В. В. АНИСЬКОВ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ. КУРС ЛЕКЦИЙ В 3 ЧАСТЯХ. ЧАСТЬ 1. ВЕКТОРЫ. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Гомель, 2007

Содержание

1. Тема 1. Векторы и линейные операции над ними

1. Предмет, метод и две основные задачи аналитической геометрии

2. Определения векторов

3. Линейные операции над векторами

1.1. Предмет, метод и две основные задачи аналитической геометрии

Всякая отдельная наука начинает формироваться с того момента, когда чётко определены её предмет (т.е. объект изучения) и методы. Предметом аналитической геометрии первоначально являлись геометрические линии и поверхности (т.е. те линии и поверхности, которые могли быть изображены на плоскости, либо представлены в трёхмерном пространстве). Теперь предмет аналитической геометрии расширен. Оказалось, что аналитическое представление допускает введение в рассмотрение сколь угодно большого количества измерений и искусственное построение пространств соответствующей размерности. Поэтому оказалось возможным конструирование и изучение аналогов геометрических линий и поверхностей, которые имеют размерность выше 3 и поэтому могут быть представлены лишь абстрактно.

Аналитическая геометрия является частью алгебры и поэтому использует алгебраические методы, такие как метод координат, методы векторной алгебры, методы решения систем алгебраических уравнений и методы теории линейных пространств.

На практике аналитической геометрией решаются две основные задачи. Первая задача аналитической геометрии состоит в том, чтобы геометрический объект определить в некоторой системе координат с помощью алгебраических уравнений. Вторая задача обратна к первой: какой геометрический объект определяется данным уравнением.

1.2. Определения векторов

Определение 1.1. Связанным вектором называется отрезок AB, о котором однозначно известно, какая точка является его началом, а какая — концом. Если A является началом, а B концом, то пишут $\overrightarrow{AB}$.

Определение 1.2. Длиной или модулем связанного вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Обозначается длина связанного вектора через $|\overrightarrow{AB}|$.

Определение 1.3. Связанный вектор $\overrightarrow{AB}$ называется нулевым, если его начало и конец совпадают. Связанный вектор не являющийся нулевым называется ненулевым.

Определение 1.4. Два ненулевых связанных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются эквивалентными (пишут $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$), если они сонаправлены и их длины равны.

Множество всех связанных векторов разбивается на непересекающиеся множества эквивалентных друг другу связанных векторов. Поэтому возможно следующее определение.

Определение 1.5. Свободным вектором или просто вектором называется множество всех эквивалентных друг другу связанных векторов. Для задания такого множества достаточно взять один из связанных векторов, который называют представителем вектора. Для обозначения свободных векторов используют малые буквы латинского алфавита, например, $\vec{a}$.

Определение 1.6. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если множества их представителей совпадают. При этом пишут $\vec{a} = \vec{b}$.

Определение 1.7. Длиной или модулем вектора $\vec{a}$ называется длина его любого представителя. Обозначается $|\vec{a}|$.

Определение 1.8. Вектор называется нулевым, если его представителем является нулевой связанный вектор. Вектор, который не является нулевым, называется ненулевым. Обозначается нулевой вектор $\vec{0}$.

Определение 1.9. Углом φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется наименьший угол между их любыми двумя представителями, взятыми таким образом, что их началами является одна и та же точка (рис. 1).

Определение 1.10. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ... ,$\vec{a}_n$ называются коллинеарными, если их представители параллельны одной и той же прямой.

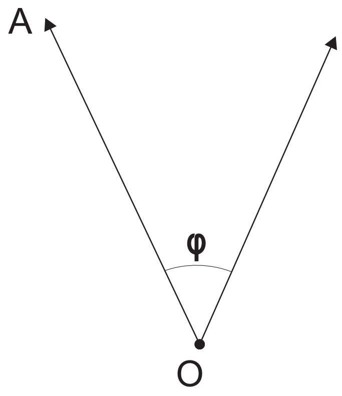


Рис. 1

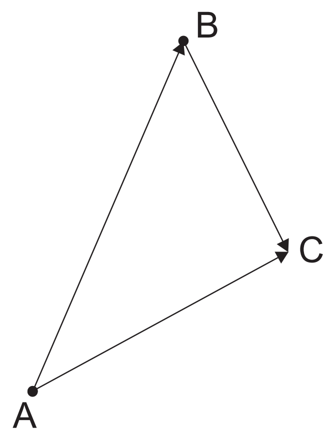


Рис. 2

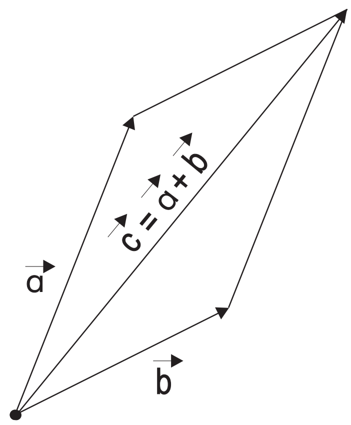


Рис. 3

Определение 1.11. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными, если угол между ними равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Определение 1.12. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, ... ,$\vec{a}_n$ называются компланарными, если их представители параллельны одной и той же плоскости.

1.3. Линейные операции над векторами

Определение 1.13. Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на действительное ненулевое число α называется такой вектор $\vec{b}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{b}| = |\alpha|\ |\vec{a}|$;
2) $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;
3) если $\alpha > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и, если $\alpha < 0$, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Будем так же считать, что для любого вектора $\vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ и для любого действительного числа α $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Теорема 1.1. *Для любого вектора $\vec{a}$ и любых двух чисел α и β справедливо равенство $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.*

◄ Векторы, стоящие в обеих частях равенства имеют одну и ту же длину, равную $|\alpha||\beta||\vec{a}|$. Они коллинеарны и сонаправлены с вектором $\vec{a}$, если α и β одного знака и противоположно направлены с вектором $\vec{a}$, если

α и β разных знаков. Таким образом, векторы $\alpha(\beta\vec{a})$ и $(\alpha\beta)\vec{a}$ в любом случае сонаправлены. Если же какой-либо из множителей доказываемого равенства равен нулю или $\vec{a} = \vec{0}$, то обе части равны нулевому вектору. ▶

Определение 1.14. Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ — представители соответственно векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то $\overrightarrow{AC}$ — представитель вектора $\vec{c}$ (рис. 2).

Приведённое определение сложения векторов даёт так называемое **правило параллелограмма** (так как сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ представляет собой вектор, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 3)).

Определение 1.15. Вектор, равный вектору $\vec{a}$ по длине и противоположный ему по направлению называется противоположным вектором к вектору $\vec{a}$ и обозначается $-\vec{a}$.

Определение 1.16. Вектор, модуль которого равен единице, называется единичным вектором.

Теорема 1.2. *Пусть дан ненулевой вектор $\vec{a}$. Для любого коллинеарного ему вектора $\vec{b}$ существует единственное действительное число λ такое, что $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.*

◀ Таким числом является $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ или $-\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ в зависимости от того, сонаправлены или противоположно направлены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если же $\vec{b} = \vec{0}$, то $\lambda = 0$. Единственность множителя следует из того, что при умножении вектора $\vec{a}$ на различные числа, мы будем получать различные векторы. ▶

Теорема 1.3. *Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:*

1) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (коммутативность);

2) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ (ассоциативность);

3) $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ для любого действительного числа α и любых *двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (дистрибутивность).*

◀ Доказательство утверждений 1) и 2) очевидно из рис. 4,5. Доказательство утверждения 3) очевидно из рис. 6,7, если вспомнить свойства подобных треугольников. ▶

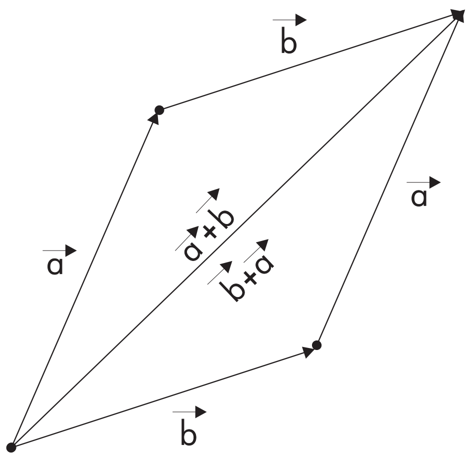


Рис.4

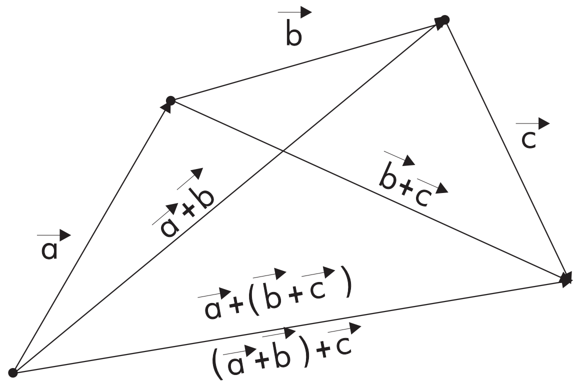
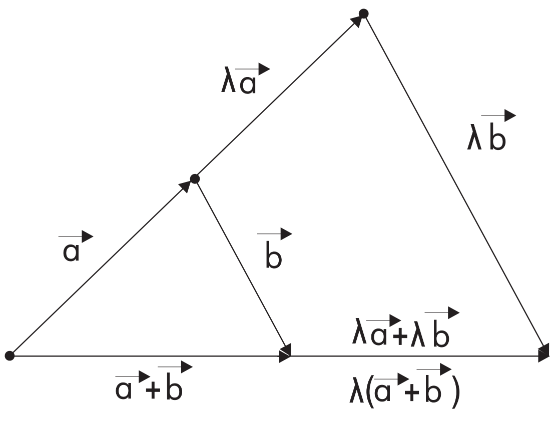
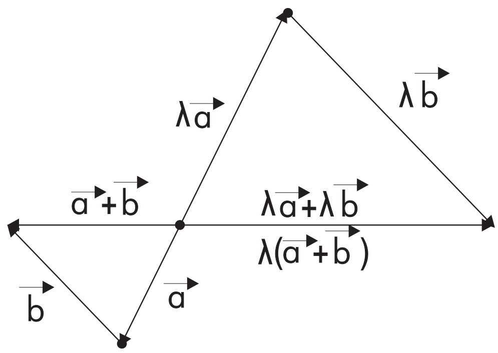


Рис.5



$\lambda>0$

Рис. 6



$\lambda<0$

Рис.7

Теорема 1.4. *Для любых действительных чисел α и β и любого вектора $\vec{a}$ справедливо утверждение $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$.*

◀ Очевидно, что векторы, стоящие в обеих частях равенства коллинеарны.

Пусть сначала α и β отличны от нуля и вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Допустим, что знаки α и β одинаковы. Тогда $\alpha\vec{a} \uparrow\uparrow \beta\vec{a}$ и поэтому длина суммы векторов $\alpha\vec{a}$ и $\beta\vec{a}$ равна сумме их длин. Если α и β положительны, то $|\alpha| + |\beta| = \alpha + \beta = |\alpha + \beta|$; если же α и β — отрицательные величины, то $|\alpha| + |\beta| = -\alpha - \beta = -(\alpha + \beta) = |\alpha + \beta|$. Величина же $|\vec{a}|$ всегда положительна, поэтому, в любом случае, $|(\alpha+\beta)\vec{a}| = |(\alpha+\beta)||\vec{a}| = (|\alpha| + |\beta|)|\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| + |\beta||\vec{a}| = |\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}|$. Итак, в рассматриваемом случае, векторы, стоящие в обеих частях доказываемого равенства, равны по длине. Их направление совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если α и β положительны и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если α и β отрицательны. По определению, векторы $(\alpha + \beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ равны.

Допустим теперь, что знаки α и β различны. Рассмотрим вначале случай, когда $|\alpha| \neq |\beta|$. Не нарушая общности доказательства, можно считать, например, что $|\alpha| > |\beta|$. Тогда длина суммы векторов равна разности их длин (рис. 8).

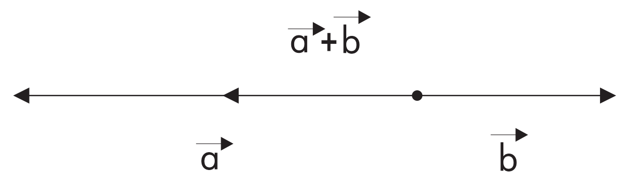


Рис. 8

Следовательно, $|(\alpha + \beta)\vec{a}| = |(\alpha + \beta)||\vec{a}| = (|\alpha| - |\beta|)|\vec{a}| = |\alpha||\vec{a}| - |\beta||\vec{a}| = |\alpha\vec{a}| - |\beta\vec{a}| = |\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}|$. Таким образом, и в этом случае векторы $(\alpha + \beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ равны по длине. Их направление совпадает с направлением вектора $\alpha\vec{a}$ ввиду допущенного ранее. Итак, снова получаем, что по определению, векторы $(\alpha + \beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ равны.

Если же $|\alpha| = |\beta|$ и знаки α и β противоположны, то обе части равенства равны нулевому вектору. Это будет и в том случае, когда $\vec{a} = \vec{0}$ или $\alpha = \beta = 0$.

Итак, в любых случаях, доказываемое равенство верно. ▶

2. Тема 2. Аффинные системы координат

1. Проекция вектора на ось
2. Разложения векторов
3. Координаты вектора и точки на плоскости
4. Координаты вектора и точки в пространстве

2.1. Проекция вектора на ось

Пусть в пространстве дана некоторая прямая l и некоторый единичный вектор $\vec{e} \parallel l$. В качестве представителя вектора $\vec{e}$ возьмём связанный вектор $\overrightarrow{OE}$, где O — некоторая точка прямой l. Очевидно, что $\overrightarrow{OE}$ является единичным связанным вектором. Прямая l с единичным связанным вектором $\overrightarrow{OE}$ представляет собой ось с заданным направлением (рис. 9).

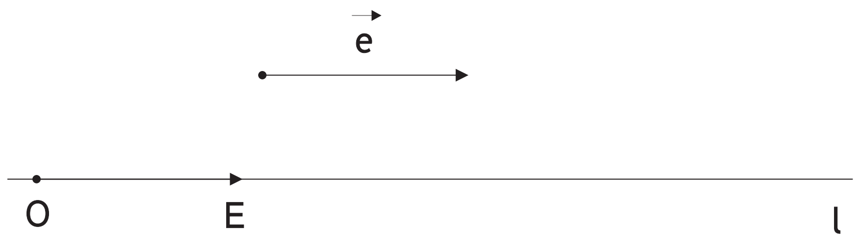


Рис.9

Определение 2.1. Пусть дана некоторая ось l и некоторый вектор $\vec{a}$, заданный представителем $\overrightarrow{AB}$ (рис. 10). Через точки A и B проведём соответственно плоскости π_1 и π_2, перпендикулярные оси l. Ось l пересечёт плоскости π_1 и π_2 соответственно в точках A_1 и B_1. Связанный вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ является представителем некоторого вектора $\vec{b}$. Вектор $\vec{b}$ называется векторной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l.

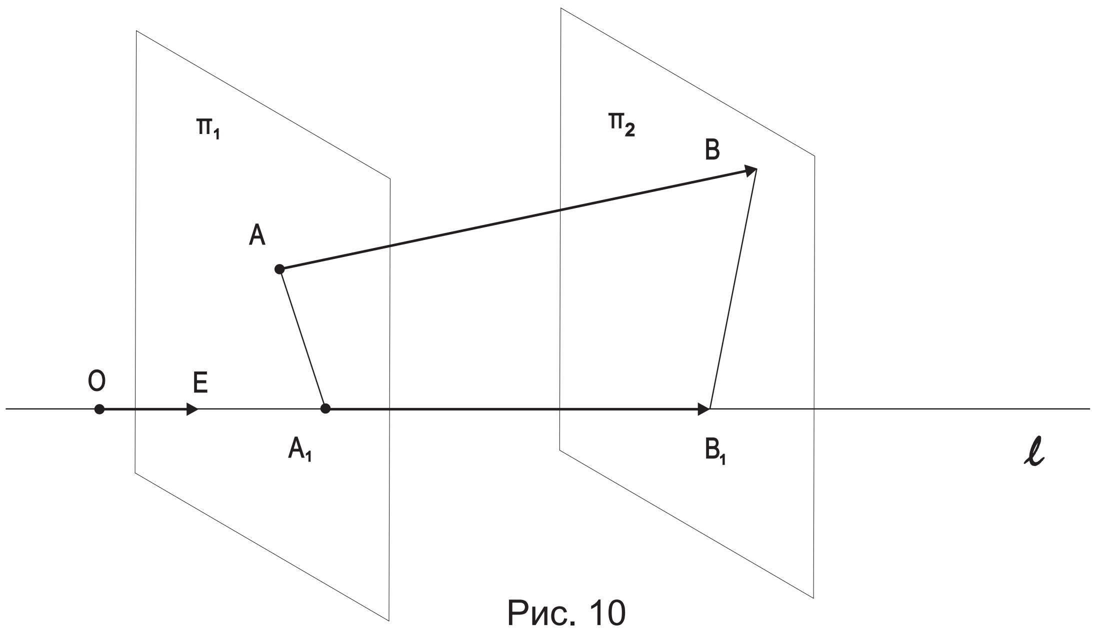


Рис. 10

Определение 2.2. Пусть длина векторной проекции некоторого вектора $\vec{a}$ на ось l равна m. Число p такое, что $p = m$, если эта проекция сонаправлена с осью l и $p = -m$, если проекция с осью противоположно направлена, называется скалярной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l.

В случае, когда $\vec{a} \perp l$, точки A_1, B_1 совпадают и векторной проекцией вектора $\vec{a}$ на ось l будет нулевой вектор. Векторная проекция вектора на ось не зависит от выбора представителя этого вектора.

Теорема 2.1. *Проекция вектора на ось обладает следующими свойствами:*

1) $Pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, l})$;

2) $Pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda Pr_l\vec{a}$ *для любого действительного числа* λ;

3) $Pr_l(\vec{a} + \vec{b}) = Pr_l\vec{a} + Pr_l\vec{b}$.

◀ **1.** Пусть $\varphi = \widehat{\vec{a}, l}$. Если $\varphi < \dfrac{\pi}{2}$ (рис. 11), то $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{e}$. Из прямоугольного треугольника ABB_2, $AB_2 = AB\cos\varphi$, а так как $|\overrightarrow{AB_2}| = |\overrightarrow{AB_1}|$, то $Pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, l})$.

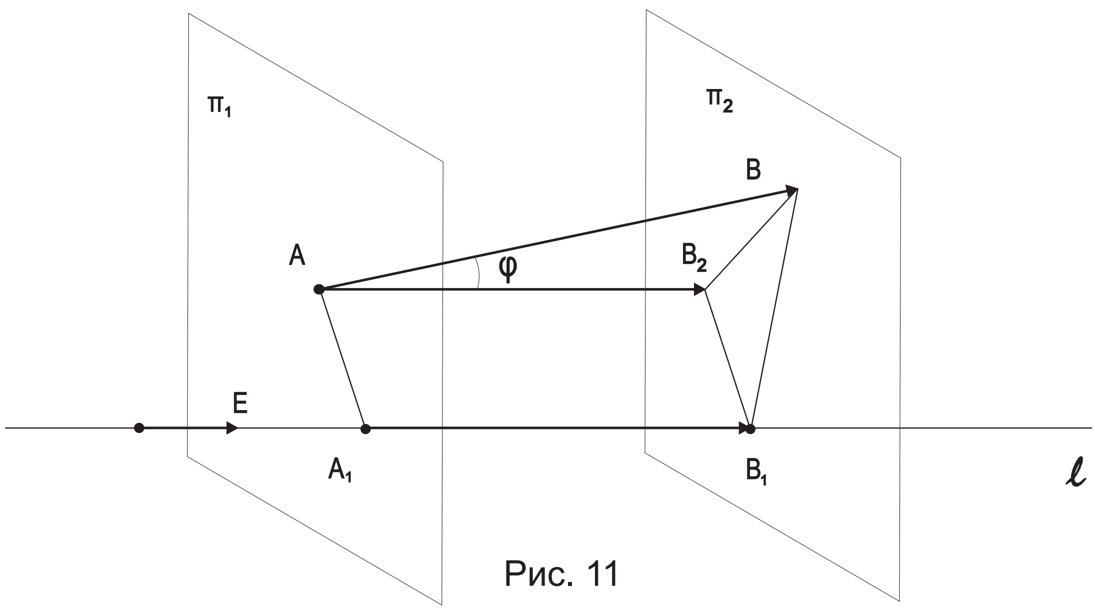


Рис. 11

Если $\varphi > \dfrac{\pi}{2}$ (рис 12), то $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\downarrow \vec{e}$. В этом случае из прямоугольного треугольника ABB_2, $AB_2 = AB\cos\varphi_1$ и так как $\cos\varphi = -\cos\varphi_1$, то и в этом случае получаем, что $Pr_l\vec{a} = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}, l})$. В случае, если $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то $Pr_l\vec{a} = 0$ и утверждение очевидно.

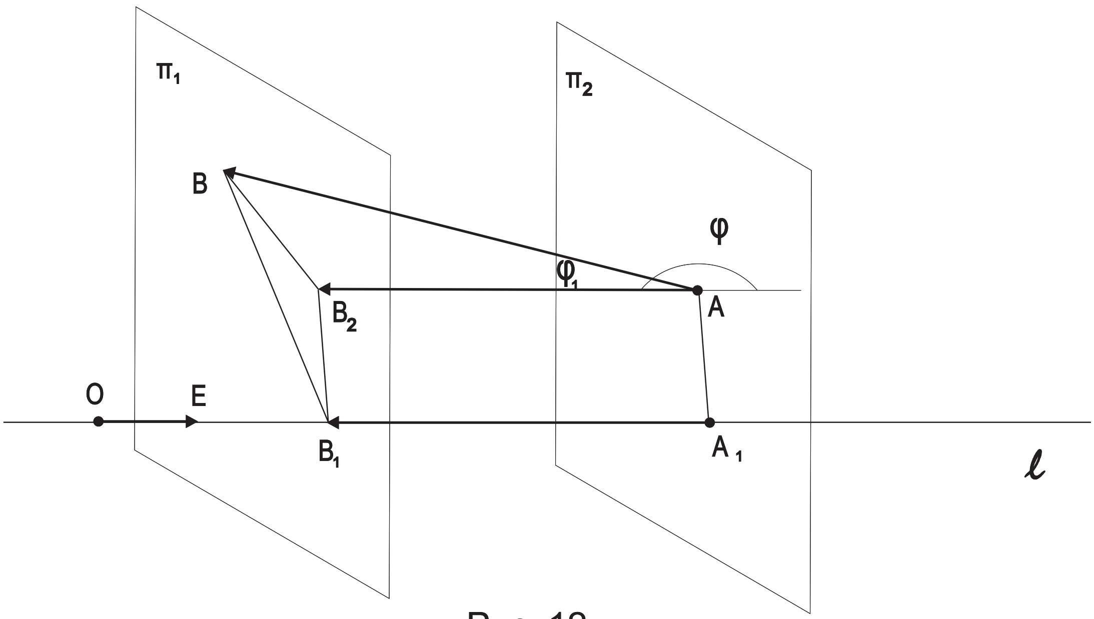


Рис. 12

2. Используем доказанное выше свойство. $Pr_l(\lambda\vec{a}) = |\lambda\vec{a}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a}, l}) =$ $= |\lambda||\vec{a}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a}, l})$. Если $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a}$ и поэтому направления их проекций совпадают, а это означает, что $Pr_l(\lambda\vec{a}) = \lambda Pr_l\vec{a}$. Если же $\lambda <$ < 0, то $\vec{a} \uparrow\downarrow \lambda\vec{a}$, в этом случае их проекции противоположно направлены, поэтому $Pr_l(\lambda\vec{a}) = -|\lambda||\vec{a}|\cos\varphi = -(-\lambda)|\vec{a}|\cos\varphi = \lambda Pr_l\vec{a}$.

При $\lambda = 0$, доказательство очевидно.

3. Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. В качестве их представителей возьмём связанные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ соответственно. Из рис. 13 следует, что $Pr_l(\vec{a}+\vec{b}) = Pr_l\vec{a}+Pr_l\vec{b}$, поскольку связанные векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{A_1C_1}$ являются представителями векторов $Pr_l\vec{a}$, $Pr_l\vec{b}$, $Pr_l(\vec{a}+\vec{b})$ соответственно, Указанное равенство справедливо и для любых других двух векторов, поскольку по теореме Шаля для любых точек A, B, C, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. ▶

Замечание 2.1. *Свойство 3 доказанной теоремы обобщается и на случай суммы любого конечного числа векторов.*

2.2. Разложения векторов

Определение 2.3. Пусть дано некоторое множество векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots$

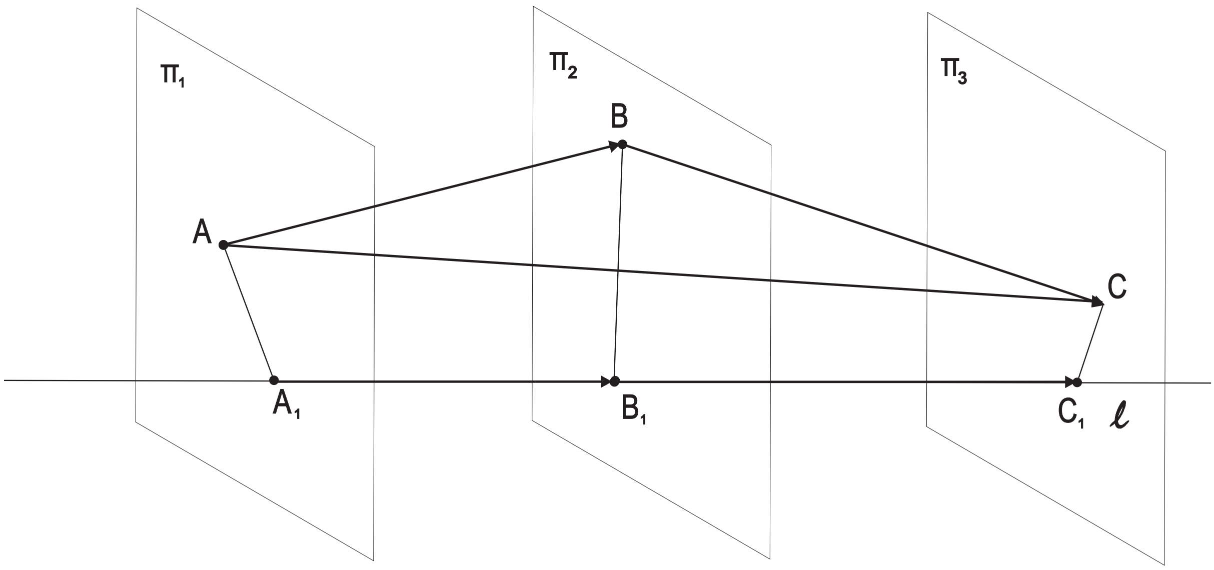


Рис. 13

$\ldots, \vec{a_n}$. Любой вектор $\vec{a} = \alpha_1\vec{a_1} + \alpha_2\vec{a_2} + \ldots + \alpha_n\vec{a_n}$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — некоторые действительные числа, называется линейной комбинацией векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$. Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называются коэффициентами линейной комбинации. Про вектор $\vec{a}$ говорят ещё что он разложен по векторам $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_n}$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называют коэффициентами разложения вектора $\vec{a}$.

Теорема 2.2. *Пусть на некоторой плоскости даны два ненулевых неколлинеарных вектора $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$. Любой вектор $\vec{a}$ этой плоскости может быть разложен по векторам $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ и причём такое разложение единственно.*

◀ Выберем в качестве представителей векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{a}$ соответственно векторы $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OA}$.

Предположим, что вектор $\vec{a}$ коллинеарен какому-нибудь из векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$. Не ограничивая общности доказательства, можно считать, например, что вектор $\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{e_1}$. Тогда существует единственное число α_1 такое, что $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1}$ и поэтому для вектора $\vec{a}$ мы получим, что $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + 0\vec{e_2}$. Предположим, что существует ещё одно разложение $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2}$, где $\alpha_2 \neq 0$. Тогда получим: $\alpha_2\vec{e_2} = \vec{a} - \alpha_1\vec{e_1} = \vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$. Так как $\vec{e_2} \neq \vec{0}$, то остаётся заключить, что $\alpha_2 = 0$. Итак, полученное разложение единственно.

Пусть теперь вектор $\vec{a}$ неколлинеарен ни с одним из векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$.

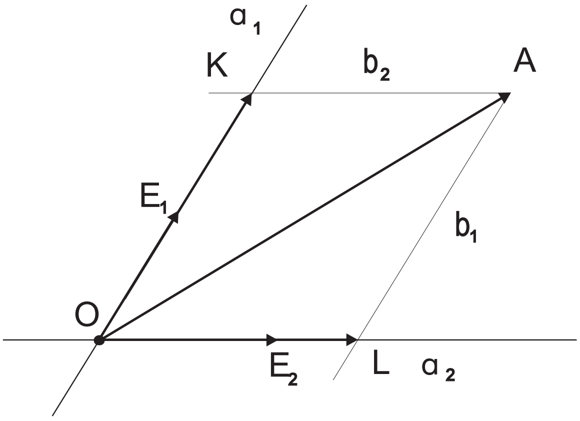


Рис.14

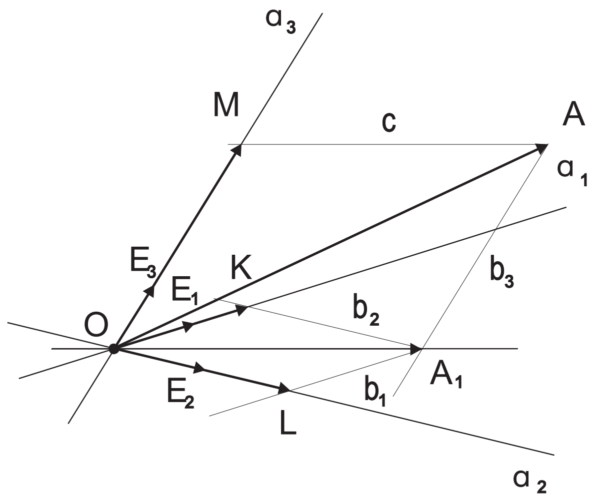


Рис. 15

Проведём через точки O и E_1 прямую a_1, а через точки O и E_2 прямую a_2 (рис. 14). Теперь через точку A проведём прямую b_1, параллельную прямой a_1 и прямую b_2, параллельную прямой a_2. Тогда прямые b_1 и b_2 пересекут прямые a_2 и a_1 соответственно в точках L и K. Так как векторы $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OK}$; $\overrightarrow{OE_2}$ и $\overrightarrow{OL}$ попарно коллинеарны, то существуют единственные числа α_1 и α_2 такие, что $\overrightarrow{OK} = \alpha_1\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OL} = \alpha_2\overrightarrow{OE_2}$. Теперь, используя правило параллелограмма, получаем разложение вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$: $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2}$. Единственность этого разложения следует из школьной аксиоматики — через данную точку можно провести единственную прямую, параллельную данной. ►

Теорема 2.3. *Пусть даны три ненулевых некомпланарных вектора $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$. Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по векторам $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ и причём такое разложение единственно.*

◄ Выберем в качестве представителей векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, $\vec{a}$ соответственно векторы $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$, $\overrightarrow{OE_3}$, $\overrightarrow{OA}$.

Предположим, что вектор $\vec{a}$ компланарен с какими-либо двумя из векторов $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$. Не ограничивая общности доказательства, можно считать, например, что вектор $\vec{a}$ компланарен векторам $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$. Тогда по предыдущей теореме, существуют единственные числа λ_1 и λ_2 такие, что $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2}$. Следовательно, получаем разложение вектора $\vec{a}$: $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + 0\vec{e_3}$. Единственность этого разложения доказывается так же как и в аналогичном случае доказательства предыдущей теоремы.

Пусть теперь вектор $\vec{a}$ не компланарен ни с какими двумя из векторов $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}$. Проведём через точки $E_1,\ E_2,\ E_3$ соответственно прямые $a_1,\ a_2,\ a_3$, которые все пересекаются в точке O. Через точку A проведём прямую c, которая параллельна прямой a_3. Она пересечёт плоскость OE_1E_2 в точке A_1 (рис. 15). Очевидно, что вектор $\overrightarrow{OA}$ лежит в одной плоскости с векторами $\overrightarrow{OA_1}$ и $\overrightarrow{OE_3}$, а вектор $\overrightarrow{OA_1}$ — в одной плоскости с векторами $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$. Значит, используя два раза правило параллелограмма получим, что $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OE_3} = \overrightarrow{OE_1} + \overrightarrow{OE_2} + \overrightarrow{OE_3}$. Кроме того, очевидно, что вектор $\overrightarrow{OA_1}$ не коллинеарен вектору $\overrightarrow{OE_3}$. Используя теперь два раза предыдущую теорему, получим, что существуют единственные числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ такие, что $\vec{a} = \alpha_1\vec{e_1} + \alpha_2\vec{e_2} + \alpha_3\vec{e_3}$. Итак, мы получили разложение вектора $\vec{a}$ по векторам $\vec{e_1},\ \vec{e_2},\ \vec{e_3}$. Единственность такого разложения так же следует из школьной аксиоматики. ▶

Определение 2.4. Базисом на плоскости называются два произвольных ненулевых неколлинеарных вектора, взятых в определённом порядке.

Определение 2.5. Базисом в пространстве называются три произвольных ненулевых некомпланарных вектора, взятых в определённом порядке.

2.3. Координаты вектора и точки на плоскости

Определение 2.6. Аффинной системой координат на плоскости называется система, которая состоит из двух пересекающихся в некоторой точке O осей X и Y на которых соответственно выбраны представители $\overrightarrow{OE_1}$ и $\overrightarrow{OE_2}$ единичных векторов базиса $\vec{i}$ и $\vec{j}$ соответственно. Точка O называется началом координат, ось OX называется осью абсцисс, а ось OY — осью ординат. Угол φ между координатными осями должен удовлетворять условию $0 < \varphi < \pi$. (рис. 16).

Обычно аффинная система координат на плоскости обозначается OXY, если речь идёт о конкретном начале координат и конкретных координатных осях.

Пусть на некоторой плоскости дана некоторая аффинная система координат (рис. 16). Пусть M — некоторая точка этой плоскости. Разложим вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ (точки M_x и M_y лежат

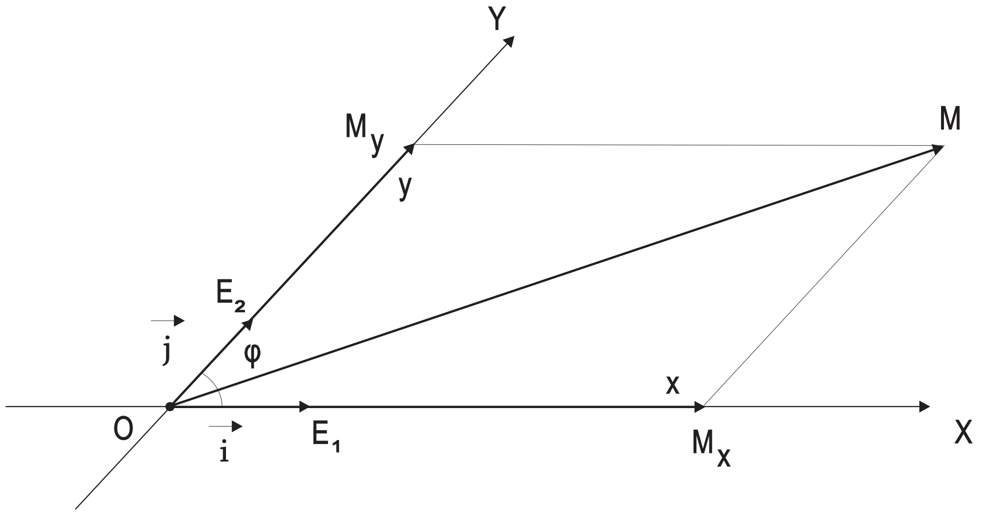


Рис.16

соответственно на осях OX и OY) следующим образом: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y}$. Тогда очевидно, что существуют единственные действительные числа $x,\ y$ такие, что $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Определение 2.7. Радиус-вектором точки M в некоторой аффинной системе координат на плоскости называется вектор $\overrightarrow{OM}$, векторы $\overrightarrow{OM_x}$ и $\overrightarrow{OM_y}$ называются векторными проекциями радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, а точки M_x и M_y — проекциями точки M на координатные оси OX и OY соответственно.

Определение 2.8. Координатами точки в некоторой аффинной системе координат на плоскости называются коэффициенты разложения радиус-вектора этой точки по векторам базиса.

Определение 2.9. Координатами вектора в некоторой аффинной системе координат на плоскости называются координаты конца того его представителя, начало которого находится в начале координат.

Определение 2.10. Прямоугольной декартовой системой координат на плоскости называется такая аффинная система координат на плоскости, координатные оси которой перпендикулярны.

В дальнейшем, для краткости, прямоугольную декартову систему координат на плоскости будем обозначать ПДСК-2. Если не будет специально оговорено, то во всех, рассматриваемых далее ПДСК-2, ось ординат повёрнута относительно начала координат от оси абсцисс на угол $\dfrac{\pi}{2}$ в направлении против часовой стрелки.

Если x, y — координаты точки M (вектора $\vec{a}$), то пишут $M(x, y)$ ($\vec{a}(x, y)$) или $M = (x, y)$ ($\vec{a} = (x, y)$).

2.4. Координаты вектора и точки в пространстве

Определение 2.11. Аффинной системой координат в пространстве называется система, которая состоит из трёх пересекающихся в некоторой одной точке O осей X, Y и Z на которых соответственно выбраны представители $\overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{OE_2}$ и $\overrightarrow{OE_3}$ единичных векторов базиса $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ соответственно. Точка O называется началом координат, ось OX называется осью абсцисс, ось OY — осью ординат, а ось OZ — осью аппликат. Плоскости, проходящие через координатные оси называются координатными плоскостями и обозначаются OXY, OYZ, OXZ. Значения углов между координатными осями должны принадлежать интервалу $\big(0, \pi\big)$. (рис. 17).

Обычно аффинная система координат обозначается $OXYZ$, если речь идёт о конкретном начале координат и конкретных координатных осях.

Пусть в некотором пространстве дана некоторая аффинная система координат (рис. 17). Пусть M — некоторая точка этого пространства. Разложим вектор $\overrightarrow{OM}$ по векторам $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ и $\overrightarrow{OM_z}$ (где точки M_x, M_y, M_z лежат на координатных осях OX, OY, OZ соответственно) следующим образом: $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z}$. Тогда очевидно, что существуют единственные действительные числа x, y, z такие, что $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Определение 2.12. Радиус-вектором точки M в некоторой аффинной системе координат в пространстве называется вектор $\overrightarrow{OM}$, векторы $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$, $\overrightarrow{OM_z}$ называются векторными проекциями радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, а точки M_x, M_y, M_z — проекциями точки M на координатные оси OX, OY, OZ соответственно.

Определение 2.13. Координатами точки в некоторой аффинной системе координат в пространстве называются коэффициенты разложения радиус-вектора этой точки по векторам базиса.

Определение 2.14. Координатами вектора в некоторой аффинной системе координат в пространстве называются координаты конца того его представителя, начало которого находится в начале координат.

Определение 2.15. Прямоугольной декартовой системой координат в пространстве называется такая аффинная система координат в пространстве, координатные оси которой попарно перпендикулярны.

В дальнейшем, для краткости, прямоугольную декартову систему координат в пространстве будем обозначать ПДСК-3. Если не будет специально оговорено, то во всех рассматриваемых далее ПДСК-3, координатные оси расположены таким образом, что вектора базиса, взятые в порядке $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ образуют правую тройку.

Если x, y, z — координаты точки M (вектора $\vec{a}$), то пишут $M(x, y, z)$ ($\vec{a}(x, y, z)$) или $M = (x, y, z)$ ($\vec{a} = (x, y, z)$).

3. Тема 3. Произведения векторов

1. **Скалярное произведение векторов**
2. **Векторное произведение векторов**
3. **Смешанное произведение векторов**

3.1. Скалярное произведение векторов

Определение 3.1. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые векторы, φ — угол между ними. Поставим в соответствие указанной паре векторов некоторое число, которое называется скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, обозначается $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляется по формуле $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \varphi$.

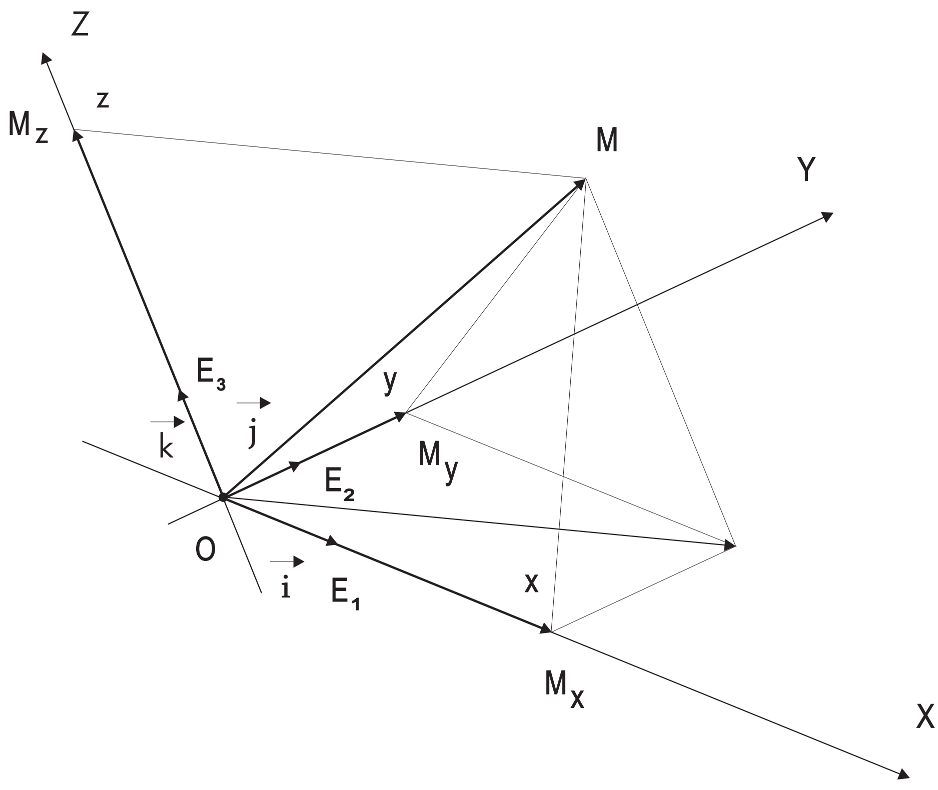


Рис. 17

Скалярное произведение можно вычислить и через скалярную проекцию одного из векторов-сомножителей на другой: $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| Pr_{\vec{a}}\vec{b}$.

Используя понятие скалярного произведения, легко получить следующую формулу

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.} \tag{3.1}$$

Определение 3.2. Выражение $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a}$ называется скалярным квадратом вектора .

Теорема 3.1. *(Критерий ортогональности) Для того, чтобы ненулевые векторы были перпендикулярны (ортогональны), необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю.*

◀ Необходимость. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, то $\varphi = \widehat{\vec{a},\vec{b}} = \dfrac{\pi}{2}$ и поэтому $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{2} = 0$.

Достаточность. Пусть $\vec{a}\vec{b} = 0$. Тогда $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 0$, но векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые, поэтому $\cos\varphi = 0$, т.е. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ и значит векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны. ▶

Теорема 3.2. *Скалярное произведение двух векторов обладает следующими свойствами.*

1) $\forall\vec{a},\ \forall\vec{b}$, $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;

2) $\forall\lambda \in \mathbb{R},\ \forall\vec{a},\ \forall\vec{b},\ (\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b})$;

3) $\forall\vec{a},\ \forall\vec{b},\ \forall\vec{c},\ \vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$.

◀ **1.** $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\varphi = \vec{b}\vec{a}$;

2. Если $\lambda > 0$, то $\vec{a} \uparrow\uparrow \lambda\vec{a}$, поэтому $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \cos(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}})$. Следовательно, $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = $ $= |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}}) = (\lambda\vec{a})\vec{b}$.

Если $\lambda < 0$, то $\vec{a} \downarrow\uparrow \lambda\vec{a}$, поэтому $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -\cos(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}})$. Следовательно, $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = \lambda|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -|\lambda||\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = -|\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = $ $= |\lambda\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}}) = (\lambda\vec{a})\vec{b}$.

Если же $\lambda = 0$, то оба скалярных произведения равны нулю.

3. Используя выражение скалярного произведения через проекцию вектора и свойство линейности для проекций, получим: $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|Pr_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|(Pr_{\vec{a}}\vec{b}+Pr_{\vec{a}}\vec{c}) = |\vec{a}|Pr_{\vec{a}}\vec{b}+|\vec{a}|Pr_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$. ▶

Из определения скалярного произведения легко получить следующую формулу.

$$\boxed{\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}} \qquad (3.2)$$

Хотя явного вычисления угла в ней нет, она называется формулой для вычисления угла между векторами, поскольку углы в аналитической геометрии в практических целях представляются своими тригонометрическими функциями (разве что за исключением тех случаев, когда углы легко вычисляются по своим тригонометрическим функциям).

3.2. Векторное произведение векторов

Определение 3.3. Пусть дана упорядоченная тройка ненулевых некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Выберем их представителями связанные векторы соответственно $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Говорят, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку, если из конца связанного вектора $\overrightarrow{OC}$ кратчайший поворот от первого связанного вектора $\overrightarrow{OA}$ ко второму связанному вектору $\overrightarrow{OB}$ виден в направлении против часовой стрелки (рис 18). Если же указанный поворот виден в направлении по часовой стрелке, то говорят, что эти векторы образуют левую тройку (рис 19).

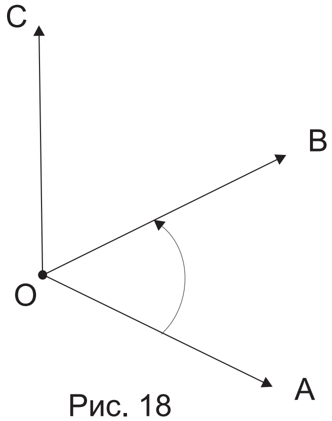


Рис. 18

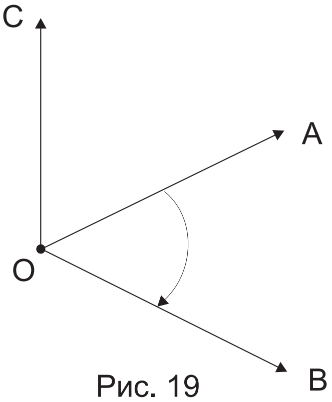


Рис. 19

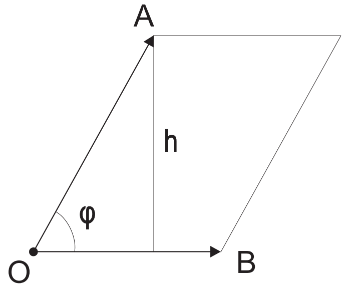


Рис. 20

Определение 3.4. Пусть даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, что выполняются следующие условия:

1) $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

2) $\vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b}$;

3) векторы $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ образуют правую тройку.

Обозначается векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ через $\vec{a} \times \vec{b}$.

Теорема 3.3. *Модуль векторного произведения двух векторов равен площади параллелограмма, построенного на представителях этих векторов.*

◀ Пусть даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выберем их представителями связанные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. На отрезках OA и OB построим параллелограмм (рис 20). Пусть S — площадь параллелограмма, h — его высота, φ — угол BOA, тогда $S = OBh = OBOA\sin\varphi = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}) = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = |\vec{a}\times\vec{b}|$. ▶

Теорема 3.4. *(Критерий коллинеарности) Для того, чтобы ненулевые векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было равно нулю.*

◀ Доказательство теоремы очевидно ввиду предыдущей теоремы, поскольку площадь параллелограмма, построенного на представителях ненулевых векторов равна нулю тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны. ▶

Лемма 3.1. *(Один из способов построения векторного произведения) Для того, чтобы построить векторное произведение двух векторов, достаточно выполнить следующие действия:*

1) через начало представителя первого сомножителя провести плоскость, ему перпендикулярную;

2) найти проекцию представителя второго сомножителя на эту плоскость;

3) повернуть полученную проекцию в указанной плоскости вокруг *начала на угол $\dfrac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, если смотреть из конца представителя первого сомножителя;*

4) умножить полученный таким образом связанный вектор на модуль первого сомножителя.

Полученный в результате этих действий вектор и будет являться векторным произведением данных векторов.

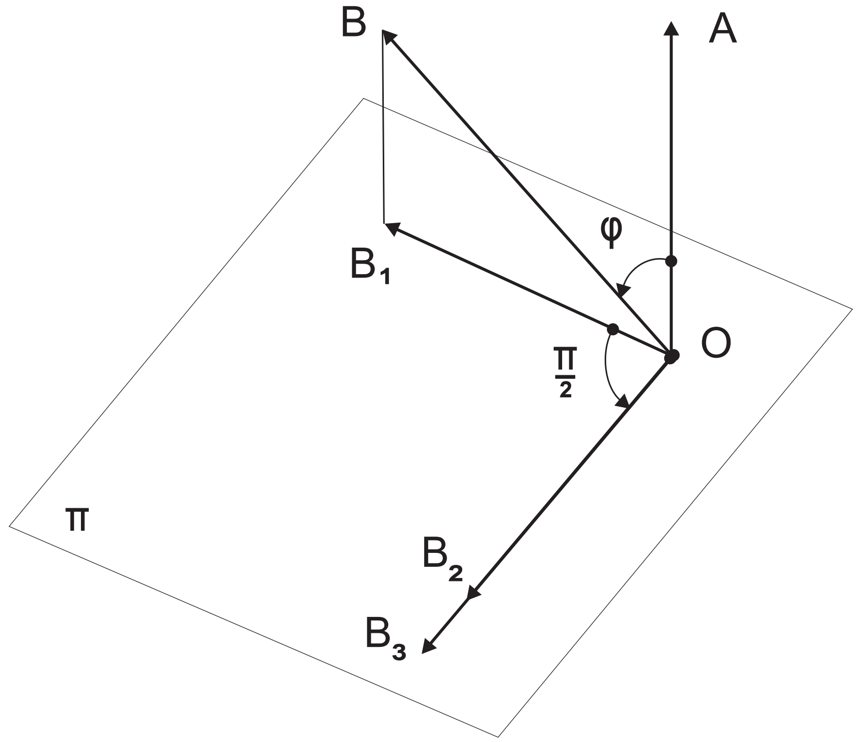


Рис. 21

◀ Пусть даны два ненулевых вектора — $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выберем в качестве их представителей соответственно связанные векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Перпендикулярно вектору $\overrightarrow{OA}$ проведём плоскость π и построим в ней вектор $\overrightarrow{OB_1}$ — проекцию вектора $\overrightarrow{OB}$. Повернув затем в плоскости π указанным образом вектор $\overrightarrow{OB_1}$, мы получим вектор $\overrightarrow{OB_2}$. Умножив вектор $\overrightarrow{OB_2}$ на $|\vec{a}|$, получим вектор $\overrightarrow{OB_3}$ (рис. 21).

Докажем, что вектор $\overrightarrow{OB_3}$ является представителем $\vec{a} \times \vec{b}$. Используя знания из школьной стереометрии, нетрудно убедиться, что вектор $\overrightarrow{OB_3}$ ортогонален векторам $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Из конца вектора $\overrightarrow{OB_3}$ кратчайший поворот от вектора $\overrightarrow{OA}$ к вектору $\overrightarrow{OB}$ виден в направлении против часовой стрелки. Кроме того, если φ — угол между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, то $OB_2 = OB_1 = OB\sin\varphi$ и поэтому $|\overrightarrow{OB_3}| = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$. По определению векторного произведения, вектор $\overrightarrow{OB_3}$ является представителем вектора $\vec{a}\times\vec{b}$. ▶

Теорема 3.5. *Векторное произведение обладает следующими свойствами:*

1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$ *(антикоммутативность);*

2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ *(линейность);*

3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$ *(дистрибутивность).*

◀ **1.** Пусть $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ и $\vec{c}_1 = \vec{b}\times\vec{a}$ и пусть $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ — представители векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ соответственно.

Если связанные векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OC_1}$ — представители векторов $\vec{c}$ и $\vec{c}_1$ соответственно, то непосредственно из определения векторного произведения следует, что связанные векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ равны по длине и, кроме того, как ортогональные одной и той же плоскости (проходящей через связанные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$), связанные векторы $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OC_1}$ коллинеарны. Из этих двух отмеченных фактов следует, что либо $\vec{c} = \vec{c}_1$, либо $\vec{c} = -\vec{c}_1$. Если предположить, что $\vec{c} = \vec{c}_1$, то придётся сделать вывод о том, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{b}$, $\vec{a}$, $\vec{c}$ образуют одновременно правые тройки, что возможно лишь в том исключительном случае, когда угол поворота от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ по часовой стрелке равен углу тако го же поворота против часовой стрелки. Но тогда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены, т.е. коллинеарны. Значит, $\vec{c} = \vec{c}_1 = \vec{0}$. Поэтому можно считать, что $\vec{c} = -\vec{c}_1$. Итак, в любом случае получаем, что $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

2. Пусть $\lambda = 0$. Тогда в обеих частях доказываемого равенства получаем нулевые векторы и поэтому равенство верно.

Пусть теперь $\lambda \neq 0$. Если $\lambda > 0$, то $\lambda\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и поэтому $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}\times\vec{b}$, а значит и $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} \uparrow\uparrow \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$. Если $\lambda < 0$, то $\lambda\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$, поэтому $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}\times\vec{b}$ и $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} \uparrow\uparrow \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$. Итак, в любом случае, $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} \uparrow\uparrow \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$. Кроме того, $|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})| = |\lambda||\vec{a}\times\vec{b}| = |\lambda||\vec{a}||\vec{b}||\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})| = |\lambda\vec{a}||\vec{b}||\sin(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}})| = |\lambda\vec{a}\times\vec{b}|$. Следовательно, векторы $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ и $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ сонаправлены и равны по модулю. Значит, $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$.

3. Для доказательства этого свойства используем доказанную выше

Лемму. В качестве представителей векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ выберем соответственно связанные векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$ (рис.22).

Понятно, что представителем вектора $\vec{b}+\vec{c}$ будет являться связанный вектор $\overrightarrow{OC}$. Проведём через точку O плоскость π, перпендикулярную связанному вектору $\overrightarrow{OA}$. Пусть B_1 и C_1 — проекции на эту плоскость соответственно точек B и C. Повернём теперь треугольник OB_1C_1 в плоскости π на угол $\dfrac{\pi}{2}$ в направление против часовой стрелки если смотреть из конца связанного вектора $\overrightarrow{OA}$. В результате мы получим треугольник OB_2C_2. Умножив теперь связанные векторы $\overrightarrow{OB_2}$ и $\overrightarrow{OC_2}$ на $|\overrightarrow{OA}|$, мы получим связанные векторы $\overrightarrow{OB_3}$, $\overrightarrow{OC_3}$. Поскольку треугольники OB_2C_2 и OB_3C_3 подобны, то $|\overrightarrow{B_3C_3}| = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{B_2C_2}|$. Ввиду Леммы, связанные векторы $\overrightarrow{OB_3}$, $\overrightarrow{B_3C_3}$, $\overrightarrow{OC_3}$ являются представителями векторов $\vec{a}\times\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{c}$, $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})$. Но $\overrightarrow{OC_3} = \overrightarrow{OB_3} + \overrightarrow{B_3C_3}$, поэтому получаем доказываемое равенство. ▶

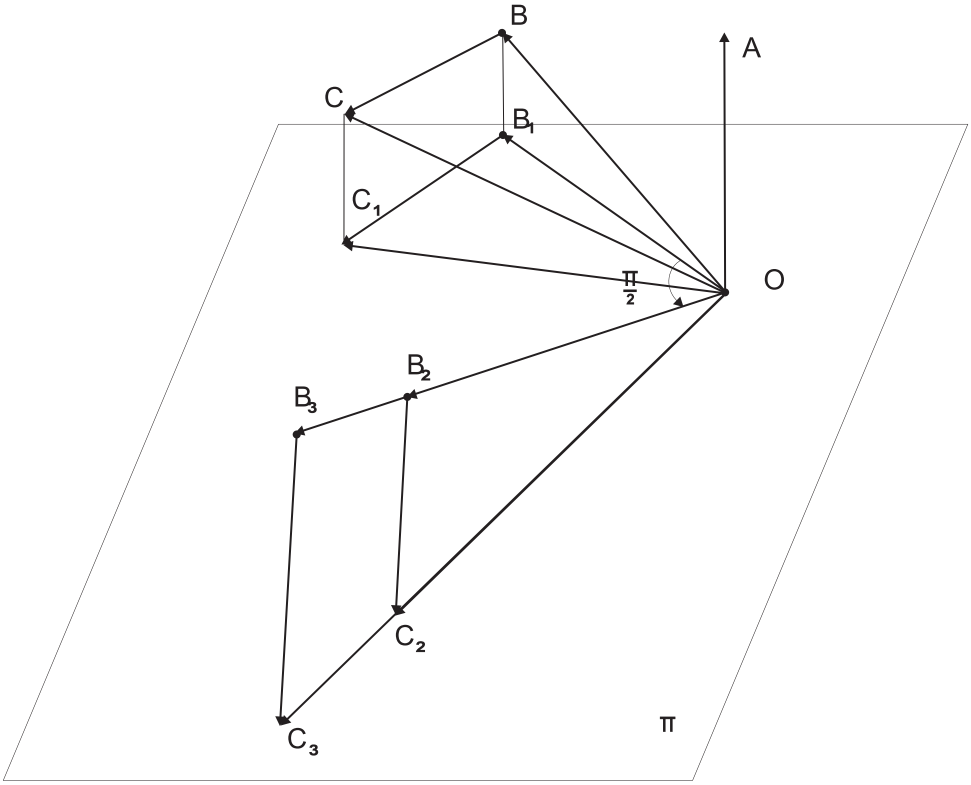


Рис. 22

3.3. Смешанное произведение векторов

Определение 3.5. Смешанным произведением трёх ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий вектор. Обозначается смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Из определения смешанного произведения следует, что это число.

Теорема 3.6. *Модуль смешанного произведения равен объёму параллелепипеда, построенного на представителях векторов-сомножителей.*

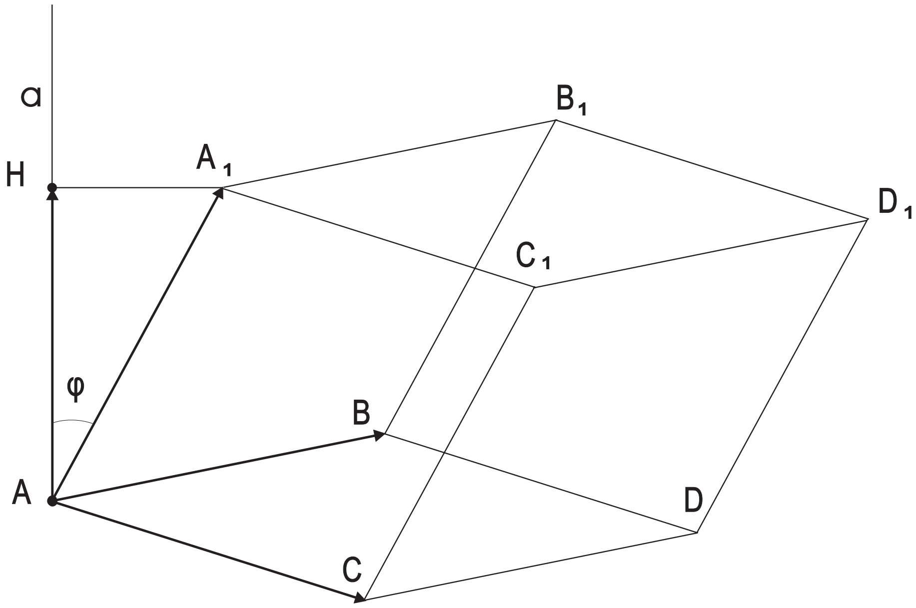


Рис. 23

◀ Пусть даны три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и пусть $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ — представители этих векторов соответственно. (рис. 23)

Проведем прямую a, котрая проходит через точку A и перпендикулярна плоскости ABC. Пусть $\overrightarrow{AH}$ — векторная проекция вектора $\overrightarrow{AA_1}$ на эту прямую и пусть φ — угол между векторами $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AA_1}$. Объём параллелепипеда обозначим через V. Тогда $V = Sh$, где S — площадь основания, а h — высота параллелепипеда. Как показано выше, площадь параллелограмма, построенного на векторах равна модулю векторного произведения этих векторов. Следовательно, $S = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$. Кроме того, по построению вектора $\overrightarrow{AH}$, он коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Значит угол между векторами $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ равен либо φ, либо $\pi - \varphi$, т.е. $|\cos(\widehat{(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{AA_1}})| = |\cos(\widehat{\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AA_1}})|$. Следовательно, $V = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|h = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AH}| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AA_1}||\cos\varphi| = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AA_1}||\cos(\widehat{(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}), \overrightarrow{AA_1}})| = |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC})\overrightarrow{AA_1}| = |\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}\overrightarrow{AA_1}|$. ▶

Теорема 3.7. *Если смешанное произведение положительно, то векторы образуют правую тройку, если смешанное произведение отрицательно, то тройка левая.*

◀ Воспользуемся снова рис. 19. Поскольку направление кратчайшего поворота от одного вектора к другому зависит фактически от того, из какого полупространства (относительно плоскости этих векторов) смотреть, то очевидно, что если векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ лежат в одном полупространстве относительно плоскости ABC, то $\varphi < \frac{\pi}{2}$ и смешанное произведение положительно; в противном случае $\varphi > \frac{\pi}{2}$ и смешанное произведение отрицательно. ▶

Теорема 3.8. *(Критерий компланарности) Для того, чтобы три ненулевые вектора были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение было равно нулю.*

◀ Выше мы доказали, что объем параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях смешанного произведения, равен модулю этого смешанного произведения. Отсюда и следует доказательство данной теоремы. поскольку параллелепипед, построенный на представителях векторов имеет нулевой объём тогда и только тогда, когда векторы являются компланарными. ▶

Теорема 3.9. *Смешанное произведение трёх ненулевых векторов обладает следующими свойствами:*

1) $(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$;

2) $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}$;

3) $(\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$;

4) $(\lambda\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$.

◀ **1.** Поскольку на одних и тех же векторах можно построить параллелепипеды одного и того же объёма, то ввиду Теоремы 6, модули обеих частей доказываемого равенства равны, а, ввиду Теоремы 7, обе части равны так же и по знаку. Итак, $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$. Таким образом, неважно где в смешанном произведении стоит знак векторного произведения, а где — скалярного, главное только, чтобы сохранялась упорядоченность векторов. Теперь понятно почему смешанное произведение обозначается как $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

2. Воспользовавшись антикоммутативностью векторного произведения, получим, например, что $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = -\vec{a}(\vec{c}\times\vec{b})$. Доказательство остальных частей равенства проводится аналогично.

3. Обозначив $\vec{d} = \vec{b}\times\vec{c}$, воспользуемся свойством 1 и дистрибутивностью скалярного произведения: $(\vec{a_1}+\vec{a_2})\vec{b}\vec{c} = (\vec{a_1}+\vec{a_2})(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a_1} + \vec{a_2})\vec{d} = \vec{a_1}\vec{d} + \vec{a_2}\vec{d} = \vec{a_1}\vec{b}\vec{c} + \vec{a_2}\vec{b}\vec{c}$.

4. Снова обозначив $\vec{d} = \vec{b}\times\vec{c}$, воспользуемся свойством 1 и линейностью скалярного произведения: $\lambda(\vec{a})\vec{b}\vec{c} = \lambda(\vec{a})(\vec{b}\times\vec{c}) = \lambda(\vec{a})\vec{d} = \lambda(\vec{a}\vec{d}) = \lambda(\vec{a}\vec{b}\vec{c})$. ▶

Замечание 3.1. *Определив нулевой вектор, мы старательно обходили его в определениях произведений векторов, критериях ортогональности, коллинеарности и компланарности. Дело в том, что нулевой вектор (как и число* 0 *в школьной математике) требует особого подхода. Например, одной из характеристик вектора является направление. Имеет ли нулевой вектор направление? На этот вопрос нельзя ответить однозначно. Если рассматривать вектор как некоторое неделимое движение, то направление нужно отождествить с некоторым количеством этого движения и следовательно придётся сказать, что нулевой вектор не имеет направления. Но тогда он и не вектор. С другой стороны, без нулевого вектора обойтись нельзя хотя бы потому, что он является результатом суммы противоположных друг другу векторов и следовательно существует. Далее, если попытаться ввести в определения произведений векторов нулевой вектор, то окажется, что результатом любого из произведений является либо число* 0*, либо нулевой вектор. При этом никакие из доказанных свойств не нарушаются. Противоречия возникнут если мы будем применять к нулевому вектору указанные выше критерии. Окажется, например, что нулевой вектор коллинеарен любому из векторов. Значит придётся за-*

ключить, что он имеет любое направление и снова придём к противоречию с определением вектора. Таким образом, нулевой вектор оказывается на "особом"положении.

В дальнейшем, если не будет специальной оговорки, мы будем рассматривать только ненулевые векторы. Если же в целях полноты изложения возникнет необходимость рассмотреть случай с нулевым вектором, то мы будем рассматривать его отдельно.

4. Тема 4. Действия над векторами, заданными прямоугольными координатами

1. Линейные операции над векторами, заданными прямоугольными координатами

2. Скалярное произведение и направляющие косинусы векторов, заданных прямоугольными координатами

3. Векторное и смешанное произведения векторов, заданных прямоугольными координатами

4. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном соотношении

Пусть $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$; $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$; $\vec{c}(x_3, y_3, z_3)$ — векторы, заданные своими координатами в некоторой ПДСК-3.

4.1. Линейные операции над векторами, заданными прямоугольными координатами

Нетрудно убедиться в справедливости следующих формул линейных операций над векторами, заданными прямоугольными координатами.

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2);\\ \lambda\vec{a}=(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1);\\ -\vec{a}=(-x_1, -y_1, -z_1).\end{gathered}} \tag{4.1}$$

◀ **1.** $\vec{a}+\vec{b}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}+x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+ + y_2)\vec{j}+(z_1+z_2)\vec{k}$.

2. $\lambda\vec{a}=\lambda(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})=\lambda x_1\vec{i}+\lambda y_1\vec{j}+\lambda z_1\vec{k}$.

3. $-\vec{a}=-x_1\vec{i}-y_1\vec{j}-z_1\vec{k}$. ▶

4.2. Скалярное произведение и направляющие косинусы векторов, заданных прямоугольными координатами

Найдём сначала скалярные произведения векторов базиса: $\vec{i}\vec{i} = \vec{j}\vec{j} = \vec{k}\vec{k} = 1$; $\vec{i}\vec{j} = \vec{i}\vec{k} = \vec{j}\vec{i} = \vec{j}\vec{k} = \vec{k}\vec{i} = \vec{k}\vec{j} = 0$. Теперь легко получить следующие формулы:

скалярного произведения для векторов, заданных прямоугольными координатами —

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2,} \tag{4.2}$$

модуля вектора, заданного прямоугольными координатами —

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2},} \tag{4.3}$$

угла между векторами, заданными прямоугольными координатами —

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.} \tag{4.4}$$

◀ Действительно, $\vec{a}\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\vec{i}\vec{i} + x_1y_2\vec{i}\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\vec{i} + y_1y_2\vec{j}\vec{j} + y_1z_2\vec{j}\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\vec{j} + z_1z_2\vec{k}\vec{k} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$. Формула (4.3) следует непосредственно из формул (3.1) и (4.2), а формула (4.4) есть непосредственное следствие (4.2) и (4.3). ▶

Определение 4.1. Направляющими углами вектора $\vec{a}$ называются углы,образованные с осями координат некоторой ПДСК-3 тем представителем этого вектора, начало которого находится в начале координат.

Определение 4.2. Направляющими косинусами вектора $\vec{a}$ называются косинусы его направляющих углов.(рис. 24.)

Формулы для вычисления направляющих косинусов следуют из определения cos и из того, что координаты точки в прямоугольной декартовой системе координат — это её проекции на координатные оси (рис. 24).

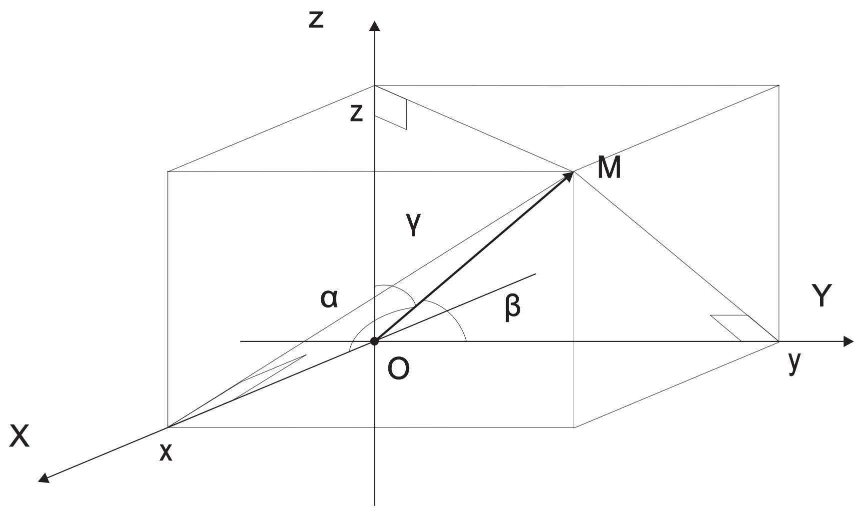


Рис. 24

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\\ \cos\beta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\\ \cos\gamma &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned}} \tag{4.5}$$

4.3. Векторное и смешанное произведения векторов, заданных прямоугольными координатами

Определение 4.3. Определителем второго порядка называется выражение

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Определение 4.4. Определителем третьего порядка называется выражение

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_3y_1z_2 + x_2y_3z_1 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2.$$

Свойство 4.1. *Определитель третьего порядка может быть разложен по элементам первой строки.*

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} y_1 + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} z_1.$$

Свойство 4.2. *При перестановке любых двух строк или столбцов местами, определитель меняет знак на противоположный, не изменяясь при этом по абсолютному значению.*

Поскольку векторные произведения базисных векторов имеют следующие значения: $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$; $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$; $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$, то векторное произведение векторов, заданных прямоугольными координатами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ находится по формуле

$$\boxed{\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}} \tag{4.6}$$

◀ $\vec{a} \times \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}) \times (x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2(\vec{i} \times \vec{i}) + x_1y_2(\vec{i} \times \times \vec{j}) + x_1z_2(\vec{i} \times \vec{k}) + y_1x_2(\vec{j} \times \vec{i}) + y_1y_2(\vec{j} \times \vec{j}) + y_1z_2(\vec{j} \times \vec{k}) + z_1x_2(\vec{k} \times \vec{i}) + + z_1y_2(\vec{k} \times \vec{j}) + z_1z_2(\vec{k} \times \vec{k}) = x_1y_2\vec{k} - z_2x_1\vec{j} - y_1x_2\vec{k} = y_1z_2\vec{i} + z_1x_2\vec{j} - z_1y_2\vec{i} = = (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\vec{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\vec{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}\vec{j} + + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$. ▶

Из этой формулы легко получается формула площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных прямоугольными координатами

$$\boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2}} \tag{4.7}$$

и формула смешанного произведения

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}} \tag{4.8}$$

◀ Формула площади параллелограмма следует из предпоследнего шага преобразований предыдущего доказательства.

Для формулы смешанного произведения получаем следующее.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k} \right)(\vec{x}_3\vec{i} + \vec{y}_3\vec{j} + \vec{z}_3\vec{k}) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

▶

Замечание 4.1. *Пусть векторы $\vec{a}(x_1, y_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2)$ заданы в некоторой ПДСК-2. Можно ли найти площадь параллелограмма, построенного на этих векторах? Оказывается, что можно. Рассмотрим данные векторы в пространстве. Пусть их третьи координаты равны нулю, т.е. $\vec{a}(x_1, y_1, 0)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, 0)$. Тогда они оказываются лежащими в одной плоскости — координатной плоскости OXY. Теперь остается подставить полученные координаты в формулу площади параллелограмма.*

4.4. Расстояние между точками. Деление отрезка в данном соотношении

Пусть $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ — две различные точки, данные в некоторой ПДСК-3. Тогда $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$. Поскольку расстояние между точками A и B равно модулю связанного вектора $\overrightarrow{AB}$, то получим

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \tag{4.9}$$

◀ Обратимся к рис. 25. $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$. Значит, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Теперь, используя формулу суммы векторов, получаем: $AB = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1)$. Осталось использовать формулу (4.3). ▶

Пусть нужно найти такую точку C, которая лежит на отрезке AB и делит его в заданном соотношении. Пусть $C(x, y, z)$. Тогда формулы

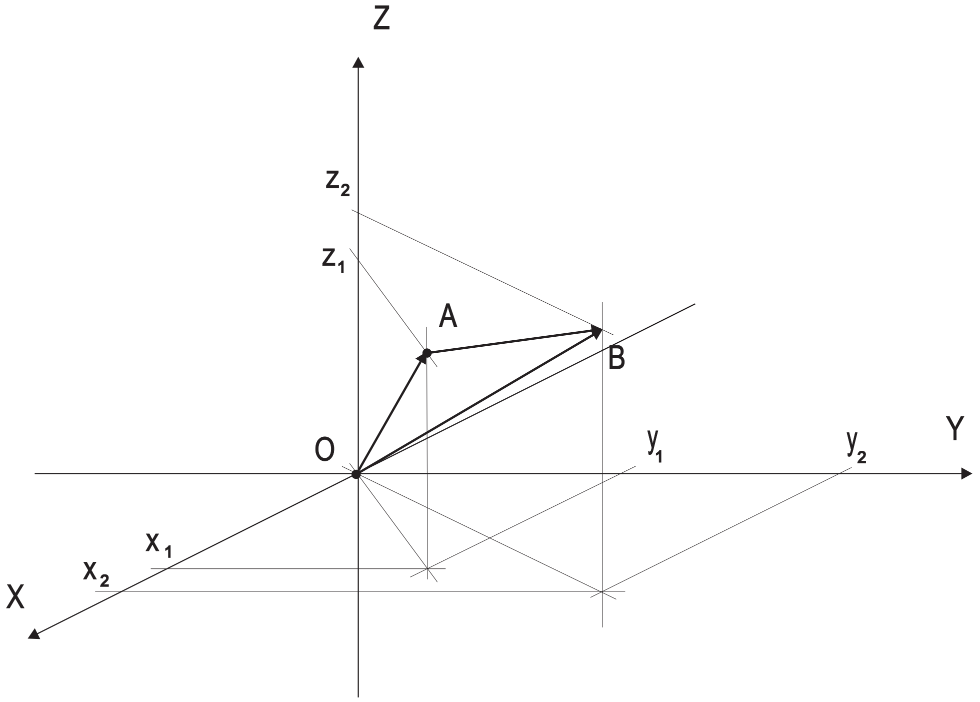


Рис. 25

деления отрезка в данном соотношении имеют вид

$$\boxed{x = \frac{\lambda x_2 + x_1}{1+\lambda};\ y = \frac{\lambda y_2 + y_1}{1+\lambda};\ z = \frac{\lambda z_2 + z_1}{1+\lambda}.} \tag{4.10}$$

◀ Принадлежность точки C отрезку AB означает, в частности, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB}$ коллинеарны. Следовательно, существует число λ такое, что $\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{CB}$. Перейдя теперь к координатам, получим: $(x - x_1,\ y-y_1,\ z-z_1) = \lambda(x_2-x,\ y_2-y,\ z_2-z)$. Отсюда $x-x_1 = \lambda(x_2-x)$ и, следовательно, $x(1+\lambda) = \lambda x_2 + x_1$. Поэтому $x = \dfrac{\lambda x_2 + x_1}{1+\lambda}$. Аналогично выражаются и остальные координаты. ▶

Если точка C — середина отрезка AB, то $\lambda = 1$ и тогда получаем формулы середины отрезка

$$\boxed{x = \frac{x_2 + x_1}{2}; y = \frac{y_2 + y_1}{2}; z = \frac{z_2 + z_1}{2}.} \tag{4.11}$$

Замечание 4.2. *Рассмотренные выше формулы легко перенести на случай плоскости, отбросив третью координату.*

5. Тема 5. Уравнения фигур

1. **Уравнение линии на плоскости**
2. **Уравнение поверхности**
3. **Уравнение линии в пространстве**

5.1. Уравнение линии на плоскости

Пусть в ПДСК-2 дана некоторая линия a. Если удаётся составить уравнение

$$F(x, y) = 0 \qquad (*)$$

такое, что координаты (x, y) каждой точки линии и только они являются решениями уравнения (*), то это уравнение называют уравнением данной линии, а саму линию называют алгебраической линией степени n, где n — степень уравнения (*).

Пусть теперь дано некоторое уравнение (*). Зафиксируем значение $x = x_0$. Тогда получим уравнение

$$F(x_0, y) = 0 \qquad (**)$$

относительно одной переменной. Пусть $y_1, y_2, \ldots y_n$ — корни этого уравнения. Тогда им соответствуют решения $(x_0, y_1), (x_0, y_2), \ldots, (x_0, y_n)$ уравнения (*), которым в свою очередь соответствуют точки $M_1, M_2, \ldots, M_n$ некоторой ПДСК-2 (рис. 26). Задавая теперь другие значения для пере-

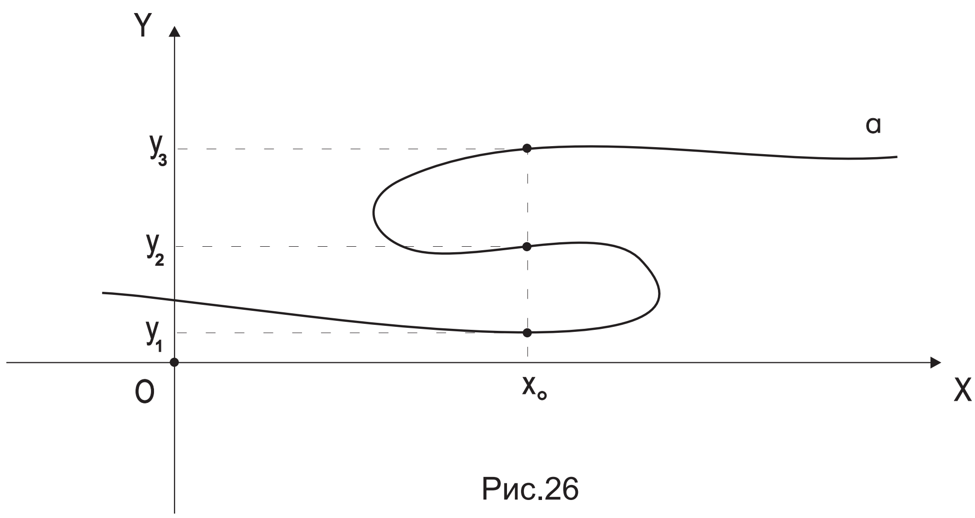


Рис.26

менной x, мы будем получать новые множества решений уравнения (*)

и, следовательно, новые множества точек. Множество же всех решений уравнения (*) будет задавать некоторую линию.

5.2. Уравнение поверхности

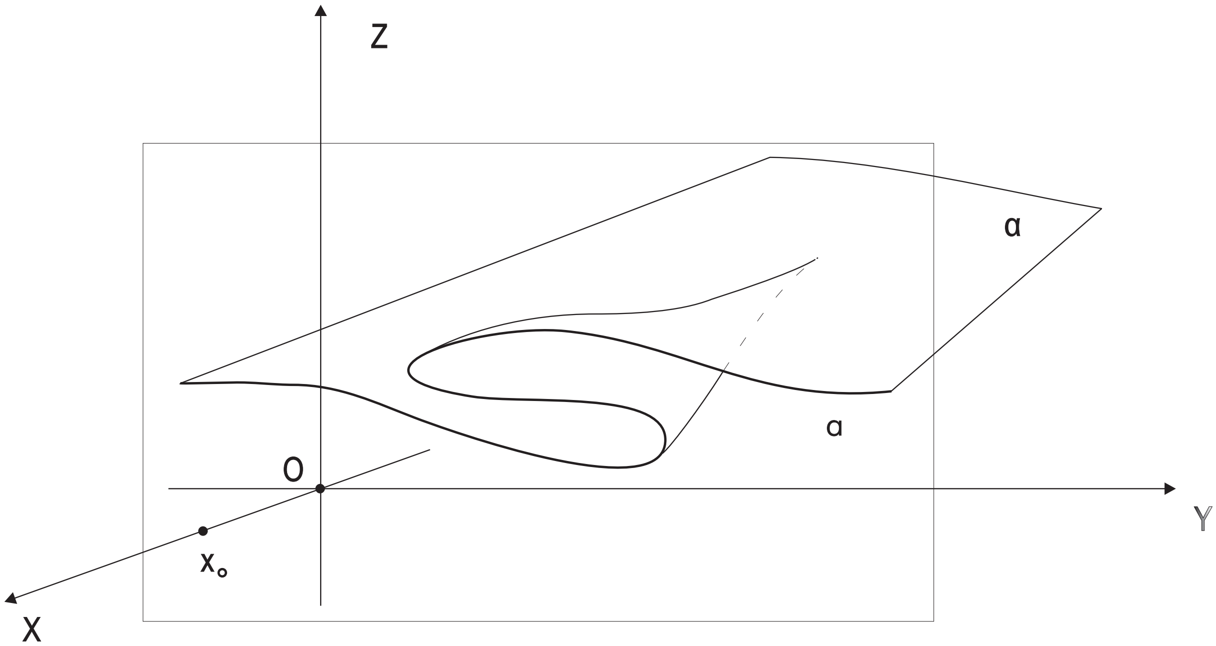


Рис. 27

Пусть в ПДСК-3 дана некоторая поверхность α. Если удаётся составить уравнение

$$F(x, y, z) = 0 \tag{$*$}$$

такое, что координаты (x, y, z) каждой точки поверхности и только они являются решениями уравнения (*), то это уравнение называют уравнением данной поверхности, а саму поверхность называют алгебраической поверхностью степени n, где n — степень уравнения (*).

Пусть теперь дано некоторое уравнение (*). Зафиксируем значения $x = x_0$. Тогда получим уравнение

$$F(x_0, y, z) = 0 \tag{$**$}$$

относительно двух переменных. Все точки пространства для которых $x = x_0$, образуют плоскость, которая параллельна координатной плоскости OYZ. Используя те же рассуждения, что и выше, мы получаем в этой плоскости некоторую линию a, а, задавая для переменной x другие значения, мы получим некоторую поверхность (рис. 27).

5.3. Уравнение линии в пространстве

Линии в пространстве можно рассматривать как линии пересечения двух поверхностей. Пусть, например, в некоторой ПДСК-3 две поверхности заданы своими уравнениями — $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$. Тогда линия их пересечения может быть определена как множество точек, координаты которых определяются решениями системы

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0; \\ F_2(x,y,z)=0. \end{cases}$$

6. Тема 6. Неаффинные системы координат

1. Полярная система координат
2. Сферическая система координат

6.1. Полярная система координат

Определение 6.1. Пусть на плоскости дана некоторая точка O и ось p, проходящая через эту точку. Тогда положение любой точки M плоскости однозначно определяется двумя числами — расстоянием r от данной точки до точки O и углом поворота φ вектора $\overrightarrow{OM}$ вокруг точки O от оси p в направлении против часовой стрелки. Числа r и φ называются полярными координатами точки M. Величина r называется радиусом, а величина φ — полярным углом. Точка O называется полюсом, а ось p — полярной осью. При этом на полярные координаты накладываются следующие ограничения: $0 \leqslant r < +\infty, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Совокупность полюса и полярной оси называется полярной системой координат. (рис. 28)

Пусть на плоскости дана полярная система координат и в ней некоторая точка M. Выберем на этой же плоскости ПДСК-2 таким образом, чтобы начало координат совпадало с полюсом, а ось абсцисс была сонаправлена с полярной осью (рис. 29). Тогда, используя определения тригонометрических функций cos и sin и теорему Пифагора, из треугольника OMN легко получить формулы перехода от полярных координат к прямоугольным

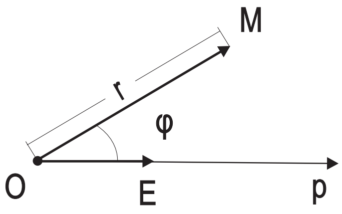


Рис. 28

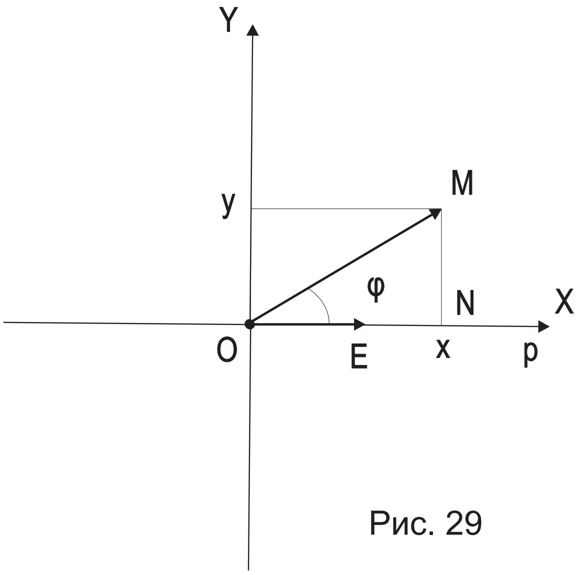


Рис. 29

$$\boxed{x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi} \tag{6.1}$$

и от прямоугольных координат к полярным

$$\boxed{r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.} \tag{6.2}$$

6.2. Сферическая система координат

Определение 6.2. Пусть в пространстве дана некоторая ПДСК-3 и пусть M — некоторая точка этого пространства. Обозначим через r длину радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$, через ψ угол, образованный радиус-вектором $\overrightarrow{OM}$ с координатной плоскостью OXY и через φ — угол, образованный векторной проекцией радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ на координатную плоскость OXY с осью OX. Тогда положение точки M однозначно определяется тремя этими числами, которые называются сферическими координатами. Величина r называется радиусом, величина φ — первым сферическим углом, а ψ — вторым сферическим углом. При этом на сферические координаты накладываются следующие ограничения: $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Совокупность точки O и координатной плоскости OXY на которой выбрана координатная ось OX называется сферической системой координат. (рис. 30)

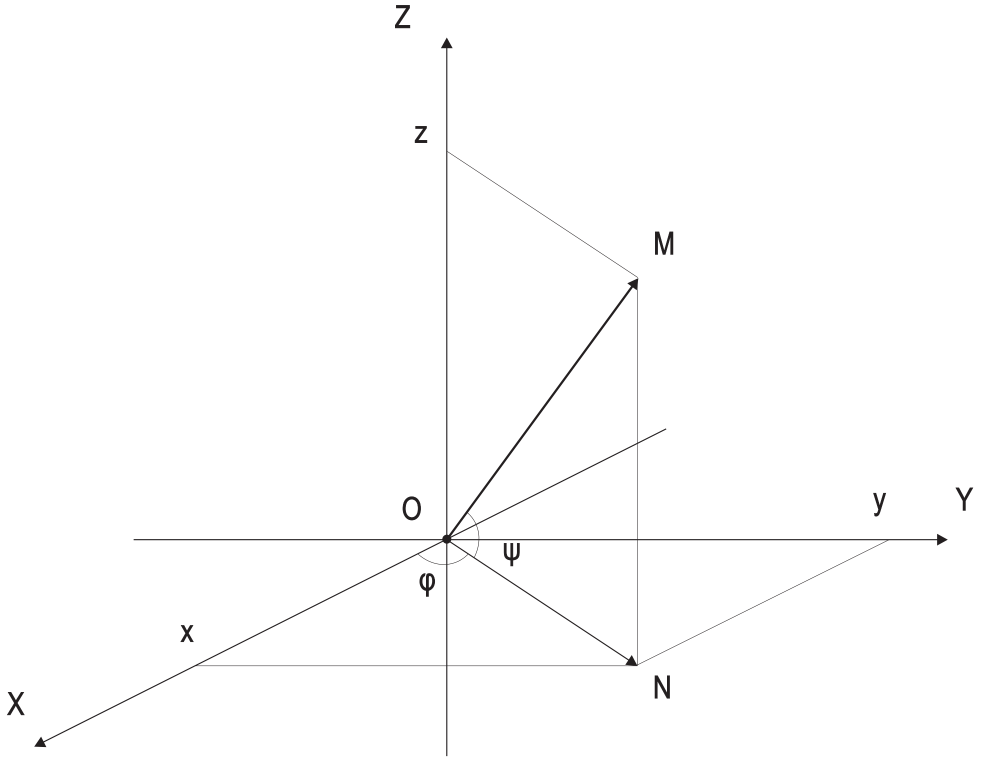


Рис. 30

Используя определения функций sin и cos, нетрудно убедиться в справедливости следующих формул, которые называются формулами перехода от сферических координат к прямоугольным.

$$\boxed{x = r\ cos\psi \cos\varphi, \quad y = r\cos\psi\sin\varphi, \quad z = r\sin\psi} \tag{6.3}$$

Формулы обратного перехода, т.е. от прямоугольных координат к сферическим так же следуют непосредственно из определений тригонометрических функций, если вначале найти выражение радиуса через прямоугольные координаты: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi + r^2\ cos^2\psi\sin^2\varphi + r^2\ sin^2\psi = r^2\cos^2\psi(\ cos^2\varphi + \ sin^2\varphi) + r^2\sin^2\psi = r^2(\cos^2\psi + \sin^2\psi) = r^2$.

Теперь указанные формулы очевидны.

$$\boxed{\begin{gathered} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ \sin\psi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \cos\psi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{gathered}} \tag{6.4}$$

7. Тема 7. Преобразования координат

1. Параллельный перенос, поворот и общее преобразование системы координат на плоскости

2. Параллельный перенос, поворот и общее преобразование системы координат в пространстве

3. Сжатие системы координат на плоскости и в пространстве

7.1. Параллельный перенос, поворот и общее преобразование системы координат на плоскости

Определение 7.1. Пусть даны две ПДСК-2 — OXY и $O'X'Y'$ и пусть точки O и O' различны, а оси OX и $O'X'$; OY и $O'Y'$ попарно сонаправлены. Преобразование системы OXY в систему $O'X'Y'$ называется преобразованием параллельного переноса прямоугольных координат на плоскости. При этом система OXY называется старой системой, а система $O'X'Y'$ — новой системой.

Если (a, b) — координаты точки O' в системе OXY, то формулы перехода от новой системы координат к старой при преобразовании параллельного переноса имеют вид

$$\boxed{x = x' + a;\ y = y' + b,} \tag{7.1}$$

а формулы перехода от старой системы к новой —

$$\boxed{x' = x - a;\ y' = y - b.} \tag{7.2}$$

◀ Действительно, пусть некоторая точка M в системе OXY имеет координаты (x, y), а в системе $O'X'Y'$ — координаты (x', y') (рис. 31).

Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Перейдя к координатам, получим $(x, y) = (a, b) + (x', y')$. Теперь остаётся использовать формулы суммы векторов, заданных прямоугольными координатами. ▶

Определение 7.2. Пусть даны две ПДСК-2 — OXY и $OX'Y'$, и пусть α — угол между осями OX и OX'. Преобразование системы OXY в систему $OX'Y'$ называется преобразованием поворота прямоугольных

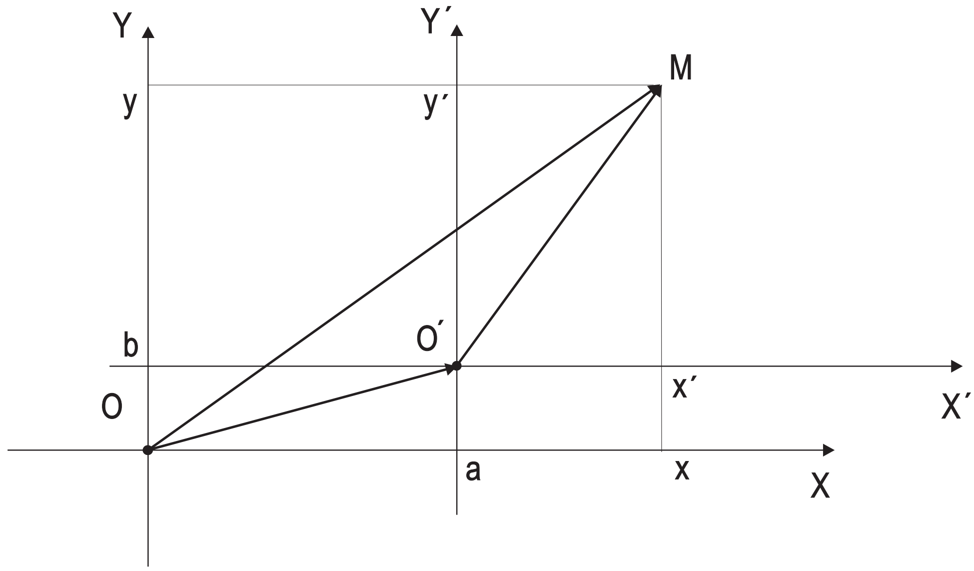


Рис. 31

координат на плоскости на угол α. При этом система OXY называется старой системой, а система $OX'Y'$ — новой системой.

При преобразовании поворота на плоскости на угол α формулы перехода от новой системы к старой имеют вид

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{array}} \tag{7.3}$$

а от старой к новой —

$$\boxed{\begin{array}{c} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{array}} \tag{7.4}$$

◀ Пусть некоторая точка M в системе OXY имеет координаты (x, y), а в системе $OX'Y'$ — (x', y') (рис. 32). Пусть L и K — проекции точки M на координатные оси OX и OX' соответственно. Тогда из прямоугольных треугольников OMK и OML, $x = OM\cos\varphi; y = OM\sin\varphi; x' = OM\cos(\varphi-\alpha); y' = OM\sin(\varphi-\alpha)$. Отсюда и получаем формулы перехода от новых координат к старым:

$$x = OM\cos((\varphi-\alpha)+\alpha) =$$

$$OM(\cos(\varphi-\alpha)\cos\alpha - \sin(\varphi-\alpha)\sin\alpha) =$$

$$x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;$$

$$y = OM\sin((\varphi - \alpha) + \alpha) =$$

$$OM(\sin\alpha\cos(\varphi - \alpha) + \cos\alpha\sin(\varphi - \alpha)) =$$

$$x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

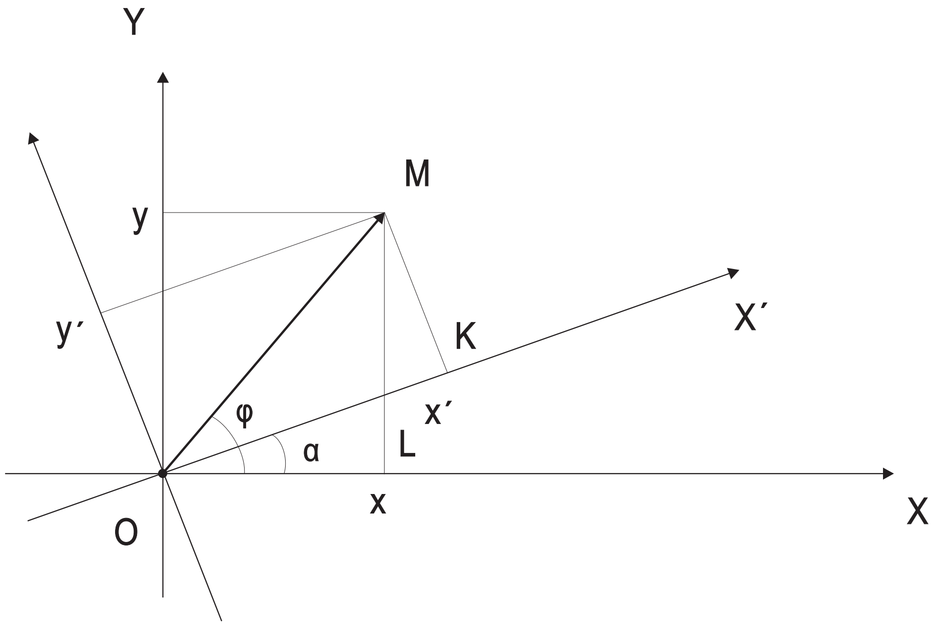


Рис. 32

Можно считать, что система OXY получена из системы $OX'Y'$ поворотом на угол $-\alpha$. Поэтому, поменяв местами старые и новые координаты, изменив угол поворота на $-\alpha$, используя чётность и нечётность тригонометрических функций, получим формулы обратного перехода. ▶

Определение 7.3. Пусть на некоторой плоскости даны две произвольные ПДСК-2 — OXY и $O'X'Y'$. Преобразование системы OXY в систему $O'X'Y'$ называется общим преобразованием прямоугольных координат на плоскости. При этом система OXY называется старой системой координат, а $O'X'Y'$ — новой системой.

Пусть точка O' в системе OXY имеет координаты (a, b), а угол между осями OX и $O'X'$ равен α. Тогда формулы перехода от новой системы к старой при общем преобразовании имеют вид

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a; \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b, \end{array}} \tag{7.5}$$

а формулы обратного перехода —

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha;\\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}} \tag{7.6}$$

◀ Обратимся к рис. 33. Построим вспомогательную ПДСК-2 — систему $O'X''Y''$, расположенную таким образом, что координатные оси OX и $O'X''$; OY и $O'Y''$ попарно сонаправлены. Тогда угол между осями $O'X'$ и $O'X''$ равен углу между осями OX и $O'X'$. Следовательно, формулы перехода от системы $O'X'Y'$ к системе $O'X''Y''$ имеют вид: $x'' = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$; $y'' = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$. Формулы перехода от системы $O'X''Y''$ к системе OXY имеют вид $x = x'' + a$, $y = y'' + b$. Отсюда и следуют формулы перехода от новой системы к старой при общем преобразовании.

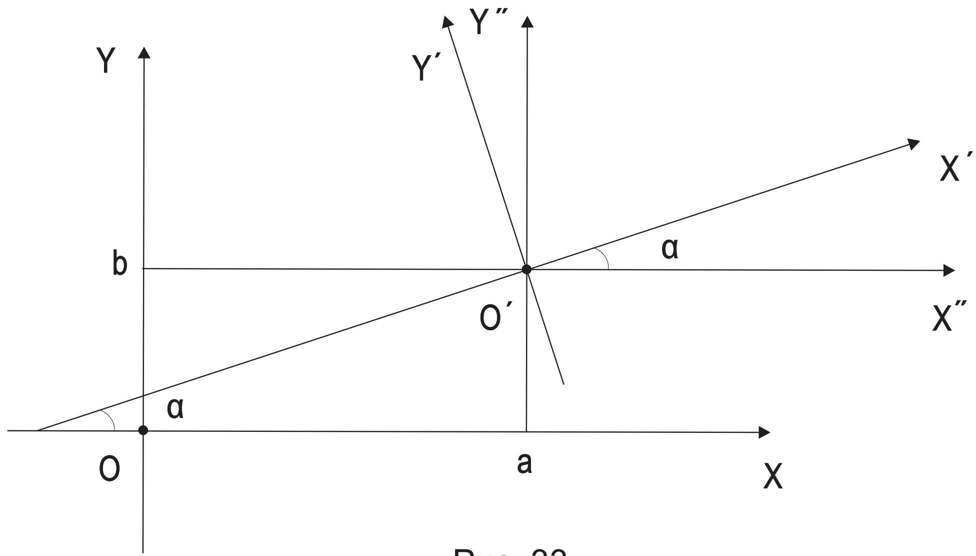


Рис. 33

Аналогичные рассуждения необходимы и для получения формул обратного перехода. $x'' = x - a$, $y'' = y - b$; $x' = x''\cos\alpha + y''\sin\alpha$, $y' = -x''\cos\alpha + y''\sin\alpha$. Теперь указанные формулы очевидны. ▶

7.2. Параллельный перенос, поворот и общее преобразование системы координат в пространстве

Определение 7.4. Пусть даны две ПДСК-3 — $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ и пусть точки O и O' различны, а оси OX, OY, OZ сонаправлены соответственно осям $O'X', O'Y', O'Z'$. Преобразование системы $OXYZ$ в систему $O'X'Y'Z'$ называется преобразованием параллельного переноса прямоугольных координат в пространстве. При этом система $OXYZ$ называется старой системой, а система $O'X'Y'Z'$ — новой системой.

Так же как и в случае параллельного переноса на плоскости, легко получить формулы перехода от новой системы к старой —

$$\boxed{x = x' + a;\ y = y' + b;\ z = z' + c} \tag{7.7}$$

и от старой к новой —

$$\boxed{x' = x - a;\ y' = y - b,\ z' = z - c.} \tag{7.8}$$

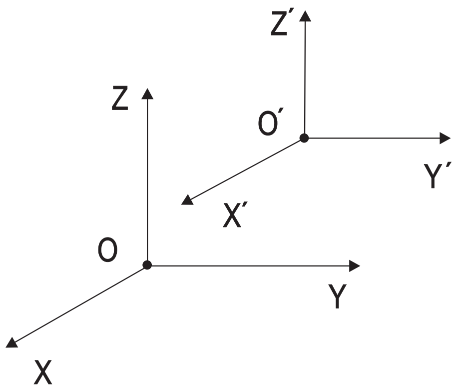


Рис. 34

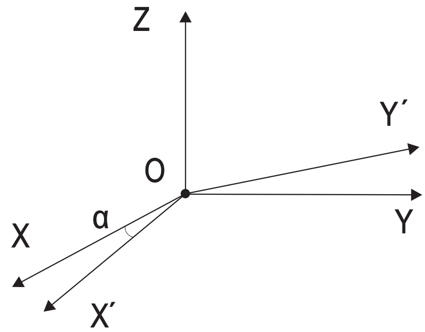


Рис. 35

Определение 7.5. Пусть даны две ПДСК-3 — $OXYZ$ и $OX'Y'Z$, и пусть α — угол между осями OX и OX'. Преобразование системы $OXYZ$ в систему $OX'Y'Z$ называется преобразованием поворота прямоугольных координат в пространстве на угол α вокруг оси OZ. При этом система $OXYZ$ называется старой системой, а система $OX'Y'Z$ — новой системой.

При преобразовании поворота вокруг оси OZ в пространстве на угол α формулы перехода от новой системы к старой имеют вид

$$\boxed{\begin{gathered} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha; \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha; \\ z = z' \end{gathered}} \tag{7.9}$$

а от старой к новой —

$$\boxed{\begin{array}{c} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha; \\ z' = z. \end{array}} \qquad (7.10)$$

Определение 7.6. Пусть даны две произвольные ПДСК-3 — $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$. Преобразование системы $OXYZ$ в систему $O'X'Y'Z'$ называется общим преобразованием прямоугольных координат в пространстве. При этом система $OXYZ$ называется старой системой координат, а $O'X'Y'Z'$ — новой системой.

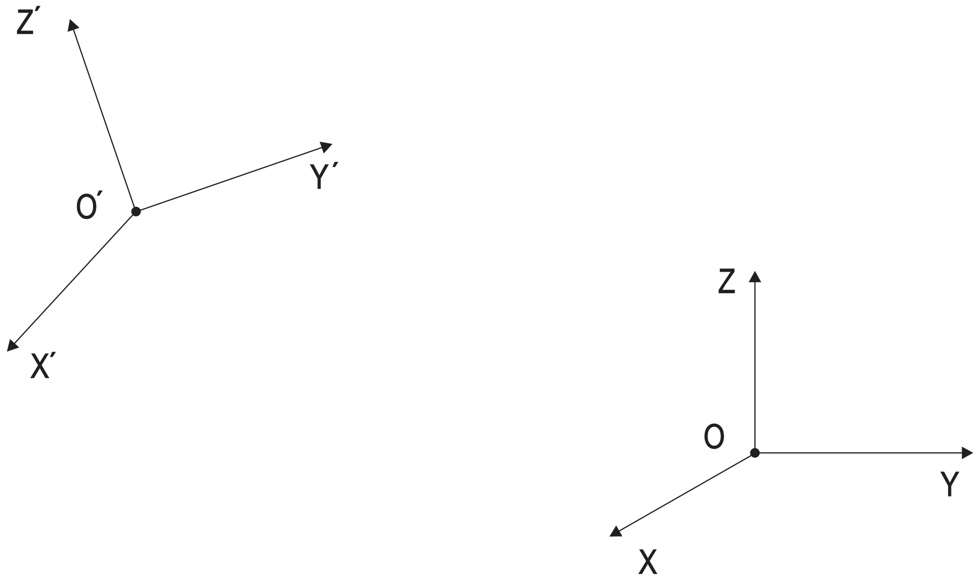


Рис. 36

Формулы общего преобразования прямоугольных координат в пространстве при необходимости возможно получить используя комбинацию поворотов вокруг любой из координатных осей и преобразования параллельного переноса.

7.3. Сжатие систем координат на плоскости и в пространстве

Определение 7.7. Пусть дана некоторая ПДСК-2 OXY. Преобразование этой системы в систему OXY', заключающееся в умножении ординаты любой точки из системы OXY на некоторое число $k \neq 0$ называется сжатием к координатной оси OX. При этом система OXY называется старой системой координат, а OXY' — новой системой.

Формулы перехода от новой системы к старой при преобразовании сжатия к оси OX имеют вид

$$\boxed{x = x';\ y = \frac{1}{k}y',} \tag{7.11}$$

а обратные формулы —

$$\boxed{x' = x;\ y' = ky.} \tag{7.12}$$

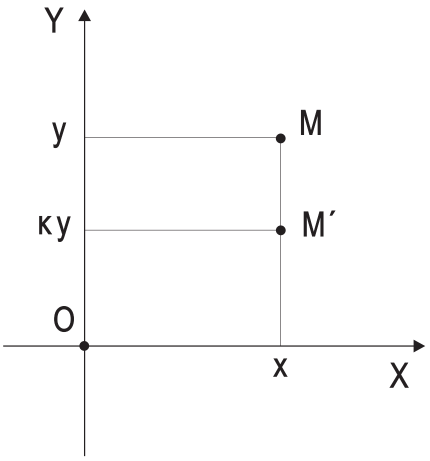


Рис. 37

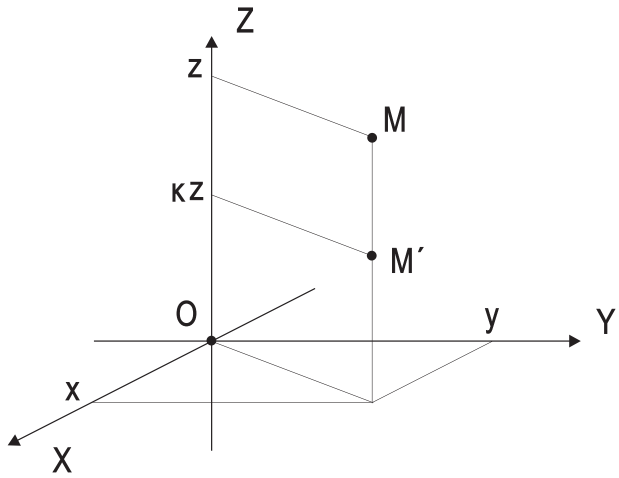


Рис. 38

Определение 7.8. Пусть дана некоторая ПДСК-3 $OXYZ$. Преобразование этой системы в систему $OXYZ'$, заключающееся в умножении аппликаты любой точки, заданной в системе $OXYZ$ на некоторое число $k \neq 0$ называется сжатием к координатной плоскости OXY. При этом система $OXYZ$ называется старой системой координат, а $OXYZ'$ — новой системой.

Формулы перехода от новой системы к старой при преобразовании сжатия к плоскости OXY —

$$\boxed{x = x';\ y = y';\ z = \frac{1}{k}z'} \tag{7.13}$$

и обратные —

$$\boxed{x' = x;\ y' = y;\ z' = kz.} \tag{7.14}$$

◀ При преобразовании сжатия произвольная точка $M(x, y)$ переходит в точку $M'(x', y')$. Дальнейшее очевидно из рис. 37 и рис. 38. ▶

Замечание 7.1. *Преобразования сжатия возможно производить не только к одной из координатных осей (плоскостей).*

Замечание 7.2. *Рассмотренные выше общие преобразования позволяют производить взаимные преобразования прямоугольных систем координат с единичными векторами базиса. Такие преобразования возможны и в тех случаях, когда векторы базиса не обязательно единичные, а хотя бы попарно равны* ($\vec{i_1} = \vec{i_2}$; $\vec{j_1} = \vec{j_2}$; $(\vec{k_1} = \vec{k_2})$). *Комбинация же общего преобразования и преобразования сжатия позволяет преобразовывать даже такие прямоугольные системы координат, у которых вектора базиса не обязательно попарно равны.*

8. Тема 8. Прямая на плоскости и ее уравнения

1. **Общее уравнение прямой**
2. **Особые случаи общего уравнения прямой**
3. **Геометрический смысл знака трёхчлена** $Ax + By + C$
4. **Различные виды уравнения прямой**

8.1. Общее уравнение прямой

Определение 8.1. Всякий ненулевой вектор, параллельный некоторой прямой называется направляющим вектором этой прямой.

Определение 8.2. Всякий ненулевой вектор плоскости, перпендикулярный некоторой прямой из этой плоскости, называется нормальным вектором этой прямой.

Множество всех коллинеарных друг другу векторов можно описать с помощью одного из этих векторов: умножая его на некоторое действительное число, можно получить любой другой вектор множества, т.е. вектор, имеющий такое же направление. Это действие аналогично умножению алгебраического уравнения на действительное число — получается уравнение, которое равносильно исходному. Множество всех направляющих векторов пространства некоторой фиксированной прямой является множеством коллинеарных друг другу векторов, поэтому для прямой направляющий вектор рассматривается как для случая плоскости, так и для случая пространства. Множество же всех нормальных векторов некоторой прямой является множеством коллинеарных друг другу векторов только в том случае, если прямые и векторы рассматриваются на некоторой плоскости. В случае пространства, эти векторы образуют множество компланарных друг другу векторов. Поэтому в аналитической геометрии нормальный вектор прямой рассматривается только для случая плоскости.

В дальнейшем, в этой теме предполагается, что все объекты рассматриваются на некоторой плоскости.

Теорема 8.1. *Всякая прямая в некоторой ПДСК-2 определяется уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$, где A, B, C — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$.*

◀ Пусть в некоторой ПДСК-2 дана некоторая прямая a. Пусть $\vec{n}(A, B)$ — её нормальный вектор. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая фиксированная точка этой прямой. Пусть $M(x, y)$ — некоторая точка этой плоскости (рис. 39). Если эта точка принадлежит данной прямой, то векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональны. Поэтому $\vec{n}\overrightarrow{M_0M} = 0$. Перейдя к координатам, получим: $(A, B)(x - x_0, y - y_0) = A(x - x_0) + B(y - y_0) = Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$. Поскольку A, B, x_0, y_0 — действительные числа, то, обозначив, $C = -Ax_0 - By_0$, получим: $Ax + By + C = 0$. Условие $A^2 + B^2 \neq 0$ очевидно, поскольку вектор $\vec{n}$ не может быть нулевым. ▶

Теорема 8.2. *Всякому уравнению первой степени $Ax + By + C = 0$, где A, B, C — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$ в некоторой ПДСК-2 соответствует некоторая прямая.*

◀ Пусть дана некоторая ПДСК-2 и пусть дано уравнение, удовлетворяющее условию теоремы. Пусть (x_0, y_0) — некоторое ненулевое решение этого уравнения. Тогда получим

$$Ax_0 + By_0 + C = 0. \qquad (*)$$

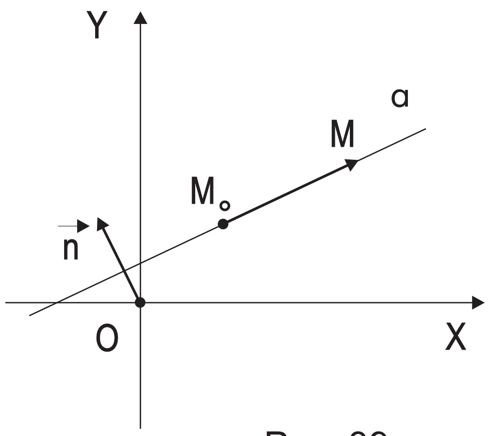


Рис. 39

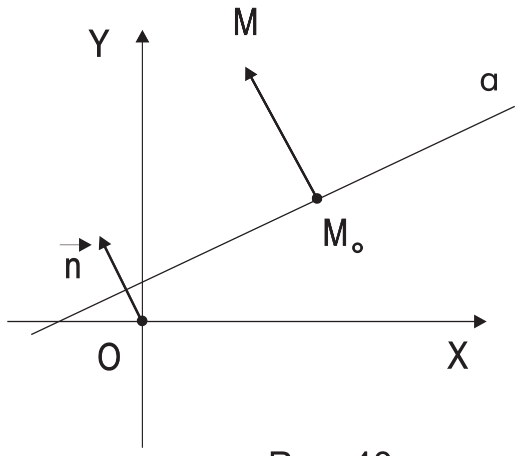


Рис. 40

Пусть (x, y) — ещё одно такое решение этого уравнения. Тогда

$$Ax + By + C = 0. \qquad (**)$$

Вычтя почленно из уравнения (**) уравнение (*), получим:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \qquad (***)$$

Очевидно, что выбранным решениям в рассматриваемой ПДСК-2 соответствуют точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M(x, y)$. Кроме того, $\vec{n}(A, B) \neq 0$ по условию теоремы, а $\overrightarrow{M_0M} \neq 0$ ввиду того, что взятые решения ненулевые и различны. Следовательно, из (***) следует, что векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярны. Беря другие решения уравнения, данного в условии теоремы, каждый раз снова будем получать (***). Таким образом, мы получим множество связанных векторов, начала которых — точка M и которые перпендикулярны вектору $\vec{n}$. Концы этих векторов будут образовывать некоторую прямую, что следует из соображений школьной геометрии. ►

Определение 8.3. Уравнение первой степени $Ax + By + C = 0$, где A, B, C — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$ называется общим уравнением прямой на плоскости.

8.2. Особые случаи общего уравнения прямой

1) $A = 0$ — уравнение имеет вид: $By + C = 0$ — прямая параллельна координатной оси OX;

2) $B = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax + C = 0$ — прямая параллельна координатной оси OY;

3) $C = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax + By = 0$ — прямая проходит через начало координат;

4) $A = C = 0$ — уравнение имеет вид: $By = 0$ — прямая совпадает с координатной осью OX;

5) $B = C = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax = 0$ — прямая совпадает с координатной осью OY.

8.3. Геометрический смысл знака трёхчлена $Ax + By + C$

Если дано общее уравнение некоторой прямой, расположенной в некоторой ПДСК-2, то точки этой прямой и только они обращают это уравнение в верное равенство. Точки же ей не принадлежащие будут очевидно обращать трёхчлен $Ax + By + C$ в некоторое действительное, отличное от нуля число. Это число может быть как положительным, так и отрицательным. Оказывается, что справедливо следующее утверждение.

Теорема 8.3. *Пусть в некоторой ПДСК-2 некоторая прямая задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Все точки плоскости, для которых $Ax+By+C > 0$ лежат в одной полуплоскости относительно данной прямой, а все точки плоскости для которых $Ax + By + C < 0$ лежат в другой полуплоскости.*

◀ Пусть в некоторой ПДСК-2 прямая a задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и пусть $M(x, y)$ — некоторая точка этой плоскости. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую a (рис. 40). Тогда $Ax_0 + By_0 + C = 0$. Очевидно, что векторы $\vec{n}(A, B)$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны. Следовательно, существует единственное число $\lambda \neq 0$ такое, что $\vec{n} = \lambda\overrightarrow{M_0M}$. Тогда, перейдя к координатам, получим: $A = \lambda(x - x_0)$; $B = \lambda(y - y_0)$. Отсюда

$$x = \frac{A}{\lambda} + x_0; \quad y = \frac{B}{\lambda} + y_0.$$

Следовательно,

$$Ax + By + C = A(\frac{A}{\lambda} + x_0) + B(\frac{B}{\lambda} + y_0) + C =$$

$$\frac{1}{\lambda}(A^2+B^2)+Ax_0+By_0+C=\frac{1}{\lambda}(A^2+B^2).$$

Значит, знак трёхчлена $Ax+By+C$ равен знаку $\dfrac{1}{\lambda}$. Если $\vec{n}\uparrow\uparrow\overrightarrow{M_0M}$, то $\lambda>0$ и $Ax+By+C>0$, если же $\vec{n}\uparrow\downarrow\overrightarrow{M_0M}$, то $\lambda<0$ и $Ax+By+{}$ $+C<0$. Итак, для любых двух точек, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a, связанные векторы, концами которых являются эти точки, а началами — их проекции на прямую a, будут сонаправлены и поэтому для них знаки трёхчлена $Ax+By+C$ будут одинаковыми, а для двух точек из разных полуплоскостей — разными. ▶

8.4. Различные виды уравнения прямой

Далее будем считать, что все объекты заданы в некоторой ПДСК-2.

Пусть дана некоторая прямая a, не параллельная оси ординат. Обозначим $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между этой прямой и положительным направлением оси OX. Пусть $M(x_0,y_0)$ — некоторая фиксированная точка этой прямой. Тогда прямая a определяется уравнением

$$\boxed{y-y_0=k(x-x_0),} \tag{8.1}$$

которое называется уравнением прямой по угловому коэффициенту и точке.

◀ Пусть $M(x,y)$ — некоторая произвольная точка данной прямой (рис. 41). Тогда из треугольника M_0KM получаем, что $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$ или $y-y_0=k(x-x_0)$. ▶

Если $B(0,b)$ — точка пересечения прямой a с осью OY, то прямая определяется уравнением

$$\boxed{y=kx+b,} \tag{8.2}$$

которое называется уравнением прямой с угловым коэффициентом.

◀ Как видно из рис. 42, это уравнение является частным случаем предыдущего, если в качестве точки M_0 взять точку пересечения прямой с осью OX. Действительно, в этом случае получаем: $y-b=k(x-0)$ или $y=kx+b$. ▶

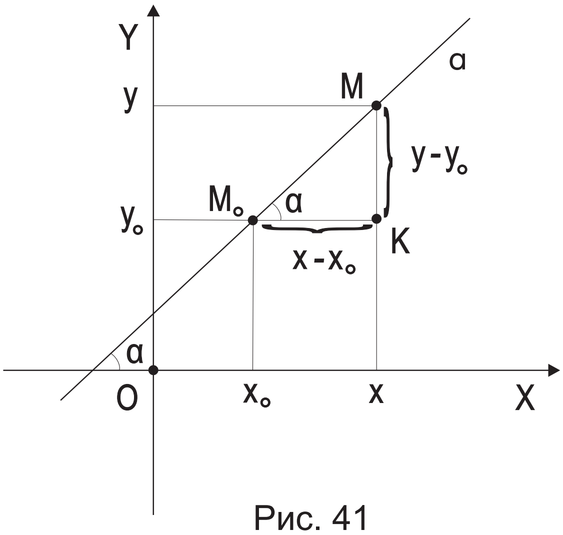


Рис. 41

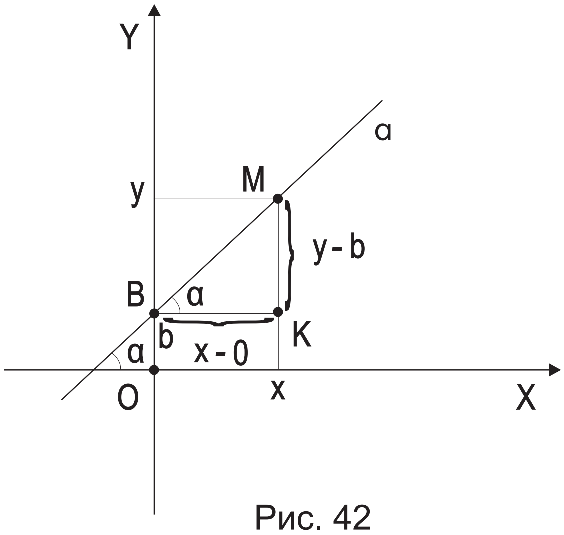


Рис. 42

Если прямая a проходит через две различные точки — $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$, то она определяется уравнением

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1},} \tag{8.3}$$

которое называется уравнением прямой по двум точкам.

◀ Вектор $\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ будет направляющим вектором данной прямой. Если произвольная точка M принадлежит этой прямой, то вектор $\overrightarrow{AB}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AM}(x - x_1,\ y - y_1)$. Следовательно, существует единственное число λ такое, что $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$, т.е. $(x - x_1,\ y - y_1) = \lambda(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$. Отсюда, перейдя к координатам, получим:

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}; \quad \lambda = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Теперь осталось приравнять правые части. ▶

Если $A(a, 0)$ — точка пересечения прямой a с осью OX, а $B(0, b)$ — точка пересечения с осью OY, то прямая определяется уравнением

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,} \tag{8.4}$$

которое называется уравнением прямой в отрезках по осям.

◀ Подставив в уравнение (8.3) координаты точек A и B, получим:

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \text{или} \quad \frac{x}{-a} + \frac{-a}{-a} = \frac{y}{b}$$

Отсюда и следует (8.4). ▶

Если $\vec{a}(a_1, a_2)$ — направляющий вектор прямой a, а $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая её фиксированная точка, то прямая определяется уравнением

$$\boxed{\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2},} \tag{8.5}$$

которое называется каноническим уравнением прямой на плоскости.

◀ Пусть $M(x, y)$ — некоторая произвольная точка. Если она принадлежит прямой a, то векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ коллинеарны. Значит, существует единственное число λ такое, что $\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{a}$. Перейдя к координатам, получим:

$$\lambda = \frac{x - x_0}{a_1} \quad \text{и} \quad \lambda = \frac{y - y_0}{a_2}. \tag{$*$}$$

Теперь осталось приравнять правые части. ▶

Определяется так же прямая и двумя уравнениями

$$\boxed{x = a_1 t + x_0; \quad y = a_2 t + y_0,} \tag{8.6}$$

которые называются параметрическими уравнениями прямой на плоскости. Число t называется параметром.

◀ Если в (*) обозначить $t = \lambda$, то, выразив x и y, получаем параметрические уравнения. Если параметр t "пробегает" множество всех действительных чисел, то мы получаем все точки данной прямой. ▶

Пусть α — угол между нормальным вектором прямой a и положительным направлением оси OX, p — расстояние от прямой до начала координат. Тогда прямая определяется уравнением

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,} \tag{8.7}$$

которое называется нормальным уравнением прямой. Для того, чтобы получить из общего уравнения прямой её нормальное уравнение, необходимо это общее уравнение умножить на множитель

$$\boxed{\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},} \tag{8.8}$$

который называется нормирующим множителем. Знак этого множителя выбирается противоположным знаку C из общего уравнения.

◀ Пусть в некоторой ПДСК-2 дана некоторая прямая a (рис. 43). Начало координат O выберем в качестве полюса, а ось абсцисс — в качестве полярной оси. Через полюс проведём прямую s, которая перпендикулярна прямой a. Пусть N — точка пересечения этих прямых. Обозначим $p = ON$, $\alpha = \widehat{OX, s}$. Пусть M — произвольная точка прямой a. Тогда $\rho = OM$ и $\varphi = \widehat{OX, OM}$ — полярные координаты точки M. Очевидно, что $Pr_s OM = ON = p$. С другой стороны, $Pr_s OM = OM \cos(\alpha - \varphi)$. Отсюда получим $p = \rho\cos(\alpha - \varphi)$. Перепишем полученное соотношение в виде

$$\rho\cos(\alpha - \varphi) - p = 0. \tag{$*$}$$

Точки, не лежащие на прямой a этому соотношению не удовлетворяют. Следовательно, (*) есть уравнение прямой в полярных координатах. Используя формулу разности cos, получим вместо (*) уравнение

$$\rho\cos\alpha\cos\varphi + \rho\sin\alpha\sin\varphi - p = 0,$$

а, используя формулы перехода от полярных координат к прямоугольным, приходим к уравнению (8.7).

Если обозначить $A = \cos\alpha$, $B = \sin\alpha$, $C = -p$, то, поскольку $A^2 + B^2 = 1 \neq 0$, очевидно, что нормальное уравнение является частным случаем общего уравнения.

Пусть теперь дано некоторое произвольное общее уравнение некоторой прямой — $Ax + By + C = 0$. Умножим данное уравнение на число $\mu = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Такое число существует, поскольку A и B одновременно не равны нулю. Тогда мы получим уравнение

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Вектор $\vec{n}(A, B)$ является нормальным вектором этой прямой. Если обозначить $\alpha = \widehat{\vec{n}, Ox}$, то получим, что

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Отсюда приходим к уравнению

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Очевидно, что это уравнение является нормальным уравнением прямой. Поскольку p — это расстояние, то знак перед корнем должен быть противоположен знаку C. Это и определяет выбор знака для числа μ. ►

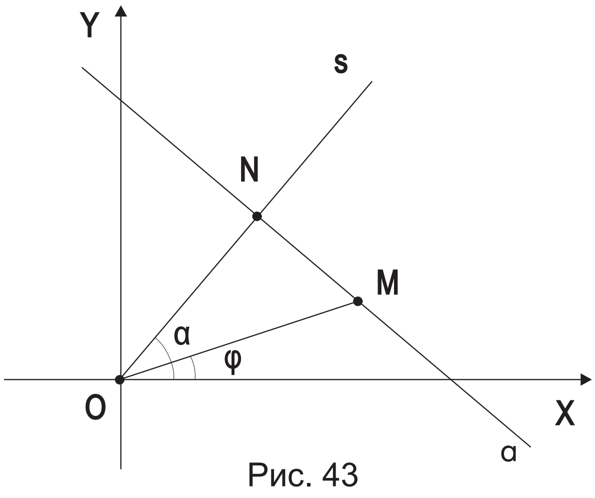


Рис. 43

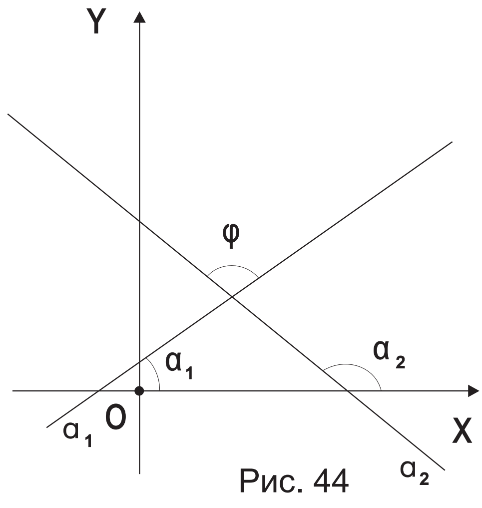


Рис. 44

Замечание 8.1. *Прямые, которые не параллельны ни одной из координатных осей имеют все перечисленные типы уравнений, которые на самом деле являются одним и тем же общим уравнением, приведённым к специальному виду. Внимания заслуживают прямые, которые параллельны координатным осям. Одна из координат направляющего вектора такой прямой равна нулю. Поэтому один из знаменателей канонического уравнения, либо уравнения по двум точкам равен нулю. Однако это не означает "запрещённого"действия. Здесь возникает конструкция, аналогичная неопределённости* $\dfrac{0}{0}$ *в теории пределов — просто числитель такой дроби тоже должен быть равен нулю. На особом положении оказываются прямые, которые параллельны оси ординат. Для них не существует углового коэффициента. Поэтому считается, что такие прямые не имеют уравнения по угловому коэффициенту и точке и уравнения с угловым коэффициентом.*

Замечание 8.2. *Параметрические уравнения прямой могут быть представлены и в виде одного векторного уравнения —* $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$*, что и делается авторами некоторых пособий.*

9. Тема 9. Геометрические характеристики расположения прямой на плоскости

1. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности

2. Расстояние от точки до прямой

3. Пучок прямых

9.1. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности

Пусть две прямые — a_1 и a_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ соответственно. Тогда

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}} \tag{9.1}$$

— условие параллельности,

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \tag{9.2}$$

— условие перпендикулярности.

◀ Если прямые параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны. Следовательно, существует единственное число λ такое, что $\lambda(A_2,\ B_2) = (A_1,\ B_1)$. Перейдя к координатам и исключив λ получаем условие параллельности. Перпендикулярность же прямых равносильна ортогональности нормальных векторов, т.е. равенства нулю их скалярного произведения. ▶

Определение 9.1. Углом φ между прямыми a_1 и a_2 называется наименьший угол поворота на который нужно повернуть прямую a_1 вокруг некоторой её точки так, чтобы прямая a_1 совпала с прямой a_2 или стала ей параллельной. Этот угол считается положительным, если поворот происходит против часовой стрелке и отрицательным в противном случае.

Если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты прямых a_1 и a_2, то получим формулу угла между прямыми —

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.} \tag{9.3}$$

◀ Пусть $\alpha_1,\ \alpha_2$ — углы, которые с осью абсцисс образуют прямые

a_1, a_2 соответственно. Как видно из рис. 44, $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. По данному выше определению углового коэффициента, $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

►

Из формулы (9.3) следуют условие параллельности

$$\boxed{k_1 = k_2} \tag{9.4}$$

и условие перпендикулярности

$$\boxed{k_1 = -\frac{1}{k_2}} \tag{9.5}$$

через угловые коэффициенты.

◄ Если прямые параллельны, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, поэтому $k_2 - k_1 = 0$ и отсюда следует условие параллельности. Если же прямые перпендикулярны, то $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, поэтому $\operatorname{tg}\varphi$ не существует, значит $1 + k_1 k_2 = 0$, откуда условие перпендикулярности очевидно. ►

Замечание 9.1. *Угол между прямыми на плоскости равен углу между их нормальными векторами, поэтому этот угол может быть найден как угол между нормальными векторами, т.е. по формуле*

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{{A_1}^2 + {B_1}^2}\sqrt{{A_2}^2 + {B_2}^2}}.} \tag{9.6}$$

9.2. Расстояние от точки до прямой

Теорема 9.1. *Пусть в некоторой ПДСК-2 дана некоторая точка $M(x_1, y_1)$ и задана некоторая прямая a своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$. Тогда расстояние от точки M до прямой a находится по формуле*

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.} \tag{9.7}$$

◀ Проведём через точку M прямую a_1, параллельную прямой a. Обозначим через d расстояние от точки M до прямой a.

Пусть

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$$

— нормальное уравнение прямой a, а

$$x\cos\beta + y\sin\beta - p_1 = 0$$

— нормальное уравнение прямой a_1, где α и β — углы. образованные с осью абсцисс нормальными векторами соответственно прямых a и a_1 (эти нормальные векторы строятся таким же образом, как и при выводе нормального уравнения прямой). Тогда расстояние от начала координат до прямой a равно p, а до прямой a_1 — p_1.

Рассмотрим вначале случай, когда прямые a и a_1 отсекают отрезки по осям в одной координатной четверти (рис. 45). Тогда $d = |p - p_1|$ и, кроме того, $\alpha = \beta$. Так как точка M лежит на прямой a_1, то

$$x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p_1 = 0.$$

Следовательно,

$$p_1 = x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha.$$

Поэтому

$$d = |x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p|.$$

Выше мы показали,что

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad p = \frac{-C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Следовательно,

$$d = \left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда прямые a и a_1 отсекают отрезки по осям в разных коодинатных четвертях (рис. 46). Тогда $d = |p + p_1|$ и $\alpha = \beta + \pi$. Следовательно, $\cos\beta = -\cos\alpha$, $\sin\beta = -\sin\alpha$ и нормальное уравнение прямой a_1 имеет вид:

$$-x\cos\alpha - y\sin\alpha - p_1 = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$p_1 = -x\cos\alpha - y\sin\alpha$$

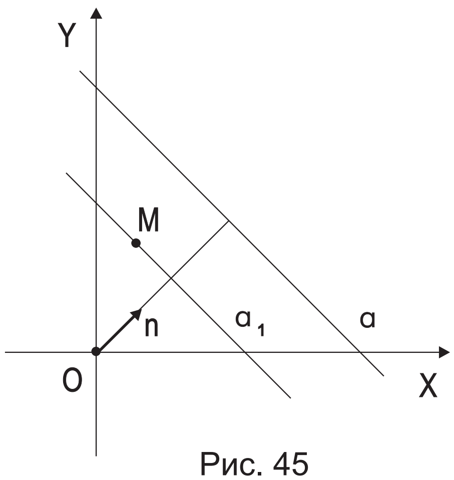


Рис. 45

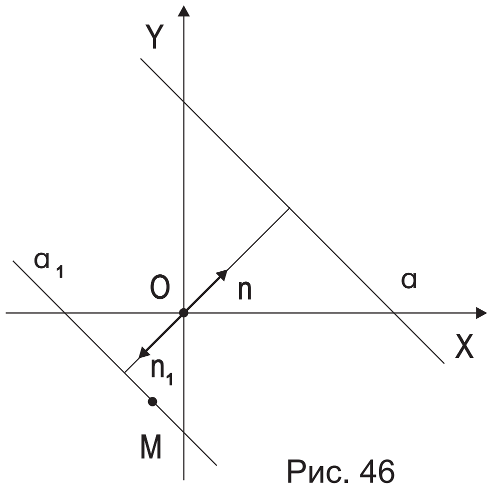


Рис. 46

и, следовательно,

$$d = |-x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha + p| =$$
$$|x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha - p| = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Случай, когда точка M лежит на прямой a очевиден, поскольку в этом случае $p = p_1$. ▶

9.3. Пучок прямых

Определение 9.2. Пучком прямых называется совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку S, которая называется центром пучка.

Для задания пучка достаточно задать его центр или любые две прямые пучка.

Теорема 9.2. *Пусть в ПДСК-2 две непараллельные прямые, заданы своими общими уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. *Тогда пучок прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых задаётся уравнением*

$$\boxed{A_1x + B_1y + C_1 + t(A_2x + B_2y + C_2) = 0,} \tag{9.8}$$

где t *— некоторое число.*

◀ Пусть в некоторой ПДСК-2 две непараллельные прямые a_1 и a_2 заданы соответственно своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Поскольку прямые непараллельны, то существует точка S, которая является их точкой пересечения (рис. 47). Пусть $S(x_0, y_0)$. Умножим уравнение первой прямой на некоторое ненулевое число μ, а уравнение второй — на некоторое ненулевое число λ и сложим их почленно:

$$\mu(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \qquad (*)$$

Перепишем это равенство в виде:

$$(\mu A_1 + \lambda A_2)x + (\mu B_1 + \lambda B_2)y + (\mu C_1 + \lambda C_2) = 0. \qquad (**)$$

Допустим, что $\mu A_1 + \lambda A_2 = 0 = \mu B_1 + \lambda B_2$. Тогда получим: $A_1 = -\frac{\lambda}{\mu}A_2$ и $B_1 = -\frac{\lambda}{\mu}B_2$. Отсюда следует условие параллельности: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, что противоречит условию. Поэтому заключаем,что $(\mu A_1 + \lambda A_2)^2 + (\mu B_1 + \lambda B_2)^2 \neq 0$. Значит, уравнение (**) является общим уравнением прямой. Задавая различные значения числам μ и λ, будем получать уравнения некоторых конкретных прямых. Так как точка S является точкой пересечения исходных прямых, то $\mu(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \lambda(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = \mu \cdot 0 + \lambda \cdot 0 = 0$, т.е. любая такая прямая проходит через точку S. Путь M — произвольная точка плоскости, отличная от точки S. По-

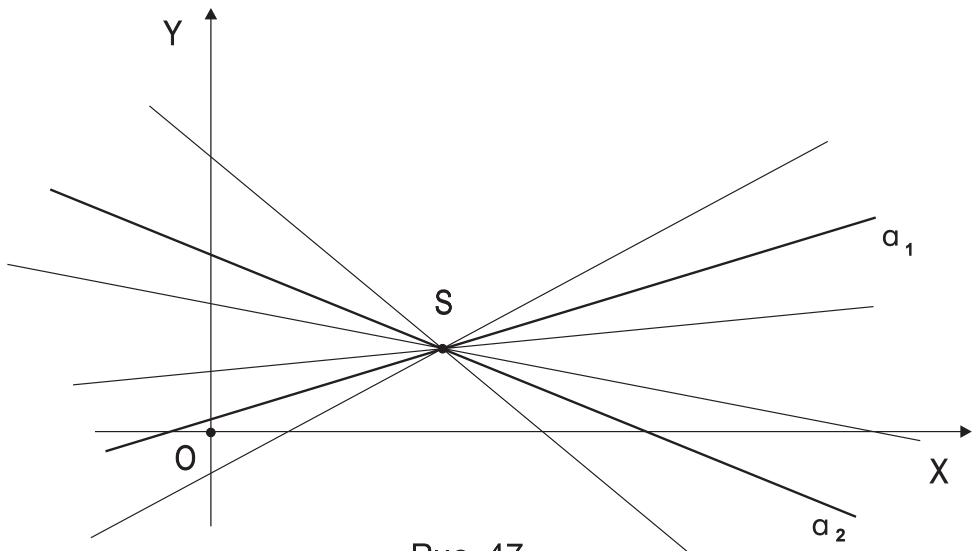


Рис. 47

кажем, что числа μ и λ можно подобрать таким образом, чтобы прямая (*) проходила через точку $M(x_1, y_1)$.Это условие записывается в виде $\mu(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \lambda(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0$. Поскольку точки M и

S различны, то хотя бы одна из скобок последнего равенства отлична от нуля. Пусть, например, $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0$. Тогда последнее равенство можно переписать в виде:

$$\mu = -\lambda \frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}.$$

Придавая для λ различные, отличные от нуля значения, можно получить соответствующее значение для μ таким образом, что (*) даст любую прямую пучка. Разделив (*) на μ почленно и обозначив $t = \dfrac{\lambda}{\mu}$, получим уравнение пучка. ►

Условие принадлежности прямой, заданной уравнением $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ пучку прямых, заданному уравнениями двух прямых — $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, имеет вид:

$$\boxed{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.} \tag{9.9}$$

◄ Пусть $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ — уравнение некоторой прямой a, которая принадлежит пучку прямых, заданному прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Тогда существуют числа μ и λ такие, что (*) — уравнение прямой a. Следовательно, для таких чисел, коэффициенты общего уравнения прямой a пропорциональны коэффициентам уравнения (*). Это может быть записано в виде

$$A_3 = k(A_1 + tA_2); \quad B_3 = k(B_1 + tB_2); \quad C_3 = k(C_1 + tC_3),$$

где k — некоторое число, а $t = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Тогда, используя свойства определителя (если одна из строк определителя равна сумме других строк, умноженных почленно на некоторые числа, то такой определитель равен нулю), получим:

$$\begin{vmatrix} A_1 & By_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} A_1 & By_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_1 + tA_2 & B_1 + tB_2 & C_1 + tC_2 \end{vmatrix} = 0.$$

►

Замечание 9.2. *Из уравнения* (9.8) *можно получить уравнение любой прямой пучка, за исключением прямой* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. *Эта про-*

блема решается легко — если сделать замену $t = \dfrac{1}{t_1}$, то мы получим уравнение:

$$t_1(A_1x + B_1y + C_1) + A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

10. Тема 10. Плоскость в пространстве

1. Общее уравнение плоскости
2. Особые случаи общего уравнения плоскости
3. Геометрический смысл знака выражения $Ax+By+Cz+D$
4. Различные виды уравнений плоскости в пространстве
5. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности
6. Расстояние от точки до плоскости. Пучок плоскостей

10.1. Общее уравнение плоскости

Определение 10.1. Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный некоторой плоскости называется нормальным вектором этой плоскости.

Определение 10.2. Любые два неколлинеарные вектора, параллельные некоторой плоскости называются направляющими векторами этой плоскости.

Теорема 10.1. *Всякая плоскость в некоторой ПДСК-3 определяется уравнением первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A,\ B,\ C,\ D$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.*

◀ Пусть в некоторой ПДСК-2 дана некоторая плоскость α. Пусть $\vec{n}(A, B, C)$ — её нормальный вектор (рис. 48). Тогда $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка этой плоскости, а M — произвольная её точка. Тогда векторы $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярны. Перейдя к координатам и обозначив $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, получим данное в условии теоремы уравнение. ▶

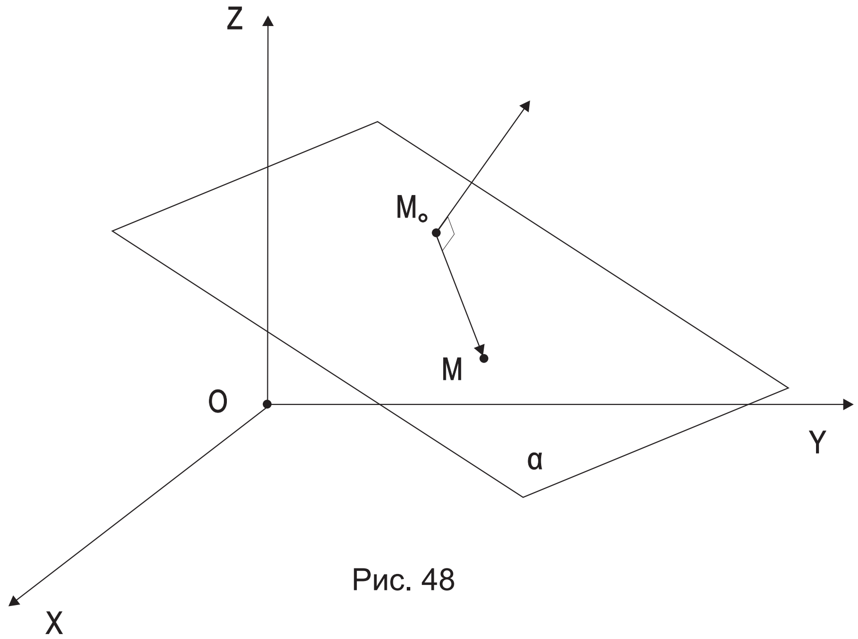


Рис. 48

Теорема 2. *Всякому уравнению первой степени* $Ax+By+Cz+D = 0$*, где* $A,\ B,\ C, D$ *— некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию* $A^2+B^2+C^2 \neq 0$ *в некоторой ПДСК-3 соответствует некоторая плоскость.*

◀ Пусть (x_0, y_0, z_0) — некоторое ненулевое решение уравнения, данного в условии теоремы и пусть (x, y, z) — некоторое произвольное решение этого уравнения. Тогда получим:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \qquad (*)$$

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (**)$$

Вычтя почленно (**) - (*), получим условие перпендикулярности векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$. Беря вместо (x, y, z) различные другие решения, мы получим множество векторов, начала которых находятся в одной точке и которые перпендикулярны одному вектору. Из геометрических соображений концы этих векторов будут образовывать некоторую плоскость. ▶

Определение 10.3. Уравнение первой степени $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A,\ B,\ C, D$ — некоторые действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ называется общим уравнением плоскости.

10.2. Особые случаи общего уравнения плоскости

1) $A = 0$ — уравнение имеет вид: $By + Cz + D = 0$ — плоскость параллельна координатной оси OX;

2) $B = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax + Cz + D = 0$ — плоскость параллельна координатной оси OY;

3) C $= 0$ — уравнение имеет вид: $Ax + By + D = 0$ — плоскость параллельна координатной оси OZ;

4) $D = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax + By + Cz = 0$ — плоскость проходит через начало координат;

5) $A = D = 0$ — уравнение имеет вид: $By + Cz = 0$ — плоскость проходит через координатную ось OX;

6) $B = D = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax + Cz = 0$ — плоскость проходит через координатную ось OY.

7) C $= D = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax + By = 0$ — плоскость проходит через координатную ось OZ.

8) $A = B = 0$ — уравнение имеет вид: $Cz + D = 0$ — плоскость параллельна координатной плоскости OXY;

9) $A = C = 0$ — уравнение имеет вид: $By + D = 0$ — плоскость параллельна координатной плоскости OXZ;

10) $B = C = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax + D = 0$ — плоскость параллельна координатной плоскости OYZ;

11) $A = B = D = 0$ — уравнение имеет вид: $Cz = 0$ — плоскость совпадает с координатной плоскостью OXY;

12) $A = C = D = 0$ — уравнение имеет вид: $By = 0$ — плоскость совпадает с координатной плоскостью OXZ;

13) $B = C = D = 0$ — уравнение имеет вид: $Ax = 0$ — плоскость совпадает с координатной плоскостью OYZ.

10.3. Геометрический смысл знака выражения $Ax + By + Cz + D$

Геометрический смысл знака выражения $Ax+By+Cz+D$ такой же как и геометрический смысл знака трёхчлена $Ax + By + C$ в уравнении прямой.

Теорема 10.2. *Пусть в некоторой ПДСК-3 некоторая плоскость задана своим общим уравнением $Ax+By+Cz+D = 0$. Все точки простран-*

ства, для которых $Ax+By+Cz+D>0$ *лежат в одном полупространстве относительно данной плоскости, а все точки пространства для которых* $Ax+By+Cz+D<0$ *лежат в другом полупространстве.*

◀ Доказательство проводится аналогично доказательству аналогичного результата для прямой на плоскости и отличается от него добавлением в рассмотрение ещё одной координаты. ▶

10.4. Различные виды уравнений плоскости в пространстве

Далее будем считать, что все объекты заданы в некоторой ПДСК-3.

Как известно из школьной геометрии, через три различные точки, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. Если $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ — такие точки, то плоскость α, проходящая через эти точки, определяется уравнением

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0,} \tag{10.1}$$

которое называется уравнением плоскости по трём точкам.

◀ Пусть даны три не лежащие на одной прямой точки — $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Пусть $M(x, y, z)$ — некоторая произвольная точка пространства. Тогда и только тогда точка M принадлежит плоскости α, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M}$ компланарны. Отсюда, используя критерий компланарности, мы и получаем уравнение плоскости по трём точкам. ▶

Если плоскость α проходит через точки $A(a, 0, 0)$; $B(0, b, 0)$; $C(0, 0, c)$, то эта плоскость определяется уравнением

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,} \tag{10.2}$$

которое называется уравнением плоскости в отрезках по осям.

◀ Подставив координаты точек A, B, C в уравнение плоскости по трём точкам, получим:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = (x-a)bc + acy + abz = 0;$$

или

$$bcx + acy + abz = abc.$$

Отсюда и следует уравнение плоскости в отрезках по осям. ▶

Пусть α, β, γ — направляющие косинусы нормального вектора плоскости α, p — расстояние от плоскости до начала координат. Тогда плоскость определяется уравнением

$$\boxed{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,} \tag{10.3}$$

которое называется нормальным уравнением плоскости. Для того, чтобы получить из общего уравнения плоскости её нормальное уравнение, необходимо это общее уравнение умножить на множитель

$$\boxed{\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},} \tag{10.4}$$

который называется нормирующим множителем. Знак этого множителя выбирается противоположным знаку D из общего уравнения.

◀ Пусть дана некоторая плоскость α. В качестве её нормального вектора выберем вектор $\vec{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, координатами которого являются направляющие косинусы произвольного нормального вектора этой плоскости (они для всех таких векторов равны). Используя тригонометрию, нетрудно показать, что вектор $\vec{n}_0$ является единичным. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — проекция начала координат на плоскость α и пусть p — расстояние от неё до начала координат (рис. 49).

Тогда очевидно, что $p = OM_0$. Тогда и только тогда произвольная точка пространства $M(x, y, z)$ принадлежит нашей плоскости, когда векторы $\vec{n}_0$ и $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональны. Это означает, что

$$(x-x_0)\cos\alpha + (y-y_0)\cos\beta + (z-z_0)\cos\gamma = 0$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - (x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma) = 0. \tag{$*$}$$

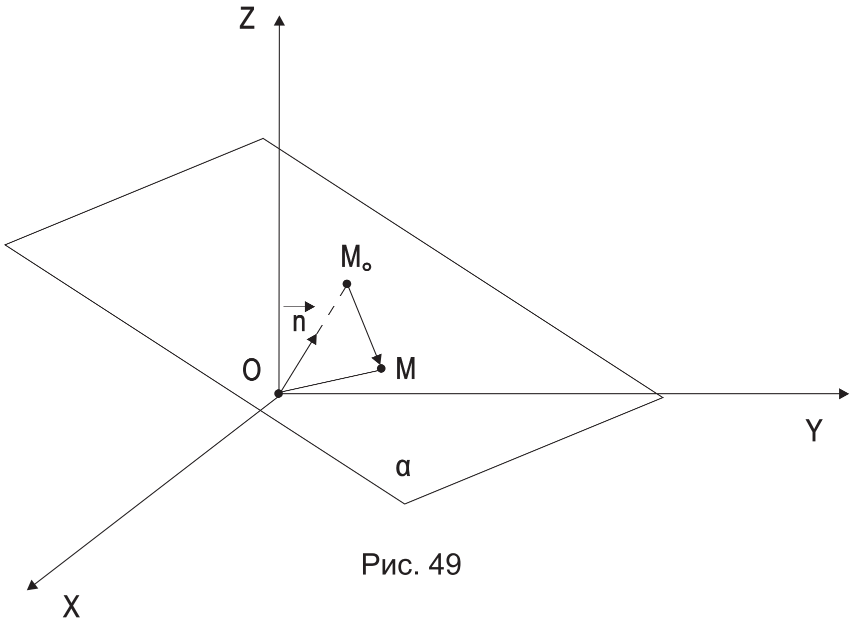


Рис. 49

Воспользовавшись свойством проекции, получим:

$$\vec{n}_0\overrightarrow{OM_0} = |\vec{n}_0| Pr_{\vec{n}_0}\overrightarrow{OM_0} = p.$$

Поскольку выражение из (*), стоящее в скобках — это скалярное произведение векторов $\vec{n}_0$ и $\overrightarrow{OM_0}$, то отсюда следует нормальное уравнение плоскости. Ввиду того, что $\vec{n}_0(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ является нормальным вектором плоскости, нормальное уравнение плоскости является частным случаем общего.

Пусть теперь дано общее уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ некоторой плоскости α. Рассуждения о нормирующем множителе такие же как и в случае для нормального уравнения прямой. ▶

Пусть $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$ — направляющие векторы некоторой плоскости α и пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка этой плоскости. Тогда плоскость определяется уравнениями

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + a_1 t + b_1 k; \\ y = y_0 + a_2 t + b_2 k; \\ z = z_0 + a_3 t + b_3 k, \end{array}} \qquad (10.5)$$

которые называются параметрическими уравнениями плоскости. Числа t и k — параметры.

◀ Пусть $M(x, y, z)$ — некоторая произвольная точка пространства.

Тогда и только тогда она принадлежит данной плоскости, когда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ компланарны. Но тогда вектор $\overrightarrow{M_0M}$ может быть разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. существуют единственные числа t и k такие, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a} + k\vec{b}$. Перейдя к координатам, получим:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = t(a_1, a_2, a_3) + k(b_1, b_2, b_3),$$

откуда и следуют параметрические уравнения. ►

Замечание 10.1. *Как и в случае параметрических уравнений прямой на плоскости, для параметрических уравнений плоскости в пространстве, возможна их запись в виде одного векторного уравнения:*
$\overrightarrow{M_0M} = \vec{a}t + \vec{b}k.$

10.5. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности

Пусть плоскости α_1 и α_2 заданы своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ соответственно. Тогда

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \qquad (10.6)$$

— условие параллельности,

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0} \qquad (10.7)$$

— условие перпендикулярности.

◄ Доказательство аналогично условиям параллельности и перпендикулярности для прямой и отличается только добавлением в рассмотрение ещё одной координаты. ►

Определение 10.4. Углом φ между плоскостями α_1 и α_2 называется угол между их нормальными векторами.

Угол между плоскостями таким образом вычисляется по формуле угла между векторами:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.} \qquad (10.8)$$

10.6. Расстояние от точки до плоскости. Пучок плоскостей

Теорема 10.3. *Пусть дана некоторая точка* $M(x_1, y_1, z_1)$ *и задана некоторая плоскость* α *своим общим уравнением* $Ax+By+Cz+D=0$. *Тогда расстояние от точки* M *до плоскости* α *находится по формуле*

$$\boxed{d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.} \tag{10.9}$$

◀ Доказательство аналогично доказательству формулы расстояния от точки до прямой на плоскости. ▶

Теорема 10.4. *Пучком плоскостей называется совокупность всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую* a.

Для задания пучка достаточно задать любые две плоскости пучка.

Теорема 10.5. *Пусть две непараллельные плоскости заданы своими общими уравнениями* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *и* $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$. *Тогда пучок плоскостей, проходящих через линию пересечения данных плоскостей задаётся уравнением*

$$\boxed{A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + t(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.} \tag{10.10}$$

◀ Доказательство аналогично доказательству уравнения пучка прямых на плоскости и отличается только добавлением в рассмотрение еще одной координаты. ▶

11. Тема 11. Прямая в пространстве

1. Различные виды уравнений прямой в пространстве

2. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве

3. Взаимное расположение двух прямых в пространстве

11.1. Различные виды уравнений прямой в пространстве

В пространстве мы будем рассматривать прямую как линию пересечения двух плоскостей.

В дальнейшем будем считать, что все объекты рассматриваются в некоторой ПДСК-3.

Пусть даны две различные точки — M_1 и M_2. Через них, как известно, проходит единственная прямая. Эта прямая задаётся уравнениями

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1},} \tag{11.1}$$

которые называются уравнениями прямой по двум точкам в пространстве.

◀ Пусть M — произвольная точка пространства. Тогда и только тогда она принадлежит прямой, которая проходит через точки M_1 и M_2, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ коллинеарны. Следовательно, существует единственное число λ такое, что $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{M_1M_2}$. Теперь, перейдя к координатам и исключив параметр λ, получим указанные уравнения. ▶

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая фиксированная точка прямой a, а $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ — её направляющий вектор. Тогда прямая a может быть задана уравнениями

$$\boxed{\begin{array}{l} x=x_0+a_1t\\ y=y_0+a_2t\\ z=z_0+a_3t, \end{array}} \tag{11.2}$$

которые называются параметрическими уравнениями прямой в пространстве и уравнениями

$$\boxed{\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3},} \tag{11.3}$$

которые называются каноническими уравнениями прямой в пространстве

◀ Если некоторая точка пространства $M(x, y, z)$ принадлежит данной прямой, то векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны. Следовательно, существует единственное число t, такое, что $\overrightarrow{M_0M}=t\vec{a}$. Теперь, перейдя к координатам, получим параметрические уравнения.

Канонические уравнения получаются непосредственно из параметрических, если из них выразить параметр. ►

Если некоторая прямая a является линией пересечения двух плоскостей α_1 и α_2, заданных соответственно своими общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то она может быть задана системой уравнений

$$\boxed{\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}} \tag{11.4}$$

Иногда уравнения (11.4) называют общими уравнениями прямой в пространстве.

Замечание 11.1. *Параметрические уравнения прямой в пространстве могут быть записаны в виде одного векторного уравнения* $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$

Замечание 11.2. *Допустим, что некоторая прямая a задана как линия пресечения двух плоскостей, т.е. системой*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть (x_0, y_0, z_0) *— одно из решений этой системы Тогда точка* $M(x_0, y_0, z_0)$ *принадлежит указанной прямой. В качестве же направляющего вектора прямой a можно взять векторное произведение нормальных векторов* $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ *и* $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$*. Тогда канонические уравнения прямой a можно записать в виде:*

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}.$$

11.2. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве

Пусть две прямые — a_1 и a_2 имеют направляющие векторы соответственно $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$. Тогда угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.} \tag{11.5}$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямых равносильны условиям параллельности и перпендикулярности их направляющих векторов:

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3};} \tag{11.6}$$

— условие параллельности;

$$\boxed{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.} \tag{11.7}$$

— условие перпендикулярности.

11.3. Взаимное расположение прямых в пространстве

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями — $\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$ и $\frac{x - x_2}{b_1} = \frac{y - y_2}{b_2} = \frac{z - z_2}{b_3}$, где $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — соответственно их фиксированные точки. Составим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Возможны следующие ситуации:

а) прямые совпадают — тогда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеарны друг другу, т.е. одновременно выполняются условия

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}, \tag{*}$$

$$\frac{x_2 - x_1}{a_1} = \frac{y_2 - y_1}{a_2} = \frac{z_2 - z_1}{a_3}; \tag{**}$$

б) прямые параллельны, но не совпадают — выполняется (*), но не выполняется (**);

в) прямые пересекаются — в этом случае не выполняется (*), но, так как векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0;$$

г) прямые скрещиваются — в этом случае векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ некомпланарны, и поэтому их смешанное произведение не равно нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

12. Тема 12. Прямая и плоскость в пространстве

1. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

2. Расстояние от точки до прямой в пространстве

3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

12.1. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

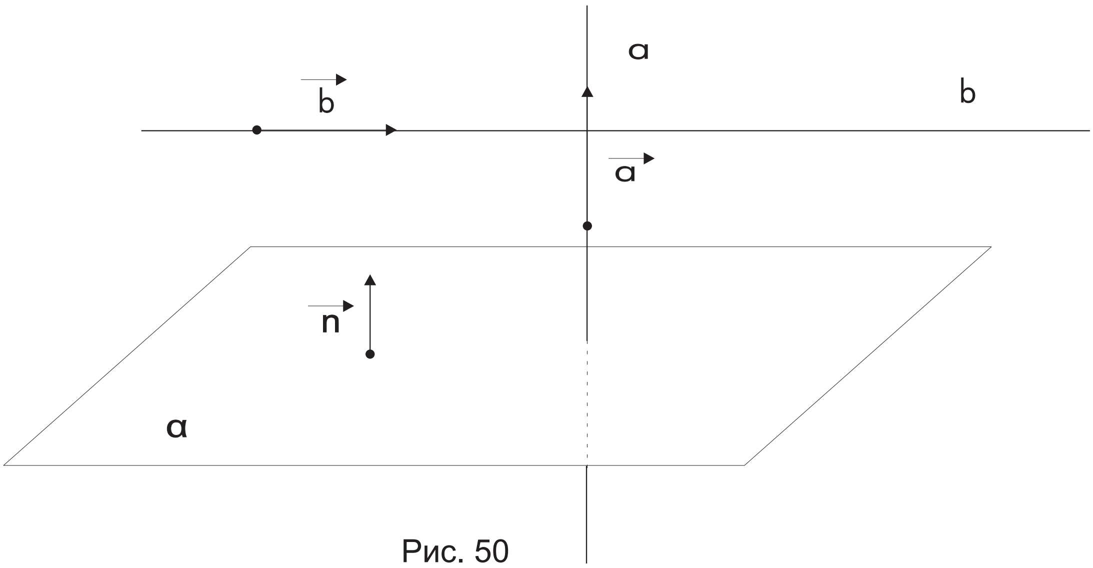


Рис. 50

Пусть $\vec{n}(A, B, C)$ — нормальный вектор некоторой плоскости, а вектор $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ — направляющий вектор некоторой прямой. Если эти плоскость и прямая параллельны, то указанные векторы перпендикулярны (рис. 50), т.е. условие параллельности прямой и плоскости в пространстве:

$$\boxed{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 = 0;} \qquad (12.1)$$

если же плоскость и прямая перпендикулярны, то указанные векторы коллинеарны, т.е. условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве:

$$\boxed{\frac{A}{a_1} = \frac{B}{a_2} = \frac{C}{a_3}.} \tag{12.2}$$

Под углом между прямой и плоскостью в аналитической геометрии понимается угол между вектором и плоскостью в обычном смысле. Этот угол является дополняющим углом к углу между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой (рис. 51): если β — угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой, то $\varphi = \frac{\pi}{2} - \beta$ — угол между прямой и плоскостью. Следовательно, угол между прямой и плоскостью вычисляется по формуле:

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{Aa_1 + Ba_2 + Ca_3}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.} \tag{12.3}$$

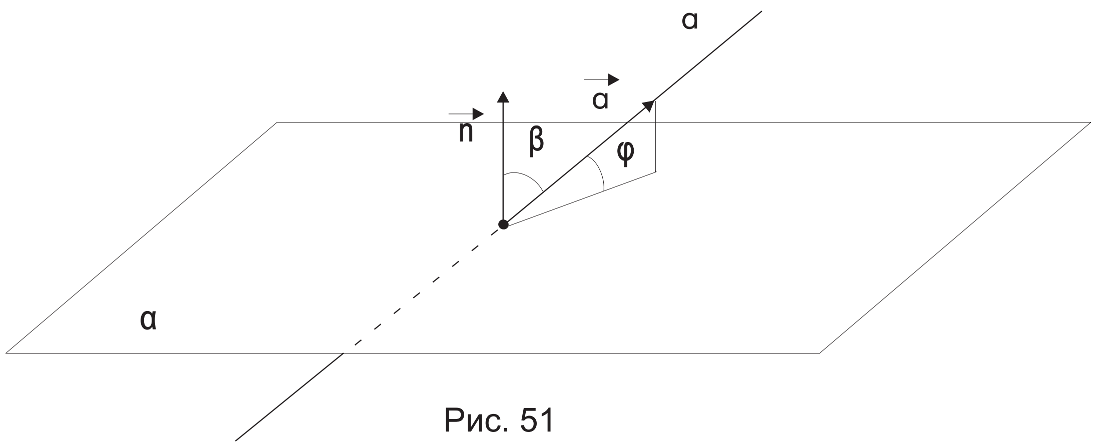


Рис. 51

12.2. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Пусть некоторая прямая a задана своими каноническими уравнениями: $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$ и пусть дана некоторая точка $M(x_1, y_1, z_1)$. Тогда расстояние от точки M до прямой a находится по формуле:

$$\boxed{d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1-z_0 & x_1-x_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}.} \tag{12.4}$$

◀

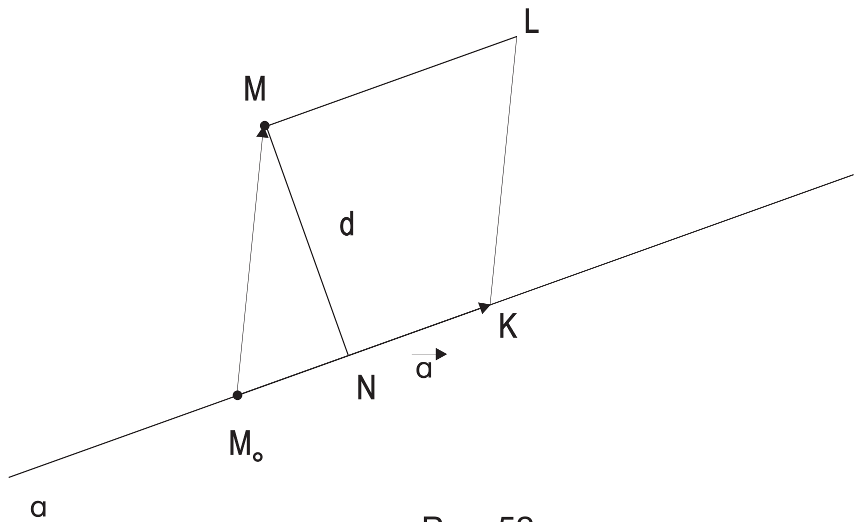


Рис. 52

Пусть вектор $\overrightarrow{M_0K}$ — представитель направляющего вектора $\vec{a}$ прямой a (рис.52). Построим вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и на векторах $\overrightarrow{M_0K}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ построим параллелограмм M_0MLK. Очевидно, что расстояние от точки M до прямой a равно длине высоты d этого параллелограмма, проведённой из вершины M. Пусть S — площадь этого параллелограмма. Тогда $d = \dfrac{S}{|\overrightarrow{M_0K}|} = \dfrac{S}{|\vec{a}|}$. По свойству векторного произведения, $S = |\overrightarrow{M_0M} \times \vec{a}|$. Следовательно, используя формулы модуля вектора и модуля векторного произведения, получаем формулу расстояния от точки до прямой в пространстве. ▶

12.3. Расстояние между скрещивающимися прямыми

Пусть кроме заданной выше прямой a, ещё одна прямая b задана своими каноническими уравнениями: $\dfrac{x - x_1}{b_1} = \dfrac{y - y_1}{b_2} = \dfrac{z - z_1}{b_3}$. Тогда расстояние между этими прямыми находится по формуле:

$$\boxed{d = \frac{mod\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2}}.} \qquad (12.5)$$

◀ Пусть векторы $\overrightarrow{M_0A}$ и $\overrightarrow{M_1D}$ являются представителями соответ-

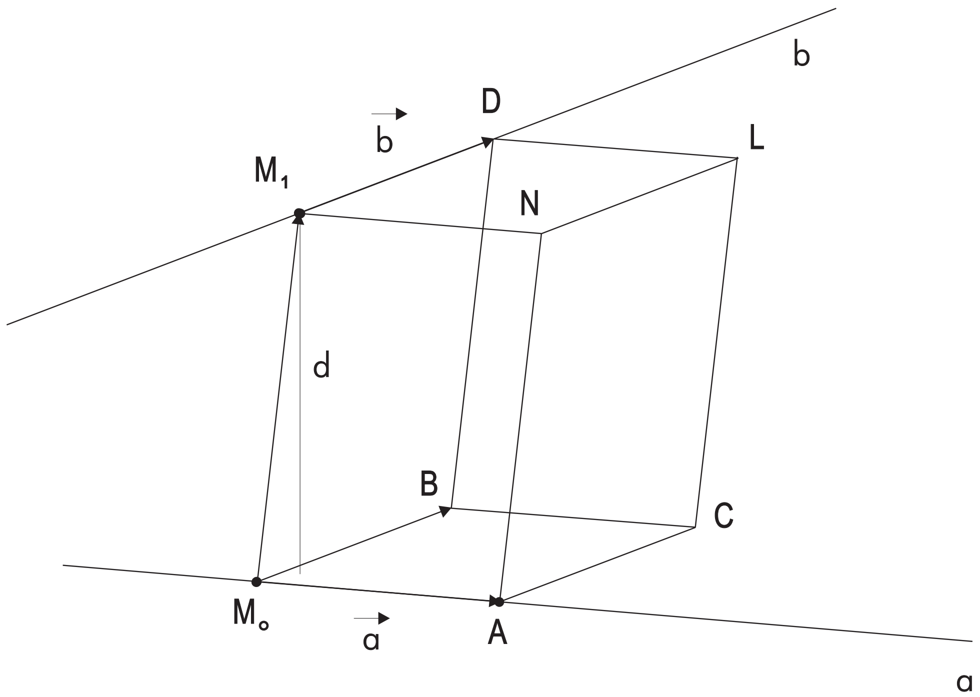


Рис. 53

ственно направляющих векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ прямых a и b (рис. 53). Построим вектор $\overrightarrow{M_0M}$ и на векторах $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0A}$, $\overrightarrow{M_1D}$ построим параллелепипед M_0BCAM_1DLN. Тогда расстояние между прямыми a и b равно длине высоты d этого параллелепипеда, опущенной из вершины M_1. Пусть V — объём этого параллелепипеда, а S — площадь основания M_0BCA. Тогда

$$d = \frac{V}{S} = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\overrightarrow{M_0A}\overrightarrow{M_1D}|}{|\overrightarrow{M_0A} \times \overrightarrow{M_1D}|} = \frac{|\vec{a}\vec{b}\overrightarrow{M_0M_1}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Отсюда, используя формулы векторного и смешанного произведений и модуля вектора, получаем формулу расстояния между двумя прямыми в пространстве. ▶