации гладкого потенциала суперпозицией  $N$   $\delta$ -функций и позволяет решать парциальные уравнения с квазипотенциалами достаточно общего вида и отличным от нуля орбитальным моментом частиц.

## 1. Парциальные уравнения

Квазипотенциальное уравнение для описания частиц массы  $m$  со спинами 0 и  $1/2$  отличается от уравнения для двух скалярных частиц зависимостью волновой функции и квазипотенциала от спиновых индексов. Рассмотрим локальный в импульсном пространстве Лобачевского квазипотенциал используя разложение по бесспиновым скалярным плоским волнам для перехода в релятивистское конфигурационное представление [5]. Тогда интегральное уравнение в  $r$ -представлении будет иметь вид:

$$\psi_{\sigma}(\vec{q}, \vec{r}) = \xi(\vec{q}, \vec{r})[\chi_{\sigma}]_{1/2} + \int G_0(E_q; r, r') V_{\sigma\rho}(r') \psi_{\rho}(\vec{q}, \vec{r}') d\vec{r}', \quad (1)$$

где  $\chi_{\sigma}$  – нормированные собственные векторы оператора спина.

Рассмотрим независящий от энергии двухчастичной системы квазипотенциал, который учитывает спин-орбитальное взаимодействие [6]:

$$V_{\sigma\rho}(E_q; r') = \left( I_{\sigma\rho} + \frac{g^2}{mr' + i} 2(\hat{\ell}\hat{s})_{\sigma\rho} \right) V(r'). \quad (2)$$

Подставляя в (1) разложение по базису шаровых спиноров для волновой функции, плоской волны и функции Грина, а также учитывая действие оператора  $\hat{\ell}\hat{s}$  на шаровые спиноры, одномерные парциальные уравнения:

$$\begin{aligned} \Psi_{\ell}(\chi_q, r) = & s_{\ell}(\chi_q, r) + \\ & + \int_0^{\infty} G_0^{(\ell)}(\chi_q; r, r') \left[ 1 - \frac{g^2}{mr' + i} (1 + \psi) \right] V(r') \Psi_{\ell}(\chi_q, r') dr', \end{aligned} \quad (3)$$



где

$$\Psi = \begin{cases} -(j+1/2) = -(\ell+1), & j = \ell + 1/2; \\ j+1/2 = \ell, & j = \ell - 1/2. \end{cases}$$

Числовой параметр  $\varkappa$  пробегает все целочисленные значения кроме нуля (положительные соответствуют  $j = \ell - 1/2$ , а отрицательные  $j = \ell + 1/2$ ).

В качестве функции  $G_0^{(\ell)}(\chi_q; r, r')$  будем рассматривать функцию Грина уравнения Логунова-Тавхелидзе [7]

$$G_0^{(\ell)}(E_q; r, r') = \left[ \frac{e_\ell^{(1)}(\chi_q, r) e_\ell^{(1)*}(\chi_q, r')}{1 - e^{-\pi m(r-r')}} + \frac{e_\ell^{(2)}(\chi_q, r) e_\ell^{(2)*}(\chi_q, r')}{1 - e^{\pi m(r-r')}} - \frac{e_\ell^{(1)}(\chi_q, r) e_\ell^{(2)*}(\chi_q, r')}{1 - e^{-\pi m(r+r')}} - \frac{e_\ell^{(2)}(\chi_q, r) e_\ell^{(1)*}(\chi_q, r')}{1 - e^{\pi m(r+r')}} \right] / (i m \operatorname{sh} 2 \chi_q). \quad (4)$$

## 2. Метод приближенного решения

Рассмотрим метод приближённого решения релятивистских задач с гладкими потенциалами, аналогично тому, как это сделано в случае двух скалярных частиц [4]. Диапазон изменения переменной  $r$  разделим на две части: полубесконечную  $r \geq r_N$ , где потенциальное поле полагается равным нулю и конечную  $0 \leq r < r_N$  суперпозиция  $\delta$ -потенциалов используется вместо аналитического потенциала:

$$V(r) \rightarrow \sum_{k=1}^N h_k V_k \delta(r - a_k). \quad (5)$$

Здесь  $h_k = r_k - r_{k-1}$ ,  $V_k = V(a_k)$ ,  $a_k = (r_k + r_{k-1})/2$ .

Подставляя (4) в (3), получим

$$\psi_\ell(\chi_q, r) = s_\ell(\chi_q, r) + \sum_{k=1}^N G_0^{(\ell)}(\chi_q; r, r_k) \upsilon_k^\pm \psi_\ell(\chi_q, r_k). \quad (6)$$

где введено обозначение

$$\upsilon_k^\pm = \left[ 1 - \frac{g^2}{mr' + i} (1 + \Psi) \right] V_k.$$

В пределе  $r \rightarrow \infty$ , уравнение (6) примет вид

$$\psi_\ell(\chi_q, r) \Big|_{r \rightarrow \infty} = s_\ell(\chi_q, r) + \left( \sum_{k=1}^N \frac{-s_\ell^*(\chi_q, r_k)}{m \operatorname{sh} \chi_q \operatorname{ch} \chi_q} v_k^\pm \psi_\ell(\chi_q, r_k) \right) e^{i(mr\chi_q - \pi/2\ell)}. \quad (7)$$

Аналогично нерелятивистской теории, из (7) выразим релятивистскую амплитуду рассеяния

$$f_\ell^\pm(\chi_q, r) = \frac{1}{m \operatorname{sh} \chi_q} \sum_{k=1}^N \frac{-s_\ell^*(\chi_q, r_k)}{m \operatorname{sh} \chi_q \operatorname{ch} \chi_q} v_k^\pm \psi_\ell(\chi_q, r_k). \quad (8)$$

Для неполяризованного начального состояния сечение рассеяния может быть представлено как сумма парциальных сечений [8]:

$$\sigma = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sigma_\ell = 4\pi \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[ (\ell+1) |f_\ell^+(\chi_q)|^2 + \ell |f_\ell^-(\chi_q)|^2 \right]. \quad (9)$$

### 3. Пример модельного потенциала

Рассмотрим алгоритм численного анализа, выбирая модельный потенциал, при котором возможны резонансные состояния [9]:

$$V(r) = A \frac{r}{\mu} \exp\left(1 - \frac{r}{\mu}\right). \quad (10)$$

Первым этапом решения является аппроксимация гладкого потенциала суперпозицией из  $N$   $\delta$ -потенциалов. От выбора метода аппроксимации зависит, насколько быстро численное решение будет приближаться к точному. Нами было рассмотрено несколько методов и определено, как особенности потенциала влияют на то, какой из методов предпочтительнее. Затем была построена сетка потенциала. Полученный массив координат и значений потенциала на этом поле координат использован для расчета амплитуд рассеяния (8), с учётом которых были найдены парциальные сечения рассеяния (9).

На рисунке 1 приведена зависимость парциального сечения  $\sigma_1$  от энергии  $E_q$  в предположении о разном по величине спин-орбитальном взаимодействии ( $A=2$ ,  $\mu=1,12$ ). Как можно видеть, при усилении спин-орбитального взаимодействия (при увеличении параметра  $g^2$ ) вклад амплитуды рассеяния  $f_\ell^-(\chi_q)$  в сечение увеличивается. Этот вклад смещён вверх по шкале энергии по сравнению с вкладом составляющей  $f_\ell^+(\chi_q)$ , и при сильном спин-орбитальном взаимодействии может перекрыть последний.

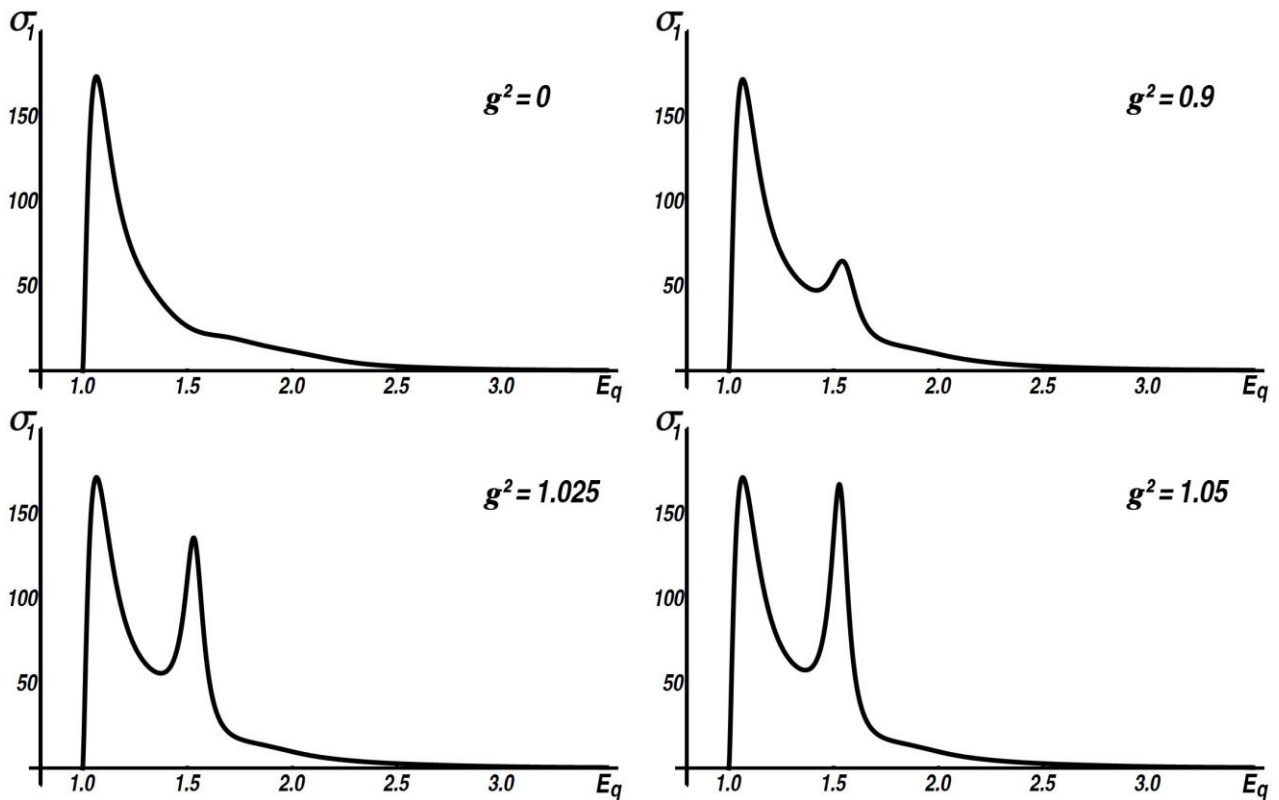


Рисунок 1 – Зависимость парциального сечения  $\sigma_1$  от энергии  $E_q$

Если учесть, что резонансные состояния – это почти связанные (квазистационарные) состояния системы [9], то можно заметить сходство с теорией связанных состояний, где показано, что при учёте спин-орбитального взаимодействия имеет место расщепление энергетических уровней [10].

### Заключение

В работе представлено аналитическое выражение амплитуды рассеяния полученное на основе модели, в которой в качестве составной части квазипотенциала, которая получается после выделения кинематического члена и спиновой структуры, рассматривается суперпозиция из  $N$   $\delta$ -функций. Описан метод приближённого решения задач о рассеянии частиц со спинами 0 и  $\frac{1}{2}$  в полях с гладкими потенциалами. В случае несингулярных быстроубывающих потенциалов метод показывает высокую эффективность и даже при незначительном количестве  $\delta$ -функций позволяет получить качественно точные результаты.

### Литература

1. Logunov, A.A. Quasi-optical approach in quantum field theory / A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze // Nuovo Cimento. – 1963. – Vol. 29. – № 2. – P. 380–399.

2. Kadyshevsky, V.G. Quasipotential type equation for the relativistic scattering amplitude / V.G. Kadyshevsky // Nucl. Phys. – 1968. – Vol. B6. – № 1. – P. 125–148.

3. Albeverio, S. Solvable models in quantum mechanics / S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, H. Holden. – AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2005. – 488 p.

4. Капшай, В.Н. Релятивистская задача о  $s$ -состояниях рассеяния для суперпозиции двух потенциалов « $\delta$ -сфера» / В.Н. Капшай, Ю.А. Гришечкин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2. – С. 7–12.

5. Скачков, Н.Б. Релятивистское трехмерное описание взаимодействия двух фермионов / Н.Б. Скачков, И.Л. Соловцов // ЭЧАЯ. – 1978. – Т. 9. – № 1. – С. 5–47.

6. Матеев, М.Д. Квазипотенциальное уравнение для частиц со спином  $1/2$  в конфигурационном представлении и релятивистские шаровые спиноры / М.Д. Матеев, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ТМФ. – 1972. – Т. 10. – № 1. – С. 3–10.

7. Кадышевский, В.Г. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел / В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков // ЭЧАЯ. – 1972. – Т. 2. – № 3. – С. 635–690.

8. Ландау, Л.Д. Квантовая механика (нерелятивистская теория) / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1989. – 768 с.

9. Bohm, A. Quantum Mechanics / A. Bohm. – New York: Springer-Verlag, 1979. – 522 с.

10. Мессиа, А. Квантовая механика / А. Мессиа. – М.: Наука, 1979. – Т. 2. – 584 с.

**Н.В. Максименко, О.М. Дерюжкова, В.В. Андреев**

**УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь**

## **СПИНОВЫЕ ПОЛЯРИЗУЕМОСТИ АДРОНОВ СПИНА $\frac{1}{2}$ В КОВАРИАНТНОМ ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОМ ПОДХОДЕ**

В настоящее время одним из эффективных методов исследования электродинамических процессов является использование эффективных лагранжианов, полученных в рамках теоретико-полевых подходов и согласующихся с низкоэнергетическими теоремами [1, 2]. С развитием стандартной модели элект-

рослабых взаимодействий в последнее время введены новые электрослабые характеристики адронов, связанные с несохранением четности [3–5]. Построение эффективных релятивистски-инвариантных лагранжианов позволяет получить не только физическую интерпретацию электромагнитных и электрослабых характеристик адронов, но и информацию о механизмах электромагнитных и электрослабых фотон-адронных взаимодействий. Для более достоверного определения поляризуемостей и характеристик адронов, связанных с нарушением четности, используется достаточно широкий класс электродинамических процессов, в которых реализуется рассеяние реальных и виртуальных фотонов, а также двухфотонное рождение в адрон-адронных взаимодействиях. Решение подобных задач возможно выполнить в рамках эффективного релятивистского теоретико-полевого подхода описания взаимодействия электромагнитного поля с адронами с учетом их электромагнитных и электрослабых характеристик [6, 7].

Амплитуда комптоновского рассеяния вперед имеет общую спиновую структуру вида (см., например [8])

$$M = g(\omega) \begin{pmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{pmatrix} + ih(\omega) \left( S \cdot \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{bmatrix} \right), \quad (1)$$

где  $e_{\rightarrow(\lambda_1)}$  и  $e_{\rightarrow(\lambda_2)}$  – векторы поляризации падающего и рассеянного фотонов,  $\omega$  – энергия фотона. В этом определении амплитуды скалярная функция  $g(\omega)$  является четной, а  $h(\omega)$  – нечетной относительно перекрестной симметрии. Следовательно, поскольку поляризуемости вносят вклад в амплитуду (1) начиная со второго порядка по  $\omega$  и выше [9], то спиновая структура второго слагаемого в (1) определяется вкладами поляризуемостей начиная с третьего порядка по  $\omega$ .

Лагранжиан, в котором, как было показано в [10], учитываются в нерелятивистском приближении вклады спиновых поляризуемостей, связанных с электрическими и магнитными дипольными моментами адронов, имеет вид:

$$L(\gamma_{E_1}) + L(\gamma_{M_1}) = 2\pi \left[ \gamma_{E_1} \left( \vec{\sigma} \cdot \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \dot{\vec{E}} \end{bmatrix} \right) + \gamma_{M_1} \left( \vec{\sigma} \cdot \begin{bmatrix} \vec{H} \\ \dot{\vec{H}} \end{bmatrix} \right) \right], \quad (2)$$

где  $\sigma_i$  – матрицы Паули,  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  – векторы напряженности электрического и магнитного полей,  $\dot{\vec{E}} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ,  $\dot{\vec{H}} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$ .

В работах [11–14] в рамках эффективного теоретико-полевого подхода была получена ковариантная форма представления (2)

$$L(\gamma_{E_1}) + L(\gamma_{M_1}) = \frac{i\pi}{4m} (\varepsilon^{\mu\rho\kappa\beta}) \left[ \gamma_{E_1} F_{\nu\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta F_{\rho\sigma} + \gamma_{M_1} \tilde{F}_{\nu\mu} \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\delta \tilde{F}_{\rho\sigma} \right] \times \\ \times \bar{\Psi} \left[ \left( \gamma^\nu \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \gamma^\nu \right) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\sigma + \left( \gamma^\sigma \hat{W}_\kappa + \hat{W}_\kappa \gamma^\sigma \right) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu \right] \Psi. \quad (3)$$

В этом соотношении  $\varepsilon^{\mu\rho\kappa\beta}$  – 4-х-мерный тензор Леви-Чивита,  $\overset{\leftrightarrow}{\partial}^\nu = \overset{\rightarrow}{\partial}^\nu - \overset{\leftarrow}{\partial}^\nu$ , стрелки указывают направления действия производных,  $F_{\mu\nu}$  – тензор электромагнитного поля ( $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ), а тензор  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$ ,  $\gamma^\mu$  – матрицы, удовлетворяющие перестановочным соотношениям  $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$ . В случае частицы спина  $1/2$  вектор  $\hat{W}^\mu$  имеет вид:

$$\hat{W}^\mu = \frac{(-1)}{2m} \gamma^5 \left( \gamma^\mu \left( \hat{p} \right) - p^\mu \right),$$

где  $\hat{p} = \gamma_\mu p^\mu$ ,  $p^\mu$  – 4-х-импульс частицы.

Часть амплитуды комптоновского рассеяния, вычисленная на основе этого лагранжиана, определяется следующим образом:

$$M(\gamma_{E_1}) + M(\gamma_{M_1}) = \frac{i\pi}{4m^2} (\varepsilon^{\mu\rho\kappa\delta}) (k_1 + k_2)_\delta \left[ \gamma_{E_1} (F_{\nu\mu}^{(2)} F_{\rho\sigma}^{(1)} - F_{\sigma\rho}^{(2)} F_{\mu\nu}^{(1)}) + \right. \\ \left. + \gamma_{M_1} (\tilde{F}_{\nu\mu}^{(2)} \tilde{F}_{\rho\sigma}^{(1)} - \tilde{F}_{\sigma\rho}^{(2)} \tilde{F}_{\mu\nu}^{(1)}) \right] \bar{U}^{(r_2)} \left( \overset{\rightarrow}{p}_2 \right) \gamma^5 \left[ (\delta_\tau^\nu \gamma_\kappa - \delta_\kappa^\nu \gamma_\tau) P^\sigma + \right. \\ \left. + (\delta_\tau^\sigma \gamma_\kappa - \delta_\kappa^\sigma \gamma_\tau) P^\nu \right] P_\tau U^{(r_1)} \left( \overset{\rightarrow}{p}_1 \right). \quad (4)$$

В уравнении (4) введены обозначения  $F_{\mu\nu}^n = (k_\mu^n e_\nu^{(\lambda_n)} - k_\nu^n e_\mu^{(\lambda_n)})$ ,  $F_n^{\mu\nu} = (k_n^\mu e^{\nu(\lambda_n)*} - k_n^\nu e^{\mu(\lambda_n)*})$ ,  $n$  принимает значения 1 и 2, а также  $e_\mu^{(\lambda_1)}$  и  $e_\mu^{(\lambda_2)*}$  – векторы поляризации падающего и рассеянного фотонов,  $P^\sigma = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ ,  $k_1, p_1$  и  $k_2, p_2$  – импульсы падающего и рассеянного фотонов и фермионов,  $U^{(r_1)}$  и  $\bar{U}^{(r_2)}$  – биспиноры начальных и конечных фермионов.

Выражение (4) свидетельствует о том, что амплитуда  $M(\gamma_{E_1}) + M(\gamma_{M_1})$  инвариантна относительно перекрестной симметрии. Вклад спиновых поляризуемостей  $\gamma_{E_1}$  и  $\gamma_{M_1}$  начинается с третьего порядка по энергии фотонов.

Если в (4) перейти в систему покоя мишени и пренебречь импульсом отдачи нуклона, то получим

$$M(\gamma_{E_1}) + M(\gamma_{M_1}) = 4\pi i(\omega_1 + \omega_2)(\omega_1\omega_2) \left\{ \gamma_{E_1} \left( \vec{S} \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{bmatrix} \right) + \right. \\ \left. + \gamma_{M_1} \left( \vec{S} \left[ \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow \\ e & n_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_1) & \rightarrow \\ e & n_1 \end{bmatrix} \right] \right) \right\}. \quad (5)$$

Как видно из уравнений (3) и (5) лагранжиан, с помощью которого учитывается вклад спиновых поляризуемостей  $\gamma_{E_1}$  и  $\gamma_{M_1}$  в амплитуду комптоновского рассеяния является четным относительно инверсии пространства.

Используя метод работ [11–14] определим теперь релятивистски-инвариантный лагранжиан, в котором, как следует из [10], учитываются в нерелятивистском приближении вклады спиновых поляризуемостей, связанных с электрическими и магнитными квадрупольными моментами адронов:

$$L(\gamma_{E_2}) = \frac{i\pi\gamma_{E_2}}{m} \left[ F^{\nu\rho} \overset{\leftarrow}{\partial}_k \tilde{F}_{\sigma\rho} + \tilde{F}^{\nu\rho} \overset{\rightarrow}{\partial}_\rho F_{\sigma k} \right] \bar{\Psi} \left( \gamma_\nu \hat{W}^k + \hat{W}^k \gamma_\nu \right) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\sigma \Psi. \quad (6)$$

В нерелятивистском приближении этот лагранжиан совпадает с лагранжианом работы [10]

$$L(\gamma_{E_2}) = -8\pi\gamma_{E_2} \chi^+ E_{ik} H^i \hat{S}^k \chi, \quad (7)$$

где  $E_{ik} = \frac{1}{2}(\partial_i E_k + \partial_k E_i)$ ,  $\hat{S}^k = \frac{1}{2}\sigma^k$ . Аналогичным образом можно убедиться, что

$$L(\gamma_{M_2}) = -\frac{i\pi\gamma_{M_2}}{m} \left[ \tilde{F}^{\nu\rho} \overset{\leftarrow}{\partial}_k F_{\sigma\rho} + F^{\nu\rho} \overset{\rightarrow}{\partial}_\rho \tilde{F}_{\sigma k} \right] \bar{\Psi} \left( \gamma_\nu \hat{W}^k + \hat{W}^k \gamma_\nu \right) \overset{\leftrightarrow}{\partial}^\sigma \Psi, \quad (8)$$

который в нерелятивистском приближении принимает вид [10]

$$L(\gamma_{M_2}) = 8\pi\gamma_{M_2} \chi^+ H_{ki} \hat{S}^k E^i \chi, \quad \text{где } H_{ki} = \frac{1}{2}(\partial_k H_i + \partial_i H_k).$$

Амплитуда комптоновского рассеяния, которая следует из лагранжиана (6), имеет вид:

$$M(\gamma_{E_2}) = \frac{i\pi\gamma_{E_2}}{m} \left[ \varepsilon_{\nu\rho\alpha\beta} \left( \hat{e}_{2k} F_2^{\nu\rho} F_1^{\alpha\beta} - \hat{e}_{1k} F_1^{\nu\rho} F_2^{\alpha\beta} \right) + \right. \\ \left. + \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} \left( k_{2\rho} F_{\sigma k}^2 F_{\alpha\beta}^1 - k_{1\rho} F_{\sigma k}^1 F_{\alpha\beta}^2 \right) \right] P^\sigma \bar{U}^{(r_2)} \left( \gamma_\nu \hat{W}^k + \hat{W}^k \gamma_\nu \right) U^{(r_1)}, \quad (9)$$

В нерелятивистском приближении из (9) следует, что:

$$\begin{aligned}
M(\gamma_{E_2}) = & 2i\pi\gamma_{E_2}\chi_2^+ \left\{ \omega_1 \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} e \right) \left( e \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_2 k_1 \end{bmatrix} \right) + \omega_2 \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} e \right) \left( e \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_2 k_1 \end{bmatrix} \right) - \right. \\
& \left. - \omega_1 \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} k_1 \right) \left( k_2 \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ e e \end{bmatrix} \right) - \omega_2 \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} k_2 \right) \left( k_1 \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ e e \end{bmatrix} \right) \right\} \chi_1.
\end{aligned} \tag{10}$$

Из явного вида этой амплитуды следует, что ее спиновая структура не совпадает со структурой  $M(\gamma_{E_2})$ , приведенной в работах [10, 15]. Однако, если воспользоваться тождеством, которое содержится в [10]:

$$\begin{aligned}
\left( \overset{\rightarrow}{\sigma} \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_2 e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_1 e \end{bmatrix} \right) = & \frac{1}{2} \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} e \right) \left( k_2 \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_1 e \end{bmatrix} \right) + \frac{1}{2} \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} k_1 \right) \left( e \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_2 e \end{bmatrix} \right) - \\
& - \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} e \right) \left( k_1 \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_2 e \end{bmatrix} \right) - \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} k_2 \right) \left( e \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_1 e \end{bmatrix} \right),
\end{aligned}$$

то выражение (10) в приближении третьего порядка по энергии фотонов примет вид [10, 15]:

$$\begin{aligned}
M(\gamma_{E_2}) = & 2i\pi\omega^3\gamma_{E_2} \left\{ \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} e \right) \left( e \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_2 k_1 \end{bmatrix} \right) + \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} e \right) \left( e \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_2 k_1 \end{bmatrix} \right) - \right. \\
& \left. - \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} k_1 \right) \left( k_2 \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ e e \end{bmatrix} \right) - \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} k_2 \right) \left( k_1 \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ e e \end{bmatrix} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

Амплитуду комптоновского рассеяния в ковариантном формализме, используя (8), можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}
M(\gamma_{M_2}) = & -\frac{i\pi\gamma_{M_2}}{m} \left[ \varepsilon^{\nu\rho\alpha\beta} \left( k_{2k} F_{\alpha\beta}^2 F_{\sigma\rho}^1 - k_{1k} F_{\alpha\beta}^1 F_{\sigma\rho}^2 \right) + \right. \\
& \left. + \varepsilon_{\sigma k\alpha\beta} \left( -\hat{e}_{1\rho} F_2^{\nu\rho} F_1^{\alpha\beta} + \hat{e}_{2\rho} F_1^{\nu\rho} F_2^{\alpha\beta} \right) \right].
\end{aligned} \tag{11}$$

Из (11) следует, что в системе покоя частицы и в приближении импульса отдачи получим:

$$\begin{aligned}
M(\gamma_{M_2}) = & -2i\pi\gamma_{M_2}\chi_2^+ \left\{ \omega_1 \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} k_2 \right) \left( k_2 \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ e e \end{bmatrix} \right) + \omega_2 \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} k_1 \right) \left( k_1 \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ e e \end{bmatrix} \right) - \right. \\
& \left. - \omega_2 \left( k_1 e \right) \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_1 e \end{bmatrix} \right) - \omega_1 \left( k_2 e \right) \left( \overset{\rightarrow}{\sigma} \begin{bmatrix} \rightarrow \rightarrow \\ k_2 e \end{bmatrix} \right) \right\} \chi_1.
\end{aligned} \tag{12}$$

По виду выражение (12) не совпадает со структурой  $M(\gamma_{M_2})$ , приведенной в работах [10, 15]. В свою очередь, воспользовавшись тождеством [10]:



$$2 \left( \vec{\sigma} \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{bmatrix} \right) = \left( \vec{\sigma} k_2 \right) \left( k_2 \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{bmatrix} \right) + \left( \vec{\sigma} k_1 \right) \left( k_1 \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{bmatrix} \right) + \\ + \left( \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow \\ e & k_1 \end{bmatrix} \right) \left( \vec{\sigma} \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_1) \\ k_1 & e \end{bmatrix} \right) - \left( \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_1) & \rightarrow \\ e & k_2 \end{bmatrix} \right) \left( \vec{\sigma} \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_2)^* \\ k_2 & e \end{bmatrix} \right),$$

в третьем порядке по  $\omega$  получим амплитуду [15]:

$$M(\gamma_{M_2}) = 4i\pi\omega^3 \gamma_{M_2} \chi_2^+ \left\{ \vec{\sigma} \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e & \end{bmatrix} - \left( \vec{\sigma} \hat{k}_2 \right) \left( \hat{k}_2 \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e & \end{bmatrix} \right) - \right. \\ \left. - \left( \vec{\sigma} \hat{k}_1 \right) \left( \hat{k}_1 \begin{bmatrix} \rightarrow & \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e & \end{bmatrix} \right) \right\}, \quad (13)$$

где  $\hat{k}_1 = \frac{\vec{k}_1}{\omega_1}$  и  $\hat{k}_2 = \frac{\vec{k}_2}{\omega_2}$ .

Таким образом, амплитуда (13) согласуется с амплитудой, приведенной в [15].

По аналогии с лагранжианом (3) построим новый лагранжиан, с помощью которого будем определять вклады гираций (характеристик, связанных с несохранением четности) в амплитуду комптоновского рассеяния. Для этого достаточно в (3) сделать замену  $\hat{W}_\kappa \rightarrow \frac{1}{m} \hat{\partial}_\kappa$ . В результате получим:

$$L = \frac{i\pi}{2m^2} (\varepsilon^{\mu\rho\kappa\delta}) \left[ \delta_E F_{\nu\mu} \hat{\partial}_\delta F_{\rho\sigma} + \delta_M \tilde{F}_{\nu\mu} \hat{\partial}_\delta \tilde{F}_{\rho\sigma} \right] \bar{\Psi} \left[ \left( \gamma^\nu \hat{\partial}_\kappa \hat{\partial}_\sigma \hat{\partial}^\sigma + \gamma^\sigma \hat{\partial}_\kappa \hat{\partial}_\nu \right) \right] \Psi, \quad (14)$$

где  $\delta_E$  и  $\delta_M$  – электрическая и магнитная гирации. Амплитуда комптоновского рассеяния, которая получена на основании лагранжиана (14), в системе покоя мишени и в пренебрежении импульсом отдачи мишени, определяется так:

$$M = 4\pi\omega_1\omega_2\chi_f^+ \left\{ \delta_E \left( \left( \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \right) \cdot \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow(\lambda_1) \\ e & e \end{bmatrix} \right) + \delta_M \left( \left( \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \right) \cdot \left[ \vec{\Sigma}_2 \vec{\Sigma}_1 \right] \right) \right\} \chi_i, \quad (15)$$

где  $\vec{\Sigma}_2 = \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_2)^* & \rightarrow \\ e & n_2 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{\Sigma}_1 = \begin{bmatrix} \rightarrow(\lambda_1) & \rightarrow \\ e & n_1 \end{bmatrix}$ . Соотношение (15) согласуется с низкоэнергетическим определением амплитуды, если тензоры поляризуемостей представить через  $\delta_E$  и  $\delta_M$  [16]:

$$\alpha_{ij} = \alpha_1 \delta_{ij} + i \delta_E \varepsilon_{ijk} \partial_k, \quad \beta_{ij} = \beta_1 \delta_{ij} + i \delta_M \varepsilon_{ijk} \partial_k,$$

где производная  $\partial_\kappa$  действует на векторы напряженности электромагнитного поля.

Таким образом, из уравнений (10), (11) и (15) следует:

1) в обеих амплитудах выполняется условие перекрестной симметрии;

2) если в соотношениях (10) и (11) выполняется условие инвариантности относительно инверсии пространства, то в соотношении (15) это условие нарушается;

3) вклады гирации и спиновых дипольных поляризуемостей в амплитуду комптоновского рассеяния на нуклоне начинается с третьего порядка по энергии фотонов.

### Заключение

В данной работе получен квантово-полевой релятивистски-инвариантный эффективный лагранжиан, учитывающий вклады спиновых поляризуемостей, обусловленных электромагнитными дипольными и квадрупольными моментами адронов.

На основе релятивистских свойств, P-преобразований, а также перекрестной симметрии и алгебры операторов спина, определены ковариантные спиновые структуры амплитуды комптоновского рассеяния, согласующиеся с низкоэнергетическими теоремами.

Показано, что в предложенном эффективном теоретико-полевом подходе спиновые поляризуемости и гирации вносят вклад в разложение амплитуды комптоновского рассеяния начиная с третьего порядка по энергии фотонов.

### Литература

1. Paz, G. An introduction to NRQED / G. Paz // [Electronic resource]. – 2015. – Mode of access: <http://hep-ph/1503.07216>. – Date of access: 24.03.2015.
2. Hill, R.J. The NRQED lagrangian at order  $\frac{1}{M^4}$  / R.J. Hill, G. Lee, G. Paz, M.P. Solon // Phys. Rev. D. – 2013. – Vol. 87. – № 5. – P. 053017-1-13.
3. Bedaque, P.F. Parity violation in  $\vec{\gamma} p$  Compton Scattering / P.F. Bedaque, M.J. Savage // Phys. Rev. C. – 2000. – Vol. 62. – P. 018501-1-6.
4. Gorchtein, M. Forward Compton Scattering with weak neutral current: constraints from sum rules / M. Gorchtein, X. Zhang // [Electronic resource]. – 2015. – Mode of access: <http://nucl-th/1501.0535>. – Date of access: 22.01.2015.
5. Gorchtein, M. CP-violation in Compton Scattering / M. Gorchtein // Phys. Rev. C. – 2008. – Vol. 77. – P. 065501-1-6.
6. Carlson, C.E. Constraining off-shell effects using low-energy Compton scattering / C.E. Carlson, M. Vanderhaeghen // [Electronic resource]. – 2011. – Mode of access: <http://physics.atom-ph/1109.3779>. – Date of access: 04.10.2011.
7. Krupina, N. Separation of proton polarizabilities with the beam asymmetry of Compton scattering / N. Krupina, V. Pascalutsa // Phys. Rev. Lett. – 2013. – Vol.110. – № 26. – P. 262001-1-4.
8. Damashek, M. Forward Compton scattering / M. Damashek, F.J. Gilman // Phys. Rev. – 1970. – Vol. D1. – № 6. – P. 1319–1332.

9. Петрунькин, В.А. Электрическая и магнитная поляризуемости адронов / В.А. Петрунькин // ЭЧАЯ. – 1981. – Т. 12. – Вып. 3. – С. 692–753.

10. Low-energy Compton scattering of polarized photons on polarized nucleons / D. Babusci [et al.] // Phys. Rev. – 1998. – Vol. C58. – № 2. – P. 1013–1041.

11. Андреев, В.В. Ковариантное представление спиновых поляризуемостей нуклона / В.В. Андреев, О.М. Дерюжкова, Н.В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 3(20). – С. 7–12.

12. Андреев, В.В. Поляризуемость элементарных частиц в теоретико-полевым подходе / В.В. Андреев, Н.В. Максименко // Проблемы физики, математики и техники. – 2011. – № 4(9). – С. 7–11.

13. Andreev, V.V. Covariant equations of motion of a spin  $\frac{1}{2}$  particle in an electromagnetic field with allowance for polarizabilities / V.V. Andreev, O.M. Deryuzhko, N.V. Maksimenko // Russ. Phys. Journ. – 2014. – Vol. 56. – № 9. – P. 1069–1075.

14. Андреев, В.В. Дипольные спиновые поляризуемости и гирации нуклона / В.В. Андреев, О.М. Дерюжкова, Н.В. Максименко // Известия Гомельского госуниверситета. – 2015. – № 6 (93). – С. 106–111.

15. Levchuk, M.I. Deuteron Compton scattering below pion photoproduction threshold / M.I. Levchuk, A.I. L'vov // Nucl. Phys. – 2000. – Vol. A674. – P. 449–492.

16. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Минск : Наука и техника, 1976. – 456 с.

**Е.М. Овсиюк<sup>1</sup>, Я.А. Войнова<sup>2</sup>, В.М. Редьков<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь

<sup>2</sup>ГУО «Кочищанская средняя школа Ельского района»,  
Ельский район, Беларусь

<sup>3</sup>ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси,  
Минск, Беларусь

## **РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 0 В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. I**

Исследуем дифференциальное уравнение, возникающее при изучении квантовой механики скалярной релятивистской частицы в однородном электрическом поле:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + (\varepsilon + eEz)^2 - \mu^2 \right) \Phi(z) = 0. \quad (1)$$

В уравнении (1) перейдем к новой переменной (полагаем  $eE > 0$ ):

$$Z = i \frac{(\varepsilon + eEz)^2}{eE} = iZ_0, \quad Z_0 > 0,$$

тогда (1) примет вид

$$\left( \frac{d^2}{dZ^2} + \frac{1/2}{Z} \frac{d}{dZ} - \frac{1}{4} + \frac{i\sigma}{Z} \right) \Phi(Z) = 0, \quad \sigma = \frac{\mu^2}{4eE}.$$

Это уравнение с двумя особыми точками. Точка  $Z = 0$  – регулярная, поведение решений около нее описывается функциями:  $Z \rightarrow 0$ ,  $\Phi(Z) = Z^A$ ,  $A = 0, 1/2$ . В точке  $Z = \infty$  имеем нерегулярную особенность ранга 2. Действительно, в переменной  $y = Z^{-1}$  уравнение запишется так:

$$\left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{3/2}{y} \frac{d}{dy} - \frac{1}{4y^4} + \frac{i\sigma}{y^3} \right) \Phi = 0.$$

Асимптотики решений при  $y \rightarrow 0$  должны иметь вид:

$$y \rightarrow 0, \quad \Phi = y^C e^{D/y}, \quad D_1 = +\frac{1}{2}, \quad C_1 = \frac{1}{4} + i\sigma; \quad D_2 = -\frac{1}{2}, \quad C_2 = \frac{1}{4} - i\sigma,$$

т. е. на бесконечности возможны два поведения решений:

$$Z \rightarrow \infty, \quad \Phi = Z^{-C} e^{DZ} = \begin{cases} Z^{-C_1} e^{D_1 Z} = Z^{-1/4 - i\sigma} e^{+Z/2} \\ Z^{-C_2} e^{D_2 Z} = Z^{-1/4 + i\sigma} e^{-Z/2} \end{cases},$$

используем главную ветвь логарифмической функции.

Обратимся к построению решений во всей области переменной. Вводя подстановку  $\Phi(Z) = e^{-Z/2} f(Z)$ , получаем гипергеометрическое уравнение

$$\left( Z \frac{d^2}{dZ^2} + (2A + 1/2 - Z) \frac{d}{dZ} - (A + 1/4 - i\sigma) \right) f(Z) = 0,$$

$$a = 1/4 - i\sigma, \quad c = +1/2, \quad \Phi(Z) = e^{-Z/2} f(Z).$$

Введем сначала следующие два независимых решения

$$Y_1(Z) = F(a, c; Z) = e^Z F(c - a, c; -Z),$$

$$Y_2(Z) = Z^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c; Z) = Z^{1-c} e^Z F(1 - a, 2 - c; -Z).$$

Эти решения дают две соответствующие функции  $\Phi$ :

$$\Phi_1 = e^{-Z/2} F(a, c; Z) = e^{+Z/2} F(c - a, c; -Z),$$

$$\Phi_2 = e^{-Z/2} Z^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c; Z) = Z^{1-c} e^{+Z/2} F(1 - a, 2 - c; -Z).$$

Учитывая тождества:

$$c - a = a^*, \quad Z^* = -Z, \quad a - c + 1 = (1 - a)^*,$$

закключаем, что первое решение  $\Phi_1(Z)$  задается вещественной функцией, второе решение  $\Phi_2(Z)$  обладает определенной симметрией:

$$\Phi_1(Z) = +[\Phi_1(Z)]^*, \quad \Phi_2(Z) = i[\Phi_2(Z)]^*.$$

Отмеченное свойство функции  $\Phi_2(Z)$  можно представить как свойство вещественности, если использовать другую нормировку:

$$\bar{\Phi}_2(Z) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \Phi_2(Z) = \left( \frac{1-i}{\sqrt{2}} \Phi_2(Z) \right)^* = (\bar{\Phi}_2(Z))^*. \quad (2)$$

Для больших  $Z = iZ_0$ ,  $Z_0 \rightarrow +\infty$  можно воспользоваться асимптотической формулой [1, с. 266]

$$F(a, c, Z) = \left( \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-Z)^{-a} + \dots \right) + \left( \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} e^Z Z^{a-c} + \dots \right).$$

Дальше, учитывая соотношения

$$\begin{aligned} (-Z)^{-a} &= (-iZ_0)^{-1/4+i\sigma} = \left( e^{\ln Z_0 - i\pi/2} \right)^{-1/4+i\sigma} = e^{-(1/4+i\sigma)i\pi/2} e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0}, \\ Z^{a-c} &= (iZ_0)^{-1/4-i\sigma} = \left( e^{\ln Z_0 + i\pi/2} \right)^{-1/4-i\sigma} = e^{+(-1/4-i\sigma)i\pi/2} e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0}, \\ \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} &= \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4+i\sigma)}, \quad \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4-i\sigma)}, \end{aligned}$$

устанавливаем, что на бесконечности решение ведет себя так:

$$\begin{aligned} Y_1(Z) &= \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4+i\sigma)} e^{-(1/4+i\sigma)i\pi/2} e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0} e^{-iZ_0/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4-i\sigma)} e^{+(-1/4-i\sigma)i\pi/2} e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0} e^{+iZ_0/2} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда после перехода к функции  $\Phi_1(Z)$  находим

$$\begin{aligned} \Phi_1(Z) &= \left\{ \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4+i\sigma)} e^{-(1/4+i\sigma)i\pi/2} e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0} e^{-iZ_0/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/4-i\sigma)} e^{+(-1/4-i\sigma)i\pi/2} e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0} e^{+iZ_0/2} \right\}; \quad (3) \end{aligned}$$

решение ведет себя как сумма двух комплексно сопряженных слагаемых. Аналогично, используя общую асимптотическую формулу [1, с. 266]

$$F(a-c+1, 2-c, Z) = \left( \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} (-Z)^{-a+c-1} + \dots \right) + \left( \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} e^Z Z^{a-1} + \dots \right)$$

и учитывая равенства

$$\begin{aligned} (-Z)^{-a+c-1} &= (-iZ_0)^{-3/4+i\sigma} = \left( e^{\ln Z_0 - i\pi/2} \right)^{-3/4+i\sigma} = e^{-(3/4+i\sigma)i\pi/2} e^{(-3/4+i\sigma)\ln Z_0}, \\ Z^{a-1} &= (iZ_0)^{-3/4-i\sigma} = \left( e^{\ln Z_0 + i\pi/2} \right)^{-3/4-i\sigma} = e^{+(-3/4-i\sigma)i\pi/2} e^{(-3/4-i\sigma)\ln Z_0}, \end{aligned}$$

$$\frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(1-a)} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)}, \quad \frac{\Gamma(2-c)}{\Gamma(a-c+1)} = \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)},$$

устанавливаем поведение второго решения на бесконечности:

$$F(a-c+1, 2-c, Z) = e^{iZ_0/2} \times \left\{ \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)} e^{-(3/4+i\sigma)i\pi/2} e^{(-3/4+i\sigma)\ln Z_0} e^{-iZ_0/2} + \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)} e^{+(3/4-i\sigma)i\pi/2} e^{(-3/4-i\sigma)\ln Z_0} e^{+iZ_0/2} \right\}.$$

Отсюда после перехода к функции  $\bar{\Phi}_2(Z)$  получаем

$$\bar{\Phi}_2(Z) = \left\{ \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4+i\sigma)} e^{-(3/4+i\sigma)i\pi/2} e^{(-1/4+i\sigma)\ln Z_0} e^{-iZ_0/2} + \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(3/4-i\sigma)} e^{+(3/4-i\sigma)i\pi/2} e^{(-1/4-i\sigma)\ln Z_0} e^{+iZ_0/2} \right\}; \quad (4)$$

этот результат согласуется со свойством (2).

Можно в явном виде выделить решения, которые на бесконечности ведут себя как комплексно-значные функции. Для этого нужно воспользоваться другой парой решений гипергеометрического уравнения [1, с. 246]

$$Y_5(Z) = \Psi(a, c; Z), \quad Y_7(Z) = e^Z \Psi(c-a, c; -Z).$$

Пары решений  $\{Y_5, Y_7\}$  и  $\{Y_1, Y_2\}$  связаны соотношениями Куммера [1, с. 266]:

$$Y_5 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(a-c+1)} Y_1 + \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(a)} Y_2, \quad Y_7 = \frac{\Gamma(1-c)}{\Gamma(1-a)} Y_1 - \frac{\Gamma(c-1)}{\Gamma(c-a)} e^{izc} Y_2.$$

Соответствующие  $\Phi$ -решения задаются соотношениями

$$\Phi_5(Z) = e^{-Z/2} \Psi(a, c; Z), \quad \Phi_7(Z) = e^{+Z/2} \Psi(c-a, c; -Z);$$

функции  $\Phi_5(Z)$ ,  $\Phi_7(Z)$  являются комплексно-сопряженными друг другу.

При больших  $Z$  справедливы асимптотические формулы:

$$Y_5 = \Psi(a, c; Z) = Z^{-a} = (iZ_0)^{-1/4+i\sigma} = \left( e^{\ln Z_0 + i\pi/2} \right)^{-1/4+i\sigma},$$

$$Y_7(Z) = e^Z \Psi(c-a, c; -Z) = e^Z (-iZ_0)^{a-c} = e^{iZ_0} (-iZ_0)^{-1/4-i\sigma} = e^{iZ_0} \left( e^{\ln Z_0 - i\pi/2} \right)^{-1/4-i\sigma}.$$

Эти соотношения после преобразования к функциям  $\Phi(Z)$  примут вид:

$$\Phi_5 = e^{-iZ_0/2} \left( e^{\ln Z_0 + i\pi/2} \right)^{-1/4+i\sigma}, \quad \Phi_7 = e^{+iZ_0/2} \left( e^{\ln Z_0 - i\pi/2} \right)^{-1/4-i\sigma}.$$

Это комплексно-сопряженные друг другу функции; именно они присутствуют в суперпозициях (3) и (4).

Исследуем на асимптотиках выражения для сохраняющегося тока  $j_z$ :

$$j_z = \frac{ie}{2m} \left( \Phi(z) \frac{d\Phi^*(z)}{dz} - \Phi^*(z) \frac{d\Phi(z)}{dz} \right).$$

Необходимо пересчитать это соотношение к переменной  $Z$ :

$$j_z = \frac{ie}{2m} 2i\sqrt{eE}\sqrt{-iZ} \left( \Phi(Z) \frac{d\Phi^*(Z)}{dZ} - \Phi^*(Z) \frac{d\Phi(Z)}{dZ} \right).$$

Исходим из функций  $\Phi_5(Z)$  и  $\Phi_7(Z)$ :

$$\Phi_5(Z) = e^{-Z/2} Z^{-1/4+i\sigma}, \quad \Phi_7(Z) = e^{+Z/2} (-Z)^{-1/4-i\sigma}.$$

После простого вычисления находим:

$$j_Z = \frac{ie}{2m} 2i\sqrt{eE}\sqrt{-iZ} \times \\ \times \left[ \frac{1}{2} Z^{-1/4+i\sigma} (-Z)^{-1/4-i\sigma} + \left( \frac{1}{4} + i\sigma \right) Z^{-1/4+i\sigma} (-Z)^{-1/4-i\sigma} (-Z)^{-1} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} (-Z)^{-1/4-i\sigma} Z^{-1/4+i\sigma} - \left( \frac{1}{4} - i\sigma \right) (-Z)^{-1/4-i\sigma} Z^{-1/4+i\sigma} Z^{-1} \right].$$

Оставляя главный член в асимптотике для тока на бесконечности, получаем:

$$\Phi_5(Z), \quad j_Z = -\frac{e}{m} \sqrt{eE}\sqrt{-iZ} \left( Z^{-1/4+i\sigma} (-Z)^{-1/4-i\sigma} \right).$$

Для сопряженного решения имеем результат с противоположным знаком:

$$\Phi_7(Z), \quad j_Z = +\frac{e}{m} \sqrt{eE}\sqrt{-iZ} \left( Z^{-1/4+i\sigma} (-Z)^{-1/4-i\sigma} \right).$$

Учитывая тождество

$$Z = iZ_0 = e^{\ln i Z_0} = e^{\ln Z_0 + i\pi/2},$$

для тока находим

$$\Phi_5(Z), \quad j_Z = -\frac{e}{m} \sqrt{eE}\sqrt{Z_0} \left( Z^{-1/4+i\sigma} (-Z)^{-1/4-i\sigma} \right) = \\ = -\frac{e}{m} \sqrt{eE}\sqrt{Z_0} \left( e^{\ln Z_0 + i\pi/2} \right)^{-1/4} \left( e^{\ln Z_0 + i\pi/2} \right)^{-i\sigma} \times [\text{comp. cong.}].$$

Окончательно получаем:

$$\Phi_5(Z), \quad j_Z = -\frac{e}{m} \sqrt{eE}\sqrt{Z_0} \frac{e^{\sigma\pi}}{\sqrt{Z_0}} = -\frac{e}{m} \sqrt{eE} e^{\sigma\pi}, \\ \Phi_7(Z), \quad j_Z = +\frac{e}{m} \sqrt{eE}\sqrt{Z_0} \frac{e^{\sigma\pi}}{\sqrt{Z_0}} = +\frac{e}{m} \sqrt{eE} e^{\sigma\pi}.$$

Таким образом, исследованы свойства решений для релятивистской частицы со спином 0 во внешнем однородном электрическом поле. Построены и проанализированы две пары линейно независимых решений. С использованием асимп-

тотик решений найдены выражения для компоненты  $j_z$  сохраняющегося тока; они обращаются в ноль для решений из первой пары, и противоположны по знаку для решений из второй пары.

## Литература

1. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции / Г. Бейтмен, А. Эрдейи; пер. с англ. Н.Я. Виленкина. – 2-е изд., стер. – М. : Наука, 1973 – Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – 294 с.

**Е.М. Овсюк<sup>1</sup>, Я.А. Войнова<sup>2</sup>, В.М. Редьков<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Мозырь, Беларусь

<sup>2</sup>ГУО «Кочищанская средняя школа Ельского района»,  
Ельский район, Беларусь

<sup>3</sup>ГНУ «Институт физики имени Б.И. Степанова» НАН Беларуси,  
Минск, Беларусь

## РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 0 В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. II

Уравнение, возникающее при рассмотрении релятивистской скалярной частицы в однородном электрическом поле, можно исследовать, не переходя к квадратичной переменной  $Z$  вместо исходной  $z$ . Рассмотрим уравнение в таком подходе:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - m^2 + 2\varepsilon e E z + e^2 E^2 z^2 \right) \Phi(z) = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим поведение решений около  $z = 0$  (отмечаем, что это не особая точка уравнения):

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} + \varepsilon^2 - m^2 \right) \Phi(z) \approx 0, \quad \Phi(z) = e^{\pm i \sqrt{\varepsilon^2 - m^2} z}. \quad (2)$$

Рассмотрим уравнение на бесконечности:

$$z = \frac{1}{y}, \quad \left( \frac{d^2}{dy^2} + \frac{2}{y} \frac{d}{dy} + \frac{\varepsilon^2 - m^2}{y^4} + \frac{2\varepsilon e E}{y^5} + \frac{e^2 E^2}{y^6} \right) \Phi(y) = 0. \quad (3)$$

У этого уравнения есть единственная нерегулярная особая точка в бесконечности [1], она имеет ранг 3.



Ищем локальные решения Фробениуса [1] около точки  $y = 0$  ( $z = \infty$ ) в виде:

$$\Phi(y) = y^A e^{B/y} e^{C/y^2} f(y);$$

находим уравнение для функции  $f(y)$ :

$$f'' + \left( \frac{2A+2}{y} - \frac{2B}{y^2} - \frac{4C}{y^3} \right) f' + \left( \frac{A(A-1)+2A}{y^2} - \frac{2BA}{y^3} - \frac{-\varepsilon^2 + m^2 + 2CA - B^2 + 2C(A-3) + 4C}{y^4} + \frac{2\varepsilon eE + 4CB}{y^5} + \frac{e^2 E^2 + 4C^2}{y^6} \right) f = 0. \quad (4)$$

Требуем обращения в ноль коэффициентов при  $y^{-6}, y^{-5}, y^{-4}$ :

$$e^2 E^2 + 4C^2 = 0 \Rightarrow C_1 = +\frac{ieE}{2}, C_2 = -\frac{ieE}{2}. \quad (5)$$

Дальше

$$2\varepsilon eE + 4CB = 0, B = -\frac{\varepsilon eE}{2C} \Rightarrow B_1 = +i\varepsilon, B_2 = -i\varepsilon. \quad (6)$$

Третье соотношение

$$-\varepsilon^2 + m^2 + 2CA - B^2 + 2C(A-3) + 4C = 0$$

даёт

$$A = +\frac{1}{2} - \frac{m^2}{4C} \Rightarrow A_1 = \frac{1}{2} - i\gamma, A_2 = \frac{1}{2} + i\gamma \quad \left( \frac{m^2}{2eE} = -\gamma \right). \quad (7)$$

Таким образом, локальные решения Фробениуса в окрестности точки  $z = \infty$  имеют вид:

$$\Phi_1(z) = z^{-A_1} e^{B_1 z} e^{C_1 z^2} f_1(y) = z^{-1/2} z^{+i\gamma} e^{+i\varepsilon z} e^{+i(\varepsilon/2)z^2} f_1(z), \quad (8)$$

$$\Phi_2(z) = z^{-A_2} e^{B_2 z} e^{C_2 z^2} f_2(y) = z^{-1/2} z^{-i\gamma} e^{-i\varepsilon z} e^{-i(\varepsilon/2)z^2} f_2(z). \quad (9)$$

Обратимся к анализу дифференциального уравнения для функции  $f(y)$ ,  $y = z^{-1}$  (будем следить одновременно за обоими вариантами  $f = f_1, f_2$ ):

$$f'' + \left( \frac{2A+2}{y} - \frac{2B}{y^2} - \frac{4C}{y^3} \right) f' + \left( \frac{A(A+1)}{y^2} - \frac{2BA}{y^3} \right) f = 0. \quad (10)$$

Обращаем внимание на то, что наборы параметров  $\{A_1, B_1, C_1\}$  и  $\{A_2, B_2, C_2\}$  связаны операцией комплексного сопряжения:

$$\{A_2, B_2, C_2\} = \{A_1^*, B_1^*, C_1^*\}; \quad (11)$$

следовательно, так же будут связаны и решения уравнений вида (9):  $f_2(y) = f_1^*(y)$ .

Будем строить решения в виде степенного ряда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n \quad f' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n y^{n-1}, \quad f'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n y^{n-2}. \quad (12)$$

Подставляя эти равенства в уравнение

$$y^3 f'' + (2A+2)y^2 f' - 2Byf' - 4Cf' + A(A+1)y - 2BAf = 0, \quad (13)$$

получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n y^{n+1} + \\ & + (2A+2) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n y^{n+1} - 2B \sum_{n=1}^{\infty} n c_n y^n - 4C \sum_{n=1}^{\infty} n c_n y^{n-1} + \\ & + A(A+1) \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^{n+1} - 2AB \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n = 0. \end{aligned}$$

После изменения индексов суммирования имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=3}^{\infty} (n-1)(n-2) c_{n-1} y^n + \\ & + (2A+2) \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) c_{n-1} y^n - 2B \sum_{n=1}^{\infty} n c_n y^n - 4C \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} y^n + \\ & + A(A+1) \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} y^n - 2AB \sum_{n=0}^{\infty} c_n y^n = 0. \end{aligned}$$

Приравниваем к нулю коэффициенты при всех степенях  $x^n$ :

$$\begin{aligned} n=0, \quad & -4Cc_1 - 2ABc_0 = 0, \\ n=1, \quad & -2Bc_1 - 8Cc_2 + A(A+1)c_0 - 2ABc_1 = 0, \\ n=2, \quad & (2A+2)c_1 - 4Bc_2 - 12Cc_3 + A(A+1)c_1 - 2ABc_2 = 0, \\ n=3, \quad & (n-1)(n-2)c_2 + (2A+2)c_2 - 6Bc_3 - 16Cc_4 + A(A+1)c_2 - 2ABc_3 = 0, \end{aligned}$$

.....

$$n = 4, 5, 6, \dots$$

$$\begin{aligned} & (n-1)(n-2)c_{n-1} + (2A+2)(n-1)c_{n-1} - 2Bnc_n - \\ & - 4C(n+1)c_{n+1} + A(A+1)c_{n-1} - 2ABc_n = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к 3-членным рекуррентным соотношениям  $n = 4, 5, 6, \dots$ :

$$\begin{aligned} & [(n-1)(n-2+2A+2) + A(A+1)]c_{n-1} - \\ & - (2Bn + 2AB)c_n - 4C(n+1)c_{n+1} = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Радиус сходимости  $R_{conv}$  степенного ряда можно вычислить согласно формуле Даламбера (предполагаем существование предела  $c_n / c_{n+1}$ ,  $n \rightarrow \infty$  и конечность радиуса сходимости, включая и равный нулю)

$$[(n-1)(n-2+2A+2) + A(A+1)] \frac{c_{n-1}}{c_n} \frac{c_n}{c_{n+1}} - (2Bn + 2AB) \frac{c_n}{c_{n+1}} - 4C(n+1) = 0;$$

при этом получаем

$$R_{conv} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = 0. \quad (15)$$

Этот ответ при возвращении к исходной переменной  $z$  должен интерпретироваться как бесконечный радиус сходимости.

Чтобы лучше понять смысл построенных решений, исследуем структуру тока для этих решений:

$$j_z = \frac{ie}{2m} \left( \Phi(z) \frac{d\Phi^*(z)}{dz} - \Phi^*(z) \frac{d\Phi(z)}{dz} \right). \quad (16)$$

Учитывая

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) = z^{-1/2} z^{+i\gamma} e^{+i\epsilon z} e^{+i(\epsilon/2)z^2} f_1(z),$$

$$\Phi^*(z) = \Phi_2(z) = z^{-1/2} z^{-i\gamma} e^{-i\epsilon z} e^{-i(\epsilon/2)z^2} f_2(z),$$

находим выражения для производных

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi^*}{dz} = & -\frac{1}{2} z^{-3/2} z^{-i\gamma} e^{-i\epsilon z} e^{-i(\epsilon/2)z^2} f_2(z) - i\gamma z^{-1/2} z^{-i\gamma-1} e^{-i\epsilon z} e^{-i(\epsilon/2)z^2} f_2(z) - \\ & -i\epsilon z^{-1/2} z^{-i\gamma} e^{-i\epsilon z} e^{-i(\epsilon/2)z^2} f_2(z) - i\epsilon z z^{-1/2} z^{-i\gamma} e^{-i\epsilon z} e^{-i(\epsilon/2)z^2} f_2(z) + \\ & + z^{-1/2} z^{-i\gamma} e^{-i\epsilon z} e^{-i(\epsilon/2)z^2} f_2'(z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(z) \cdot \frac{d\Phi^*(z)}{dz} = & -\frac{1}{2} z^{-2} f_1(z) f_2(z) - i\gamma z^{-2} f_1(z) f_2(z) - i\epsilon z^{-1} f_1(z) f_2(z) - \\ & -i\epsilon f_1(z) f_2(z) + z^{-1} f_1(z) \frac{df_2(z)}{dz}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dz} = & -\frac{1}{2} z^{-3/2} z^{+i\gamma} e^{+i\epsilon z} e^{+i(\epsilon/2)z^2} f_1(z) + i\gamma z^{-1/2} z^{+i\gamma-1} e^{+i\epsilon z} e^{+i(\epsilon/2)z^2} f_1(z) + \\ & + i\epsilon z^{-1/2} z^{+i\gamma} e^{+i\epsilon z} e^{+i(\epsilon/2)z^2} f_1(z) + i\epsilon z z^{-1/2} z^{+i\gamma} e^{+i\epsilon z} e^{+i(\epsilon/2)z^2} f_1(z) + \\ & + z^{-1/2} z^{+i\gamma} e^{+i\epsilon z} e^{+i(\epsilon/2)z^2} f_1'(z); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi^*(z) \cdot \frac{d\Phi(z)}{dz} = & -\frac{1}{2} z^{-2} f_1(z) f_2(z) + i\gamma z^{-2} f_1(z) f_2(z) + \\ & + i\epsilon z^{-1} f_1(z) f_2(z) + i\epsilon f_1(z) f_2(z) + z^{-1} f_2(z) \frac{df_1(z)}{dz}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем выражение:

$$j_z = \frac{ie}{2m} \left( \Phi(z) \frac{d\Phi^*(z)}{dz} - \Phi^*(z) \frac{d\Phi(z)}{dz} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{ie}{2m} \left( -2i\gamma z^{-2} f_1 f_2 - 2i\varepsilon z^{-1} f_1 f_2 - 2i\varepsilon f_1 f_2 + \left( z^{-1} f_1 \frac{df_2}{dz} - z^{-1} f_2 \frac{df_1}{dz} \right) \right) = \\
&= \frac{ie}{2m} \left( -\frac{2i\gamma}{z^2} f_1 f_1^* - 2i\varepsilon \left( \frac{1}{z} + 1 \right) f_1 f_1^* + \frac{1}{z} \left( f_1 \frac{df_1^*}{dz} - f_1^* \frac{df_1}{dz} \right) \right).
\end{aligned}$$

Учитываем, что на асимптотике  $f_1 \rightarrow 1$ , оставляя главный член асимптотического разложения для тока, получаем:

$$\Phi_1, \quad j_z = +\frac{ie}{2m} (-2i\varepsilon) f_1 f_1^* = \frac{e\varepsilon}{m} f_1 f_1^*. \quad (17)$$

Для комплексно-сопряженного решения  $\Phi_2$  будем иметь похожее выражение для тока, но с противоположным знаком:

$$\Phi_2, \quad j_z = -\frac{ie}{2m} (-2i\varepsilon) f_1 f_1^* = -\frac{e\varepsilon}{m} f_1 f_1^*. \quad (18)$$

Из двух комплексных решений  $\Phi_1, \Phi_2$  легко получить два вещественных решения с нулевым током:

$$\Phi_1 + \Phi_2 = R, \quad R^* = +R; \quad \Phi_1 - \Phi_2 = M, \quad M^* = -M;$$

эти решения представляют стоячие волны.

Таким образом, исследовано дифференциальное уравнение, возникающее при рассмотрении релятивистской частицы со спином 0 во внешнем однородном электрическом поле. Уравнение может быть классифицировано как имеющее в  $z = \infty$  единственную и нерегулярную особую точку ранга 3. Построены два линейно независимых локальных решения Фробениуса около точки  $z = \infty$ ; показано, что возникающие при этом степенные ряды являются 3-членными и они сходятся во всей области переменной  $z \in (-\infty, +\infty)$ . Построенные решения являются комплексно-сопряженными друг другу во всей области пространства. С использованием асимптотик решений найдены выражения для компоненты  $j_z$  сохраняющегося тока; они противоположны по знаку для найденных решений.

## Литература

1. Slavyanov, S.Yu. Special functions. A unified theory based on singularities / S.Yu. Slavyanov, W. Lay. – New York : Oxford University Press, 2000. – 312 p.

A.A. Pankov, A.V. Tsytrinov

ICTP Affiliated Centre at Gomel State Technical University, Gomel, Belarus

## PROBING AND IDENTIFYING NEW PHYSICS SCENARIOS AT ILC WITH POLARIZED BEAMS

### Introduction

Numerous new physics (NP) scenarios, candidates as solutions of Standard Model (SM) conceptual problems, are characterized by novel interactions mediated by exchanges of very heavy states with mass scales significantly greater than the electroweak scale. In many cases, theoretical considerations as well as current experimental constraints indicate that the new objects may be too heavy to be directly produced even at the highest energies of the CERN Large Hadron Collider (LHC) and at foreseen future colliders, such as the  $e^+e^-$  International Linear Collider (ILC). In this situation the new, non-standard, interactions would only be revealed by indirect, virtual, effects manifesting themselves as deviations from the predictions of the SM. In the case of indirect discovery the effects may be subtle since many different NP scenarios may lead to very similar experimental signatures and they may easily be confused in certain regions of the parameter space for each class of models.

There are many very different NP scenarios that predict new particle exchanges which can lead to contact interactions (CI) which may show up below direct production thresholds. These are compositeness, a  $Z'$  boson from models with an extended gauge sector, scalar or vector leptoquarks,  $R$ -parity violating sneutrino ( $\tilde{\nu}$ ) exchange, bi-lepton boson exchanges, anomalous gauge boson couplings (AGC), virtual Kaluza-Klein (KK) graviton exchange in the context of gravity propagating in large extra dimensions, exchange of KK gauge boson towers or string excitations, *etc.* For details of the analysis and original references, see [1, 2]. Of course, this list is not exhaustive, because other kinds of contact interactions may be at play.

If  $R$ -parity is violated it is possible that the exchange of sparticles can contribute significantly to SM processes and may even produce peaks or bumps in cross sections if they are kinematically accessible. Below threshold, these new spin-0 exchanges may make their manifestation known via indirect effects on observables (cross sections and asymmetries), including spectacular decays. Here we will address the question of whether the effects of the exchange of scalar (spin-0) sparticles can be differentiated at linear colliders in process:

$$e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^- \quad (\text{or } \tau^- + \tau^+), \quad (1)$$

from those associated with the wide class of other contact interactions mentioned above.

## 1. Observables and NP parametrization in lepton pair production

For a sneutrino in an  $R$ -parity-violating theory, we take the basic couplings to leptons and quarks to be given by

$$\lambda_{ijk} L_i L_j \bar{E}_k + \lambda'_{ijk} L_i Q_j \bar{D}_k. \quad (2)$$

Here,  $L$  ( $Q$ ) are the left-handed lepton (quark) doublet superfields, and  $\bar{E}$  ( $\bar{D}$ ) are the corresponding left-handed singlet fields. If just the  $R$ -parity violating  $\lambda L L \bar{E}$  terms of the superpotential are present it is clear that observables associated with leptonic process (1) will be affected by the exchange of  $\tilde{\nu}$ 's in the  $t$ - or  $s$ -channels. For instance, in the case only one nonzero Yukawa coupling is present,  $\tilde{\nu}$ 's may contribute to, e. g.  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$  via  $t$ -channel exchange. In particular, if  $\lambda_{121}$ ,  $\lambda_{122}$ ,  $\lambda_{132}$ , or  $\lambda_{231}$  are nonzero, the  $\mu^+ \mu^-$  pair production proceeds via additional  $t$ -channel sneutrino exchange mechanism. However, if only the product of Yukawa, e.g.  $\lambda_{131} \lambda_{232}$ , is nonzero the  $s$ -channel  $\tilde{\nu}_\tau$  exchange would contribute to the  $\mu^+ \mu^-$  pair final state. Below we denote by  $\lambda$  the relevant Yukawa coupling from the superpotential (2) omitting the subscripts.

With  $P^-$  and  $P^+$  denoting the longitudinal polarizations of the electrons and positrons, respectively, and  $\theta$  the angle between the incoming electron and the outgoing muon in the c.m. frame, the differential cross section of process (1) in the presence of contact interactions can be expressed as ( $z \equiv \cos\theta$ ):

$$\frac{d\sigma^{CI}}{dz} = \frac{3}{8} [(1+z)^2 \sigma_+^{CI} + (1-z)^2 \sigma_-^{CI}]. \quad (3)$$

In terms of the helicity cross sections  $\sigma_{\alpha\beta}^{CI}$  (with  $\alpha, \beta = L, R$ ), directly related to the individual CI couplings  $\Delta_{\alpha\beta}$  (see Eq. (7)):

$$\sigma_+^{CI} = \frac{1}{4} [(1-P^-)(1+P^+) \sigma_{LL}^{CI} + (1+P^-)(1-P^+) \sigma_{RR}^{CI}], \quad (4)$$

$$\sigma_-^{CI} = \frac{1}{4} [(1-P^-)(1+P^+) \sigma_{LR}^{CI} + (1+P^-)(1-P^+) \sigma_{RL}^{CI}], \quad (5)$$

where the first (second) subscript refers to the chirality of the electron (muon) current. Moreover, in Eqs. (4) and (5):

$$\sigma_{\alpha\beta}^{CI} = \sigma_{\text{pt}} |M_{\alpha\beta}^{CI}|^2, \quad (6)$$

where  $\sigma_{\text{pt}} \equiv \sigma(e^+ e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \mu^+ \mu^-) = (4\pi\alpha_{\text{em}}^2)/(3s)$ . The helicity amplitudes  $M_{\alpha\beta}^{CI}$  can be written as

$$M_{\alpha\beta}^{CI} = M_{\alpha\beta}^{SM} + \Delta_{\alpha\beta} = Q_e Q_\mu + g_\alpha^e g_\beta^\mu \chi_Z + \Delta_{\alpha\beta}, \quad (7)$$

where  $\chi_Z = s/(s - M_Z^2 + iM_Z\Gamma_Z)$  represents the  $Z$  propagator,  $g_L^l = (I_{3L}^l - Q_l s_W^2)/s_W c_W$  and  $g_R^l = -Q_l s_W^2/s_W c_W$  are the SM left- and

right-handed lepton ( $l = e, \mu$ ) couplings of the  $Z$  with  $s_W^2 = 1 - c_W^2 \equiv \sin^2 \theta_W$  and  $Q_l$  the leptonic electric charge. The  $\Delta_{\alpha\beta}$  functions represent the contact interaction contributions coming from TeV-scale physics.

The structure of the differential cross section (3) is particularly interesting in that it is equally valid for a wide variety of NP models such as composite fermions, extra gauge boson  $Z'$ , AGC, TeV-scale extra dimensions and ADD model. Parametrization of the  $\Delta_{\alpha\beta}$  functions in different NP models ( $\alpha, \beta = L, R$ ) can be found in [1, 2].

The doubly polarized total cross section can be obtained from Eq. (3) after integration over  $z$  within the interval  $-1 \leq z \leq 1$ . In the limit of  $s, t$  small compared to the CI mass scales, the result takes the form:

$$\begin{aligned} \sigma^{CI} &= \sigma_+^{CI} + \sigma_-^{CI} = \frac{1}{4} ((1 - P^-)(1 + P^+) (\sigma_{LL}^{CI} + \sigma_{LR}^{CI}) + \\ &+ (1 + P^-)(1 - P^+) (\sigma_{RR}^{CI} + \sigma_{RL}^{CI})). \end{aligned} \quad (8)$$

It is clear that the formula in the SM has the same form where one should replace the superscript  $CI \rightarrow SM$  in (8).

Taking into account sneutrino contribution, the total cross section can be written as

$$\begin{aligned} \sigma^{\tilde{\nu}} &= \frac{1}{4} (1 - P^-)(1 + P^+) (\sigma_{LL}^{SM} + \sigma_{LR}^{SM}) + \frac{1}{4} (1 + P^-)(1 - P^+) \times \\ &\times (\sigma_{RR}^{SM} + \sigma_{RL}^{SM}) + \frac{3}{2} \frac{1+P^-P^+}{2} (\sigma_{RL}^{\tilde{\nu}} + \sigma_{LR}^{\tilde{\nu}}). \end{aligned} \quad (9)$$

Here,  $\sigma_{RL}^{\tilde{\nu}} (= \sigma_{LR}^{\tilde{\nu}}) = \sigma_{pt} |M_{RL}^{\tilde{\nu}}|^2$ ,  $M_{RL}^{\tilde{\nu}} = M_{LR}^{\tilde{\nu}} = \frac{1}{2} C_{\tilde{\nu}}^S \chi_{\tilde{\nu}}^S$ , and  $C_{\tilde{\nu}}^S$  and  $\chi_{\tilde{\nu}}^S$  denote the product of the  $R$ -parity violating couplings and the propagator of the exchanged sneutrino. For the  $s$ -channel  $\tilde{\nu}_\tau$  sneutrino exchange they read

$$C_{\tilde{\nu}}^S \chi_{\tilde{\nu}}^S = \frac{\lambda_{131} \lambda_{232}}{4\pi\alpha_{em}} \frac{s}{s - M_{\tilde{\nu}_\tau}^2 + iM_{\tilde{\nu}_\tau} \Gamma_{\tilde{\nu}_\tau}}. \quad (10)$$

We will use the abbreviation  $\lambda^2 = \lambda_{131} \lambda_{232}$ . It is possible to uniquely identify the effect of the  $s$ -channel sneutrino exchange exploiting the double beam polarization asymmetry defined as

$$A_{double} = \frac{\sigma(P_1, -P_2) + \sigma(-P_1, P_2) - \sigma(P_1, P_2) - \sigma(-P_1, -P_2)}{\sigma(P_1, -P_2) + \sigma(-P_1, P_2) + \sigma(P_1, P_2) + \sigma(-P_1, -P_2)}, \quad (11)$$

where  $P_1 = |P^-|$ ,  $P_2 = |P^+|$ . From (8) and (11) one finds

$$A_{double}^{SM} = A_{double}^{CI} = P_1 P_2 = 0,48, \quad (12)$$

where the numerical value corresponds to electron and positron degrees of polarization:  $P_1 = 0,8$ ,  $P_2 = 0,6$ . This is because these contact interactions contribute to the same amplitudes as shown in (7). Eq. (12) demonstrates that

$A_{double}^{SM}$  and  $A_{double}^{CI}$  are indistinguishable for any values of the contact interaction parameters,  $\Delta_{\alpha\beta}$ , i.e.  $\Delta A_{double} = A_{double}^{CI} - A_{double}^{SM} = 0$ .

In the numerical analysis, cross sections are evaluated including initial- and final-state radiation by means of the program ZFITTER, together with ZEFIT, with  $m_{top} = 175$  GeV and  $m_H = 125$  GeV.

As numerical inputs, we shall assume the identification efficiencies of  $\varepsilon = 95\%$  for  $\mu^+\mu^-$  final states, integrated luminosity of  $L_{int} = 0,5 \text{ ab}^{-1}$  with uncertainty  $\delta L_{int}/L_{int} = 0,5\%$ , and a fiducial experimental angular range  $|\cos\theta| \leq 0,99$ . Also, regarding electron and positron degrees of polarization, we shall consider the following values:  $P^- = \pm 0,8$ ;  $P^+ = \pm 0,6$ , with  $\delta P^-/P^- = \delta P^+/P^+ = 0,5\%$ .

Discovery and identification reaches on the sneutrino mass  $M_{\tilde{\nu}}$  (95% C.L.) plotted in Figure 1 are obtained from conventional  $\chi^2$  analysis.

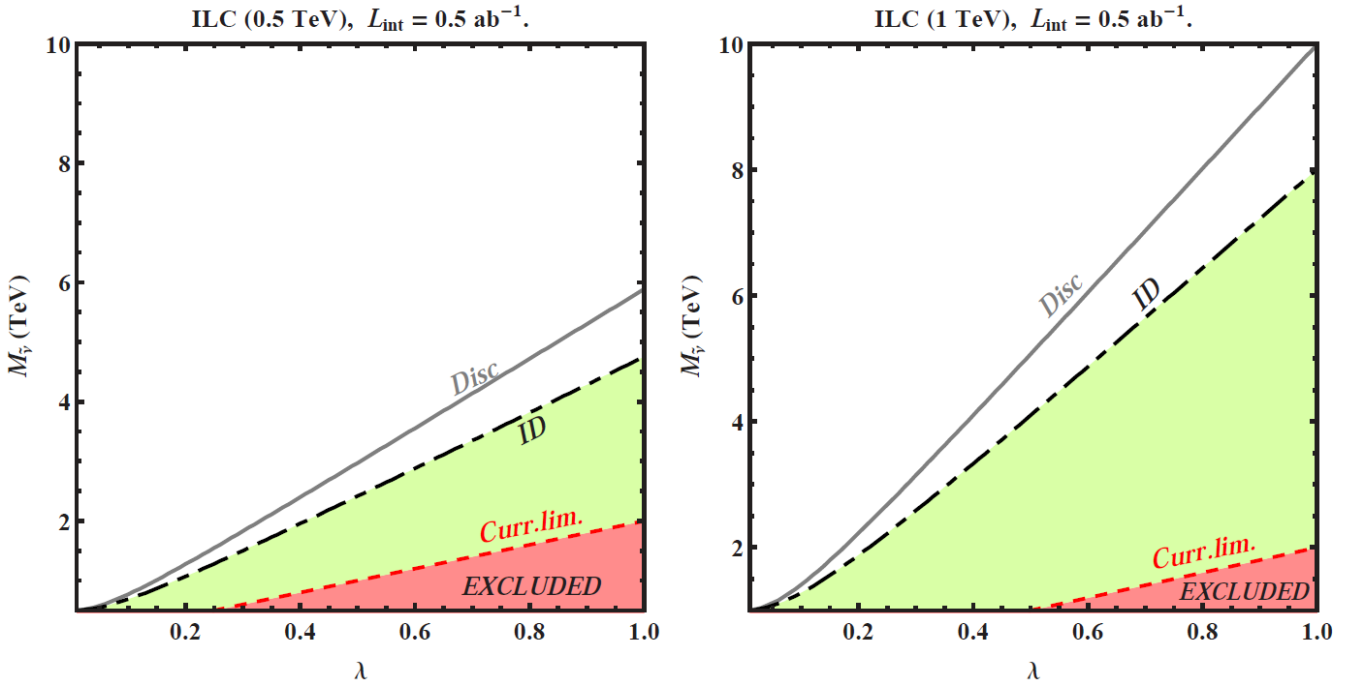


Figure 1 – Discovery and identification reaches on sneutrino mass  $M_{\tilde{\nu}}$  (95% C.L.) as a function of  $\lambda$  for the process  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  at the ILC with  $\sqrt{s} = 0,5$  TeV (left panel) and  $\sqrt{s} = 1,0$  TeV (right panel),  $L_{int} = 0,5 \text{ ab}^{-1}$ . For comparison, current limits from low energy data are also displayed

For comparison, current limits from low-energy data are also shown. From Figure 1 one can see that identification of sneutrino exchange effects in the  $s$ -channel with  $A_{double}$  is feasible in the region of parameter and mass space far beyond the current limits.



## Concluding remarks

We have studied how uniquely identify the indirect (propagator) effects of spin-0 sneutrino predicted by supersymmetric theories with  $R$ -parity violation, against other new physics scenarios in high energy  $e^+e^-$  annihilation into lepton-pairs at the ILC in process (1).

To evaluate the identification reach on the sneutrino exchange signature, we develop a technique based on a double polarization asymmetry formed by polarizing both beams in the initial state, that is particularly suitable to directly test for such  $s$ -channel sneutrino exchange effects in the data analysis.

This research has been supported by the Abdus Salam ICTP Affiliated Center (AC-88) and the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research.

## References

1. Moortgat-Pick, G. Unique heavy lepton signature at  $e^+e^-$  linear collider with polarized beams / G. Moortgat-Pick, P. Osland, A.A. Pankov and A.V. Tsytrinov // Physical Review D.– 2013. – Vol. 87. – P. 095017-1–095017-10.

2. Tsytrinov, A.V. Sneutrino identification in lepton pair production at ILC with polarized beams / A.V. Tsytrinov, J. Kalinowski, P. Osland and A.A. Pankov // Physics Letters B. – 2012. – Vol. 718. – P. 94–99.

**Я.Н. Русановская<sup>1</sup>, Г.Ю. Тюменков<sup>1</sup>, Д.А. Штромберг<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>ГУО «Гомельский городской лицей №1», Гомель, Беларусь

## МОДЕЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ПЛАНЕТ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

### Введение

До настоящего времени проблема внутреннего строения звезд и планет является достоверно нерешенной и, следовательно, крайне актуальной [1–3]. Существеннейшую роль в её решении играет функция плотности, которая для планет земной группы в хорошем приближении может считаться радиально-симметричной  $\rho(r)$ , потому что наибольшее полярное сжатие характерное для Марса составляет всего лишь 0,00589. Эта функция определяет массу планеты, в этом случае задаваемую интегралом:

$$M_R = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr, \quad (1)$$

так же, она фигурирует в уравнении равновесия:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( \frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r)$$

и в ряде других важных уравнений теории внутреннего строения. Поэтому моделирование функции плотности  $\rho(r)$  является важной задачей в рамках указанной проблематики.

Данная работа является прямым продолжением работы [4], в котором реализуется усовершенствование ранее предложенных модельных функций плотности в рамках частичного или полного удовлетворения условию выгнутости

$$\frac{d^2 \rho}{dr^2} < 0, \quad (2)$$

следующему из уравнения Адамса-Вильямсона [2, 3], и для чего предложено использовать простую параболическую добавку. Нормировки новых функций плотности остаются прежними и основываются на знании поверхностной плотности  $\rho(R)$  и плотности в центре планеты  $\rho_0$ . Учет слоистой структуры имеет так же формируется с помощью  $\theta$ -функции Хэвисайда. Коэффициенты сшивания полагаются единичными, чтобы не перенормировать функции плотности. Использование неединичных коэффициентов сшивания требует отдельного изучения, что предполагается сделать в дальнейшем.

## 1. Модельные функции плотности

### *I Приближение линейной функцией с параболической добавкой*

К функции плотности с линейной радиальной зависимостью добавляем параболическую часть, также убывающую с ростом аргумента. В этом случае функция  $\rho(r)$  задается выражением

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho(R)}{2R} \cdot \left( r + \frac{r^2}{R} \right) \right\}. \quad (3)$$

На основе этого масса планеты (1) оказывается равной

$$M(R) = \pi R^3 \left[ \frac{13}{60} \rho_0 + \frac{9}{20} \rho(R) \right]. \quad (4)$$

### *II Приближение чистой параболической функцией*

Интересно рассмотреть и функцию плотности параболического вида, так как она полностью удовлетворяет условию (2). В этом случае:

$$\rho(r) = \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R^2} \cdot r^2 \quad (5)$$

и соответствующая масса

$$M(R) = \frac{4\pi R^3}{5} \left[ \frac{2}{3} \rho_0 + \rho(R) \right]. \quad (6)$$

Таким образом, выражения для масс в двух первых приближениях имеют очень удобный полиномиальный вид (4), (6).

### **III Приближение степенной функцией с параболической добавкой**

Данная модельная функция получается, если в ранее предложенной  $\rho(r)$  с экспоненциальным поведением [4] учесть условие нормировки и сделать соответствующую добавку

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 \left[ 1 + \left( \frac{\rho_0}{\rho(R)} \right)^{\frac{r}{R}} \right] - \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R^2} \cdot r^2 \right\}, \quad (7)$$

при этом масса примет вид

$$M(R) = 2\pi \left\{ \frac{\rho_0}{\beta^3} \gamma(3; \beta R) + \frac{R^3}{5} \left[ \frac{2}{3} \rho_0 + \rho(R) \right] \right\}, \quad (8)$$

где введён параметр

$$\beta = \frac{1}{R} \ln \frac{\rho_0}{\rho(R)},$$

а  $\gamma(3; \beta R)$  – нижняя неполная гамма-функция [5].

### **IV Приближение обратной функцией с параболической добавкой**

И, наконец, последняя модификация  $\rho(r)$  вида

$$\rho(r) = \frac{1}{2} \left\{ \rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R^2} \cdot r^2 + \frac{R\rho_0\rho(R)}{R\rho(R) + [\rho_0 - \rho(R)]r} \right\}, \quad (9)$$

приводящая к массе планеты равной

$$M(R) = 2\pi R^3 \left\{ \frac{\rho_0}{3} F(1; 3; 4; -\gamma R) + \frac{1}{5} \left[ \frac{2}{3} \rho_0 + \rho(R) \right] \right\}. \quad (10)$$

Здесь  $F(1; 3; 4; -\gamma R)$  – гипергеометрическая функция [5], радиально-зависимая с параметром

$$\gamma = \frac{\rho_0 - \rho(R)}{R\rho(R)}.$$

В последних двух случаях выражения для масс (8), (10) содержат специальные функции, однако, это не затрудняет расчета масс, если использовать для этого возможности аналитического или численного интегрирования с помощью программных пакетов, например, *WolframMathematica*.

## 2. Функция плотности для шара со слоистой структурой

Метод использования введенных функций плотности в случае учета слоистой структуры планеты заключается в их суммировании по слоям с использованием обрезывающей на границе слоя функции Хэвисайда. При этом обобщенная функция плотности приобретает вид:

$$\rho(r) = \sum_{k=1}^n \Theta(r - r_k) \cdot \rho_{(j)k}(r) \cdot \Theta(r_{k+1} - r) \cdot A_{(j)k+1}, \quad (11)$$

где  $\rho_{(j)k}(r)$  – функция плотности, присутствие у которой индекса  $j$  говорит о привязке к  $j$ -му приближению, в то время как индекс  $k$  номерует слой; также полагаем  $r_1 = 0$ ;  $\Theta(r)$  – функция Хэвисайда.

Следует заметить, что прямое интегрирование функции плотности (11) не обязательно, так как его результат может быть представлен в виде суммы масс шаровых слоев, получаемых при использовании формул (4), (6), (8) и (10). Поэтому, массу планеты, состоящей из  $n$  слоев, записываем в виде

$$M = \sum_{k=1}^n \mu_k, \quad (12)$$

где  $\mu_k$  – масса  $k$ -го шарового слоя, которая выражается как разность масс шаров различных радиусов.

$$\mu_k = M(r_{k+1}) - M(r_k). \quad (13)$$

## 3. Модельный расчет масс планет земной группы

Используем наши модифицированные модельные функции плотности для расчета масс планет земной группы на основе их известных характеристик [6, 7]. Полученный результат сравним с действительными массами.

Также как ценный источник достоверных астрофизических данных следует отметить Internet-ресурс [8].

Будем учитывать признанную внутреннюю структуру рассматриваемых планет [7, 8], состоящую из пяти компонентов у Земли (кора, верхняя мантия, мантия, внешнее ядро, внутреннее ядро) и трех компонентов у Меркурия, Венеры и Марса (кора, мантия, ядро).

Расчеты производим, варьируя комбинации функций плотности для указанных чисел слоев, что дает около 150 комбинаций.

В таблице 1 приведены три лучших результата расчета масс в рамках указанного подхода.

Теперь лучшие результаты более точны и отклоняются от действительных масс следующим образом:

- на 0,060% выше у Меркурия (I-II-III);

- на 0,185% ниже у Венеры (II-I-IV);
- на 0,033% ниже у Земли (II-II-I-I-III);
- на 0,187% выше у Марса (I-II-III).

Таблица 1 – Расчетная масса с учетом слоистой структуры

Планета	Масса (кг)	Расчетная масса (кг)		
		I-II-III	II-I-IV	I-III-II
Меркурий	$3,330 \cdot 10^{23}$	<b><math>3,332 \cdot 10^{23}</math></b>	$3,339 \cdot 10^{23}$	$3,253 \cdot 10^{23}$
Венера	$4,869 \cdot 10^{24}$	$4,955 \cdot 10^{24}$	<b><math>4,860 \cdot 10^{24}</math></b>	$4,766 \cdot 10^{24}$
Марс	$6,419 \cdot 10^{23}$	<b><math>6,431 \cdot 10^{23}</math></b>	$6,620 \cdot 10^{23}$	$6,277 \cdot 10^{23}$
		II-III-II-IV-I	I-III-I-IV-III	II-II-I-I-III
Земля	$5,973 \cdot 10^{24}$	$6,041 \cdot 10^{24}$	$5,985 \cdot 10^{24}$	<b><math>5,971 \cdot 10^{24}</math></b>

Данные результаты можно рассматривать как вполне удовлетворительные, а соответствующие модельные функции плотности как достаточно близкие к реальным распределениям масс, допускающие использование при решении соответствующих задач. Отклонение в сторону уменьшения масс планет Земля и Венера, говорит нам о необходимости учета распределения массы в их атмосферах.

### Заключение

Таким образом, в работе проведено видоизменение модельных функций плотности для планет земной группы путем параболической добавки. Расчеты показали, что новое модельное поведение функций плотности можно считать достаточно достоверным. Оно может быть использовано при решении уравнений динамического равновесия и прочих задач теории внутреннего строения планет. Также несомненно, что к улучшению результатов может привести учет распределения массы в атмосферах, а также деформаций, связанных с центробежным эффектом.

### Литература

1. Carroll, B.W. An Introduction to Modern Astrophysics / B.W. Carroll, D.A. Ostlie. – Pearson International Edition, 2007. – 1309 p.
2. Магницкий, В.А. Внутреннее строение и физика Земли / В.А. Магницкий. – Москва : Наука, 2006. – 390 с.
3. Уильям, Б. Внутреннее строение планет / Б. Уильям. – Москва : Мир, 1987. – 328 с.

4. Тюменков, Г.Ю. Моделирование радиальной функции плотности гравитирующего шара / Г.Ю. Тюменков, Е.П. Ельников, Е.В. Фирагина // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4(21). – С. 36–39.

5. Кузнецов, Д.С. Специальные функции / Д.С. Кузнецов. – Москва : Высшая школа, 1962. – 249 с.

6. Anderson, D.L. Theory of the Earth / E.C. Robertson. – Boston: Blackwell Publications, 1989. – 366 p.

7. Jordan, T.H. Structural Geology of the Earth's Interior / T.H. Jordan // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America – Boston: High Wire Press, 2014. – Vol. 76. – № 8. – P. 4192–4200.

8. California Institute of Technology (USA) [Electronic resource] / NASA'S Jet Propulsion Laboratory. – Pasadena, CA, 2004. – Mode of access: [www.jpl.nasa.gov/solar-system/](http://www.jpl.nasa.gov/solar-system/). – Data of access: 10.06.2016.

**М.С. Рыжий**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

## **ГРАВИТАЦИОННО-РЕЗОНАНСНАЯ КООРДИНАЦИЯ (АДАПТАЦИЯ) ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И ПОЛУЧЕНИЕ СИСТЕМНОГО ЭФФЕКТА НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ**

### **Введение**

Правильно пишет И.Л. Розенталь [1]: «После победы учения Коперника в полемическом пылу упустили одно обстоятельство. Да, действительно, Земля как физическое тело ничем не выделена. Однако эта планета единственная обитель цивилизации. А возникновение носителя цивилизации – человека во все не тривиально, а требует сочетания определенных конкретных физических условий. Это требование положено в основу антропного принципа». К сожалению, практически все исследователи при этом переходят к изучению физических закономерностей, определяющих судьбу Вселенной. Мы рассмотрим фундаментальные физические и астрономические константы и их работу на поверхности Земли и в ее окрестности.

### **1. Электричество и гравитация**

Частица, находящаяся на поверхности Земли, Солнца (в Солнечной системе, в Галактике), всегда взаимодействует со всей огромной массой небесных тел ( $\sim 10^{42}$  кг – Галактика) и с каждым в отдельности ( $\sim 10^{25}$  кг – Земля,  $\sim 10^{30}$  кг – Солнце)! Чтобы скомпенсировать такое "слабое" внешнее гравитационное

воздействие – энергию

$$E_{\text{гравитации}} = G * M_{\text{небесн. тела}} * m_{\text{част}} / R_{\text{расст. до центра тяж.}} \quad (1)$$

электрически заряженные частицы

$$E_{\text{электрич. поля}} = e^2 / r \quad (2)$$

должны находиться на расстоянии  $r$  друг от друга ( $E_{\text{гравитации}} = E_{\text{электрич. поля}}$ ):

а) на поверхности Солнца (расст. до центра Солнца 695990000 м, первая космическая скорость 436800 м/сек)

$$r_e = 1,33 * 10^{-9} \text{ м, при } m_{\text{частицы}} = m_{\text{электрона}} ;$$

$$r_p = 7,23 * 10^{-13} \text{ м, при } m_{\text{частицы}} = m_{\text{протона}} ;$$

б) на галактической орбите Солнца (скорость движения 230000 м/сек)

$$r_e = 4,8 * 10^{-9} \text{ м, при } m_{\text{частицы}} = m_{\text{электрона}} ;$$

$$r_p = 2,6 * 10^{-12} \text{ м, при } m_{\text{частицы}} = m_{\text{протона}} .$$

Среднегеометрическое энергетически скомпенсированное расстояние между частицами (при движении по галактической орбите)  $r = 1,1 * 10^{-10}$  м приближенно равняется первому боровскому диаметру атома водорода –  $1,06 * 10^{-10}$  м. Связь между потенциалом на галактической орбите Солнца  $\varphi_{\text{галактики}}$  и потенциалом на поверхности Солнца  $\varphi_{\text{солнца}}$  обеспечивается среднегеометрическим коэффициентом перехода от линии (орбита Солнца) к объёму ( $4\pi/3$ ) и круговой орбите на поверхности Солнца( $\pi$ ):

$$\varphi_{\text{галактики}} * 2\pi / \sqrt{3} = \varphi_{\text{солнца}} . \quad (3)$$

Очевидно, существует определенная координация между параметрами микро- и макромира.

## 2. Свет и зрение

Существуют и особенности зрения, через которые-то происходит и настройка всех систем фиксации физических процессов. Без фокусировки мы не увидим контуры предметов – следов элементарных частиц, спектральных линий... Без палочек и колбочек – черно-белой и цветной палитры мира... При изменении цветового фона (цветовая адаптация – кольца Ньютона) меняется расположение темной и светлой полос... [2].

Свет, стабилизированный в системе Солнце и Земля [3] (расчеты (3) позволяют говорить о стабилизирующей роли и Галактики), определяет и характеристики Сознания (Центрального Процессора – ЦП). Известно: «время распознавания» [4] (работа мозга, зрения) составляет 0,265 сек (свет за это время дважды огибает Землю) и «время запечатления» – 0,040сек (25 кадров в секун-

ду – свет за это время проходит расстояние равное двум радиусам Земли). Максимум спектральной чувствительности (МСЧ) глаза соответствует длине волны  $5,55 \cdot 10^{-7}$  м. При пересчете энергии МСЧ на электронный маркер (ЭМ)

$$E/m_{\text{электрона}} \quad (4)$$

получаем скорость близкую первой космической на поверхности Солнца (436800 м/сек).

### 3. Свет и гравитация

Гравитационно-резонансная формула скорости света выводится из закона сохранения углового момента и резонансных отношений [3]:

$$c = 2 \cdot \pi \cdot v_{1C} \cdot R_C / R_3, \quad (5)$$

где  $c$  – скорость света;

$2 \cdot \pi$  – отношение длины окружности к радиусу (константа интегрирования ускорения по периоду – квантованный асимптотический резонанс);

$v_{1C}$  – первая космическая скорость на поверхности Солнца;

$R_C$  – средний радиус Солнца;

$R_3$  – средний радиус Земли (6371030 м).

Понятно, что у Солнца нет поверхности. Плотность верхнего слоя фотосферы (ВСФ) составляет 1/1000 от плотности земного воздуха. Мы наблюдаем *оптический эффект фотосферы* достаточно фундаментальной природы. Формула (4), во всяком случае, позволяет получить *расчетный* радиус Солнца  $R_C = 696\,288\,687$  м и толщину ВСФ  $\sim 300$  км ( $696\,288,687 - 695\,990,000$ ). Расстояние между центром Солнца и общим центром тяжести Солнца и Земли составляет  $\sim 450$  км, т. е. 3/2 толщины ВСФ (пространственно-временная синхронизация движения Земли с третьим законом Кеплера для структуры Солнца).

### 4. Свет и Земля

Стабилизированная на поверхности Земли скорость света  $c$  обеспечивается потенциалом  $c^2$ . В первом приближении потенциал  $c^2$  обеспечивается потенциалом электрического заряда Земли  $Q$ , что позволяет, при наличии элементарного заряда  $e$ , произвести построение системы координации (параметризации) констант микромира. Важно указать: Земля является проводником, потенциал которого, как известно, не зависит от формы тела (Земля – это «константа»). «Константа» плюс структура зрения («процессор»), сознания («винчестер») обеспечивают единообразие восприятия физических процессов на Земле, а также сходных (конформно-резонансных) по строению областей (островов) Вселенной.



## 5. Термодинамика и гравитация

Термодинамический расчет – ЭМ при резонансной энергии (эффективная температура поверхности Солнца 5778 К, наиболее вероятная скорость 418 500 м/сек) дает величину близкую 436800 м/сек. При добавлении к эффективной (резонансной) энергии Солнца эффективной энергии (Т~249 К) Земли (по схеме энергия-импульс или  $249 \cdot 2$  – с коэффициентом кинетической энергии) наиболее вероятная скорость практически равна 436800 м/сек и, наконец, при добавлении (резонансной) энергии Луны (Т~220 К) – соответствует энергии МСЧ.

При соотношении энергий  $5778/2,72548 = 2120$  (2,72 548 К температура реликтового излучения) получаем протонный маркер (ПМ):  $2120 \cdot \sqrt{0,75} = 1836$  (1 836 – отношение массы протона к массе электрона).

При делении  $2120/\pi^2 = 214,8$  получаем отношение астрономической единицы к радиусу Солнца, а также для наиболее вероятной скорости при Т = 2,72 548 К и ЭМ ( $v = 9090$  м/сек) – маркер абберации реликтового излучения (МАРИ)  $-v/c \cdot 1296000'' = 39,3''$  или просто электронный маркер абберации (ЭМА). С эффектом GAMOW<sup>+</sup>.

## 6. Космологическое красное смещение

Если космическое микроволновое фоновое излучение (реликтовое излучение) является следствием движения Земли по орбите вокруг Солнца (ЭМА), то аналогично объясняется и космологическое красное смещение (ККС).

Работа [5] предполагает квантовый (пропорциональный) переход фотона из одного (нулевого) состояния в другое (красное смещение) при увеличении расстояния до источника излучения. Мы предполагаем существование смещения (прецессии) в любом периодическом процессе. Поскольку скорость света резонансно [3] обусловлена и массой Солнца, и фактором Галактики (1.), введем относительный квазипериод (солнечно-электронный маркер СЭМ)

$$3(M_{\text{солнца}}/m_{\text{электрона}})^{0,5} = T. \quad (6)$$

При пересчете на МСЧ:

$$T\lambda/c = 260\,000\,000. \quad (7)$$

Получаем время вращения Солнца вокруг центра Галактики ~250 млн. лет.

## Заключение

Данная концепция практически подтверждена в экспериментальных работах российского биофизика С.Э. Шноля [6]. Расчеты автора также подтверждают концепцию локального (окрестно-координационного, островного) конформизма систем и могут быть представлены в приложении.

## Литература

1. Розенталь, И.Л. Геометрия, динамика, вселенная / И.Л. Розенталь. – Москва : Наука, 1987. – 12 с.
2. Булат, В.Л. Оптические явления в природе / В.Л. Булат. – М. : «Просвещение», 1974. – 149 с.
3. Рыжий, М.С. Солнце, Земля и скорость света / М.С. Рыжий // Чистый мир. – 2002. – № 4. – 3 с.
4. Луизов, А.В. Инерция зрения / А.В. Луизов. – Москва : Оборонгиз, 1961. – 249 с.
5. Алеманов, С.Б. Квантовый закон Хаббла / С.Б. Алеманов // Инженерная физика. – 2014. – № 3. – 40 с.
6. Шноль, С.Э. Космофизические факторы в случайных процессах / С.Э. Шноль. – Stockholm (Швеция): Svenskafysikarkivat, 2009. – 388 с.

**М.А. Сердюкова**

УО «Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

### **ВЛИЯНИЕ ФОНОВОГО ПОЛЯ ТЕМНОЙ ЭНЕРГИИ НА ХАРАКТЕР РАСПАДА ДОЛГОЖИВУЩИХ ИЗОТОПОВ U-238 И Th-232**

В основе одной из наиболее простых моделей пространственно плоской расширяющейся вселенной с предполагаемым доплеровским механизмом космологического красного смещения лежит фоновая метрика Фридмана, в которой квадрат интервала  $ds$  между двумя бесконечно близкими событиями в декартовых координатах  $r = (x_1, x_2, x_3)$  задается выражением [1]:

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - \sigma^2(\tau) dx_i^2, \quad (1)$$

где  $\tau$  – абсолютное мировое время, отсчитываемое атомными часами. Изменение временной шкалы согласно соотношению

$$dt = \frac{1}{\sigma(\tau)} d\tau$$

позволяет перейти в (1) к конформно-плоской метрике, в которой

$$ds^2 = -\varphi^4(t) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2)$$

где  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}\{-1, 1, 1, 1\}$  и, как обычно,  $x^0 = ct$ . Для масштабного фактора  $\sigma$ , представленного как функция конформного времени  $t$ , в (2) примем обозначение:

$$\sigma(\tau(t)) = \varphi^2(t).$$

Для мировой линии частицы, задаваемой в координатах  $x^\mu$  эффективного пространства-времени Минковского, из (2) следует

$$ds = \varphi^2(t) \sqrt{1 - v^2 / c^2} \cdot c dt,$$

где  $v^2 = v_i^2$ ,  $v_i = dx_i / dt$ . Отсюда следует, что действие  $A = -cm_0 \int ds$  для частицы можно записать в виде

$$A = -c^2 \int m_0 \varphi^2(t) \sqrt{1 - v^2 / c^2} dt, \quad (3)$$

что соответствует действию для частицы в скалярном гравитационном поле [2]. В таком представлении реальная инертная масса  $m$ , определяющая энергетическое содержание частицы в состоянии покоя, в отличие от ее номинальной массы  $m_0$ , оказывается динамической переменной зависящей от поля:

$$m(t) = m_0 \varphi^2(t). \quad (4)$$

Для описания самого поля обратимся далее скалярной масштабно инвариантной модели тяготения [3]. Потенциал поля, создаваемого массой, распределенной в пространстве с плотностью  $\mu$ , в этой модели удовлетворяет уравнению типа Клейна-Гордона

$$\left( \square - \frac{2\pi G}{c^2} \mu \sqrt{1 - v^2 / c^2} \right) \varphi = 0.$$

В этом случае потенциал фонового поля в однородной Вселенной без расширения, порождаемого массой нерелятивистской материей, распределенной в ней с плотностью  $\mu$ , принимает вид

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \Omega^2 \right) \varphi = 0.$$

Здесь  $\Omega = \sqrt{2\pi G \mu}$ ,  $G$  – ньютоновская гравитационная. Приемлемое решение этого уравнения, удовлетворяющее калибровочному условию  $\varphi(t_0) = 1$  для текущего времени  $t_0$ , является гармонической функцией времени

$$\varphi(t) = \frac{\sin \Omega t}{\sin \Omega t_0}.$$

В соответствии с этим решением, энергия покоя частиц материи во вселенной циклически изменяется вместе с фоновым полем по закону

$$E(t) = m_0 c^2 \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0}. \quad (5)$$

Предсказываемое увеличение массы атомов в предыдущие 24 миллиарда лет (и продолжающееся в настоящее время) находится в хорошем количественном согласии теории с новейшими наблюдательными данными по красному смещению атомных спектров далеких сверхновых типа Ia [4–6].

Одновременно с ростом энергии покоя ядер и атомов в основном или возбужденном состояниях происходит в равной пропорции растяжение естественной ширины их энергетических уровней, что и объясняет наблюдаемое космологическое красное смещение. Вместе с тем, из формулы для эволюции энергии (5) и из квантово-механического соотношения неопределенностей  $\Delta t \sim \frac{\hbar}{\Delta E}$  между шириной уровней энергии  $\Delta E$  и их временем жизни следует, что период полураспада  $T_{1/2}$  нестабильных ядер зависит от возраста цикла  $t$  следующим образом:

$$T_{1/2}(t) = T_{1/2}^0 \frac{\sin^2 \Omega t_0}{\sin^2 \Omega t}, \quad (6)$$

где  $T_{1/2}^0$  – период полураспада в текущую эпоху, т.е. при  $t = t_0$ . Имея в виду, что постоянная распада обратно пропорциональна периоду полураспада ( $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ ), для количества ядер  $dN$ , распавшихся за время  $dt$ , запишем

$$\frac{dN}{N} = -\lambda_0 \frac{\sin^2 \Omega t}{\sin^2 \Omega t_0} dt.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\frac{N(t')}{N_0} = \exp \left\{ \frac{-\ln 2}{2T_{1/2}^0 \sin^2 \Omega t_0} \left[ t - \frac{\sin 2\Omega(t_0 + t) - \sin 2\Omega t_0}{2\Omega} \right] \right\}. \quad (7)$$

Здесь временная переменная сдвинута, и время  $t$  отсчитывается не от начала цикла, как в предыдущих формулах, а от текущего времени  $t_0$ .

На рисунке 1 представлена общая картина радиоактивного распада долгоживущих ядер  $^{238}\text{U}$  такой, какой она выглядит в современную эпоху, когда период полураспада этого изотопа оценивается в 4,468 млрд. лет [7].

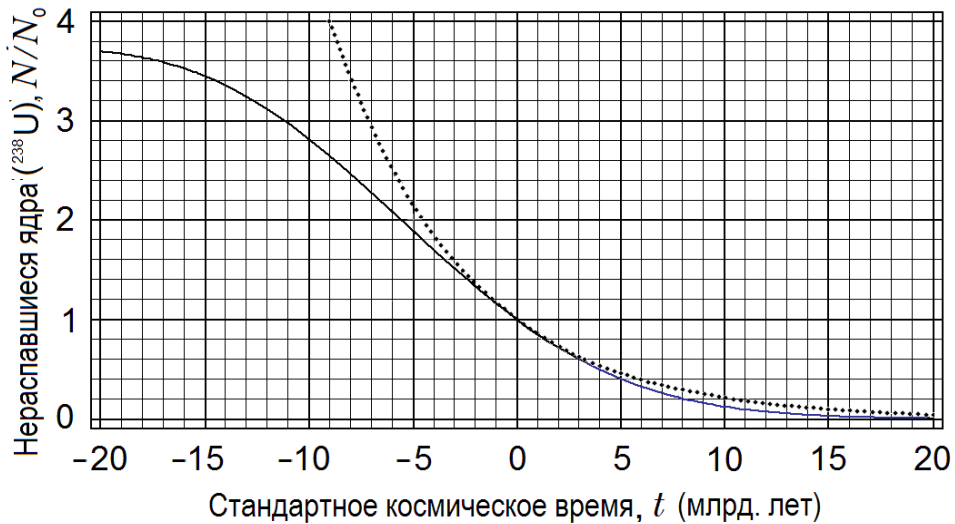


Рисунок 1 – Ускоряющийся распад долгоживущих изотопов  $^{238}\text{U}$  на космологических временных масштабах (сплошная кривая). Пунктирной линией показана обычная кривая распада, соответствующая нынешнему значению вероятности распада этих изотопов в единицу времени

Космологический закон радиоактивного распада иллюстрирует также рисунок 2 на примере долгоживущих изотопов  $^{232}\text{Th}$ , текущее значение периода полураспада, которых составляет 14,0 млрд. лет [7]. Сплошная кривая на этом рисунке показывает, что распад ускоряется в течение интервала времени между 20 млрд. и 30 млрд. лет, который приходится на первую половину нынешнего эволюционного цикла, а затем распад плавно переходит в стадию замедления во второй половине цикла.

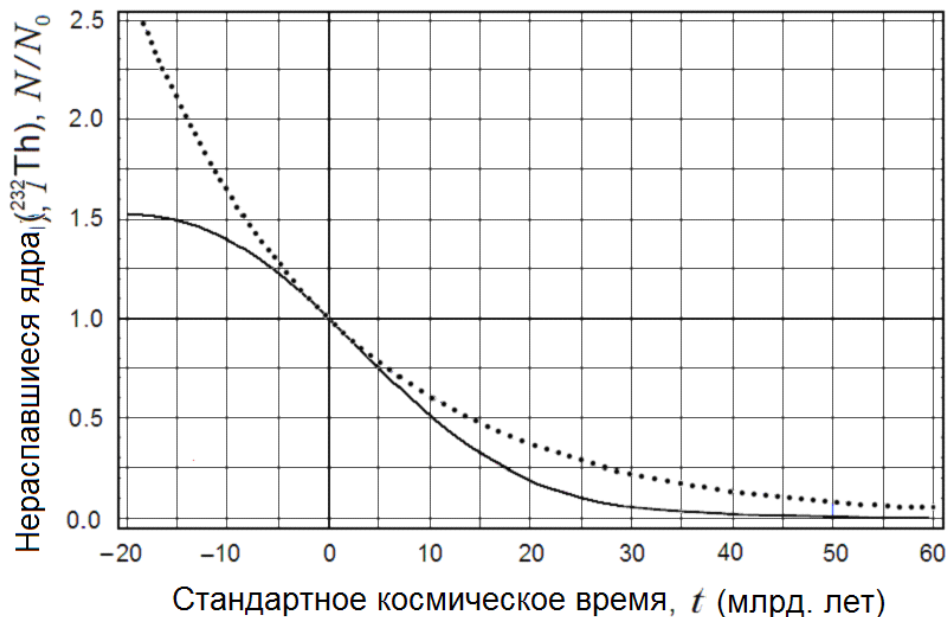


Рисунок 2 – Распад  $^{232}\text{Th}$  на космологических временных масштабах

## Литература

1. Ландау, Л.Д. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М. : Наука, 1988. – Т. 2. – 512 с.
2. Einstein, A. Die Nordstromsche Gravitaionstheorie vom Standpunkt des absoluten Differentialkalkuls / A. Einstein, A.D. Fokker // Ann. Phys. – 1914. – Vol. 44. – P. 321–328.
3. Serdyukov, A.N. A Minimal Relativistic Model of Gravitation within Standard Restrictions of the Classical Theory of Fields / A.N. Serdyukov // Phys. of Part. and Nucl. Lett. – 2009. – Vol. 6. – P. 190–201.
4. Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant / A.G. Riess [et al.] // Astron. J. – 1998. – Vol. 116. – P. 1009–1038.
5. Measurements of  $\Omega$  and  $\Lambda$  from 42 High-redshift Supernovae / S. Perlmutter [et al.] // Ap. J. – 1999. – Vol. 517. – P. 565–586.
6. The High-z Supernova Search: Measuring Cosmic Deceleration and Global Curvature of the Universe Using Type IA Supernovae / B.P. Schmidt [et al.] // Ap. J. – 1998. – Vol. 507. – P. 46–63.
7. Audi, G. The NUBASE Evaluation of Nuclear and Decay Properties / G. Audi, O. Bersillon, J. Blachot, A.H. Wapstra // Nuclear Physics A. – 2003. – Vol. 729. – P. 3–128.

**Е.С. Тимошин, С.И. Тимошин**

УО «Гомельский государственный технический университет  
имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

### **КВАРКОВЫЕ ВКЛАДЫ В СПИН НУКЛОНА ИЗ СОВМЕСТНОГО АНАЛИЗА ГЛУБОКОНЕУПРУГОГО ЛЕПТОН-НУКЛОННОГО РАССЕЯНИЯ С ЗАРЯЖЕННЫМ И НЕЙТРАЛЬНЫМ ТОКАМИ**

Понимание как спин нуклона строится из спинов кварков, глюонов и их орбитальных угловых моментов является одной из актуальных проблем физики частиц. По правилу сумм Джаффе-Манохара спин протона может быть разложен по вкладам кварков и антикварков ( $\Delta\Sigma$ ), глюонов ( $\Delta G$ ) и их угловых моментов ( $L_q, L_g$ ):  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Sigma + \Delta G + L_q + L_g$ . Кварки и антикварки несут не более 1/3 спина нуклона [1–5]. Недавние измерения RHIC [6–9] показывают, что поляризация глюонов составляет 20–30%. Данные по поляризации кварков моря

имеют неоднозначный характер. Эксперименты HERMES и COMPASS показывают, что поляризация странных кварков  $\Delta s$  является малой, как и поляризация легкого кваркового моря  $\Delta\bar{u}, \Delta\bar{d}$  [3–5, 10].

Дальнейшие исследования спиновой структуры нуклона планируются как на действующих установках COMPASS, JLab, RHIC, так и в экспериментах на будущем электрон-ионном коллайдере (EIC) [9, 11, 12]. Эксперименты на EIC будут значительно увеличивать кинематический охват по  $x$  и  $Q^2$  до  $x \leq 10^{-4}$  [9]. Это будет обеспечивать точную информацию о  $\Delta G(x)$  и  $\Delta q(x)$  по ароматам [11, 12].

В настоящей работе рассматриваются способы получения кварковых вкладов в спин нуклона в ГНР поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах с заряженным и нейтральным токами применительно к экспериментам на коллайдерах.

Процессы глубоконеупругого рассеяния (ГНР) поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах с заряженным и нейтральным токами

$$\vec{l} + \vec{N} \rightarrow \nu + X, \tag{1}$$

$$\vec{l} + \vec{N} \rightarrow l + X, \quad l = e, \mu \tag{2}$$

в борновском приближении описываются диаграммами на рисунке 1.

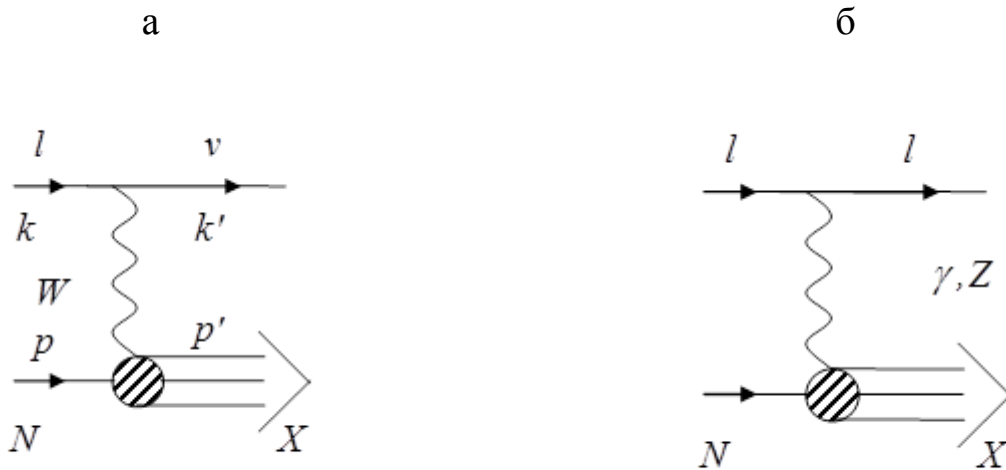


Рисунок 1 – Процессы  $lN$ -ГНР с заряженным (а) и нейтральным (б) токами в борновском приближении

Информация о спине нуклона содержится в поляризационных структурных функциях (СФ) нуклона  $g_1^{l^-, l^+}(x, Q^2)$ ,  $g_6^{l^-, l^+}(x, Q^2)$  и  $g_1(x, Q^2)$ ,  $g_6(x, Q^2)$

процессов (1) и (2) соответственно, где  $x = \frac{Q^2}{2p \cdot q}$ ,  $Q^2 = -q^2 = (k - k')^2$ .

В свою очередь эти СФ извлекаются из измеряемых поляризационных асимметрий [13, 14]. Вклады кварков и антикварков в нуклонный спин связаны с первыми моментами поляризованных СФ  $g_1$ ,  $g_6$

$$\Gamma_{1,6}(Q^2) = \int_0^1 g_{1,6}(x, Q^2) dx.$$

В случае рассеяния на протонах ( $N=p$ )  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_6$  для процессов ГНР с заряженным током (1) равны

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{l^- p} &= \Delta u + \Delta \bar{d} + \Delta \bar{s}, & \Gamma_1^{l^+ p} &= \Delta d + \Delta s + \Delta \bar{u}, \\ \Gamma_6^{l^- p} &= \Delta u - \Delta \bar{d} - \Delta \bar{s}, & \Gamma_6^{l^+ p} &= \Delta d + \Delta s - \Delta \bar{u}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Delta q(Q^2) (\Delta \bar{q}(Q^2)) = \int_0^1 \Delta q(x, Q^2) (\Delta \bar{q}(x, Q^2)) dx$  – вклад кварка  $q$  (антикварка  $\bar{q}$ ) в спин нуклона.

Для ГНР с нейтральным током (2) первые моменты  $\Gamma_{1,6}$  протона получены в виде [14]

$$\Gamma_1^p = a_u (\Delta u + \Delta \bar{u}) + a_d (\Delta d + \Delta \bar{d}) + a_s (\Delta s + \Delta \bar{s}) \quad (4)$$

$$\Gamma_6^p = b_u \Delta u_V + b_d \Delta d_V. \quad (5)$$

Здесь

$$a_u = \frac{2}{9} + \frac{2}{3} \eta_{\gamma, Z} g_{V,u} + \frac{1}{2} \eta_Z (g_V^2 + g_A^2)_u, \quad a_{d,s} = \frac{1}{18} - \frac{1}{3} \eta_{\gamma, Z} g_{V(d,s)} + \frac{1}{2} \eta_Z (g_V^2 + g_A^2)_{d,s},$$

$$b_u = \frac{2}{3} \eta_{\gamma, Z} g_{A,u} + \eta_Z (g_V g_A)_u, \quad b_d = -\frac{1}{3} \eta_{\gamma, Z} g_{A,d} + \eta_Z (g_V g_A)_d,$$

$$g_{V,u} = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_{A,u} = \frac{1}{2}, \quad g_{V(d,s)} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_{A(d,s)} = -\frac{1}{2}.$$

$\eta_{\gamma, Z} = \frac{G m_Z^2 (g_V + g_A)}{2\sqrt{2}\pi\alpha} \frac{Q^2}{Q^2 + m_Z^2}$ ,  $\eta_Z = \eta_{\gamma, Z}^2$ ,  $G$  – константа Ферми,  $m_Z$  – масса  $Z$ -

бозона;  $g_V = \frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$ ,  $g_A = -\frac{1}{2}$  – векторная и аксиально-векторная константы связи.

Для определения вкладов отдельных кварковых ароматов ( $u, d, s$ ) из (4) понадобится ещё, по меньшей мере, два соотношения, содержащих измеряемые



величины.

Измеряемые асимметрии  $IN$ -ГНР с заряженным током выражаются через две независимые поляризационные СФ  $g_1$  и  $g_6$  следующим образом:

$$A_{l^-,l^+}(x,Q^2) = \frac{y^+ g_6^{l^-,l^+}(x,Q^2) \pm y^- g_1^{l^-,l^+}(x,Q^2)}{y^+ F_1^{l^-,l^+}(x,Q^2) \pm \frac{y^-}{2} F_3^{l^-,l^+}(x,Q^2)}, \quad (6)$$

где  $y^\pm = 1 \pm (1-y)^2$ ,  $y = \frac{p \cdot q}{p \cdot k}$ ,  $F_{1,3}(x,Q^2)$  – усредненные по спину СФ.

В области малых  $y$  ( $Q^2 \leq 10^3 \text{ ГэВ}^2$ )  $y^- \ll y^+$  и в (6) доминирует СФ  $g_6(x,Q^2)$ . Поэтому

$$A_{l^-,l^+}(x,Q^2) = \frac{g_6^{l^-,l^+}(x,Q^2)}{F_1^{l^-,l^+}(x,Q^2)}, \quad (7)$$

т. е. СФ  $g_6$  можно получить из данных для асимметрии  $A_{l^-,l^+}$  при известной СФ  $F_1$ . Извлечение обеих СФ  $g_1$  и  $g_6$  является нетривиальной процедурой и для этого разработаны [13, 15] соответствующие способы. Поэтому с точки зрения доступности данных выигрывает СФ  $g_6$ , хотя при её определении используется приближение. Однако следует отметить, что в этой кинематической области (малые  $y$ ,  $Q^2 \leq 10^3 \text{ ГэВ}^2$ ) статистика, например, в экспериментах на HERA как раз наиболее хорошая. Поэтому будем использовать первые моменты  $\Gamma_6^{l^-,l^+}$ . Из (3) получаем

$$\Gamma_6^{l^-p} - \Gamma_6^{l^+p} = (\Delta u + \Delta \bar{u}) - (\Delta d + \Delta \bar{d}) - (\Delta s + \Delta \bar{s}). \quad (8)$$

В анализах спиновой структуры нуклона используют измеряемую величину – аксиальный заряд  $a_3$  ( $a_3 = F+D = 1.2670 \pm 0.0035$ , где  $F, D$  – константы связи  $\beta$ -распада гиперона), который в КПМ представляется как

$$a_3 = (\Delta u + \Delta \bar{u}) - (\Delta d + \Delta \bar{d}). \quad (9)$$

Совместное применение  $\Gamma_1^p$  (4),  $(\Gamma_6^{l^-p} - \Gamma_6^{l^+p})$  (8) и  $a_3$  (9) позволяет определить отдельно вклады кварковых ароматов в нуклонный спин:

$$\begin{aligned}
\Delta u + \Delta \bar{u} &= \frac{\Gamma_1^p + a_3 a_d + a_s \left( \Gamma_6^{l^- p} - \Gamma_6^{l^+ p} - a_3 \right)}{a_u + a_d}, \\
\Delta d + \Delta \bar{d} &= \frac{\Gamma_1^p - a_3 a_u + a_s \left( \Gamma_6^{l^- p} - \Gamma_6^{l^+ p} - a_3 \right)}{a_u + a_d}, \\
\Delta s + \Delta \bar{s} &= a_3 - \Gamma_6^{l^- p} + \Gamma_6^{l^+ p}.
\end{aligned} \tag{10}$$

На коллайдерах EIC будут создаваться пучки поляризованных  ${}^3\text{He}$ . Поэтому представляет интерес получение кварковых вкладов при рассеянии на поляризованных нейтронах. В аналогичном подходе получаем для  $\vec{l}\vec{n}$ -ГНР

$$\begin{aligned}
\Delta u + \Delta \bar{u} &= \frac{\Gamma_1^n + a_3 a_u + a_s \left( \Gamma_6^{l^- n} - \Gamma_6^{l^+ n} + a_3 \right)}{a_u + a_d}, \\
\Delta d + \Delta \bar{d} &= \frac{\Gamma_1^n - a_3 a_d + a_s \left( \Gamma_6^{l^- n} - \Gamma_6^{l^+ n} + a_3 \right)}{a_u + a_d}, \\
\Delta s + \Delta \bar{s} &= \Gamma_6^{l^+ n} - \Gamma_6^{l^- n} - a_3.
\end{aligned}$$

Определение поляризации валентных кварков связано с первым моментом нарушающей четность СФ  $g_6$  (см.(5))

$$\Gamma_6^p = b_u \Delta u_V + b_d \Delta d_V.$$

Из (3) для ГНР с заряженным током для первых моментов  $\Gamma_6^{l^\mp}$  для рассеяния на протонах имеем:

$$\Gamma_6^{l^- p} + \Gamma_6^{l^+ p} = \Delta u_V + \Delta d_V.$$

Из этих двух выражений получаем:

$$\begin{aligned}
\Delta u_V &= \frac{\Gamma_6^p - b_d \left( \Gamma_6^{l^- p} - \Gamma_6^{l^+ p} \right)}{b_u - b_d}, \\
\Delta d_V &= \frac{b_u \left( \Gamma_6^{l^- p} + \Gamma_6^{l^+ p} \right) - \Gamma_6^p}{b_u - b_d}.
\end{aligned}$$

Аналогично для рассеяния на нейтронах:

$$\begin{aligned}
\Delta u_V &= \frac{\Gamma_6^n - b_u \left( \Gamma_6^{l^- n} - \Gamma_6^{l^+ n} \right)}{b_d - b_u}, \\
\Delta d_V &= \frac{b_d \left( \Gamma_6^{l^- n} - \Gamma_6^{l^+ n} \right) - \Gamma_6^n}{b_d - b_u}.
\end{aligned}$$

Таким образом, предложены способы определения вкладов кварковых

ароматов ( $u, d, s$ ) и валентных кварков ( $\Delta u_V, \Delta d_V$ ) с помощью первых моментов  $\Gamma_1, \Gamma_6$  и  $\Gamma_6^{/\mp}$ , измеряемых в процессах (1) и (2) соответственно.

## Литература

1. Precise determination of the spin structure function  $g_1$  of the proton, deuteron and neutron / A. Airapetian [et al.] // Phys. Rev. – 2007. – Vol. D75. – P. 012007.
2. The deuteron spin-dependent structure function  $g_1^d$  and its first moment / V.Y Alexarhin [et al.] // Phys. Lett. – 2007. – Vol. B647. – P. 8–17.
3. Quark helicity distributions from longitudinal spin asymmetries in muon-proton and muon-deuteron scattering / M.G. Alekseev [et al.] // Phys. Lett. – 2010. – Vol. B693. – P. 227–235.
4. Leader, E. Determination of polarized PDFs from a QCD analysis of inclusive and semi-inclusive Deep Inelastic Scattering data / E. Leader, A.V. Sidorov, D.B. Stamenov // Phys. Rev. – 2010. – Vol. D82. – P. 114018.
5. Arbabifar, F. QCD analysis of polarized DIS and the SIDIS asymmetry world data and light sea-quark decomposition / F. Arbabifar, A.N. Khorramian, M. Soleymaninia // Phys. Rev. – 2014. – Vol. D89. – P. 034006.
6. Bass, S.D. Gluon polarization in the proton / S.D. Bass, A. Casey, A.W. Thomas // Phys. Rev. – 2011. – Vol. C83. – P. 038202.
7. Leading order determination of the gluon polarization from DIS events with high  $-P_T$  hadron pairs / C. Adolph [et al.] // Phys. Lett. – 2013. – Vol. B718. – P. 922–930.
8. Leading and Next-to-Leading Order gluon polarization in the nucleon and longitudinal double spin asymmetries from open charm muonproduction / C. Adolph [et al.] // Phys. Rev. – 2013. – Vol. D87. – P. 052018.
9. QCD and Hadron Physics / S.J. Brodsky [et al.]. – ArXiv:1502.05728[hep-ph]. – 2015. – 48 p.
10. Measurement of parton distributions of strange quarks in the nucleon from charged-kaon production in deep-inelastic scattering on the deuteron / A. Airapetian [et al.] // Phys. Lett. – 2008. – Vol. B666. – P. 446–450.
11. Aschenauer, E.C. Helicity parton distributions at a future Electron–Ion Collider: a quantitative appraisal / E.C. Aschenauer, M. Stratmann, R. Sassot // Phys. Rev. – 2012. – Vol. D86. – P. 054020.
12. Accardi, A. Nuclear physics with a medium-energy Electron–Ion Collider / A. Accardi, V. Guzey, A. Prokudin, C. Weiss // Eur. Phys. J. – 2012. – Vol. A48. – P. 92.
13. Timoshin, E.S. Polarized structure functions and asymmetries in deep inelastic neutrino scattering / E.S. Timoshin, S.I. Timoshin // Phys. Part. and

Nuclei Lett. – 2014. – Vol. 11. – № 2. – P. 86–90.

14. Максименко, Н.В. Спиновая структура нуклона в теории электрослабого взаимодействия / Н.В. Максименко, Е.С. Тимошин // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С. 59–63.

15. Timoshin E.S. The Polarized Deep Inelastic Lepton-Nucleon Scattering with Charged Current at Future Colliders / E.S. Timoshin, S.I. Timoshin // Actual Problems of Microworld Physics: Proceeding of the XII-th Int. School-Seminar, Gomel, July 22 – August 2, 2013 / ed. V. Andreev [et al.]. – Dubna: JINR, 2015. –Vol. 2. – P. 107–115.

**Е.С. Тимошин, С.И. Тимошин**

УО «Гомельский государственный технический университет  
имени П.О. Сухого», Гомель, Беларусь

## **ГЛУБОКОНЕУПРУГОЕ ЛЕПТОН-НУКЛОННОЕ РАССЕЯНИЕ С НЕЙТРАЛЬНЫМ ТОКОМ ПРИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ОДНОЙ И ДВУХ НАЧАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ**

Эксперименты последних двух десятилетий показывают, что спин кварков и антикварков составляет только  $\sim 30\%$  нуклонного спина.

Недавние результаты экспериментов на RHIC указывают, что вклад глюонного спина в достигнутой кинематической области является ненулевым [1–3], но еще недостаточным для объяснения недостающих 70%. Неопределенность в области малых  $x$  еще существенна и необходимо улучшать измерения. С большими неопределенностями измерена в настоящее время и поляризация кварков моря, в том числе странных кварков, из-за ограниченности кинематической области. Поэтому дальнейший прогресс в изучении спиновой структуры нуклона связан с продвижением в область малых  $x$ . Это будет возможно в экспериментах на электрон-ионном коллайдере (EIC) [4–6], благодаря достижению области  $x$  до  $\sim 10^{-4}$ .

В настоящей работе кварковые вклады в спин нуклона рассматриваются в глубоконеупругом рассеянии (ГНР) (не)поляризованных лептонов на поляризованных нуклонах с нейтральным током.

$$l + \vec{N} \rightarrow l + X, \quad (1)$$

$$\vec{l} + \vec{N} \rightarrow l + X. \quad (2)$$

В работе [7] получены вклады кварковых ароматов  $(\Delta u + \Delta \bar{u})$ ,  $(\Delta d + \Delta \bar{d})$  и  $(\Delta s + \Delta \bar{s})$  в рамках процесса (1) с применением измеряемых величин – аксиальных зарядов  $a_3$  и  $a_8$ .

$$a_3 = (\Delta u + \Delta \bar{u}) - (\Delta d + \Delta \bar{d}),$$

$$a_8 = (\Delta u + \Delta \bar{u}) + (\Delta d + \Delta \bar{d}) - 2(\Delta s + \Delta \bar{s}).$$

Использование октетного аксиального заряда  $a_8$  в качестве дополнительной измеряемой величины нежелательно из-за больших неопределенностей в его определении [8]. Поэтому здесь предлагается для исключения  $a_8$  применить совместный анализ наблюдаемых величин в процессах (1) и (2) с нейтральным током.

Первый момент структурной функции (СФ)  $g_1$  для процесса (1) с неполяризованным лептоном и продольно поляризованным протоном получен [7] в виде:

$$\Gamma_{1s}^p = -a_u^s (\Delta u + \Delta \bar{u}) + a_d^s (\Delta d + \Delta \bar{d}) + a_s^s (\Delta s + \Delta \bar{s}), \quad (3)$$

где

$$a_u^s = \frac{2}{3} g_A \eta_{\gamma Z}^s g_{V,u} - g_V g_A \eta_Z^s (g_{V,u}^2 + g_{A,u}^2),$$

$$a_d^s = \frac{1}{3} g_A \eta_{\gamma Z}^s g_{V,d} - g_V g_A \eta_Z^s (g_{V,d}^2 + g_{A,d}^2),$$

$$a_s^s = \frac{1}{3} g_A \eta_{\gamma Z}^s g_{V,s} - g_V g_A \eta_Z^s (g_{V,s}^2 + g_{A,s}^2),$$

$$\eta_{\gamma Z}^s = \frac{G m_Z^2}{2\sqrt{2}\pi^2} \frac{Q^2}{Q^2 + m_Z^2}, \quad \eta_Z^s = (\eta_{\gamma Z}^s)^2.$$

$$g_{V,u} = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_{A,u} = \frac{1}{2}, \quad g_{V(d,s)} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W, \quad g_{A(d,s)} = -\frac{1}{2}.$$

$G$  – константа Ферми,  $m_Z$  – масса  $Z$ -бозона;  $g_V = \frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W$ ,  $g_A = -\frac{1}{2}$  – векторная и аксиально-векторная константы связи.

Первый момент  $\Gamma_1^p$  СФ  $g_1^p$  для процесса (2) с поляризованными лептоном и нуклоном получен в [9].

$$\Gamma_1^p = a_u (\Delta u + \Delta \bar{u}) + a_d (\Delta d + \Delta \bar{d}) + a_s (\Delta s + \Delta \bar{s}), \quad (4)$$

где  $a_u$ ,  $a_d$ ,  $a_s$  определены в [9].

Для определения кварковых вкладов  $(\Delta q + \Delta \bar{q})$  из  $\Gamma_1^P$  (4) и  $\Gamma_{1s}^P$  (3) достаточно привлечь только изовекторный аксиальный заряд  $a_3$ . Тогда для вкладов кварковых ароматов ( $u, d, s$ ) в нуклонный спин на основе измеряемых величин процессов с нейтральным током (1) и (2) получаем

$$\begin{aligned}\Delta u + \Delta \bar{u} &= \frac{a_d^s \Gamma_1^P - a_d \Gamma_{1s}^P}{a_d a_u^s + a_u a_d^s}, \\ \Delta d + \Delta \bar{d} &= \frac{a_d^s \Gamma_1^P - a_d \Gamma_{1s}^P - a_3 (a_u a_d^s + a_d a_u^s)}{a_d a_u^s + a_u a_d^s}, \\ \Delta s + \Delta \bar{s} &= \frac{(a_u + a_d) \Gamma_{1s}^P - (a_d^s - a_u^s) \Gamma_1^P + a_3 (a_d a_u^s + a_u a_d^s)}{a_d a_u^s + a_u a_d^s}.\end{aligned}$$

Первый момент другой СФ  $g_6$  связан с поляризацией валентных кварков. Для процессов (1) с поляризованным протоном [7]

$$\Gamma_{6s}^P = b_u^s \Delta u_V + b_d^s \Delta d_V, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}b_u^s &= \frac{2}{3} g_V \eta_{\gamma Z}^s g_{A,u} + (g_V^2 + g_A^2) \eta_Z^s g_{V,u} g_{A,u}, \\ b_d^s &= -\frac{1}{3} g_V \eta_{\gamma Z}^s g_{A,d} + (g_V^2 + g_A^2) \eta_Z^s g_{V,d} g_{A,d}.\end{aligned}$$

Для  $\vec{l}\vec{p}$ -ГНР (2)  $\Gamma_6^P$  [9] есть

$$\Gamma_6^P = b_u \Delta u_V + b_d \Delta d_V,$$

где  $b_u, b_d$  определены в работе [9].

Совместное применение первых моментов  $\Gamma_{6s}^P$  и  $\Gamma_6^P$  для  $l\vec{p}$ - и  $\vec{l}\vec{p}$ -ГНР с нейтральным током дает возможность извлекать вклады валентных кварков

$$\begin{aligned}\Delta u_V &= \frac{b_d \Gamma_{6s}^P - b_d^s \Gamma_6^P}{b_u^s b_d - b_u b_d^s}, \\ \Delta d_V &= \frac{b_u^s \Gamma_6^P - b_u \Gamma_{6s}^P}{b_u^s b_d - b_u b_d^s}.\end{aligned}$$

На коллайдере EIC будут проводиться эксперименты с поляризованными пучками  ${}^3\text{He}$  и дейтронов. Поэтому рассмотрим ГНР на поляризованных нейтронах и дейтронах.

Первые моменты СФ в процессах ГНР (1) и (2), если  $N = n$ , равны соответственно:

$$\begin{aligned}\Gamma_{1s}^n &= a_d^s(\Delta u + \Delta \bar{u}) - a_u^s(\Delta d + \Delta \bar{d}) + a_s^s(\Delta s + \Delta \bar{s}), \\ \Gamma_{6s}^n &= b_d^s \Delta u_V + b_u^s \Delta d_V\end{aligned}\quad (6)$$

и

$$\begin{aligned}\Gamma_1^n &= a_d(\Delta u + \Delta \bar{u}) + a_u(\Delta d + \Delta \bar{d}) + a_s(\Delta s + \Delta \bar{s}), \\ \Gamma_6^n &= b_d \Delta u_V + b_u \Delta d_V.\end{aligned}$$

Применяя (6) с первыми моментами  $\Gamma_1^n$ ,  $\Gamma_6^n$   $\vec{l}\vec{n}$ -ГНР и  $a_3$ , получим выражения для поляризации кварков и антикварков:

$$\begin{aligned}\Delta u + \Delta \bar{u} &= \frac{a_d^s \Gamma_1^n - a_d \Gamma_{1s}^n}{a_d^s a_u + a_d a_u^s} + a_3, \\ \Delta d + \Delta \bar{d} &= \frac{a_d^s \Gamma_1^n - a_d \Gamma_1^n}{a_d^s a_u + a_d a_u^s}, \\ \Delta s + \Delta \bar{s} &= \frac{(a_u + a_d) \Gamma_{1s}^n + (a_u^s - a_d^s) \Gamma_1^n}{a_d^s a_u + a_d a_u^s} - a_3\end{aligned}$$

и валентных кварков:

$$\begin{aligned}\Delta u_V &= \frac{b_u^s \Gamma_6^n - b_u \Gamma_{6s}^n}{b_d b_u^s - b_u b_d^s}, \\ \Delta d_V &= \frac{b_d \Gamma_{6s}^n - b_d^s \Gamma_6^n}{b_d b_u^s - b_u b_d^s}.\end{aligned}$$

Первые моменты СФ дейтрона определим следующим образом:

$$\Gamma_{1,6}^d = \frac{\Gamma_{1,6}^p + \Gamma_{1,6}^n}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right), \quad (7)$$

где  $\omega=0,05$  – вероятности D-состояния в волновой функции дейтрона. Для первых моментов (7) в случае  $\vec{l}\vec{d}$ -ГНР и  $l\vec{d}$ -ГНР получаем соответственно

$$\begin{aligned}\Gamma_1^d &= \frac{(a_u + a_d)(\Delta u + \Delta \bar{u} + \Delta d + \Delta \bar{d}) + 2a_s(\Delta s + \Delta \bar{s})}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right), \\ \Gamma_6^d &= \frac{(b_u + b_d)(\Delta u_V + \Delta d_V)}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \omega\right).\end{aligned}\quad (8)$$

и

$$\begin{aligned}\Gamma_{1s}^d &= \frac{(a_d^s - a_u^s)(\Delta u + \Delta \bar{u} + \Delta d + \Delta \bar{d}) + 2a_s^s(\Delta s + \Delta \bar{s})}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right), \\ \Gamma_{6s}^d &= \frac{(b_u^s + b_d^s)(\Delta u_V + \Delta d_V)}{2} \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right).\end{aligned}\quad (9)$$

Видно, что вклады кварковых ароматов ( $u, d, s$ ) в нуклонный спин связаны с моментами  $\Gamma_1^d$  и  $\Gamma_{1s}^d$ . Поэтому из (8), (9) и  $a_3$  получаем

$$\begin{aligned}\Delta u + \Delta \bar{u} &= \frac{a_d^s \Gamma_1^d - a_d \Gamma_{1s}^d}{(a_u a_d^s + a_d a_u^s) \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right)} + \frac{a_3}{2}, \\ \Delta d + \Delta \bar{d} &= \frac{a_d^s \Gamma_1^d - a_d \Gamma_{1s}^d}{(a_u a_d^s + a_d a_u^s) \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right)} - \frac{a_3}{2}, \\ \Delta s + \Delta \bar{s} &= \frac{(a_u + a_d) \Gamma_{1s}^d - (a_d^s - a_u^s) \Gamma_1^d}{(a_u a_d^s + a_d a_u^s) \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right)}.\end{aligned}$$

Важно отметить, что выражение для поляризации странного моря ( $\Delta s + \Delta \bar{s}$ ) не зависит от  $a_3$ , а только от моментов  $\Gamma_1^d$ ,  $\Gamma_{1s}^d$ , измеряемых в экспериментах  $ld$ -ГНР с нейтральным током. Первые моменты  $\Gamma_6^d$ ,  $\Gamma_{6s}^d$  определяют суммарный вклад валентных кварков

$$\Delta q_V = \Delta u_V + \Delta d_V = \frac{2\Gamma_6^d}{(b_u + b_d) \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right)}$$

или

$$\Delta q_V = \frac{2\Gamma_{6s}^d}{(b_u^s + b_d^s) \left(1 - \frac{3}{2}\omega\right)}.$$

Последний имеет преимущество в экспериментальном аспекте, поскольку поляризовать необходимо только дейтронный пучок.

Таким образом, выполнен совместный анализ первых моментов  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_6$  поляризационных СФ  $g_1$ ,  $g_6$  в ГНР неполяризованных и поляризованных лептонов на продольно поляризованных протонах, нейтронах и дейтронах с нейтральным током. Получены выражения для вкладов кварковых ароматов ( $u, d, s$ ) и валентных кварков в нуклонный спин.



## Литература

1. De Florian, D. Evidence for polarization of gluons in the proton / D. de Florian, R. Sassot, M. Stratmann, W. Vogelsang // Phys. Rev. Lett. – 2014. – Vol. 113. – № 1. – P. 012001.
2. Guragain, H. Recent results from PHENIX on double helicity asymmetry ( $A_{LL}$ ) measurement at  $\sqrt{s}=510\text{GeV}$  / H. Guragain // PoS DIS 2015. – 2015. – P.199.
3. Chang, Z. Gluon Polarization in Longitudinally Polarized pp Collision at STAR / Z. Chang. – 2015. – 6 p. – (ArXiv:1512.05400 [hep-ex]).
4. Gluons and the quark sea of high energies: distributions, polarization, tomography / D. Boer [et al.]. – ArXiv:1108.1713 [nucl-th]. – 2011. – 547 p.
5. Electron-Ion Collider: The Next QCD Frontier – Understanding the glue that binds us all / A. Accardi [et al.]. – ArXiv:1212.1701[nucl-ex]. – 2012. – 146 p.
6. Aschenauer, E.C. Unveiling the Proton Spin Decomposition at a Future Electron-Ion Collider / E.C. Aschenauer, R. Sassot, M. Stratmann // Phys. Rev. – 2015. – Vol. D92. – № 9. – P. 094030.
7. Timoshin, E.S. The nucleon spin in deep inelastic lepton-nucleon scattering with neutral current / E.S. Timoshin, S.I. Timoshin // Nonlinear Dynamics and Applications. – 2011. – Vol. 18. – P. 236–238.
8. Nacera, E.R. Achievements and open issues in the determination of polarized parton distribution functions / E.R. Nacera. – 2015. – 8 p. – ArXiv:1503.03518[hep-ph].
9. Максименко, Н.В. Спиновая структура нуклона в теории электрослабого взаимодействия / Н.В. Максименко, Е.С. Тимошин // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2009. – № 1. – С.59–63.

Г.Ю. Тюменков<sup>1</sup>, А.Ю. Песенко<sup>2</sup>, Д.А. Богданович<sup>3</sup>

<sup>1</sup>УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Гомель, Беларусь

<sup>2</sup>УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», Минск, Беларусь

<sup>3</sup>ГУО «Гомельский городской лицей №1», Гомель, Беларусь

## О НОВЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ОРБИТАХ ТРОЙНЫХ СИСТЕМ С НЬЮТОНОВСКИМ ГРАВИТАЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

### Введение

Общая задача трёх тел небесной механики до настоящего времени не имеет точных аналитических решений, поэтому часто изучаются её частные случаи. Особый интерес в рамках общей задачи представляет поиск периоди-

ческих орбит (ПО), то есть замкнутых траекторий, по которым перемещаются компоненты системы при условии равенства периодов обращения каждой. Первые точные периодические решения для тел равной массы были найдены в своё время Эйлером и Лагранжем. Последующие продуктивные исследования в данном направлении стали возможными с развитием вычислительных технологий.

Пуанкаре для нахождения периодических орбит предложил использовать принцип наименьшего действия. В дальнейшем эта идея была продуктивно развита Муром [1], который подробно рассмотрел обобщенный потенциал взаимодействия полиномиального вида  $V \propto r^\alpha$ , при  $\alpha = -1$  соответствующий гравитационному потенциалу Ньютона. Было показано, что ПО действительно соответствуют минимуму функционала действия (ФД)

$$S = \int_0^T (\hat{E} + V) d\tau, \quad (1)$$

где  $K$  – кинетическая энергия и  $V$  – потенциальная энергия системы в системе отсчета, связанной с центром масс,  $T$  – общий период обращения компонентов, переменная интегрирования  $\tau \in (0, T)$ . Для упрощения анализа в функционале (1) часто используют угловую переменную  $t = (2\pi/T)\tau$ , изменяющуюся в пределах:  $t \in (0, 2\pi)$ . Это удобно, например, при использовании элементов Фурье-анализа, что характерно для данной работы, и что без потери качества приводит к переопределению вида ФД.

### 1. Минимизация ФД и численное решение ДУ

В данной работе в рамках общей задачи трёх тел небесной механики на основе использования принципа наименьшего действия, элементов Фурье – анализа и возможностей компьютерной симуляции с использованием пакета Mathematica, решаются динамические уравнения (ДУ) для нерелятивистской системы трёх тел с ньютоновским потенциалом и моделируются новые периодические орбиты. Для проверки достоверности используемого алгоритма предварительно на его основе моделируются уже известные ПО.

В общем случае для системы  $n$  тел с массами  $m_j$  обозначим  $z_j$  координаты положения  $j$ -го тела в момент времени  $t$  с соответствующим значением аргумента  $t$ . Тогда для  $n$  тел с траекториями  $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$  ФД запишется в виде [2,3]:

$$S = \int_0^{2\pi} \left( \sum_j \frac{m_j}{2} |\dot{z}_j|^2 - \sum_{j,k;k < j} \frac{m_j m_k}{|z_j - z_k|} \right) dt. \quad (2)$$

Далее используем разложение траекторий в ряды Фурье

$$z_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikt}, \quad \gamma_k \in \mathbb{C}. \quad (3)$$

Задачу трёх тел рационально полагать плоской, поэтому траектории для такой задачи будут двухкомпонентными  $z_j(t) = \{x_j(t), y_j(t)\}$  с  $\gamma_k = \{\alpha_k, \beta_k\}$ , представляемыми, следуя (3), в виде рядов

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^c \cos(kt) + a_k^s \sin(kt)) \\ y(t) &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k^c \cos(kt) + b_k^s \sin(kt)), \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha_0, \quad a_k^c = \alpha_k + \alpha_{-k}, \quad a_k^s = \beta_{-k} - \beta_k, \\ b_0 &= \beta_0, \quad b_k^c = \beta_k + \beta_{-k}, \quad b_k^s = \alpha_k - \alpha_{-k}. \end{aligned}$$

Вначале рассмотрим плоское движение трёх тел равной массы. Так как функционал действия в пространстве параметров  $a_0, a_k^c, a_k^s, b_0, b_k^c, b_k^s$  имеет множество локальных минимумов, то должно существовать множество периодических орбит, среди которых присутствуют как известные, так и новые.

Моделирование ПО осуществляется путем численного решения ДУ для системы трёх тел [3–5]

$$m_j \ddot{z}_j^\alpha = \sum_{k:k \neq j} m_j m_k \frac{z_j^\alpha - z_k^\alpha}{|z_j - z_k|^3}, \quad j = 1, 2, 3, \quad \alpha = 1, 2; \quad (5)$$

с учетом минимизации функционала (2) и разложений в ряд (4), эффективно использованных в [6].

## 2. Новые периодические орбиты

Нахождение минимумов ФД будет осуществлять встроенный в среду Mathematica инструмент *Findminimum*, который находит локальные минимумы в зависимости от начальных значений параметров, которые задает генератор случайных чисел. Стандартной точности вычисления для нашего случая было недостаточно, поэтому параметр *MaxIterations* был увеличен до значения 100. Этот уровень точности потребовал учёта семи слагаемых рядов Фурье, что довело число параметров до 90. Дальнейшее же увеличение точности приводит к резкому росту расхода оперативной памяти компьютера. После нахождения локального минимума мы имеем массив данных, который записывается в файл для дальнейшего использования при построении орбит.

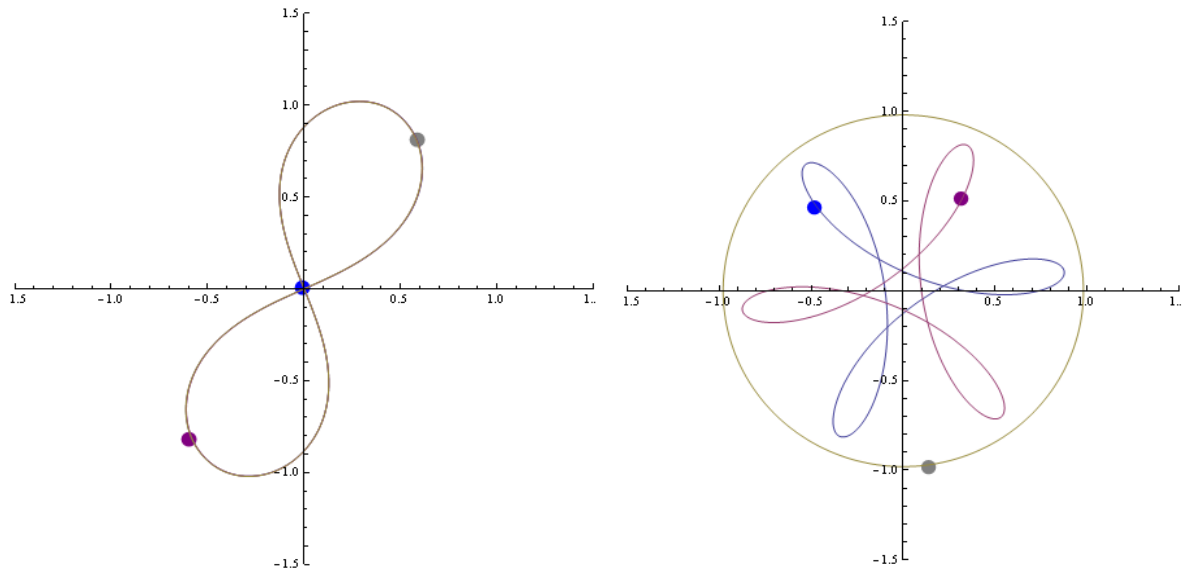


Рисунок 1 – Орбита «восьмерка» (слева) и орбита Хилла (справа)

Для тестирования методики для системы трёх тел одинаковой массы были построены две ранее известные ПО – «восьмерка» и орбита Хилла (рисунок 1).

Это подтвердило корректность используемого метода моделирования. Отметим здесь, что орбита «восьмерка» относится к интересному классу, называемому «хореографии». Этот класс предполагает совпадение орбит всех компонентов системы и активно исследуется по настоящее время [7].

В рамках проверенной методики нами смоделирована новая ПО (далее «Новая I») для трёх тел равной массы, представленная на рисунке 2. Два тела двигаются по симметричным замкнутым кривым, а третье тело совершает движение вдоль вытянутой восьмерки очень близкой к горизонтальной оси. В начальный момент времени все три тела расположены на одной прямой, причем скорость третьего тела равна нулю, а второе и первое тело имеют одинаковые по модулю, но противоположные по направлению скорости, перпендикулярные этой прямой. Через промежуток времени  $\tau = T/4$  тела снова выстраиваются в линию, причем третье тело в этот момент времени проходит центр масс системы.

Далее был исследован интересный частный случай системы, состоящей из трёх тел с различными массами, отношение между которыми определяется так называемым «золотым сечением». Последнее было сделано из эстетических соображений с целью получения красивых орбит. Такие массы определяются следующим образом:

$$m_1 = 1,5(5^{0,5} - 1)m \approx 1,851m; \quad m_2 = 0,5(5^{0,5} - 1)[3 - 1,5(5^{0,5} - 1)]m \approx 0,710m;$$

$$m_3 = 3 - 1,5(5^{0,5} - 1) - 0,5(5^{0,5} - 1)[3 - 1,5(5^{0,5} - 1)]m \approx 0,439m.$$

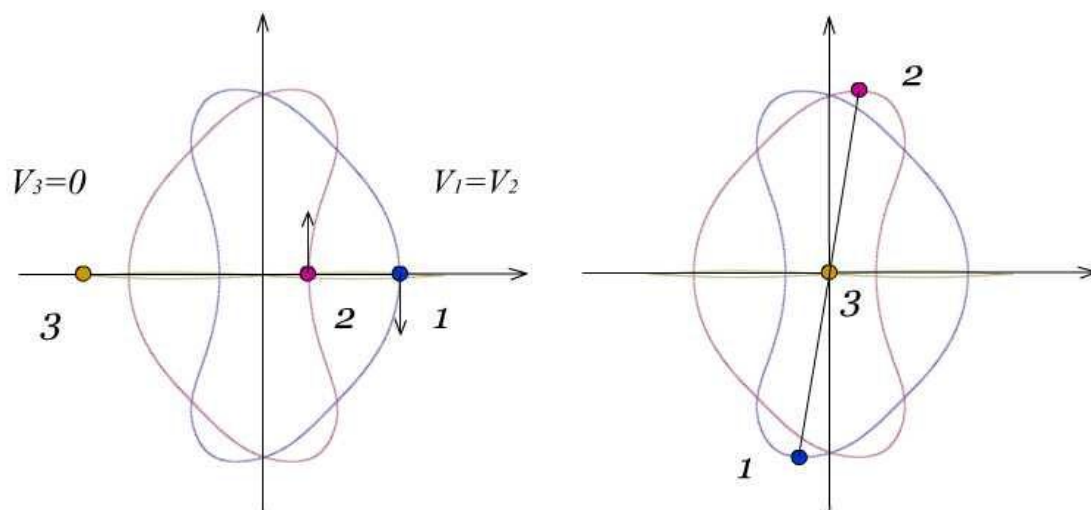


Рисунок 2 – ПО «Новая I» и положения тел на орбите при  $\tau = 0$  и  $\tau = T/4$

Введение различных масс тел приводит к появлению двух дополнительных параметров задачи, что существенно ее усложняет и значительно увеличивает время моделирования ПО, но тем самым увеличивает ее теоретическую привлекательность. Однако, тем не менее, нами была успешно получена соответствующая периодическая орбита «Новая II», представленная на рисунке 3, где отмечены начальные положения тел:

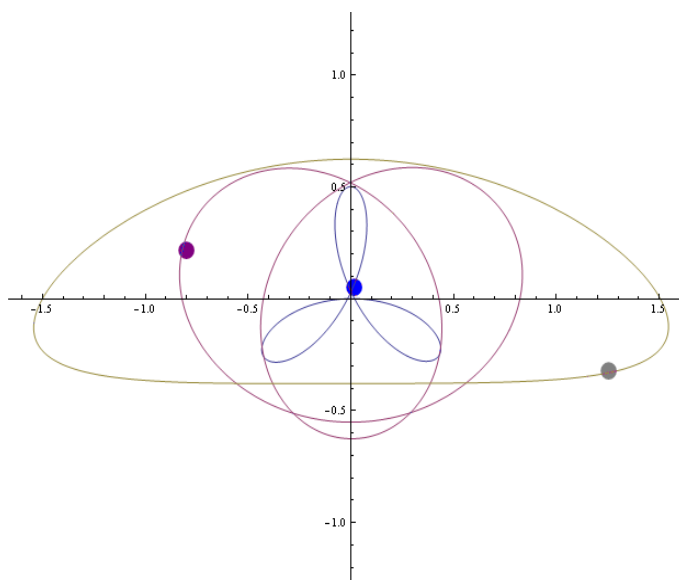


Рисунок 3 – ПО «Новая II» для частного случая неравных масс

На нем первому телу соответствует синяя метка в центре, второму – красная слева и третьему – коричневая справа.

Во всех случаях при моделировании за единицу измерения массы тела была

принята масса Солнца, шкалы на графиках орбит масштабированы астрономическими единицами, а единице измерения времени, то есть секунде, соответствует земной сидерический год.

### **Заключение**

Таким образом, в работе на основе использования возможностей пакета Mathematica, фундаментальных физических принципов и уравнений получены две новые периодические орбиты в рамках общей задачи трёх тел небесной механики для случаев одинаковых и различных масс компонентов.

Активное развитие компьютерных технологий уже дало результаты [7] и в трехмерном моделировании периодических орбит, что делает данное научное направление весьма перспективной областью исследований в глобальном мире изучения космических объектов.

### **Литература**

1. Moore, C. Braids in classical dynamics / C. Moore // Phys. Rev. Lett. – 1993. – Vol. 70. – P. 3675–3683.
2. Vanderbei, R.J. New orbits for the n-body problem / R.J. Vanderbei // Annals of the New York Academy of Sciences. – 2004. – Vol. 1017. – P. 422–430.
3. Montgomery, R.A. New solution to the three – body problem / R. Montgomery // Notices Amer. Math. Soc. – 2001. – Vol. 48. – № 5. – P. 471–481.
4. Рой, А. Движение по орбитам / А. Рой – М.: Мир, 1981. – 545 с.
5. Орлов, В.В. Периодические орбиты в задаче N тел / В.В. Орлов, А.В. Рубинов, А.И. Мартынов // Физика Космоса. – Екатеринбург: УГУ, – 2010. – С. 108–121.
6. Мартынова, А.И. Периодические орбиты в общей задаче трёх тел / А.И. Мартынова, В.В. Орлов // Астрономический вестник. – 2013. – Т. 47. – № 5. – С. 395–407.
7. Титов, В.Б. Периодические орбиты общей задачи трёх тел с нулевым кинетическим моментом / В.Б. Титов // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8. – № 2. – С. 377–389.

Электронное издание

**ПРОБЛЕМЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ  
ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ**

**(Посвящается 90-летию со дня рождения Б. В. Бокутя)**

Материалы IV Международной научной конференции

(Гомель, 9–11 ноября 2016 года)

В двух частях

Часть 1

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,  
распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, Гомель.